

## Комплексная оценка аналитических и численных моделей эфемерид планет Солнечной системы на примере околоземных КА

© А.Г. Топорков, Е.А. Козлов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Представлен разработанный алгоритм использования высокоточных численных моделей эфемерид. Приведено качественное и количественное сравнение аналитических и численных высокоточных моделей эфемерид планет между собой: модели осредненных элементов NASA, модели Ньюкома, модели Мееса, моделей серии DE/LE и моделей серии EPM. Получены абсолютные значения невязок радиус-вектора для каждой планеты Солнечной системы в рамках рассматриваемых моделей эфемерид. Проведена оценка методов интегрирования: метода Рунге — Кутты 4-го порядка, метода Адамса 16-го порядка и метода Дормана — Принца 5(4)-го порядка. Получены результаты оценки точности и оперативности расчетов в зависимости от шага интегрирования. Вычислены значения возмущающих ускорений от Солнца, Луны и планет для космического аппарата (КА) типа ГЛОНАСС. Даны практические рекомендации по применению аналитических и численных эфемерид планет при моделировании движения околоземных КА.*

**Ключевые слова:** эфемериды планет, EPM, DE/LE, ГЛОНАСС, планеты Солнечной системы, гравитационные силы

**Введение.** На орбитальное движение космических аппаратов (КА) действуют внешние возмущающие силы, обусловленные: центральностью и нецентральностью гравитационного поля Земли, притяжением Луны, Солнца и других внутренних планет Солнечной системы, прецессией и нутацией Земли, колебаниями земного полюса, неравномерностью вращения Земли [1], прямым световым давлением, переотраженной и переизлученной солнечной радиацией (альбедо), твердыми земными, океаническими, полюсными, атмосферными приливами, релятивистскими эффектами и пр. Эти и другие факторы неизбежно приводят к ошибкам прогнозирования движения центра масс КА. В свою очередь, неопределенность знания положения Солнца, Луны, планет и других тел Солнечной системы напрямую влияет на точность расчета возмущений от гравитационного притяжения небесных тел Солнечной системы, солнечного давления, приливов и колебаний земного полюса, поэтому задача составления высокоточной математической модели для прогнозирования движения КА является очень актуальной. Она должна быть детально проработана на этапе баллистического проектирования перспективных космических миссий.

Данная работа — продолжение исследований, выполненных авторами ранее [2–4]. Однако в предыдущих исследованиях проводилось

только сравнение высокоточных численных эфемерид серии EPM (Ephemeris of Planets and Moon) и серии DE (Development Ephemeris). В данной работе представлены дополнительно проведенные исследования аналитических моделей эфемерид: модели осредненных элементов NASA, модели Ньюкома и модели Мееса. В качестве объекта исследования был выбран КА, находящийся на околоземной орбите, а предметом исследований стали аналитические и численные модели эфемерид небесных тел Солнечной системы.

Цель работы — оценка точности различных моделей эфемерид тел Солнечной системы и степени влияния каждой из них на результат прогнозирования движения КА.

Для достижения поставленной цели была решена задача по разработке алгоритма и программного обеспечения (ПО) для прогнозирования движения КА с учетом эфемерид планет. При разработке такого ПО особое внимание было уделено выбору рационального метода интегрирования для минимизации ошибки прогноза.

**Астрономический ежегодник.** В этом ежегодно публикуемом документе [5] приводятся таблицы координат (эфемериды) Земли, Луны, больших планет Солнечной системы, звезд и малых тел, вычисленные на последующий год с максимальной точностью в соответствии с резолюциями, утвержденными Международным астрономическим союзом. В ежегоднике [6] дополнительно содержатся информация о различных астрономических явлениях, матрицы прецессии и нутации Земли и пр.

Безусловно, основное внимание при составлении ежегодника уделяют эфемеридам тел Солнечной системы. Следует заметить, что их вычисление — далеко не тривиальная задача, ее решением сейчас занимаются крупные международные научно-исследовательские институты и центры. Уже разработаны различные способы вычисления эфемерид тел Солнечной системы, созданы модели движения тел Солнечной системы трех типов: аналитические, высокоточные численные и численно-аналитические.

Начиная с 1898 г. независимыми астрономическими группами были разработаны различные по точности математические модели движения Солнечной системы. До 1984 г. эфемериды Солнца, Меркурия, Венеры, Земли и Марса были основаны на теориях и таблицах сэра Саймона Ньюкома [7, 8], со временем дополненных другими учеными. Формулы теории Ньюкома позволяют вычислять небесные координаты внутренних планет с точностью до  $0,5'$ , а координаты внешних планет — с точностью до  $5'$ . После 1984 г. появились высокоточные численные модели эфемерид, полученные численным интегрированием уравнений движения тел Солнечной системы. К ним относятся модели семейства DE/LE, EPM, INPOP [9] и др. Точность вычисления эфемерид по этим моделям постоянно возрастает.

К численно-аналитическим моделям можно отнести модели семейства VSOP (Variations Séculaires des Orbites Planétaires) [10], основанные на аппроксимации дифференциальных уравнений Лагранжа кеплеровых элементов тел Солнечной системы.

В данной работе рассматриваются модели эфемерид Солнечной системы только двух типов — аналитические и численные.

**Аналитические модели.** Преимуществом таких моделей является быстродействие. Суть аналитического подхода сводится к расчету кеплеровых элементов орбиты небесного тела и переводу полученных значений в требуемую систему координат. Рассмотрим три наиболее часто используемых способа для расчета кеплеровых элементов орбиты небесных тел Солнечной системы.

**Аналитическая модель осредненных элементов NASA.** Кеплеровы элементы орбит небесных тел рассчитываются как сумма двух компонентов: постоянного значения рассматриваемого элемента, полученного на начальное время путем применения метода наименьших квадратов на некой выборке значений этого элемента, плюс постоянного значения скорости изменения рассматриваемого элемента, полученного аналогичным способом и умноженного на время, прошедшее с заданной эпохи:

$$\text{Элемент} = a_0 + \dot{a}T,$$

где  $a_0$  — постоянные коэффициенты, которые приведены в специальных таблицах [11];  $\dot{a}$  — скорость изменения элемента во времени;  $T$  — время, выраженное в столетиях, прошедшее с начала астрономической эпохи J2000.0.

При данном подходе для расчета значения истинной аномалии  $\vartheta$  используется зависимость

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg} \frac{E}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

Здесь  $E$  — эксцентрическая аномалия, которую можно получить путем решения уравнения Кеплера

$$M = E - e \sin E,$$

где  $M$  — средняя аномалия;  $e$  — эксцентриситет орбиты.

Следует учитывать, что уравнение Кеплера — трансцендентное, и поэтому оно не может быть решено с использованием алгебраических функций. Решение уравнения Кеплера можно найти [12] с помощью метода простых итераций или сходящихся рядов.

**Алгоритм Меесса.** В данном алгоритме кеплеровы элементы орбит планет представлены в виде полинома:

$$\text{Элемент} = a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3,$$

где  $a_0, a_1, a_2, a_3$  — постоянные коэффициенты, приведенные в специальных таблицах в работе [13];  $T$  — время, измеренное в юлианских столетиях, состоящих из 36 525 эфемеридных дней с эпохи J2000.

Согласно алгоритму Мееса, истинная аномалия рассчитывается по формуле

$$\vartheta = M + C_{\text{сеп}},$$

где

$$C_{\text{сеп}} = \left( 2e - \frac{e^3}{4} + \frac{5}{96}e^5 \right) \sin(M) + \left( \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 \right) \sin(2M) + \\ + \left( \frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5 \right) \sin(3M) + \frac{103}{96}e^4 \sin(4M) + \frac{1097}{960}e^5 \sin(5M).$$

**Элементы теории Ньюкома.** Формулы данной теории похожи на алгоритм, разработанный Меесом, однако полином, с помощью которого аппроксимируются элементы, не ограничивается 3-й степенью аргумента  $T$ . Таким образом,

$$\text{Элемент} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot T^i,$$

где  $a_0, \dots, a_i$  — постоянные коэффициенты, приведенные в специальных таблицах;  $n$  — степень аппроксимирующего полинома.

**Высокоточная численная динамическая модель.** Дифференциальные уравнения движения Солнца, Луны и планет записываются в барицентрической системе координат, свободной от вращения. Основные гравитационные силы, действующие на девять планет, Солнце и Луну, моделируются как взаимодействие точечных масс. Система дифференциальных уравнения состоит из двух релятивистских векторных уравнений, а именно из вектора скорости  $i$ -го тела  $\dot{\vec{r}}_i$  и уравнения, описывающего для каждого  $i$ -го небесного тела ускорение [14, 15]:

$$\ddot{\vec{r}}_i = R_1 + R_2 + R_3 + R_4.$$

Здесь  $\ddot{\vec{r}}_i$  — вектор ускорения  $i$ -го тела;  $R_1$  — ускорения в рамках классической теории тяготения Ньютона;  $R_2$  — релятивистские члены ускорения в рамках специальной теории относительности [16, 17];  $R_3$  — компоненты ускорения, обусловленные сжатием Солнца;  $R_4$  — компоненты ускорения для Земли и Марса, обусловленные действием кольца астероидов [15, 18]:

$$R_1 = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_{ij}|^3},$$

где  $\mu_j$  — гравитационный параметр  $j$ -го тела;  $\vec{r}_j$  — радиус-вектор  $j$ -го тела;  $\vec{r}_i$  — радиус-вектор  $i$ -го тела;  $\vec{r}_{ij} = (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$  — разница радиус-векторов  $j$ -го тела и  $i$ -го тела;

$$R_2 = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_{ij}|^3} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{\mu_k}{|\vec{r}_{ik}|} - \frac{2\beta - 1}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{\mu_k}{|\vec{r}_{jk}|} + \gamma \left( \frac{|\dot{\vec{r}}_i|}{c} \right)^2 + (1 + \gamma) \left( \frac{|\dot{\vec{r}}_j|}{c} \right)^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{\vec{r}}_i \times \right.$$

$$\left. \times \dot{\vec{r}}_j - \frac{3}{2c^2} \left[ \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \dot{\vec{r}}_j}{|\vec{r}_{ij}|} \right]^2 + \frac{1}{2c^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \ddot{\vec{r}}_j \right\} +$$

$$+ \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{|\vec{r}_{ij}|^3} \left\{ |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \cdot \left[ (2 + 2\gamma) \cdot \dot{\vec{r}}_i - (1 + 2\gamma) \cdot \dot{\vec{r}}_j \right] \cdot (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j) + \right.$$

$$\left. + \frac{(3 + 4\gamma)}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j \cdot \ddot{\vec{r}}_j}{|\vec{r}_{ij}|} \right\},$$

где  $\beta$  и  $\gamma$  — параметры параметризованного постньютоновского (ППН) формализма [19];  $\beta = 1$  — мера нелинейности гравитационного поля;  $\gamma = 1$  — мера кривизны пространства, порождаемой одиночной покоящейся массой;  $\mu_k$  — гравитационный параметр  $k$ -го тела;  $\vec{r}_{ik} = (\vec{r}_k - \vec{r}_i)$  — разница радиус-векторов  $k$ -го тела и  $i$ -го тела;  $\vec{r}_{jk} = (\vec{r}_k - \vec{r}_j)$  — разница радиус-векторов  $k$ -го тела и  $j$ -го тела;  $c$  — скорость света в вакууме;  $\dot{\vec{r}}_i$  — вектор скорости  $i$ -го тела;  $\dot{\vec{r}}_j$  — вектор скорости  $j$ -го тела;  $\ddot{\vec{r}}_j$  — барицентрическое ускорение  $j$ -го тела, обусловленное притяжением остальных тел и астероидов по модели тяготения Ньютона;

$$R_3 = 3J_{s2}\mu_s \frac{R^2}{r_{is}^4} \left\{ \left[ \frac{5}{2} \left( \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_s) \cdot \vec{p}}{|\vec{r}_{is}|} \right) - \frac{1}{2} \right] \cdot \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_s)}{|\vec{r}_{is}|} - \left( \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_s)}{|\vec{r}_{is}|} \cdot \vec{p} \right) \cdot \vec{p} \right\},$$

где  $J_{s2}$  — коэффициент второй зональной гармоники Солнца;  $\mu_s$  — гравитационный параметр Солнца;  $R$  — экваториальный радиус Солнца;  $\vec{r}_{is}$  — разница радиус-векторов  $i$ -го тела и Солнца;  $\vec{r}_s$  — радиус-вектор Солнца;  $\vec{p}$  — единичный вектор, направленный на северный полюс Солнца;

$$R_4 = \frac{1}{2} \frac{M_r}{R_r^3} \cdot |\vec{r}_{E,M}| \cdot F(1.5, 1.5, 2; \alpha^2),$$

где  $M_r$  — масса астероидного кольца;  $R_r$  — радиус астероидного кольца;  $|\vec{r}_{E,M}| = |\vec{r}_M - \vec{r}_E|$  — разница радиус-векторов Марса и Земли;

$F$  — гипергеометрическая функция [20];  $\alpha = \frac{|\vec{r}_{3,4}|}{R_r}$ .

Интегрировать такую систему крайне нецелесообразно. Поэтому применяется иной подход: система дифференциальных уравнений (СДУ), описывающая движение тел Солнечной системы, интегрируется высокоточными численными методами на большой промежуток времени, полученные массивы данных сохраняются и разбиваются на временные участки, а затем проводится аппроксимация полученного участка полиномом Чебышева  $n$ -го порядка точности.

Выбор параметров СДУ, описывающей движение тел Солнечной системы, метода интегрирования, протяженности участков разбиения и степени аппроксимирующих полиномов возлагается на организацию, которая разрабатывает конкретную численную динамическую модель. Таким образом, использование численных моделей эфемерид тел Солнечной системы сводится к восстановлению координат и проекций скорости небесного тела из соответствующих коэффициентов полинома Чебышева. Алгоритм, описывающий данный подход, представлен на рис. 1.

К основным недостаткам численных методов относятся зависимость алгоритма от машинного представления внешних файлов, в которых хранятся коэффициенты полиномов Чебышева, а также большие затраты машинного времени, чем на выполнение аналитических расчетов.

В качестве преимуществ численных методов следует отметить высокую точность получаемых эфемерид и достаточно легкую модернизацию существующего алгоритма, для того чтобы можно было его использовать при появлении более современных моделей эфемерид того же семейства.

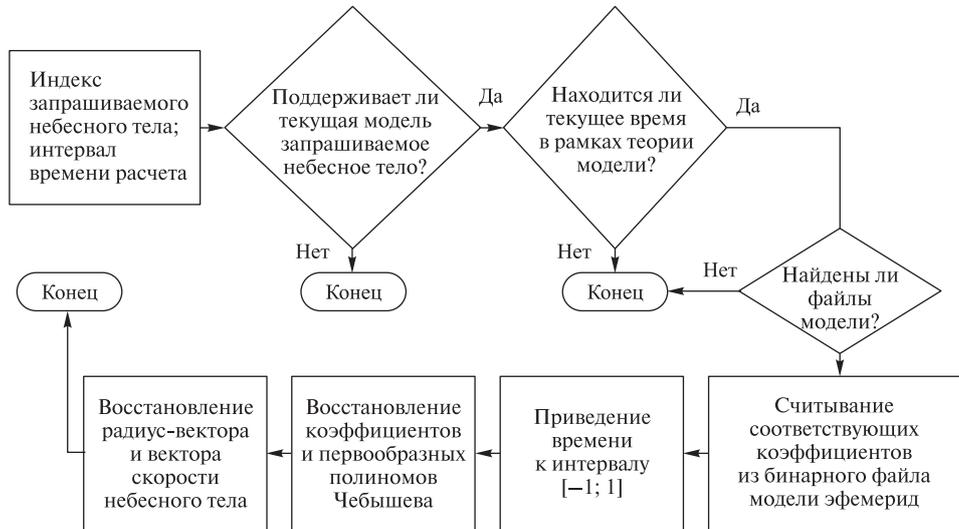


Рис. 1. Алгоритм работы с численными моделями эфемерид

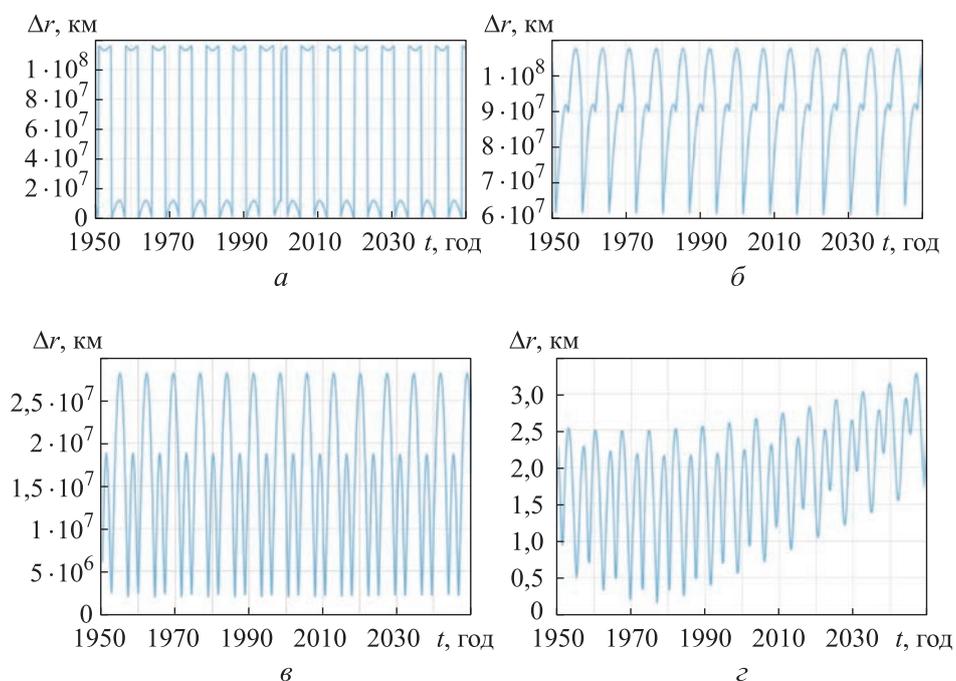
**Эфемериды EPM.** Российские эфемериды (Ephemeris of Planets and Moon, EPM), разработанные в Институте прикладной астрономии РАН (ИПА РАН) в соответствии с резолюцией В2 XXVIII ГА МАС, охватывают диапазон времени более 400 лет (с 1787 по 2214 г.). Более подробное описание эфемерид EPM размещено на официальном сайте ИПА РАН [21]. Модель орбитально-вращательного движения Луны, реализованная в EPM, основана на уравнениях, использованных для построения лунной части эфемерид DE430. При этом Луна рассматривается как эластичное тело, имеющее вращающееся жидкое ядро. Также файлы эфемерид EPM доступны для всех пользователей на FTP-сервере ИПА РАН [22].

**Эфемериды DE.** В настоящее время рабочей группой Международного астрономического союза рекомендованы [23] к программному использованию стандартные форматы SPK (Spacecraft and Planet Kernel) и PCK (Planetary Constants Kernel). Эти форматы файлов были разработаны в Лаборатории реактивного движения НАСА (JPL) Управлением навигации и вспомогательной информации (Navigation and Ancillary Information Facility, NAIF) в качестве основных составляющих информационной системы SPICE Toolkit [24].

Текущая версия эфемерид DE, на которых основан современный астрономический ежегодник, предоставлены в открытом доступе на FTP-сервере JPL. Доступны два формата данных: двоичный и текстовый. Двоичный — более компактный, однако работа с ним затруднена: необходимо учитывать порядок байт в записи многобайтных чисел с плавающей точкой для конкретного компьютера, на котором производится чтение данных. Текстовый формат (ASCII) не зависит от платформы компьютера, т. е. он более универсальный.

**Сравнение моделей эфемерид.** Для моделирования будем использовать модель осредненных элементов NASA, модель Ньюкома, модель Меесса, модель DE405/LE405, модель DE430/LE430 и модель EPM2021. Сравнение эфемерид, полученных с помощью перечисленных выше моделей, выполнено на интервале продолжительностью 100 лет. Результаты, полученные с использованием модели DE405, можно полагать номинальными, так как модель DE405/LE405 де-факто считается международным стандартом и рекомендована Международным астрономическим союзом [25] в стандартах Международной службы вращения Земли.

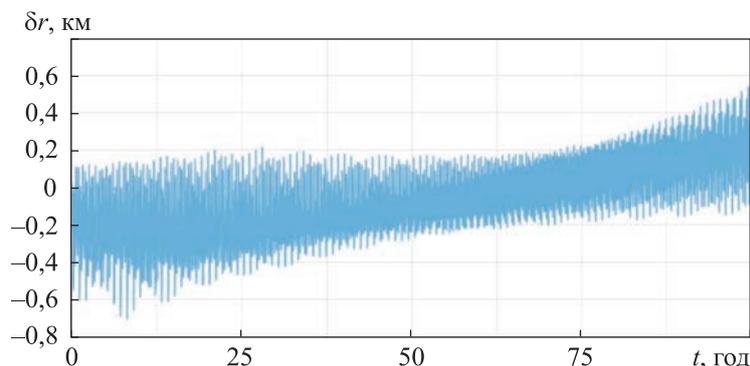
Результаты, приведенные на рис. 2 и 3, показаны в виде невязок гелиоцентрического радиус-вектора положения Меркурия, заданного в Международной небесной системе координат.



**Рис. 2.** Невязки радиус-вектора:

*a* — модель осредненных элементов NASA относительно модели DE405; *б* — модель Ньюкома относительно DE405; *в* — модель Меесса относительно DE405; *г* — модель EPM2021 относительно DE405

Аналогичные графики могут быть получены и для других тел Солнечной системы, при этом характер изменения  $\Delta r$  будет идентичен динамике изменения  $\Delta r$  для Меркурия, только значение  $\Delta r$  будет другим.



**Рис. 3.** Невязка радиус-вектора между моделью EPM2021 и DE430 в период с 1950 по 2050 г.

Анализ результатов (см. рис. 2) показал, что среди аналитических моделей лишь модель Мееса обеспечивает минимальные расхождения с высокоточной численной моделью DE405. Полученные максимальные расхождения значений  $\Delta r$  для четырех моделей для сравнения с моделью DE405 сведены в табл. 1.

Таблица 1

**Максимальные абсолютные значения невязки радиус-вектора различных моделей относительно модели DE405**

Объект Солнечной системы	Невязка $\Delta r$ , км, для модели:			
	NASA	Ньюкома	Мееса	EPM2021
Меркурий	$1,08 \cdot 10^8$	$1,16 \cdot 10^8$	$2,82 \cdot 10^7$	3,27
Венера	$2,00 \cdot 10^8$	$2,16 \cdot 10^8$	$4,42 \cdot 10^7$	0,97
Земля	$2,40 \cdot 10^8$	$2,99 \cdot 10^8$	$6,18 \cdot 10^7$	1,25
Луна	$3,64 \cdot 10^8$	$3,97 \cdot 10^8$	$8,11 \cdot 10^7$	1,48
Марс	$4,57 \cdot 10^8$	$4,56 \cdot 10^8$	$9,58 \cdot 10^7$	2,58
Юпитер	$1,56 \cdot 10^9$	$1,56 \cdot 10^9$	$3,20 \cdot 10^8$	277,64
Сатурн	$2,20 \cdot 10^9$	$2,86 \cdot 10^9$	$6,12 \cdot 10^8$	971,58
Уран	$6,00 \cdot 10^9$	$5,74 \cdot 10^9$	$1,17 \cdot 10^9$	2197,57
Нептун	$8,25 \cdot 10^9$	$9,00 \cdot 10^9$	$1,84 \cdot 10^9$	14 079,50

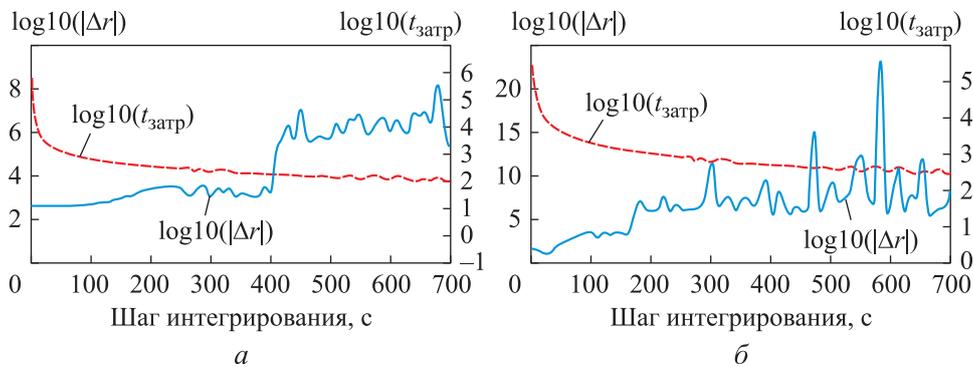
Результаты сравнения данных табл. 1 приводят к выводу, что значение невязки заметно увеличивается при удалении рассматриваемого небесного тела от Земли. Это объясняется тем, что радиолокационных и лазерных наблюдений за планетами, значительно удаленными от Земли, проводится гораздо меньше, чем наблюдений за планетами, близко расположенными к Земле, причем такие планеты, как Марс и Венера, дополнительно изучены с помощью автоматических межпланетных КА.

Отдельно сравним численные модели эфемерид планет серии DE и EPM. Так, на рис. 3 представлена невязка радиус-вектора между моделями DE430 и EPM2021 на 100-летнем интервале для Меркурия. Видно, что модуль максимальной невязки не превышает 700 м. Такая ошибка практически не отражается на результате прогнозирования движения околоземных КА. На 30-дневном интервале прогнозирования ошибка не превышает 0,03 %.

**Выбор численного метода интегрирования.** Выберем численный метод интегрирования математической модели движения (ММД) космического аппарата и проанализируем его влияние на результаты прогноза движения КА. Для этого сравним три метода численного интегрирования системы дифференциальных уравнений:

- метод Рунге — Кутты 4-го порядка точности с постоянным шагом интегрирования;
- явный метод Адамса 16-го порядка точности с постоянным шагом интегрирования;
- вложенный метод Дормана — Принца 5(4)-го порядка точности с автоматическим выбором шага.

Для сравнения оперативности методов интегрирования будем рассчитывать время  $t_{\text{затр}}$ , затрачиваемое на проведение моделирования. Графики изменения точности и оперативности расчетов в зависимости от выбранного метода интегрирования приведены на рис. 4.



**Рис. 4.** Зависимость точности и оперативности расчетов от шага интегрирования:  
 а — при использовании метода Рунге — Кутты 4-го порядка точности;  
 б — при использовании явного метода Адамса 16-го порядка точности

Анализируя полученные результаты (см. рис. 4), можно сделать вывод, что наилучшее соотношение точности расчетов и их оперативности достигается при весьма больших значениях шага интегрирования. Однако получаемая точность невелика, и для ее повышения необходимо пожертвовать оперативностью расчетов. Сравнив заявленные методы интегрирования между собой, можно отметить, что

явный метод Адамса обеспечивает приемлемые точность и оперативность выполняемых вычислений, поэтому для дальнейших исследований будет использоваться данный метод интегрирования.

**Результаты моделирования движения КА.** Моделирование проводилось с применением четырех моделей эфемерид: модели Мееса, EPM2021, DE430 и DE405. Для сравнения на рис. 5 приведены значения зависимости времени работы алгоритма моделирования, отнесенного ко времени работы алгоритма при использовании модели эфемерид DE405.

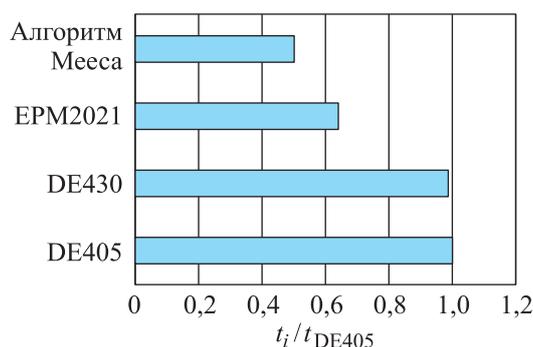


Рис. 5. Модели эфемерид, сравниваемые по быстродействию

Хотя алгоритм Мееса по точности и уступает численным моделям эфемерид, аналитический алгоритм все же работает быстрее (см. рис. 5), чем численные модели. Необходимо отметить, что отечественная модель эфемерид семейства EPM работает чуть быстрее численных моделей эфемерид семейства DE. Это объясняется различиями в построении «внешних» файлов, необходимых для работы алгоритма.

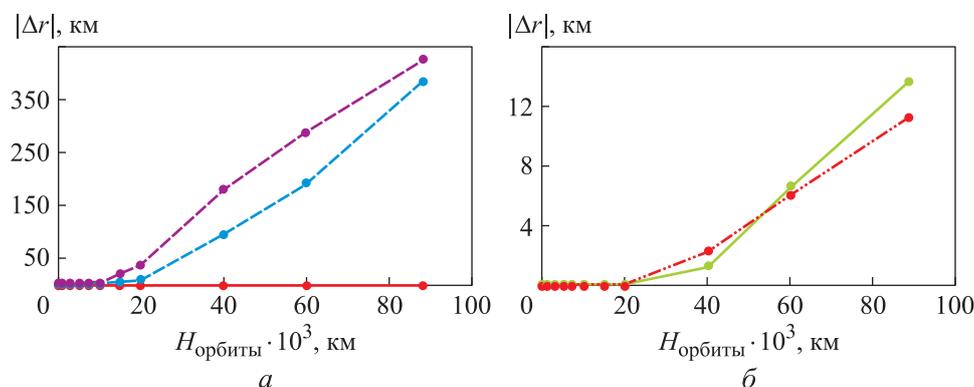
Далее был проведен анализ расхождений результатов прогноза относительно друг друга. В качестве аргумента для анализа использовано абсолютное значение разности модулей радиус-векторов КА, полученных по результатам соответствующих прогнозов. Сравнение данных, приведенных в табл. 2, показало, что рассмотренные численные модели эфемерид тел Солнечной системы практически эквивалентны по результирующей точности.

Таблица 2

Абсолютные значения расхождения невязок радиус-векторов

Модель эфемерид	$ \Delta r $ , мм		
	0	0,05935	0,03399
DE405	0	0,05935	0,03399
DE430	0,05935	0	0,02536
EPM2021	0,03399	0,02536	0

При суммарном анализе различных классов орбит (рис. 6) за эталонную орбиту принималась полученная расчетным путем с использованием модели эфемерид DE405.



**Рис. 6.** Невязки положений КА для различных моделей эфемерид (а) и для моделей эфемерид EPM2021 или DE430 (б):

— алгоритм Ньюкома; — алгоритм Мееса; — EPM2021, DE430; — EPM2021; — DE430

Анализ кривых на рис. 6 показал, что при прогнозе движения КА, находящегося на орбите высотой до 15 500 км, достаточно точные результаты обеспечивают аналитические модели эфемерид, в частности рекомендуется аналитический алгоритм Мееса. Однако для КА, находящихся на более высоких орбитах, причем особенно для тех, что осуществляют межпланетный перелет, аналитические модели эфемерид тел Солнечной системы целесообразно использовать лишь для проведения оценочных проектно-баллистических расчетов. Для высокоточного прогнозирования параметров движения КА необходимо применять численные модели эфемерид тел Солнечной системы, обеспечивающие высокую точность вычислений положения этих тел.

Сравнив гравитационные возмущающие ускорения на примере орбиты навигационного космического аппарата (НКА) ГЛОНАСС, для небесных тел получены следующие возмущающие ускорения,  $\text{м/с}^2$ :

Земля .....	$6,1285 \cdot 10^{-1}$
Луна .....	$4,0457 \cdot 10^{-6}$
Солнце .....	$1,0532 \cdot 10^{-6}$
Венера .....	$1,5481 \cdot 10^{-10}$
Юпитер .....	$3,1723 \cdot 10^{-11}$
Марс .....	$1,3494 \cdot 10^{-11}$
Меркурий .....	$2,4363 \cdot 10^{-12}$
Сатурн .....	$1,1164 \cdot 10^{-12}$
Уран .....	$1,6882 \cdot 10^{-14}$
Нептун .....	$4,3831 \cdot 10^{-15}$
Плутон .....	$6,3245 \cdot 10^{-19}$

Результаты прогнозирования движения НКА ГЛОНАСС под действием гравитационных сил от Солнца, Луны и Юпитера на среднесрочном интервале времени 30 сут представлены в орбитальной системе координат (рис. 7). Как видно на 30-дневном интервале моделирования, влияние гравитационного поля Луны на продольную дальность ( $\Delta x$ ) в 4,5 раза превосходит гравитационное влияние от Солнца. При этом вертикальная составляющая ( $\Delta y$ ) практически не изменяется, а боковой составляющей ( $\Delta z$ ) свойственен колебательный характер.

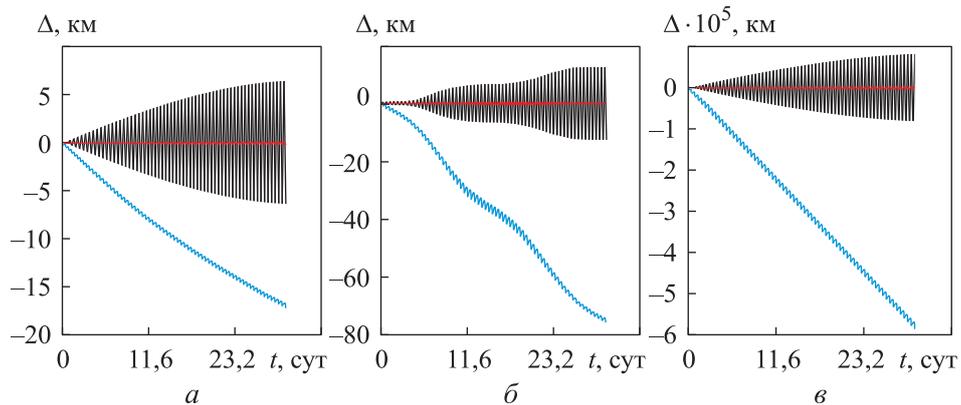


Рис. 7. Гравитационное влияние от Солнца (а), Луны (б), Юпитера (в):

—  $\Delta x$ ; —  $\Delta y$ ; —  $\Delta z$

**Заключение.** Выявлено, что при нахождении КА на орбитах высотой до 15 500 км влияние выбранного типа модели эфемерид тел Солнечной системы на результаты прогноза движения КА незначительно, следовательно, можно использовать аналитические модели эфемерид. Однако с увеличением высоты орбиты более 15 500 км гравитационное влияние тел Солнечной системы сказывается все сильнее, и поэтому применение аналитических моделей приводит к возникновению значительных погрешностей в результатах прогноза параметров движения КА. Таким образом, для орбит высотой более 15 500 км рекомендуется использовать численные высокоточные модели эфемерид небесных тел Солнечной системы. Для того чтобы более оперативно осуществлялись расчеты, рекомендуется выбирать модели эфемерид серии EPM. При одинаковом применении моделей эфемерид семейств EPM и DE в процедуре прогноза параметров движения КА модели семейства EPM обеспечивают более высокое быстродействие алгоритма для расчета координат тел Солнечной системы. Прибавка в быстродействии составляет  $\sim 38\%$ .

Важно отметить, что разработанный алгоритм работы с аналитическими и численными моделями эфемерид планет универсален. С его помощью можно прогнозировать движение КА на орбитах

искусственных спутников любых планет Солнечной системы, в том числе и на орбитах вокруг малых небесных тел, таких как астероиды и кометы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Топорков А.Г., Корянов В.В., Ду Ч. Учет параметров вращения Земли для высокоточного имитационного моделирования движения спутников ГЛОНАСС в интересах гражданских потребителей. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 10. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-10-2025>
- [2] Топорков А.Г. Анализ влияния возмущений от Луны, Солнца и планет Солнечной системы на движение космического аппарата ГЛОНАСС. *XLII Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения». Сб. тезисов докладов. В 4 т. Т. 1*. Москва, Изд-во МАИ, 2016, с. 193–194.
- [3] Козлов Е.А., Топорков А.Г. Прогнозирование движения космических аппаратов с использованием эфемерид планет и Луны ИПА РАН и JPL NASA. *Материалы 51-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского*. Калуга, Изд-во «Эйдос», 2016, с. 152.
- [4] Топорков А.Г., Козлов Е.А. Влияние высокоточных численных эфемерид планет и Луны на точность прогнозирования движения космических аппаратов. *Материалы XLI Академических чтений по космонавтике. Сборник тезисов чтений, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 310 с.
- [5] Брумберг В.А., Глебова Н.И., Лукашова М.В., Малков А.А., Питьева Е.В., Румянцева Л.И., Свешников М.Л., Фурсенко М.А. Расширенное объяснение к «Астрономическому ежегоднику». *Труды ИПА РАН, вып. 10 «Эфемеридная астрономия»*. Москва, 2004, 488 с.  
URL: <https://iaaras.ru/about/issues/transactions/t10/> (дата обращения 27.01.2023).
- [6] Нецветаева Г.А. *Автоматизация издания астрономических ежегодников. Дис. ... канд. физ.-мат. наук*. Санкт-Петербург, 1999, 135 с.
- [7] *Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac*, vol. 6. United States Naval Observatory. Nautical Almanac Office. Internet Archive. URL: <https://archive.org/details/06AstronomicalPapersPreparedForTheUse/page/n9/mode/2up> (дата обращения 27.01.2023).
- [8] Murison M.A. Modeling planetary motions: why we care and how we do it. Astronomical Applications Dept., U.S. Naval Observatory, 1999, pp. 1–20. In: *Proceedings: Nautical Almanac Office sesquicentennial symposium, U.S. Naval Observatory, March 3–4, 1999*. A.D. Fiala and S.J. Dick, eds. Washington, D.C., U.S. Naval Observatory, 1999, paper 377. URL: [https://www.researchgate.net/publication/253219266\\_Modeling\\_Planetary\\_Motions\\_Why\\_We\\_Care\\_and\\_How\\_We\\_Do\\_It](https://www.researchgate.net/publication/253219266_Modeling_Planetary_Motions_Why_We_Care_and_How_We_Do_It) (дата обращения 27.01.2023).
- [9] Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides. *IMCCE*. URL: <https://www.imcce.fr/institut/presentation/> (дата обращения: 27.01.2023).
- [10] Simon J.L., Francou G., Fienga A., Manche H. New analytical planetary theories VSOP2013 and TOP2013. *Astronomy & Astrophysics*, 2013, vol. 557, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321843>
- [11] Approximate Positions of the Planets. Jet Propulsion Laboratory. NASA. URL: [https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/approx\\_pos.html](https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/approx_pos.html) (дата обращения 27.01.2023).
- [12] Холшевников К.В., Титов В.Б. *Задача двух тел*. Санкт-Петербург, Изд-во СПбГУ, 2007, 180 с.

- [13] Meeus J. *Astronomical Algorithms*. 2nd ed. Willmann-Bell Publ., 1998, 477 p.
- [14] Питьева Е.В. Современные численные теории движения Солнца, Луны и больших планет. *Сообщения ИПА РАН, № 156*. Санкт-Петербург, 2003, 33 с.
- [15] Standish E., Williams J.G. *Chapter 8: Orbital Ephemerides of the Sun, Moon, and Planets*. University Science Books, 2006, 33 p.
- [16] Newhall X.X., Standish E.M., Williams J.G. DE102: a numerical integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries. *Astron. & Astrophys.*, 1983, vol. 125, pp. 150–167.  
URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1983A%26A...125..150N/abstract> (дата обращения 27.01.2023).
- [17] Estabrook F.B. Post-Newtonian n-body equations of the Brans—Dicke theory. *The Astrophysical Journal*, 1969, vol. 158, pp. 81–83.  
URL: [http://www.modsys.narod.ru/Library/For\\_Stat/Estabrook\\_F\\_B\\_1.pdf](http://www.modsys.narod.ru/Library/For_Stat/Estabrook_F_B_1.pdf) (дата обращения 27.01.2023).
- [18] Krasinsky G.A., Pitjeva E.V., Vasilyev M.V., Yagudina E.I. Hidden mass in the asteroid belt. *Icarus*, 2002, vol. 158, pp. 98–105.  
<https://doi.org/10.1006/icar.2002.6837>
- [19] Алексеев С.О., Памятных Е.А., Урсулов А.В., Третьякова Д.А., Ранну К.А. *Введение в Общую теорию относительности, ее современное развитие и приложения*. Екатеринбург, Изд-во Уральского университета, 2015, 380 с.  
URL: <https://elar.urfu.ru/handle/10995/36218> (дата обращения 27.01.2023).
- [20] Bateman H., Eritelyi A. *Higher Transcendental Functions*. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953, vol. 3, 310 p.  
URL: <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140123-104529738> (дата обращения: 27.01.2023).
- [21] Эфемериды ЕРМ. *ИПА РАН*. URL: <http://iaaras.ru/dept/ephemeris/epm/> (дата обращения 27.01.2023).
- [22] FTP сервер. *ИПА РАН*. URL: <ftp://ftp.iaaras.ru/pub/epm> (дата обращения 27.01.2023).
- [23] Hilton J.L., Acton C., Arlot J.-E. *Report of the IAU Commission 4 Working Group on Standardizing Access to Ephemerides and File Format Specification*. July 16, 2015, pp. 41. URL: <https://syrtel.obspm.fr/jsr/journees2013/pdf/Hilton.pdf> (дата обращения 27.01.2023).
- [24] The SPICE Toolkit. *NAIF*. URL: <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/toolkit.html> (дата обращения 27.01.2023).
- [25] *The International Astronomical Union*. URL: <https://www.iau.org/> (дата обращения 27.01.2023).

Статья поступила в редакцию 09.06.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Топорков А.Г., Козлов Е.А. Комплексная оценка аналитических и численных моделей эфемерид планет Солнечной системы на примере околоземных КА. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 8.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-8-2300>

**Топорков Алексей Геннадьевич** — старший преподаватель кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
e-mail: [agtoporkov@bmstu.ru](mailto:agtoporkov@bmstu.ru)

**Козлов Егор Андреевич** — выпускник кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.  
e-mail: [mircosmos@yandex.ru](mailto:mircosmos@yandex.ru)

## Comprehensive evaluation of analytical and numerical models of the Solar System planets ephemerides on the example of the near-Earth spacecraft

© A.G. Toporkov, E.A. Kozlov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The paper presents a developed algorithm for using the high-precision numerical ephemerid models. Qualitative and quantitative comparison of analytical and numerical high-precision planetary ephemerid models was carried out, including NASA averaged elements model, Newcomb model, Mees model, DE/LE series models and EPM series models. Absolute values of the radius vector residuals for each planet of the Solar System were obtained within the framework of the considered ephemerid models. Integration methods were evaluated, including Runge—Kutta method of the 4<sup>th</sup> order, Adams method of the 16<sup>th</sup> order and Dorman-Prince method of the 5(4)th order. Results of evaluating accuracy and efficiency of calculations depending on the integration stage were obtained. Values of perturbing accelerations from the Sun, Moon and planets for a GLONASS-type spacecraft were calculated. Practical recommendations are provided for using analytical and numerical planetary ephemerides in simulation of the near-Earth spacecraft motion.*

**Keywords:** planetary ephemerides, EPM, DE/LE, GLONASS, Solar System planets, gravitation forces

### REFERENCES

- [1] Toporkov A.G., Koryanov V.V., Du Chongrui. Uchet parametrov vrascheniya Zemli dlya vysokotochnogo imitatsionnogo modelirovaniya dvizheniya sputnikov GLONASS v interesakh grazhdanskikh potrebiteley [Parameters of the Earth's rotation taken into account in high-precision simulation of the GLONASS satellites motion in the interests of civil consumers]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, iss 10. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-10-2025>
- [2] Toporkov A.G. Analiz vliyaniya vozmuscheniy ot Luny, Solntsa i planet Solnechnoy sistemy na dvizhenie kosmicheskogo apparata GLONASS [Analysis of the influence of disturbances from the Moon, the Sun and planets of the solar system on the motion of the GLONASS spacecraft]. In: *XLII Mezhdunarodnaya molodezhnaya nauchnaya konferentsiya "Gagarinskie chteniya": Sbornik tezisev dokladov* [XLII International Youth Scientific Conference "Gagarin Readings. Collection of abstracts]. In 4 vols. Vol. 1. Moscow, MAI Publ., 2016, pp. 193–194.
- [3] Kozlov E.A., Toporkov A.G. Prognozirovaniye dvizheniya kosmicheskikh apparatov s ispolzovaniyem efemerid planet i Luny IPA RAN i JPL NASA [Forecasting the motion of spacecraft using the ephemeris of the planets and the Moon IAA RAS and JPL NASA]. In: *Materialy LI Nauchnykh chteniy pamyati K.E. Tsiolkovskogo* [Proceedings of the LI Scientific readings in memory of K.E. Tsiolkovsky]. Kaluga, Eydos Publ., 2016, p. 152.
- [4] Toporkov A.G., Kozlov E.A. Vliyaniye vysokotochnykh chislennykh efemerid planet i Luny na tochnost prognozirovaniya dvizheniya kosmicheskikh apparatov [Influence of high-precision numerical ephemeris of the planets and the

- Moon on the accuracy of forecasting the movement of spacecraft]. In: *Materialy XLI Akademicheskikh chteniy po kosmonavtike. Sbornik tezisov chteniy, posvyaschennyye pamyati akademika S.P. Koroleva i drugikh vydayuschikhsya otechestvennykh uchennykh — pionerov osvoeniya kosmicheskogo prostranstva* [Materials of the XLI Academic readings on cosmonautics. Collection of abstracts of readings dedicated to the memory of Academician S.P. Korolev and other outstanding domestic scientists — pioneers of space exploration]. Moscow, BMTSU Publ., 2017, 310 p.
- [5] Brumberg V.A., Glebova N.I., Lukashova M.V., Malkov A.A., Pitjeva E.V., Rumyantseva L.I., Sveshnikov M.L., Fursenko M. A. Rasshirennoe obyasnienie k «Astronomicheskomu ezhegodniku» [Extended explanation to the “Astronomical Yearbook”]. *Transactions of IAA RAS, Iss. 10*. Saint Petersburg, 2004, 488 p. Available at: <https://iaaras.ru/about/issues/transactions/t10/> (accessed January 27, 2023).
- [6] Netsvetaeva G.A. *Avtomatizatsiya izdaniya astronomicheskikh yezhegodnikov* Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Automation of publishing astronomical yearbooks. Diss. ... Cand. Sc. (Phys.-Math.)]. Saint Petersburg, 1999, 135 p.
- [7] *Astronomical papers prepared for the use of the American ephemeris and nautical almanac*. Volume 6. Internet Archive. Available at: <https://archive.org/details/06AstronomicalPapersPreparedForTheUse/page/n9/mode/2up> (accessed January 27, 2023).
- [8] Murison M.A. *Modeling planetary motions: why we care and how we do it*. Astronomical Applications Dept., U.S. Naval Observatory, 1999, pp. 1–20. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/253219266\\_Modeling\\_Planetary\\_Motions\\_Why\\_We\\_Care\\_and\\_How\\_We\\_Do\\_It](https://www.researchgate.net/publication/253219266_Modeling_Planetary_Motions_Why_We_Care_and_How_We_Do_It) (accessed January 27, 2023).
- [9] Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides. *IMCCE*. Available at: <https://www.imcce.fr/institut/presentation/> (accessed January 27, 2023).
- [10] Simon J.L., Francou G., Fienga A., Manche H. New analytical planetary theories VSOP2013 and TOP2013. *Astronomy & Astrophysics*, 2013, vol. 557, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321843>
- [11] Approximate Positions of the Planets. Jet Propulsion Laboratory. NASA. Available at: [https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/approx\\_pos.html](https://ssd.jpl.nasa.gov/planets/approx_pos.html) (accessed January 27, 2023).
- [12] Kholoshevnikov K.V., Titov V.B. *Zadacha dvukh tel* [The problem of two bodies]. Saint Petersburg, SPBGU Publ., 2007, 180 p.
- [13] Meeus J. *Astronomical Algorithms*. 2nd ed. Willmann-Bell Publ., 1998, 477 p.
- [14] Pitjeva E.V. Sovremennyye chislennyye teorii dvizheniya Solntsa, Lunny i bolshikh planet [Modern numerical ephemerides of the Sun, the Moon and major planets]. In: *Preprints of IAA RAS No. 156*. Saint Petersburg, 2003, 33 p.
- [15] Standish E., Williams J.G. *Chapter 8: Orbital Ephemerides of the Sun, Moon and Planets*. University Science Books, 2006, 33 p.
- [16] Newhall X.X., Standish E.M., Williams J.G. DE102: a numerical integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries. *Astron. & Astrophys.*, 1983, no. 125, pp. 150–167. Available at: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1983A%26A...125..150N/abstract> (accessed January 27, 2023).
- [17] Estabrook F. B. Post-Newtonian n-body equations of the Brans-Dicke theory. *The Astrophysical Journal*, vol. 158, pp. 81–83. Available at: [http://www.modsys.narod.ru/Library/For\\_Stat/Estabrook\\_F\\_B\\_1.pdf](http://www.modsys.narod.ru/Library/For_Stat/Estabrook_F_B_1.pdf) (accessed January 27, 2023).
- [18] Krasinsky G.A., Pitjeva E.V., Vasilyev M.V., Yagudina E.I., 2002. Hidden mass in the asteroid belt. *Icarus*, 2002, no. 158, pp. 98–105. <https://doi.org/10.1006/icar.2002.6837>

- [19] Alekseev S.O., Pamyatnykh E.A., Ursulov A.V., Tretyakova D.A., Rannu K.A. *Vvedenie v Obschuyu teoriyu otositelnosti, ee sovremennoe razvitie i prilozheniya* [Introduction to General Relativity, its modern development and applications]. Ekaterinburg, UrFU Publ., 2015, 380 p. Available at: <https://elar.urfu.ru/handle/10995/36218> (accessed January 27, 2023).
- [20] Bateman H., Eritelyi A. *Higher Transcendental Functions*. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953, vol. 3, 310 p. Available at: <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140123-104529738> (accessed January 27, 2023).
- [21] Efemeridy EPM [EPM ephemeris]. IAA RAS. Available at: <http://iaaras.ru/dept/ephemeris/epm/> (accessed January 27, 2023).
- [22] FTP server [FTP server]. IAA RAS. Available at: <ftp://ftp.iaaras.ru/pub/epm> (accessed January 27, 2023).
- [23] Hilton J.L., Acton C., Arlot J.-E. *Report of the IAU Commission 4 Working Group on Standardizing Access to Ephemerides and File Format Specification*. July 16, 2015, pp. 41. Available at: <https://syrtte.obspm.fr/jsr/journees2013/pdf/Hilton.pdf> (accessed January 27, 2023).
- [24] The SPICE Toolkit. *NAIF*. Available at: <https://naif.jpl.nasa.gov/naif/toolkit.html> (accessed January 27, 2023).
- [25] *The International Astronomical Union*. Available at: <https://www.iau.org/> (accessed January 27, 2023).

**Toporkov A.G.**, Senior Lecturer, Department SM-3 of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 publications in ballistics and navigation satellites. e-mail: [agtoporkov@bmstu.ru](mailto:agtoporkov@bmstu.ru)

**Kozlov E.A.**, Graduating Student, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: [mircosmos@yandex.ru](mailto:mircosmos@yandex.ru)