

## Алгоритм топологической оптимизации композитных конструкций, основанный на анализе главных напряжений

© П.А. Косых<sup>1</sup>, А.В. Азаров<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

<sup>2</sup> АО Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения, Московская обл., Хотьково, 141371, Россия

*При проектировании изделий из композиционных материалов конструктору необходимо продумывать не только их форму, но и направление укладки волокон для каждого из их элементов. Для того чтобы разрешить эту проблему, сформулирована и приведена задача топологической оптимизации в ортотропной постановке. Предложено ее решение, заключающееся в проведении топологической оптимизации конструкции и последующем выравнивании углов ее армирования в соответствии с направлением действия наибольших главных напряжений. Описаны основные особенности решения поставленной задачи, продемонстрированы результаты ее решения, полученные с помощью предложенного метода, а также выполнена оценка его эффективности. Кроме того, приведены альтернативные подходы к решению рассматриваемой задачи, такие как оптимизация в изотропной постановке, оптимизация с использованием фильтра Хевисайда, оптимизация двухслойной пластины. Для альтернативных подходов также представлены результаты решения задачи. Установлено, что наилучшей сходимостью обладает метод оптимизации в изотропной постановке, а наименьшее значение целевой функции достигается при использовании метода оптимизации двухслойной пластины.*

**Ключевые слова:** топологическая оптимизация, оптимальное проектирование, тело переменной плотности, SIMP, аддитивные технологии, метод конечных элементов

**Введение.** В настоящее время наблюдается развитие технологий производства композитных конструкций, позволяющих варьировать угол армирования изделия в каждой его точке. К ним относятся такие технологии, как 3D-печать и автоматизированная выкладка армирующих волокон и лент (AFP/ATL) [1, 2]. С их помощью можно получать изделия, в которых армирующие волокна выложены в направлении действия нагрузок, благодаря чему наиболее полно реализуются свойства волокон. Возможность адаптировать структуру конструкции к условиям нагружения и тем самым увеличивать весовую эффективность изделия выгодно отличает данные технологии от традиционных процессов изготовления изделий из полимерных композиционных материалов (ПКМ). Кроме того, в связи с тем, что можно управлять углом укладки волокна в каждой точке изделия, удается реализовать наилучшую силовую схему конструкции, соответствующую прикладываемым нагрузкам. Однако при этом перед конструктором встает

задача определения такой схемы. Один из подходов к ее решению — совместное выполнение топологической оптимизации (ТО) и определения наилучшего угла армирования в каждой точке изделия. Далее будем называть ее задачей оптимизации силовой схемы конструкции (ОССК).

Следует отметить, что разные исследователи предложили свои способы решения данной задачи. Так, в работе [3] А. Сафонов предлагает решать задачу ТО с введением параметра плотности материала (аналогично SIMP-методу), а угол армирования определять исходя из главных напряжений каждого элемента. В статье А.В. Азарова [4] топология определяется методом пропорциональной оптимизации, а углы укладки волокна также совпадают с направлением главных напряжений. В [5] приведено решение задачи ТО методом Level-Set, при этом армирующее волокно ориентируется вдоль границ получающейся на каждой итерации конструкции. В работах [6, 7] рассматривается решение задачи ТО SIMP-методом с дальнейшей оптимизацией распределения углов армирования методом градиентного спуска. В статье [8] авторы предлагают определять оптимальный угол армирования для каждой точки путем выбора из дискретного набора наилучшего угла.

Цель данной работы — представить алгоритм решения задачи ОССК для конструкции из ортотропного композиционного материала (КМ), основанный на топологической оптимизации SIMP-методом и определении углов армирования из анализа напряженного состояния изделия. Даны описание нескольких различных реализаций данного алгоритма, а также сравнение их эффективности.

**Постановка задачи.** Приведем описание постановки задачи ОССК, являющейся расширением задачи ТО для ортотропного материала и имеющей с ней много общего (рис. 1).

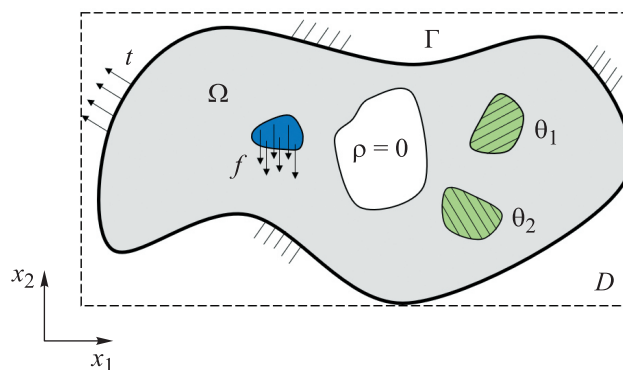


Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи ОССК с учетом распределения углов армирования

Пусть для изделия из ортотропного материала внутри рабочей области  $D$  ищется оптимальная по некоторому критерию конструкция  $\Omega$ , имеющая границу  $\Gamma$ . Для этой рабочей области определены места креплений и приложения нагрузок в виде объемных  $f(x)$  и поверхностных  $t(x)$  сил ( $x$  — координата точки). Под действием этих сил возникает поле перемещений  $u(x)$ . Решение ищется в виде распределения материала и углов армирования внутри области  $D$ .

В данной работе для реализации ТО выбран SIMP-метод. В оригинальном методе оптимизация конструкции происходит путем варьирования одной проектной переменной — распределения плотности  $\rho(x)$ . В предложенном подходе к решению задачи добавляется еще одна проектная переменная — распределение углов армирования  $\theta(x)$  (см. рис. 1).

В качестве целевой функции будем использовать податливость конструкции, т. е. энергию ее деформации. Таким образом, близость к минимуму податливости будет являться критерием оптимальности полученного решения. За ограничение задачи оптимизации примем максимальный объем конструкции  $V$ .

Выражение для податливости  $l(u)$ , определяющейся через работу внешних сил над упругим телом, имеет следующий вид:

$$l(u) = \int_{\Omega} f u d\Omega + \int_{\Gamma} t u d\Gamma. \quad (1)$$

Потенциальная энергия деформации  $a(u, u)$  определяется по формуле

$$a(u, u) = \int_{\Omega} E_{ijkl}(x) \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) d\Omega, \quad (2)$$

где  $E_{ijkl}(\rho, \theta)$  — тензор упругих постоянных;  $\varepsilon_{ij}(u)$  — деформации тела,  $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ .

Условие равновесия тела определяется так:  $a(u, v) = l(v)$ , где  $v$  — кинематически допустимые перемещения.

С учетом введенных целевой функции и ограничений постановка задачи ОССК примет следующий вид:

$$\begin{cases} \min l(u); \\ a(u, v) = l(v); \\ E_{ijkl} = E_{ijkl}(\rho, \theta); \\ \int_{\Omega} d\Omega \leq V. \end{cases} \quad (3)$$

В данной работе задача ОССК решается с помощью метода конечных элементов (МКЭ) в пакете MATLAB. Для построения конечно-элементной сетки (КЭС) используются квадратные четырехузловые элементы, рабочая область  $D$  имеет простые формы, а также приняты простые граничные условия (ГУ).

Для иллюстрации работы предложенного алгоритма рассматриваются три типа конструкций — балок: консольная, шарнирная и L-образная. Поскольку шарнирная балка обладает симметрией, в задаче о ней рассматривается лишь половина балки. Схемы данных конструкций вместе с приложенными к ним ГУ приведены на рис. 2.

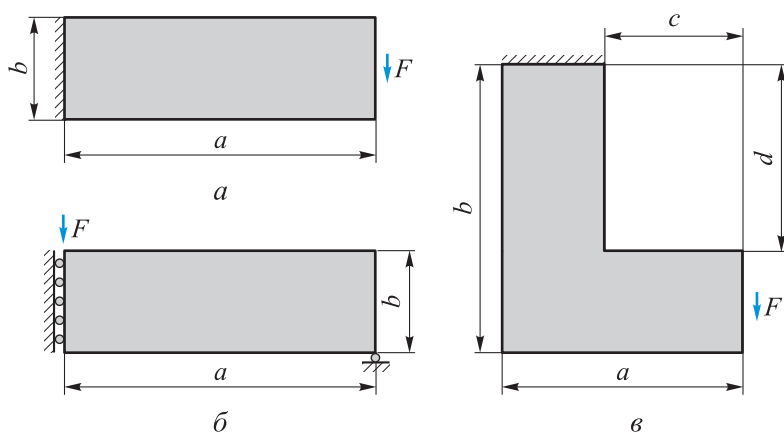


Рис. 2. Схемы рассматриваемых консольной (а), шарнирной (б) и L-образной балок (в)

**Модель материала.** Приведем зависимость свойств материала от проектных переменных  $\rho(x)$  и  $\theta(x)$ . Для описания их зависимости от плотности  $\rho$  воспользуемся моделью материала, аналогичной используемой в SIMP-методе:

$$\begin{aligned} E_{ijkl} &= \rho^p E_{ijkl}^\theta, \quad p > 1; \\ 0 < \rho_{\min} &\leq \rho \leq 1, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\rho$  — допустимые значения плотности;  $p$  — коэффициент штрафа;  $E_{ijkl}^\theta$  — записанный в глобальной системе координат тензор упругих свойств материала, зависящий от угла армирования  $\theta$ ;  $\rho_{\min}$  — нижняя граница  $\rho$ , близкая к нулю (но не равная нулю, чтобы обеспечивалась разрешимость системы уравнений).

Перейдем от тензорной формы записи модели материала к матричной и рассмотрим зависимость свойств материала от угла армирования  $\theta$ . Как известно, механические свойства ортотропного материала можно определить следующими характеристиками: модуль упругости вдоль направления армирования  $E_1$ ; модуль упругости

в направлении, перпендикулярном направлению армированию  $E_2$ ; коэффициенты Пуассона  $\eta_{12}$  и  $\eta_{21}$ ; модуль сдвига  $G_{12}$ . Для того чтобы описать свойства в матричном виде, вводятся матрица жесткости  $\mathbf{E}_{12}$  и матрица податливости  $\mathbf{S}_{12}$ . Матрицу податливости легко записать через перечисленные выше упругие характеристики:

$$\mathbf{S}_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\eta_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\eta_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Матрица (5) характеризует механические свойства монослоя ортотропного материала в системе координат (СК), совпадающей с его главными осями ортотропии (СК монослоя). Матрица жесткости определяется как обратная матрице податливости:

$$\mathbf{E}_{12} = \mathbf{S}_{12}^{-1}. \quad (6)$$

При повороте СК, относительно которой определяются свойства материала, т. е. при переходе от СК монослоя, например, к глобальной СК, используют соотношение

$$\mathbf{E}_{xy} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{E}_{12} \cdot \mathbf{T}_1^T. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{E}_{xy}$  — матрица жесткости в глобальной СК;  $\mathbf{T}_1$  — матрица поворота, определяемая следующим образом:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $c = \cos(\theta)$ ,  $s = \sin(\theta)$ .

Таким образом, используемая в данной работе полная модель материала, записанная как матрица (7) в глобальной СК, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{xy} &= \rho^p \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{E}_{12} \cdot \mathbf{T}_1^T, \quad p > 1; \\ 0 < \rho_{\min} &\leq \rho \leq 1, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (9)$$

**Решение задачи ОССК.** Для решения поставленной задачи ОССК с учетом описанных выше свойств материала предлагается использовать модифицированный алгоритм решения SIMP-методом задачи ТО. Модификация заключается в том, что на каждой итерации решения наряду с определением распределения плотностей  $\rho(x)$  также

рассчитывается распределение углов армирования  $\theta(x)$ . В качестве направления армирования в точке принимается направление наибольшего по модулю главного напряжения. Такое определение угла армирования позволяет добиться минимума энергии деформации при условии единственного случая нагружения конструкции [9].

Для определения распределения плотностей введем функцию Лагранжа  $L$ , минимум которой соответствует минимальной податливости конструкции:

$$L = a(u, u) + \Lambda \left( \int_{\Omega} \rho(x) d\Omega - V \right), \quad (10)$$

где  $\Lambda$  — множитель Лагранжа.

Согласно SIMP-методу минимум функции (10) достигается при применении на каждой итерации для каждого элемента следующей схемы обновления плотностей:

$$\rho_{n+1} = \begin{cases} \max \{ (1 - \zeta) \rho_n, \rho_{\min} \}, & \text{если } \rho_n B_n^\eta \leq \max \{ (1 - \zeta) \rho_n, \rho_{\min} \}; \\ \min \{ (1 + \zeta) \rho_n, 1 \}, & \text{если } \min \{ (1 + \zeta) \rho_n, 1 \} \leq \rho_n B_n^\eta; \\ \rho_n B_n^\eta & \text{— в остальных случаях.} \end{cases} \quad (11)$$

Здесь параметры  $\zeta$  и  $\eta$  влияют на сходимость решения;  $n$  — номер итерации;  $B_n$  определяется так:

$$B_n = \Lambda_n^{-1} p \rho_n^{p-1} E_{ijkl}^\theta \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u), \quad (12)$$

где  $\Lambda_n$  — множитель Лагранжа, который определяет уровень удельной энергии деформации конструкции.

Для всей конструкции значение удельной энергии деформации одинаково, что приводит к ее равномерной нагруженности. Увеличение  $\Lambda_n$  приводит к возрастанию энергии деформации конструкции. Объем конструкции непрерывно зависит от множителя  $\Lambda_n$  и с его увеличением монотонно убывает. Это свойство позволяет определить такое значение  $\Lambda_n$ , при котором объем конструкции не превышает ограничение  $V$ . Для этого необходимо на каждой итерации основного цикла выполнять еще один цикл, внутри которого методом бисекции ищется значение  $\Lambda_n$ , удовлетворяющее ограничению по объему. Более подробное описание SIMP-метода можно найти в работах [10, 11].

Покажем, каким образом можно определить направление ориентации главных напряжений в конструкции. Определив вектор деформаций  $\varepsilon_{xy}$  в точке, можем найти напряжения  $\sigma_{xy}$  по закону Гука:

$$\sigma_{xy} = \mathbf{K}_{xy} \varepsilon_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Теперь определим значения двух главных напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2},\end{aligned}\tag{14}$$

из которых можем определить тангенс углов наклона нормалей площадок, где возникают главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно:

$$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \frac{\sigma_{1,2} - \sigma_x}{\tau_{xy}}.\tag{15}$$

Таким образом, принимая, что оптимальным углом армирования в точке является угол, совпадающий с направлением действия наибольшего по абсолютному значению главного напряжения, запишем для угла армирования в точке условие оптимальности:

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_{1,2} - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right),\tag{16}$$

где из  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  выбирается максимальное по модулю напряжение.

**Примеры решения.** Продемонстрируем работу алгоритма решения задачи ОССК на примере задач о консольной, шарнирной и L-образной балке. Для оценки работы алгоритма будем фиксировать полученные при решении значения целевой функции и количество итераций, потраченных на решение. Примем, что свойства материала, из которого изготовлены тестовые балки, соответствуют печатному материалу компании Anisoprint — термопласту PETG, наполненному непрерывными углеродными волокнами:  $E_1 = 56,6$  ГПа,  $E_2 = 4,0$  ГПа,  $G_{12} = 0,5$  ГПа,  $\eta_{12} = 0,4$ . Геометрические размеры балок, а также параметры КЭС приведены в табл. 1. Во всех тестовых задачах используем следующие значения параметров: коэффициент штрафа  $p = 3$ , параметры  $\zeta$  и  $\eta$  равны 0,2 и 0,5 соответственно.

Таблица 1

Параметры оптимизируемых балок

Параметр	Балка		
	Консольная	Шарнирная	L-образная
Длина $a$ , мм	90	80	80
Ширина $b$ , мм	30	30	100
Длина выреза $c$ , мм	–	–	50
Ширина выреза $d$ , мм	–	–	70
Толщина $t$ , мм	5		
Количество элементов:			
по длине $n_x$	180	160	160
по ширине $n_y$	60	60	200

Результаты решения тестовых задач приведены на рис. 3. Для отображения угла армирования используется цветовая шкала, означающая угол между направлением армирования и осью  $x$ . Кроме того, для отображения плотности  $\rho$  используется параметр прозрачности так, чтобы элементы, имеющие нулевое значение плотности, были полностью прозрачны (имели белый цвет), а элементы, имеющие единичную плотность, были полностью непрозрачны (имели цвет, зависящий от угла армирования  $\theta$ ). Элементы, имеющие промежуточную плотность, прозрачны лишь частично. Для большей наглядности направление армирования элементов в некоторых местах показано стрелками на выносных видах. Значение целевой функции для полученных решений и количество затраченных итераций приведено в табл. 2.

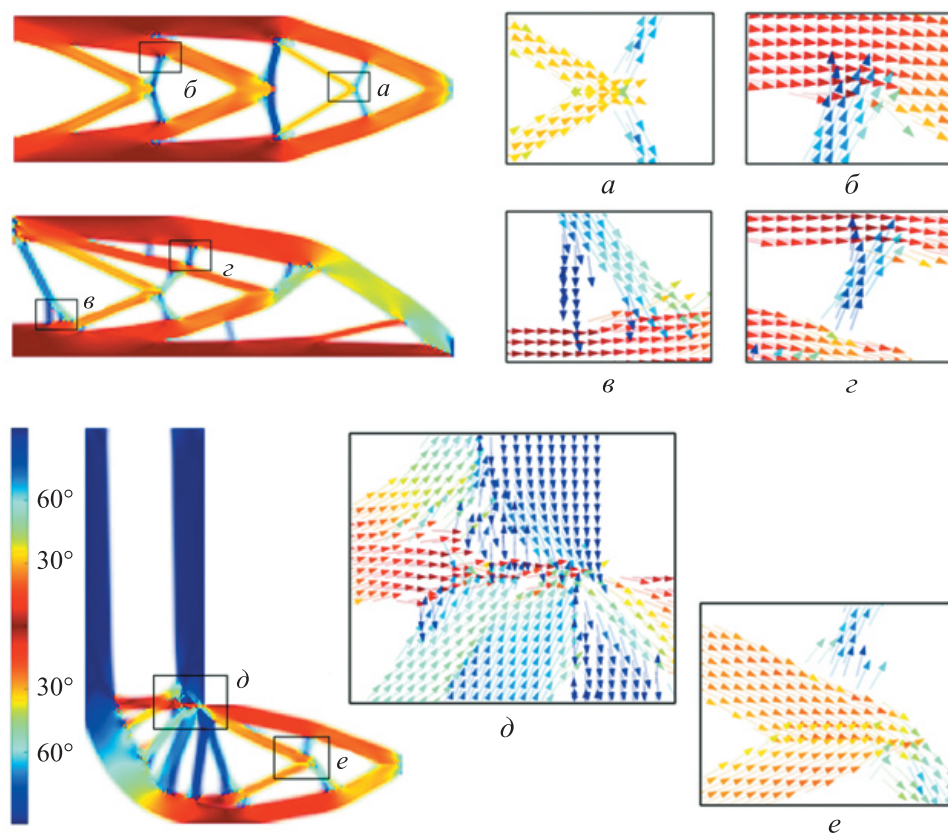


Рис. 3. Результаты решения задачи ОССК для тестовых балок

Таблица 2

Результат решения задачи ОССК

Параметр	Балка		
	консольная	шарнирная	L-образная
Целевая функция $I$ , Н·мм	672,1	598,7	1064,9
Количество итераций $N$	68	70	77



Из полученных решений видно, что представленный метод решения предлагает адекватные схемы армирования. Получившиеся в результате конструкции представляют собой стержневые системы. Направление армирования материала совпадает с осью стержней и не претерпевает резких поворотов при переходе от элемента к элементу, что обеспечивает работу материала только на растяжение или сжатие. Исключением являются места пересечения стержней, где материал имеет более сложное напряженно-деформированное состояние. В таких местах наблюдается значительное изменение угла армирования, что хорошо видно на выносных видах (см. рис. 3).

**Альтернативные реализации метода.** Для того чтобы развить идеи, связанные с методом оптимизации силовой схемы, основанном на анализе напряженного состояния изделия, а также для развития общего понимания задачи ОССК, рассмотрим следующие дополнения к описанному выше методу:

- оптимизация в изотропной постановке с армированием вдоль стержней полученной стержневой конструкции;
- оптимизация с использованием фильтра Хевисайда, позволяющего добиться более «четкого» решения, т. е. решения с меньшим количеством элементов, имеющих промежуточную плотность;
- оптимизация двухслойной пластины, в которой один слой воспринимает лишь растягивающую нагрузку, а другой — лишь сжимающую.

Для того чтобы продемонстрировать работу перечисленных расширений основного алгоритма, будем использовать тестовые балки с такими же геометрическими размерами, параметрами КЭС и свойствами материала, как и ранее. Настройки решения задачи ТО также остаются прежними.

**Оптимизация в изотропной постановке.** Как уже было описано выше, в результате решения задачи ОССК получается стержневая конструкция, волокна которой ориентированы вдоль стержней. Кажется достаточно очевидной мысль о том, что во избежание реализации более сложного алгоритма решения задачи ОССК можно решить задачу ТО в изотропной постановке, а армирование выполнить вдоль стержней получившейся балочной конструкции.

Для определения эффективности данного подхода его реализовали следующим образом:

- 1) была проведена ТО конструкции с изотропными свойствами материала, при этом было принято  $E = 56,6$  ГПа,  $G = 0,5$  ГПа,  $\eta = 0,4$ ;
- 2) по завершении ТО был проведен КЭ-анализ получившейся конструкции и определены главные напряжения и их направление;
- 3) для КЭ-модели были определены ортотропные свойства в соответствии с направлением наибольших главных напряжений, ориентированных вдоль образовавшихся стержней;

4) был выполнен окончательный КЭ-анализ для определения податливости получившейся конструкции.

Преимуществом данного подхода является возможность решить задачу ОССК в более простой изотропной постановке, а направление армирования определить исходя из направления стержневой конструкции. Результаты решения задачи с использованием данного подхода приведены в табл. 3 и на рис. 4.

Таблица 3

Результат решения задачи ОССК в изотропной постановке

Параметр	Балка		
	консольная	шарнирная	L-образная
Целевая функция $l$ , Н·мм	770,7	701,0	1143,5
Количество итераций $N$	44	53	53

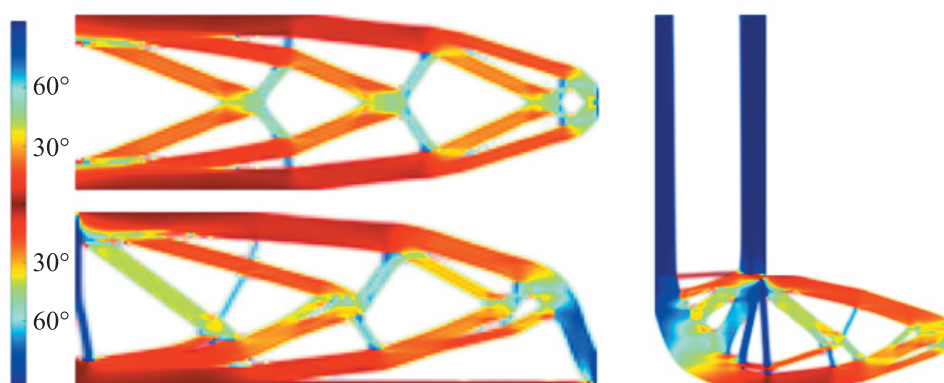


Рис. 4. Результат решения задачи ОССК в изотропной постановке для тестовых балок

Представленные результаты позволили сделать вывод, что примененный подход адекватно справляется с ориентацией углов армирования вдоль стержней. Полученные решения мало отличаются от решений основного метода. Скорость сходимости увеличилась за счет решения задачи ТО в изотропной постановке, однако получившиеся конструкции обладают более высокой податливостью.

**Оптимизация с использованием фильтра Хевисайда.** Зачастую решение задачи ТО может содержать много элементов с промежуточной плотностью. Это приводит к нечеткости, размытию решения, такое решение сложно интерпретировать при проектировании реальной конструкции. Для повышения четкости полученной конструкции алгоритм решения задачи ОССК дополнен фильтром Хевисайда, увеличивающим плотность элементов до значений, близких к единице, в случае, если начальная плотность элемента больше минимальной.

Функция, преобразующая начальную плотность элемента  $\rho_e$  в отфильтрованную  $\bar{\rho}_e$ , выглядит следующим образом [12]:

$$\bar{\rho}_e = 1 - e^{-\beta\rho_e} + \rho_e e^{-\beta}, \quad (17)$$

где  $\beta$  — параметр, контролирующий скорость приближения плотности к единице.

Графики фильтрующих функций при различных значениях  $\beta$  изображены на рис. 5.

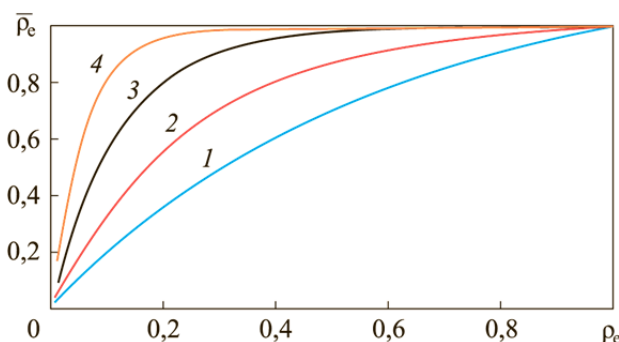


Рис. 5. Графики фильтрующих функций при  $\beta = 2$  (1);  $\beta = 4$  (2);  $\beta = 8$  (3);  $\beta = 16$  (4)

Из графиков видно, что с возрастанием значения параметра  $\beta$  фильтрующая функция приближается к кусочно-постоянной функции Хевисайда. Для обеспечения сходимости решения параметр  $\beta$  постепенно увеличивается от 1 до 512.

Результаты решения задачи ОССК с применением фильтра Хевисайда приведены в табл. 4 и на рис. 6.

Таблица 4

**Результат решения задачи ОССК с помощью фильтра Хевисайда**

Параметр	Балка		
	консольная	шарнирная	L-образная
Целевая функция $I$ , Н·мм	683,2	607,1	1054,6
Количество итераций $N$	133	109	121

Из полученных результатов следует, что применение фильтра уменьшило количество элементов с промежуточной плотностью, однако общий вид конструкций изменился незначительно. Значение целевой функции почти не изменилось по сравнению с основным алгоритмом, однако скорость сходимости стала меньше.

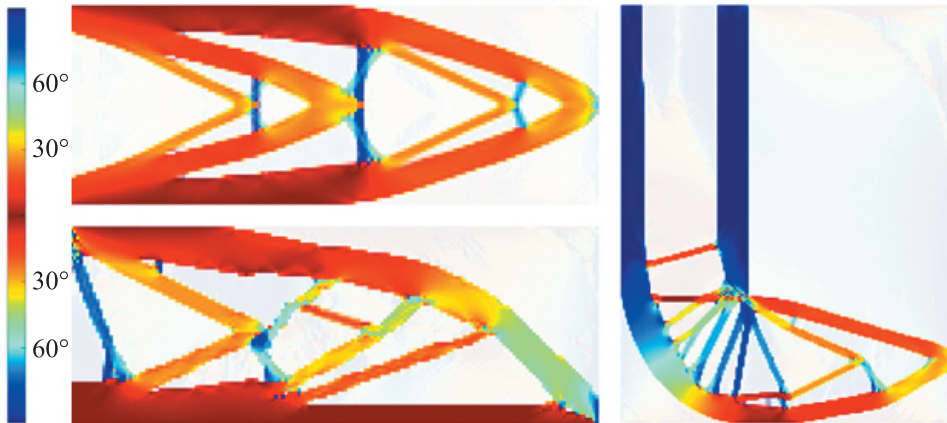


Рис. 6. Результат решения задачи ОССК для тестовых балок с применением фильтра Хевисайда

**Оптимизация двухслойной пластины.** При проектировании изделия, изготовляемого методом 3D-печати с использованием непрерывных армирующих волокон, следует учитывать низкие прочностные показатели печатного материала при работе на сдвиг, снижение его прочностных характеристик в местах резких поворотов траекторий армирующих волокон, а также в местах их разреза. Места, где можно ожидать снижение свойств печатного материала, представлены на рис. 7.

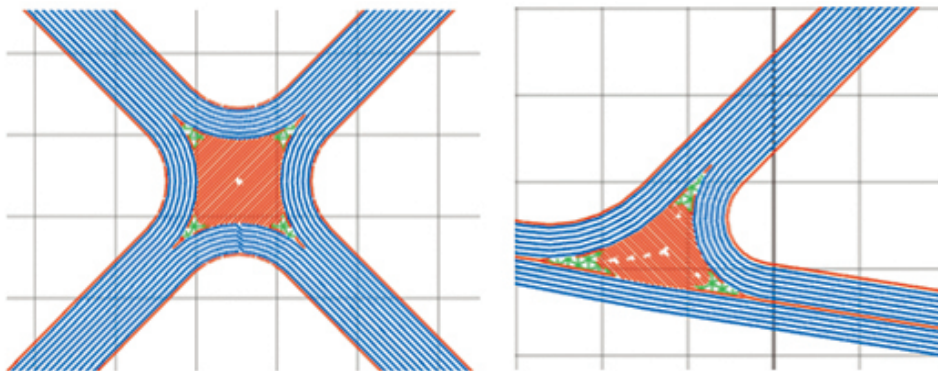


Рис. 7. Области поворота траекторий армирования:

■ — армирующие волокна; ■ — незаполненный пластик

Таким образом, при проектировании изделия следует стремиться к такой его форме, которая обеспечивала бы наиболее прямые траектории укладки армирующих волокон и не предполагала бы частого разрезания волокна. В изделиях такой формы преобладает работа волокон на растяжение–сжатие, а работа на сдвиг сводится к минимуму.

Однако формализовать данные требования с математической точки зрения достаточно проблематично. Из представленных выше результатов видно, что алгоритм решения задачи ОССК предлагает решения, для реализации которых разрыв волокон или их резкий поворот необходим, например, при пересечении стержней, образующие конструкцию (области  $a-e$  на рис. 3).

Отметим, что стержни, которые составляют конструкцию, всегда можно подразделить на работающие на растяжение и на работающие на сжатие. Для того чтобы избежать снижения прочности конструкции при пересечении стержней и сделать ее более технологичной, можно разделить конструкцию на два слоя, один из которых содержит стержни, работающие на растяжение, а другой — на сжатие. Такой подход позволяет избежать искривления траектории армирующих волокон при пересечении стержней и сделать выбор траекторий на основании решения задачи ОССК более очевидным.

Для реализации данного подхода вся конструкция разбивается на два слоя, каждый из которых содержит свой набор проектных переменных  $\rho(x)$  и  $\theta(x)$ . Каждому элементу КЭС соответствуют по два независимых значения плотности  $\rho(x)$  и по два независимых значения угла армирования  $\theta(x)$ . Итоговая матрица жесткости элемента  $\mathbf{E}^e$  вычисляется согласно классической теории слоистых пластин следующим образом:

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=1}^2 \mathbf{E}_i^e \cdot \tilde{h}, \quad (18)$$

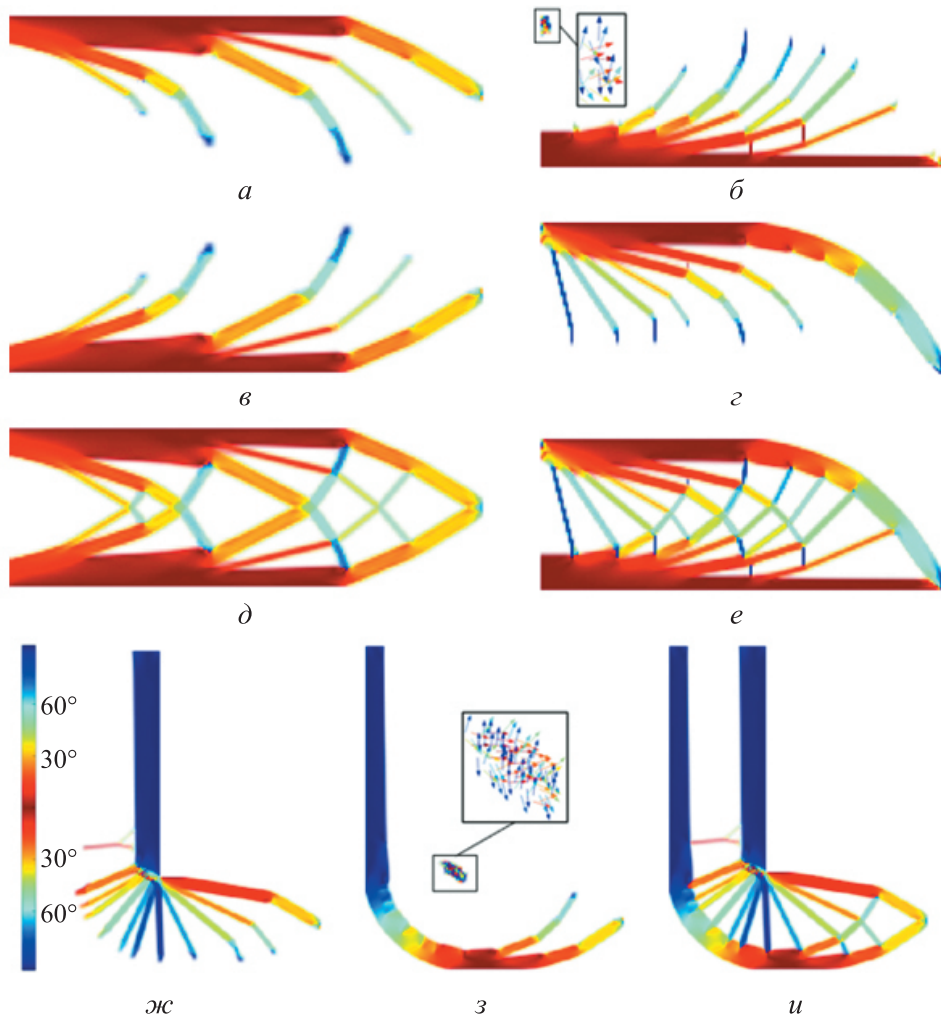
где  $\mathbf{E}_i^e$  — матрица жесткости  $i$ -го слоя элемента;  $\tilde{h}$  — относительная толщина слоя, имеющая в данном случае значение 0,5 для каждого слоя вследствие равенства их толщины.

Результаты оптимизации с применением данного подхода изображены на рис. 8, где буквами  $a, g$  и  $ж$  обозначены слои, работающие на растяжение, буквами  $b, d, z$  — слои, работающие на сжатие, буквами  $v, e, u$  — наложение двух слоев друг на друга. Значение целевой функции и количество затраченных итераций представлено в табл. 5.

Как видно из результатов, разделение конструкции на два слоя позволяет добиться относительно простых для печати решений, представляющих собой два набора лучей, исходящих из двух разных точек для всех тестовых балок. Эти решения не содержат резких изгибов армирующих волокон и, следовательно, не подвержены снижению прочности волокон в местах пересечения стержней. Данный подход также позволяет снизить значение целевой функции.

К недостаткам подхода можно отнести то, что из-за введения в задачу второго слоя для процесса оптимизации требуется большее количество итераций. Из результатов решения также видно, что

в местах, имеющих сложное напряженно-деформированное состояние, ориентация угла армирования носит беспорядочный характер. Кроме того, следует учитывать и то, что межслоевая адгезия не обладает большой прочностью. Это приводит к необходимости обеспечить совместность работы слоев пластины.



**Рис. 8.** Результат решения задачи ОССК для тестовых балок с разделением конструкции на два слоя

Таблица 5

Результат решения задачи ОССК с разделением конструкции на два слоя

Параметр	Балка		
	консольная	шарнирная	L-образная
Целевая функция $I$ , Н·мм	658,8	551,5	976,6
Количество итераций $N$	189	158	145

**Анализ различных подходов к решению задачи ОССК.** Из полученных выше результатов следует, что оптимизация в изотропной постановке имеет не только наибольшую скорость сходимости, но и наибольшее значение целевой функции. Оптимизация с разбиением пластины на два слоя дает противоположный результат: наименьшее значение целевой функции и наихудшая скорость сходимости. Оптимизация с использованием фильтра Хевисайда дает схожие с основным методом значения целевой функции, но показывает меньшую скорость сходимости.

Если сравнивать сами конструкции, полученные с применением разных подходов, видно, что все они имеют похожую структуру, однако последний подход предлагает решения с более «тонкой» структурой, что особенно заметно на рис. 8, *г–е*.

Общим недостатком рассмотренных методов является то, что они предлагают направление укладки для каждого элемента в отдельности, не учитывая направления укладки соседних элементов. Это приводит к тому, что при попытке построить на основании полученных решений траектории укладки волокон возникает необходимость в резких поворотах траектории или их разрезании, снижающих итоговую прочность и жесткость конструкции. Предложенный метод решения задачи ОССК не позволяет также получить решение для конструкций, имеющих несколько случаев нагружения.

**Заключение.** В данной работе рассмотрены вопросы, касающиеся решения задачи ОССК: постановка задачи, используемая для оптимизации модель материала, решение задачи ОССК, основанное на анализе напряженного состояния конструкции, различные подходы к решению задачи. Для каждого из предложенных подходов были продемонстрированы полученные конструкции, а также сделана оценка эффективности. Среди рассмотренных подходов стоит выделить оптимизацию в изотропной постановке, так как этот подход легко реализуем и обладает наилучшейходимостью. Следует отметить и оптимизацию двухслойной пластины: этот метод предлагает решения с наименьшим значением целевой функции и частично решает проблему снижения прочности в местах пересечения стержней конструкции, однако встает вопрос об адгезионной прочности связей между слоями.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ismail K.I., Yap T.C., Ahmed R. 3D-printed fiber-reinforced polymer composites by fused deposition modelling (FDM): fiber length and fiber implementation techniques. *Polymers*, 2022, vol. 14. <https://doi.org/10.3390/POLYM14214659>
- [2] Zhang L., Wang X., Pei J., Zhou Y. Review of automated fibre placement and its prospects for advanced composites. *Journal of Materials Science*, 2020. <https://doi.org/10.1007/s10853-019-04090-7>

- [3] Safonov A. 3D topology optimization of continuous fiber-reinforced structures via natural evolution method. *Composite Structures*, 2019, vol. 215, pp. 289–297. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.063>
- [4] Azarov A.V. Optimal design of advanced 3D printed composite parts of rocket and space structures. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/934/1/012062>
- [5] Liu J., Yu H. Concurrent deposition path planning and structural topology optimization for additive manufacturing. *Rapid Prototyping Journal*, 2017. <https://doi.org/10.1108/RPJ-05-2016-0087>
- [6] Schmidt M.-P., Couret L., Gout C., Pedersen C. Topology optimization for continuous and discrete orientation design of functionally graded fiber-reinforced composite structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02657-6>
- [7] Федулов Б.Н., Федоренко А.Н., Антонов Ф.К., Ломакин Е.В. Алгоритм топологической оптимизации конструкции, выполненной из анизотропного материала с учетом параметров ориентации армирования. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2021, № 3, с. 182–189. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.3.17>
- [8] Stegmann J., Lund E. Discrete material optimization of general composite shell structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005. <https://doi.org/10.1002/nme.1259>
- [9] Diaz A.R., Bendsoe M.P. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method. *Structural Optimization*, 1992, vol. 4, pp 17–22.
- [10] Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. New York, Springer Verlag, 2003, 271 p.
- [11] Косых П.А., Азаров А.В. Теория и анализ методов топологической оптимизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 4. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-4-2264>
- [12] Guest J.K., Prevost J.H., Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *International journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, vol. 61, pp. 238–254. <https://doi.org/10.1002/nme.1064>

Статья поступила в редакцию 25.10.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Косых П.А., Азаров А.В. Алгоритм топологической оптимизации композитных конструкций, основанный на анализе главных напряжений. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 12.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-12-2320>

**Косых Павел Андреевич** — студент кафедры «Ракетно-космические композитные конструкции» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: [kpa18m334@student.bmstu.ru](mailto:kpa18m334@student.bmstu.ru)

**Азаров Андрей Валерьевич** — д-р техн. наук, доцент кафедры «Ракетно-космические композитные конструкции» МГТУ им. Н.Э. Баумана; главный научный сотрудник АО Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения. e-mail: [azarova@bmstu.ru](mailto:azarova@bmstu.ru)



## Topology optimization algorithm in composite structures based on analyzing the principal stresses

© P.A. Kosykh<sup>1</sup>, A.V. Azarov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

<sup>2</sup>OJSC Central Research Institute for Special Machine Building,  
Khotkovo, 141371, Russia

*Designing products made from composite materials assumes that any designer needs to consider not only the product shape, but also the fiber laying direction in each structural element. Topology optimization problem in the orthotropic formulation was formulated to solve this problem. The problem statement is presented, and its solution is proposed that includes the structure topology optimization and subsequent alignment of the structure reinforcement angles in accordance with direction of the highest principal stresses direction. The paper describes main features of solving the problem, demonstrates results of solving the problem obtained using the proposed method, and assesses the method effectiveness. In addition, it provides alternative approaches to solving the problem under consideration including optimization in the isotropic formulation, optimization with the Heaviside filter and optimization of the two-layer plate. Results of solving the problem are also presented for the alternative approaches. It was established that optimization method in the isotropic formulation had the best convergence, and the objective function lowest value was achieved when using the two-layer plate optimization method.*

**Keywords:** topology optimization, optimal design, variable density body, SIMP, additive technologies, finite element method

### REFERENCES

- [1] Ismail K.I., Yap T.C., Ahmed R. 3D-printed fiber-reinforced polymer composites by fused deposition modelling (FDM): fiber length and fiber implementation techniques. *Polymers*, 2022, vol. 14. <https://doi.org/10.3390/polym14214659>
- [2] Zhang L., Wang X., Pei J., Zhou Y. Review of automated fibre placement and its prospects for advanced composites. *Journal of Materials Science*, 2020. <https://doi.org/10.1007/s10853-019-04090-7>
- [3] Safonov A. 3D topology optimization of continuous fiber-reinforced structures via natural evolution method. *Composite Structures*, 2019, vol. 215, pp. 289–297. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.063>
- [4] Azarov A.V. Optimal design of advanced 3D printed composite parts of rocket and space structures. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/934/1/012062>
- [5] Liu J., Yu H. Concurrent deposition path planning and structural topology optimization for additive manufacturing. *Rapid Prototyping Journal*, 2017. <https://doi.org/10.1108/RPJ-05-2016-0087>
- [6] Schmidt M.-P., Couret L., Gout C., Pedersen C. Topology optimization for continuous and discrete orientation design of functionally graded fiber-reinforced composite structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020. <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02657-6>
- [7] Fedulov B.N., Fedorenko A.N., Antonov F.K., Lomakin E.V. Algoritm topologicheskoy optimizatsii konstruktssii, vpolnennoy iz anizotropnogo materiala s uchedom parametrov orientatsii armirovaniya [Algorithm for topology optimization of the construction, completed from anisotropic material taking into account the parameters of the reinforcement orientation]

- zation of a structure made of anisotropic material with consideration of the reinforcement orientation parameters]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika — PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 3, pp. 182–189.  
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.3.17>
- [8] Stegmann J., Lund E. Discrete material optimization of general composite shell structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005.  
<https://doi.org/10.1002/nme.1259>
- [9] Diaz A.R., Bendsoe M.P. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method. *Structural Optimization*, 1992, vol. 4, pp. 17–22.
- [10] Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. New York, Springer Verlag, 2003, 271 p.
- [11] Kosykh P.A., Azarov A.V. Teoriya i analiz metodov topologicheskoy optimizatsii [Theory and analysis of the topology optimization methods]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2023, iss. 4. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-4-2264>
- [12] Guest J.K., Prevost J.H., Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, vol. 61, pp. 238–254. <https://doi.org/10.1002/nme.1064>

**Kosykh P.A.**, Student, Department of Space and Rocket Composite Structures, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: [kpa18m334@student.bmstu.ru](mailto:kpa18m334@student.bmstu.ru)

**Azarov A.V.**, Dr. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Space and Rocket Composite Structures, Bauman Moscow State Technical University; Leading Researcher, OJSC Central Research Institute for Special Machine Building.  
e-mail: [azarov@anisoprint.ru](mailto:azarov@anisoprint.ru)