

Исследование динамической устойчивости модели крыла в потоке воздуха

© А.М. Наумов, О.А. Домнина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Один из важнейших способов изучения динамических свойств конструкций летательных аппаратов — исследование их элементов на динамическую устойчивость. Рассмотрена возможность динамической потери устойчивости (по типу флаттера) модели крыла в виде плоского стержня переменной геометрии, близкой к геометрии реального крыла, в потоке воздуха. Со стороны набегающего потока воздуха учитываются внутренние силовые факторы, проявляющиеся под действием лобовой аэродинамической силы, и приращения подъемной силы и аэродинамического момента, возникающие при возможных малых колебаниях модели. За счет этих приращений внешних сил происходит так называемая подкачка энергии со стороны потока воздуха, и задача становится неконсервативной. Численно исследовано поведение первых трех комплексных собственных значений малых колебаний, и определены критические скорости потока, при которых возможна потеря динамической устойчивости модели, для различных параметров внешних аэродинамических сил.

Ключевые слова: модель крыла, динамическая устойчивость, аэродинамические силы, флаттер, неконсервативная задача аэроупругости, комплексные собственные значения

Введение. Как известно, флаттер (англ. от *flutter* — дрожание, вибрация) — сочетание самовозбуждающихся незатухающих изгибных и крутильных автоколебаний элементов конструкции летательного аппарата (ЛА), главным образом крыла самолета либо несущего винта вертолета, в набегающем потоке воздуха. Как правило, флаттер проявляется при достижении некоторой критической скорости, зависящей от характеристик конструкции ЛА; возникающий резонанс может привести к его разрушению.

Над изучением проблемы флаттера и методов борьбы с ним работали как отечественные [1–11], так и зарубежные [12–14] ученые. В частности, еще в трудах ЦАГИ [5, 6] дано подробное описание флаттера, рассмотрены крутильные, изгибные, изгибно-крутильные колебания, причины возникновения этого явления, аэродинамические воздействия на элементы самолета, критическая скорость, влияние конструктивных параметров и т. д. В работе [6] рассмотрены аэродинамические силы и их определение, флаттер крыла, влияние смещения осей жесткости и центра тяжести на критическую скорость флаттера. Работа [7] посвящена линейной теории колебаний различных элементов конструкции самолета, подверженных действию аэродинамических сил, в дозвуковом и сверхзвуковом потоке. В книге

летчика-испытателя М.Л. Галлая [8] даны практические рекомендации на этапе эксплуатации летательного аппарата, в работах [10, 11, 15] исследованы аэродинамические силы.

Флаттер является причиной авиакатастроф, поэтому необходимо знать, при каких условиях он наступает и как можно с ним бороться. Автоколебательные системы с двумя и более степенями свободы отличаются рядом особенностей. Однако в большинстве случаев возбуждаются колебания с частотой, близкой к одной из собственных, и в этих режимах система ведет себя как система с одной степенью свободы. При плавном изменении параметров возможны скачкообразные переходы от режима с одной частотой к режиму с другой, возможна гистерезисная зависимость величин, характеризующих эти режимы, от параметров. В некоторых случаях в узкой области значений параметров возможны режимы с несколькими частотами (бигармонические и полигармонические). Разработка методов борьбы с явлением флаттера — одна из важнейших проблем при проектировании ЛА.

В работах [9, 10] исследована динамическая потеря устойчивости модели крыла в потоке воздуха, причем модель крыла рассматривалась как система с двумя и тремя степенями свободы (с дополнительной массой — гасителем колебаний). Определены собственные частоты и формы изгибно-крутильных колебаний, также были исследованы вынужденные колебания модели под действием аэродинамических сил и моментов. Предложенная в этих работах расчетная схема является развитием идей, предложенных в [2, 3]. В текущей работе исследование динамической потери устойчивости модели крыла в потоке воздуха выполнено по схеме системы с распределенными параметрами как плоского стержня переменного эллиптического сечения, близкого по геометрии к характеристикам реального крыла. В статье [11] дан обзор некоторых существующих результатов по упруго-изгибному флаттеру крыла. Обзор начинается с описания различных способов моделирования упруго-изгибного флаттера крыла.

Далее приведены результаты по исследованию явления упруго-изгибного флаттера крыла и описаны некоторые подходы к пассивному и активному подавлению флаттера.

Постановка задачи. Одной из актуальных задач современной аэромеханики является задача исследования динамической устойчивости элементов ЛА в потоке воздуха. Такие задачи относятся к классу неконсервативных задач механики, т. е. со стороны потока при малых колебаниях конструкций ЛА происходит так называемая подкачка энергии, что может привести к возрастанию амплитуд колебаний элементов ЛА — флаттеру. Одна из основных трудностей, с которыми сталкиваются при исследовании процессов нагружения элементов конструкций и ЛА потоками воздуха или жидкости, заключается в определении действующих на конструкцию аэродинамических сил и

моментов как при статическом, так и при динамическом нагружении. В общем случае получить информацию о значениях сил, возникающих в процессе нагружения крыла потоком воздуха, можно исключительно путем обобщения большого массива экспериментальных данных для некоторых характерных частных случаев. В данной работе рассматривается частный случай нагружения модели крыла переменного эллиптического поперечного сечения потоком воздуха при нулевом угле атаки.

Цель работы — провести исследование динамической потери устойчивости стержневой модели крыла в потоке воздуха с учетом приращений аэродинамических сил и моментов, возникающих при малых колебаниях модели в потоке; найти значение критической скорости движения воздуха, при которой возможно наступление флаттера, и исследовать зависимость критической скорости от параметров, характеризующих внешние аэродинамические нагрузки на модель крыла.

Модель крыла в виде плоского стержня переменного эллиптического сечения в потоке набегающего воздуха с нулевым углом атаки представлена на рис. 1. Она имеет следующие характеристики: длина модели $l = 15$ м; ширина в заделке $b_0 = 2$ м; ширина на конце $b_1 = 1$ м; толщина в заделке $h_0 = 0,15$ м; толщина на конце $h_1 = 0,05$ м; модуль упругости материала $E = 72\,000$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0,33$; плотность материала $\rho = 2780$ кг/м³.

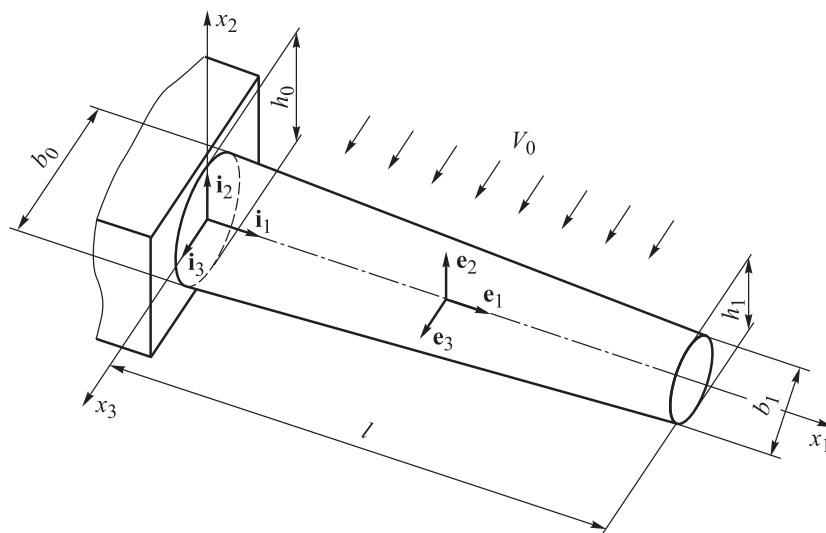


Рис. 1. Схема модели крыла:

x_j — оси координат декартового базиса; e_j — орты связанного главного недеформированного базиса (направлены по главным центральным осям сечения и по касательной к осевой линии); i_j — орты декартового базиса; V_0 — скорость набегающего потока

Как отмечено выше, в неконсервативных системах полная энергия элемента ЛА в процессе колебаний непрерывно изменяется. При воздействии на модель крыла набегающего потока воздуха потерю энергии могут вызывать силы вязкого сопротивления, а увеличение полной энергии — аэродинамические силы [7].

Воспользуемся системой дифференциальных уравнений малых колебаний пространственного стержня [15]:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1(\varepsilon) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \varepsilon} - A_Q A^{-1} \Delta \mathbf{M} - A_{\mathfrak{x}} \Delta \mathbf{Q} = \Delta \mathbf{F}; \\ J \frac{\partial^2 \mathfrak{D}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \varepsilon} - A_M A^{-1} \Delta \mathbf{M} - A_{\mathfrak{x}} \Delta \mathbf{M} - A_1 \Delta \mathbf{Q} = \Delta \mathbf{T}; \\ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \varepsilon} + A_{\mathfrak{x}} \mathfrak{D} - A^{-1} \Delta \mathbf{M} = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varepsilon} + A_{\mathfrak{x}} \mathbf{u} + A_1 \mathfrak{D} = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где $n_1(\varepsilon)$ — функция распределения погонной массы стержня; ε — безразмерная координата; \mathbf{u} — вектор линейных перемещений, возникающих при малых колебаниях; τ — безразмерное время; $\Delta \mathbf{Q}$ — вектор приращений внутренних сил; $\Delta \mathbf{M}$ — вектор приращений внутренних моментов; \mathfrak{D} — вектор углов поворота; $\Delta \mathbf{F}$ — вектор приращений внешних сил; $\Delta \mathbf{T}$ — вектор приращений внешних моментов.

Матрицы, входящие в систему (1), выглядят следующим образом:

$$A_Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_{30}^* & -Q_{20}^* \\ -Q_{30}^* & 0 & Q_{10}^* \\ Q_{20}^* & -Q_{10}^* & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix}; \quad A_{\mathfrak{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathfrak{x}_{30} & \mathfrak{x}_{20} \\ \mathfrak{x}_{30} & 0 & -\mathfrak{x}_{10} \\ -\mathfrak{x}_{20} & \mathfrak{x}_{10} & 0 \end{pmatrix};$$

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{pmatrix}; \quad A_M = \begin{pmatrix} 0 & M_{30}^* & -M_{20}^* \\ -M_{30}^* & 0 & M_{10}^* \\ M_{20}^* & -M_{10}^* & 0 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где A — диагональная матрица безразмерных жесткостей при кручении (A_{11}) и изгибе (A_{22}, A_{33}) (относительно главных осей сечения); Q_{i0}^*, M_{i0}^* — внутренние силовые факторы, возникающие в модели от набегающего потока воздуха [16]; A_1 — вспомогательная матрица; $A_{\mathfrak{x}}$ — матрица исходных кривизн стержня; J — физиче-

ский тензор инерции элемента стержня; $J_{11} = \rho J'_{11}$, J'_{11} — полярный момент инерции; $J_{22} = \rho J'_{22}$, $J_{33} = \rho J'_{33}$, J'_{22}, J'_{33} — осевые моменты инерции.

Под приращениями внешних сил и моментов понимаются приращения аэродинамических сил и аэродинамического момента:

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}_L + \Delta \mathbf{q}_1; \quad \Delta \mathbf{T} = \Delta \boldsymbol{\mu}_a,$$

где $\Delta \mathbf{q}_n$ — приращение лобовой силы; $\Delta \mathbf{q}_L$ — приращение подъемной силы; $\Delta \mathbf{q}_1$ — приращение силы, действующей по направлению оси стержня.

В самом общем случае обтекания стержневого элемента потоком воздуха приращения аэродинамических сил и моментов носят крайне сложный характер [17]. Они зависят от трех углов поворота векторов связанного базиса при малых колебаниях и от трех компонент относительной скорости линейных перемещений точек осевой линии стержня. В рассматриваемом частном случае вектор скорости потока перпендикулярен оси стержня, перемещения осевой линии стержня происходят только в направлении вектора \mathbf{e}_2 , в силу крайней жесткости модели в горизонтальной плоскости угол поворота ϑ_2 бесконечно мал. При данных условиях выражения для приращений аэродинамических сил значительно упрощаются и могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q}_L &= \Delta q_{L_2} \mathbf{e}_2, \quad \Delta q_{L_2} = k \frac{\partial c_L}{\partial \alpha_a} \vartheta_1 - k \beta_0 \frac{\partial c_L}{\partial \alpha_a} \dot{u}_2; \\ \Delta \boldsymbol{\mu}_a &= \Delta \mu_a \mathbf{e}_1, \quad \Delta \mu_a = k_1 \frac{\partial c_m}{\partial \alpha_a} \vartheta_1 - k_1 \beta_0 \frac{\partial c_m}{\partial \alpha_a} \dot{u}_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\beta_0 = \frac{p_0 l}{V_0}$ — безразмерная скорость; $p_0 = \sqrt{\frac{EI_3(0)}{m_0(0)l^2}} = \sqrt{\frac{A_{33}(0)}{m_0(0)l^2}}$;

$\frac{\partial c_L}{\partial \alpha_a}$, $\frac{\partial c_m}{\partial \alpha_a}$ — приращения аэродинамических коэффициентов, зави-

сящие от угла атаки α_a ; $k(\varepsilon) = \frac{1}{2} \rho_v h(\varepsilon) V_0^2 \sin \varphi_{a_0}$; $k_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \rho_v h(\varepsilon) b(\varepsilon) V_0^2 \sin \varphi_{a_0}$ (φ_{a_0} — угол между векторами \mathbf{e}_1 и V_0 ; ρ_v — плотность воздуха).

Поскольку в исследуемом случае $\varphi_{a_0} = 90^\circ$, имеем $\sin \varphi_{a_0} = 1$. Тогда коэффициенты

$$k = \frac{1}{2} \rho_b h(\varepsilon) V_0^2; \quad k_1 = \frac{1}{2} \rho_b h(\varepsilon) b(\varepsilon) V_0^2. \quad (3)$$

При определении собственных значений для неконсервативных задач частоты представляются следующим образом:

$$\lambda_i = \alpha_j \pm \beta_j. \quad (4)$$

Решение системы (1) будем искать в виде

$$\Delta \mathbf{Q} = \Delta \mathbf{Q}_0 e^{\lambda \tau}; \quad \Delta \mathbf{M} = \Delta \mathbf{M}_0 e^{\lambda \tau}; \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 e^{\lambda \tau}; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{\lambda \tau}, \quad (5)$$

а также

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q}_0 &= \Delta \mathbf{Q}_0^{(1)} + i \Delta \mathbf{Q}_0^{(2)}; \quad \Delta \mathbf{M}_0 = \Delta \mathbf{M}_0^{(1)} + i \Delta \mathbf{M}_0^{(2)}; \\ \mathfrak{S}_0 &= \mathfrak{S}_0^{(1)} + i \mathfrak{S}_0^{(2)}; \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^{(1)} + i \mathbf{u}_0^{(2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

По действительной части комплексных собственных значений α_j можно судить о динамической устойчивости исходного равновесного состояния модели. Так, отрицательной действительной части комплексного собственного значения соответствует затухающее решение, при этом исходное состояние равновесия будет устойчивым. В противном случае решение будет расходящимся и модель потеряет устойчивость либо динамическим образом (флаттер), либо статическим образом (дивергенция). Переход через нуль действительной части комплексного собственного значения (при учете демпфирования в системе) или отклонение от чисто нулевого значения (без учета демпфирования) будет соответствовать критической скорости потока.

Приращения коэффициентов $\frac{\partial c_L}{\partial \alpha_a}, \frac{\partial c_m}{\partial \alpha_a}$ можно определить экспериментально. Графики коэффициентов c_L, c_m, c_n для прямоугольного сечения приведены на рис. 2 [18].

Для удобства дальнейших преобразований введем обозначения:

$$\gamma_1 = \frac{\partial c_L}{\partial \alpha_a}; \quad \gamma_2 = \frac{\partial c_m}{\partial \alpha_a}. \quad (7)$$

После «расщепления» системы (1) на действительную и мнимую части имеем

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{d\Delta Q_0^{(1)}}{\partial \varepsilon} = -A_Q A^{-1} \Delta M_0^{(1)} + n_1(\varepsilon)(\alpha^2 - \beta^2) u_0^{(1)} - 2n_1(\varepsilon)\alpha\beta u_0^{(2)} - \Delta q_L^{(1)}; \\
 \frac{d\Delta M_0^{(1)}}{\partial \varepsilon} = -A_1 \Delta Q_0^{(1)} - A_M A^{-1} \Delta M_0^{(1)} + J(\alpha^2 - \beta^2) \vartheta_0^{(1)} - 2J\alpha\beta \vartheta_0^{(2)} - \Delta \mu_a^{(1)}; \\
 \frac{d\vartheta_0^{(1)}}{\partial \varepsilon} = A^{-1} \Delta M_0^{(1)}; \\
 \frac{du_0^{(1)}}{\partial \varepsilon} = -A_1 \vartheta_0^{(1)}; \\
 \frac{d\Delta Q_0^{(2)}}{\partial \varepsilon} = -A_Q A^{-1} \Delta M_0^{(2)} + n_1(\varepsilon)(\alpha^2 - \beta^2) u_0^{(2)} + 2n_1(\varepsilon)\alpha\beta u_0^{(1)} - \Delta q_L^{(2)}; \\
 \frac{d\Delta M_0^{(2)}}{\partial \varepsilon} = -A_1 \Delta Q_0^{(2)} - A_M A^{-1} \Delta M_0^{(2)} + J(\alpha^2 - \beta^2) \vartheta_0^{(2)} + 2J\alpha\beta \vartheta_0^{(1)} - \Delta \mu_a^{(2)}; \\
 \frac{d\vartheta_0^{(2)}}{\partial \varepsilon} = A^{-1} \Delta M_0^{(2)}; \\
 \frac{du_0^{(2)}}{\partial \varepsilon} = -A_1 \vartheta_0^{(2)}.
 \end{array} \right. \quad (8)$$

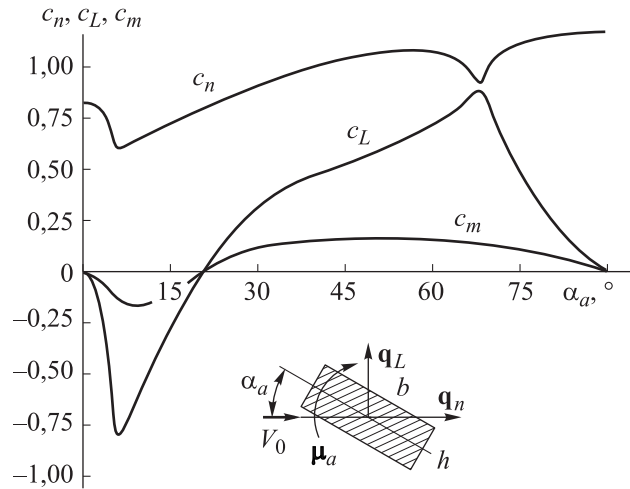


Рис. 2. Зависимость коэффициентов c_L, c_m, c_n от угла атаки α_a [18]

С учетом физической природы задачи некоторые компоненты вектора состояния системы обнуляются [16]:

$$\begin{aligned}
 \Delta Q_1^{(1)} = 0; \Delta Q_3^{(1)} = 0; \Delta M_2^{(1)} = 0; u_1^{(1)} = 0; u_3^{(1)} = 0; \vartheta_2^{(1)} = 0; \\
 \Delta Q_1^{(2)} = 0; \Delta Q_3^{(2)} = 0; \Delta M_2^{(2)} = 0; u_1^{(2)} = 0; u_3^{(2)} = 0; \vartheta_2^{(2)} = 0.
 \end{aligned}$$

Вследствие этого порядок системы (8) понижается. Для удобства численной алгоритмизации представим ее в векторно-матричном виде:

$$\frac{d\mathbf{Z}}{d\varepsilon} = B(\varepsilon, \alpha, \beta)\mathbf{Z}, \quad (9)$$

где $\mathbf{Z} = (\Delta Q_2^{(1)}, \Delta M_1^{(1)}, \Delta M_3^{(1)}, \vartheta_1^{(1)}, \vartheta_3^{(1)}, u_2^{(1)}, \Delta Q_2^{(2)}, \Delta M_1^{(2)}, \Delta M_3^{(2)}, \vartheta_1^{(2)}, \vartheta_3^{(2)}, u_2^{(2)})$ — вектор состояния системы; $B(\varepsilon, \alpha, \beta)$ — квадратная матрица коэффициентов.

Представим матрицу переменных коэффициентов $B(\varepsilon, \alpha, \beta)$ в блочном виде:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix};$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Q_{30}^*}{A_{11}} & 0 & -k\gamma_1 & 0 & n_1(\varepsilon)(\alpha^2 - \beta^2) + k\beta_0\gamma_1\alpha \\ 0 & 0 & -\frac{M_{20}^*}{A_{33}} & J_{11}(\alpha^2 - \beta^2) - k_1\gamma_2 & 0 & k_1\beta_0\gamma_2\alpha \\ -1 & -\frac{M_{20}^*}{A_{11}} & 0 & 0 & J_{33}(\alpha^2 - \beta^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n_1(\varepsilon)\alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha\beta J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha\beta J_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2n_1(\varepsilon)\alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha\beta J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha\beta J_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Q_{30}^*}{A_{11}} & 0 & -k\gamma_1 & 0 & n_1(\varepsilon)(\alpha^2 - \beta^2) + k\beta_0\gamma_1\beta \\ 0 & 0 & -\frac{M_{20}^*}{A_{33}} & J_{11}(\alpha^2 - \beta^2) - k_1\gamma_2 & 0 & k_1\beta_0\gamma_2\beta \\ -1 & -\frac{M_{20}^*}{A_{11}} & 0 & 0 & J_{33}(\alpha^2 - \beta^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Разрешающую систему уравнений решим с помощью метода начальных параметров. Задавшись значениями α и β , получаем численное решение уравнения (9):

$$Z_0 = K(\varepsilon, \alpha, \beta)C, \quad (11)$$

где K — фундаментальная матрица решений однородного уравнения; C — вектор-столбец констант интегрирования.

Численное решение должно удовлетворять краевым условиям при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$. Для данного случая консольно закрепленной модели имеем

$$\begin{aligned} \vartheta_1^{(j)} = 0, \quad \vartheta_3^{(j)} = 0, \quad u_2^{(j)} = 0 \quad \text{при } \varepsilon = 0, \quad j = 1, 2; \\ Q_2^{(j)} = 0, \quad M_1^{(j)} = 0, \quad M_3^{(j)} = 0 \quad \text{при } \varepsilon = 1, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Из краевых условий на левом конце ($\varepsilon = 0$) следует, что $C_4 = C_5 = C_6 = C_{10} = C_{11} = C_{12} = 0$. Из краевых условий на правом конце ($\varepsilon = 1$) получаем систему из шести алгебраических уравнений:

$$M(1, \alpha, \beta)C', \quad C' = (C_1, C_2, C_3, C_7, C_8, C_9),$$

$$M = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{17} & k_{18} & k_{19} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{27} & k_{28} & k_{29} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{37} & k_{38} & k_{39} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{77} & k_{78} & k_{79} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{87} & k_{88} & k_{89} \\ k_{91} & k_{92} & k_{93} & k_{97} & k_{98} & k_{99} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Для того чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы определитель матрицы был равен нулю:

$$D = \det[M] = 0. \quad (14)$$

Найдем таким образом действительные (α_j) и мнимые (β_j) части комплексных собственных значений.

В случае консервативной задачи знак определителя, из которого находили собственные значения, изменялся, что позволяло достаточно несложно их вычислить. Для неконсервативной задачи численный поиск действительной и мнимой частей собственных значений осложняется тем, что упомянутый выше определитель знака не изменяет.

Качественный характер изменения поверхностей $D(\alpha, \beta)$ показан на рис. 3. Точки касания поверхностей плоскости (α, β) являются комплексными собственными значениями $\lambda_j = \alpha_j + i \beta_j$.

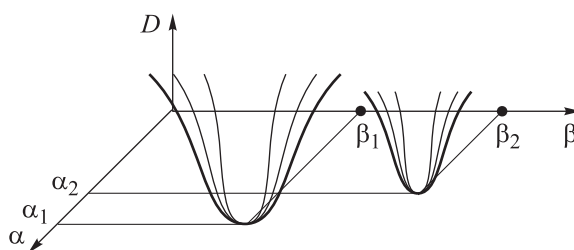


Рис. 3. Качественный характер изменения определителя $D(\alpha, \beta)$

Задачу поиска локальных минимумов функции двух переменных можно решить разными математическими методами. В данной работе был реализован метод градиентного спуска.

Необходимо отметить, что при всех методах поиска минимума функции (все они являются итерационными) крайне важно знать начальное приближение, т. е. собственные частоты, найденные для модели крыла как для консервативной системы. Именно решению этой задачи была посвящена работа [16]. Если не обладать такой информацией, то поиск минимума при произвольно заданных начальных условиях может стать очень сложной задачей, поскольку итерационный процесс поиска корней может оказаться несходящимся или происходить крайне долго.

В процессе исследований устанавливали критическую скорость обтекания воздухом модели крыла для нескольких значений приращений коэффициентов аэродинамических сил. Значения коэффициентов определяли с помощью графика на рис. 2 в предположении, что для эллиптического сечения в первом приближении они имеют близкие значения. Рассматривали варианты с малым углом атаки (при больших углах атаки внутреннее напряженное состояние модели крыла становится более сложным).

Первый вариант. Угол атаки $\alpha_a = 0$, коэффициенты $\gamma_1 = -1$, $\gamma_2 = -0,6$. Графики изменения α_j и β_j для первых трех собственных значений представлены на рис. 4.

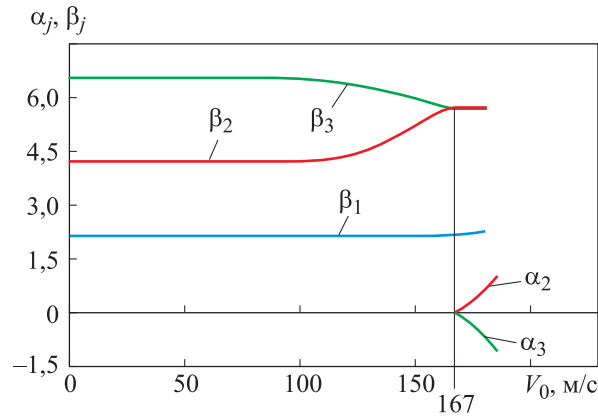


Рис. 4. Зависимость первых трех собственных значений α_j, β_j от скорости набегающего потока при нулевом угле атаки

Отметим, что значение β_1 практически не изменяется с увеличением скорости потока V_0 , в то время как графики β_2 и β_3 постепенно сближаются и сливаются при скорости потока $V_0 \cong 167$ м/с. В этот момент значения α_2 и α_3 перестают быть нулевыми и одно из них становится положительным, что свидетельствует о возрастании амплитуды колебательного процесса. Именно эта скорость и является критической скоростью, при которой происходит потеря динамической устойчивости модели крыла в потоке.

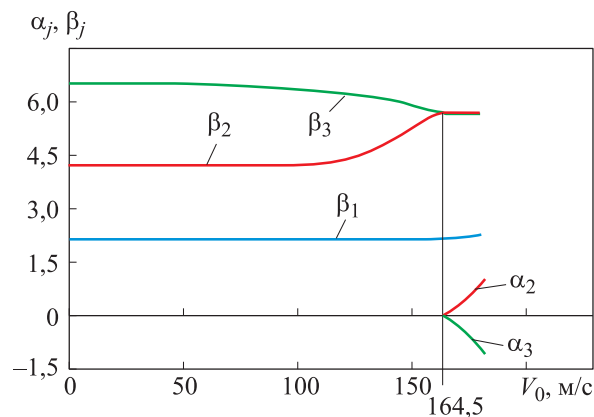


Рис. 5. Зависимость первых трех собственных значений α_j, β_j от скорости набегающего потока при угле атаки $\alpha_a = 5^\circ$

Второй вариант. Угол атаки $\alpha_a = 5^\circ$, коэффициенты $\gamma_1 = -11$, $\gamma_2 = -0,5$. Графики изменения α_j и β_j для первых трех собственных значений приведены на рис. 5.

В данном случае динамическая потеря устойчивости происходит при скорости потока $V_0 \cong 164,5$ м/с.

Третий вариант. Для подтверждения того, что убывание критической скорости потока происходит при увеличении угла атаки, проведем решение для третьего варианта угла α_a (рис. 6). Примем $\alpha_a = 10^\circ$, $\gamma_1 = 1,75$, $\gamma_2 = 0$.

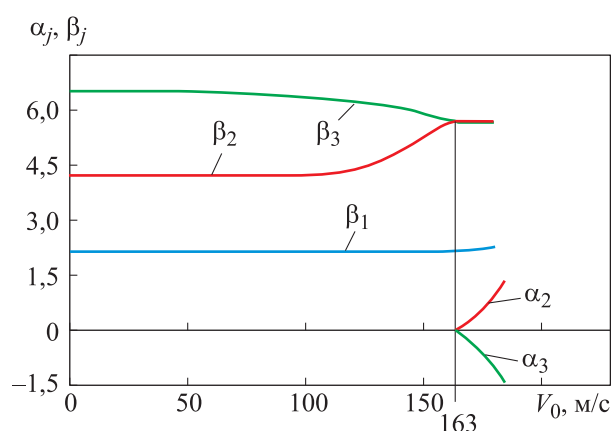


Рис. 6. Зависимость первых трех частот α_j , β_j от скорости набегающего потока при угле атаки $\alpha_a = 10^\circ$

В данном случае флаттер наступает при скорости набегающего потока $V_0 \cong 163$ м/с.

Заключение. В работе проведен анализ динамической устойчивости модели крыла по схеме плоского стержня переменного эллиптического сечения в потоке воздуха. Учитывали напряженное состояние модели крыла, возникающее под действием аэродинамических сил, а также приращение аэродинамических сил и момента, возникающих при возможных малых колебаниях крыла в потоке. Численно определены первые три комплексные частоты собственных колебаний и их поведение в зависимости от скорости набегающего потока. В ходе исследований варьировался угол атаки со стороны потока, влияющий на значения приращений аэродинамических нагрузок. Были определены критические скорости обдува модели потоком, при которых возможна потеря динамической устойчивости по типу флаттера. Представленный метод исследования поведения элементов конструкций в потоке воздуха или жидкости позволяет решать динамические задачи аэроупругости стержневых элементов любой геометрии, для

которых известны экспериментальные значения аэродинамических коэффициентов внешних сил со стороны потока.

Данная работа может быть интересна как для студентов технических специальностей, изучающих теорию механических колебаний, так и для инженеров — специалистов, занимающихся задачами взаимодействия упругих элементов конструкций с внешним потоком газа или жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бидерман В.Л. *Теория механических колебаний*. Москва, Высшая школа, 1980, 408 с.
- [2] Стрелков С.П. *Введение в теорию колебаний*. Москва, Наука, 1964, 437 с.
- [3] Пановко Я.Г., Губанова И.И. *Устойчивость и колебания упругих систем*. Издание 4-е, перераб. Москва, Наука, 1987, 352 с.
- [4] Келдыш М. В. Вибрация в воздушном потоке крыла с подкосами. *Труды ЦАГИ, вып. 357*. Москва, 1938, 40 с.
- [5] Гроссман Е.П., Келдыш М.В., Пархомовский Я.М. Вибрация крыла с элероном. *Труды ЦАГИ, вып. 337*. Москва, 1937, 98 с.
- [6] Риз П.М. Флаттер воздушных винтов. *Труды ЦАГИ, вып. 391*. Москва, 1938, 36 с.
- [7] Фын Я.Ц. *Введение в теорию аэроупругости*. Москва, Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959, 523 с.
- [8] Галлай М.Л. *Избранное: в 2 т. Т. 1*. Москва, Воениздат, 1990, 524 с.
- [9] Наумов А.М., Мочилин И.К. Исследование динамической потери устойчивости модели крыла в потоке воздуха. *Машиностроение и компьютерные технологии*, 2019, № 03, с. 15–27. DOI: 10.24108/0319.0001468
- [10] Наумов А.М. Исследование влияния дополнительной массы на динамическую устойчивость модели крыла в потоке воздуха. *Машиностроение и компьютерные технологии*, 2019, № 7, с. 1–7. DOI: 10.24108/0719.0001506
- [11] Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В., Кузнецова О.А. Крутильно-изгибный флаттер крыла: математические модели, исследование и предотвращение. Обзор. *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 2021, № 4, с. 116–191.
- [12] Wagner H.A. Uber die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflugeln. *ZAMM*, Band 5, Heft 1, 1925, S. 17–35.
- [13] Theodorsen Th. General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. *NACA Report No. 496*, 1949.
- [14] Birnbaum W. Das ebene Problem des schlagenden Flugels. *ZAMM*, 1924, 277 S.
- [15] Наумов А.М., Тихонова О.Н. Определение частот и форм свободных колебаний предварительно нагруженного резинокордного шланга (трубопровода), находящегося в потоке газа или жидкости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2000, № 3, с. 91–102.
- [16] Наумов А.М., Домнина О.А. Модальный анализ модели крыла в потоке воздуха в консервативной постановке. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 6. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-6-2280>
- [17] Соколов А.И. *Нестационарные колебания и устойчивость провисающих проводов воздушных линий при ветровых и гололедных нагрузках*. Дис. ... канд. техн. наук. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012.
- [18] Казакевич М.И. *Аэродинамика мостов*. Москва, Транспорт, 1987, 240 с.

Статья поступила в редакцию 10.10.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Наумов А.М., Домнина О.А. Исследование динамической устойчивости модели крыла в потоке воздуха. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 10. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-10-2307>

Наумов Андрей Михайлович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов: статика и динамика пространственно-криволинейных стержней. Автор около 30 научных статей. e-mail: naumov_am@bmstu.ru

Домнина Ольга Александровна — студентка кафедры «Теория механизмов и машин» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: domninaoa@student.bmstu.ru

Investigation of the wing model dynamic stability in the airflow

© A.M. Naumov, O.A. Domnina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Investigating the aircraft structure elements for compliance with dynamic stability is one of the most important ways to study their dynamic properties. The paper considers possibility of the wing model dynamic loss of stability (flutter type) in the form of a flat rod of variable geometry close to the real wing geometry in the airflow. Internal force factors manifested under the frontal aerodynamic force influence, as well as increment in the lift and aerodynamic moment arising during possible small model oscillations are taken into account from the oncoming airflow side. Due to these external forces increment, the so-called energy pumping from the airflow side occurs, and the problem becomes non-conservative. Behavior of the first three complex eigenvalues of small oscillations was numerically studied, and the critical flow velocities, at which the model could lose dynamic stability, were determined for various parameters of the external aerodynamic forces.

Keywords: wing model, dynamic stability, aerodynamic forces, flutter, non-conservative aeroelasticity problem, complex eigenvalues

REFERENCES

- [1] Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical oscillations]. Moscow, 1980, Vysshaya Shkola Publ., 408 p.
- [2] Strelkov S.P. *Vvedenie v teoriyu kolebaniy* [Introduction to the oscillation theory], Moscow, Nauka Publ., 1964, 437 p.
- [3] Panovko Ya.G., Gubanov I.I. *Ustoichivost i kolebaniya uprugikh system* [Stability and oscillations of the elastic systems]. 4th ed., rev. Moscow, Nauka Publ., 1987, 352 p.
- [4] Keldysh M.V. *Vibratsiya v vozdushnom potoke kryla s podkosami* [Vibration in the airflow of a wing with struts]. *Trudy TsAGI, iss. 357*. Moscow, 1938, 40 p.
- [5] Grossman E.P., Keldysh M.V., Parkhomovskiy Ya.M. *Vibratsiya kryla s ehleronom* [Vibration of wing with an aileron]. *Trudy TsAGI, iss. 337*. Moscow, 1937, 98 p.
- [6] Riz P.M. *Flutter vozdushnykh vintov* [Aircraft propeller flutter]. *Trudy TsAGI, iss. 391*. Moscow, 1938, 36 p.
- [7] Fyn Ya.Ts. *Vvedenie v teoriyu aerouprugosti* [Introduction to the theory of aeroelasticity]. Moscow, 1959, Gos. Izd-vo Fiz-Mat Lit. Publ., 1959, 523 p.
- [8] Gallay M.L. *Izbrannoe* [Selected works]. In 2 vol. Vol. 1. Moscow, Voenizdat Publ., 1990, 524 p.
- [9] Naumov A.M., Mochilin I.K. *Issledovanie dinamicheskoy poteri ustoychivosti modeli kryla v potoke vozdukha* [Investigation of dynamic buckling of a wing model in air flow]. *Mashinostroenie i kompyuternye tekhnologii — Mechanical Engineering and Computer Science*, 2019, no. 3, pp. 15–27. <https://doi.org/10.24108/0319.0001468>
- [10] Naumov A.M. *Issledovanie vliyaniya dopolnitelnoy massy na dinamicheskuyu ustoychivost modeli kryla v potoke vozdukha* [Investigation of additional mass effect on dynamic wing model stability in airflow]. *Mashinostroenie i*

- kompyuternye tekhnologii — Mechanical Engineering and Computer Science*, 2019, no. 7, pp. 1–7. <https://doi.org/10.24108/0719.0001506>
- [11] Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Kudryashova E.V., Kuznetsova O.A. Krutilno-izgibnyi flatter kryla: matematicheskie modeli, issledovanie i predotvraschenie. Obzor [Elastic-flexural wing flutter: modeling, investigation and prevention. A review]. *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya — Differential Equations and Control Processes*, 2021, no. 4, pp.116–191.
- [12] Wagner H.A. Uber die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflugeln. *ZAMM*, Band 5, Heft 1, 1925, S. 17–35.
- [13] Theodorsen Th. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. *NASA Report No. 496*, 1949.
- [14] Birnbaum W. Das ebene Problem des schlagenden Flugels. *ZAMM*, 1924, 277 S.
- [15] Naumov A.M., Tikhonova O.N. Opredelenie chastot i form svobodnykh kolebaniy predvaritelno nagruzhennogo rezinokordnogo shlanga (truboprovoda), nakhodyaschegosya v potoke gaza ili zhidkosti [Determination of frequency and modes of free oscillation of the pre-loaded hose (pipe-line) in gas or liquid stream]. *Vestnik MGTU im N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2000, no. 3, pp. 91–102.
- [16] Naumov A.M., Domnina O.A. Modalnyi analiz modeli kryla v potoke vozdukha v konservativnoy postanovke [Wing model modal analysis in the airflow in conservative formulation]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2023, iss. 6. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2023-6-2280>
- [17] Sokolov A.I. *Nestatsionarnye kolebaniya i ustoichivost provisayuschikh provodov vozdukhnykh liniy pri vetrovykh i gololednykh nagruzkakh. Dis. ... kand. tekhn. nauk* [Unsteady vibrations and stability of sagging wires of overhead lines under wind and ice loads Diss. ... Cand. Sci. (Eng.)]. Moscow, BMSTU, 2012.
- [18] Kazakevich M.I. *Aerodinamika mostov* [Bridge aerodynamics]. Moscow, Transport Publ., 1987, 240 p.

Naumov A.M., Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: statics and dynamics of spatial curvilinear rods; author of about 30 scientific articles.
e-mail: naumov_am@bmstu.ru

Domnina O.A., Student, Department of Theory of Mechanisms and Machines, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: domninaoa@student.bmstu.ru