

## Математическая модель продольного движения космического аппарата на различных участках его полета

© В.Ю. Ермаков, А. Туфан, М.В. Бирюкова, С.О. Фирсюк

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, 125993, Россия

*Проведены исследования устойчивости космического аппарата (КА) при малых и больших углах атаки под воздействием возмущений, возникающих от аэродинамического сопротивления, скорости ветра и линейного эксцентриситета тяги, вызванного отклонениями (несоосностью) угла установки двигателя ускорителя КА. Рассмотрено возможное использование КА с раскрывающимися тормозными поверхностями при движении в атмосфере. Разработана математическая модель возмущенного движения КА на различных этапах его полета на планету назначения. Эта математическая модель использована при исследованиях запуска КА с наклонной и с вертикальной стартовых установок, а также спуска КА для посадки на поверхность планеты без учета работы тормозных двигателей. Рассчитаны параметры траекторий КА с ускорителем в плоскости тангажа в зависимости от высоты полета и наклона стартового стола.*

**Ключевые слова:** коэффициент демпфирующего момента, тяга двигателя, эксцентриситет тяги, угол атаки, траектория движений, средняя аэродинамическая хорда, встречный ветер, температура окружающей среды

**Введение.** При разработке современной космической техники приходится решать ряд таких задач, когда в определенный момент функционирования космического аппарата (КА) требуется использовать раскрывающиеся тормозные поверхности. В основном к таким задачам относятся:

- посадка на поверхность планеты назначения тяжеловесных аппаратов, когда необходимы большие, не помещающиеся под головным обтекателем КА, аэродинамические тормозные экраны [1, 2];
- спуск на поверхность Земли для спасения отработавших при запуске КА ступеней или разгонных блоков, что повышает экономическую эффективность аппаратов благодаря возможности их многократного использования;
- спуск в атмосферу планеты назначения аппаратов с пониженным уровнем тепловых потоков и с обеспечением на заданной высоте определенной скорости движения посредством выбора соответствующего размера тормозного экрана и др.

Один из вариантов раскрывающегося лобового аэродинамического экрана спускаемого в атмосфере объекта — экран надувной конструк-

ции, представляющий собой замкнутую герметичную оболочку с гибкой теплозащитной системой на внешней поверхности. После того как объем оболочки заполнится газом, она приобретает заданную аэродинамическую форму во время движения в атмосфере. Надувные элементы, масса которых сопоставима с массой жестких конструкций, обеспечивают возможность компактной укладки на этапе выведения, в том числе в грузовых отсеках транспортных кораблей, транспортных защитных контейнерах и других емкостях [3].

Поскольку отмечается нагрев надувных элементов КА под воздействием высокоскоростного и высокотемпературного газа при спуске КА в атмосфере, требуется проведение уточненных расчетов параметров конструкции системы тепловой защиты [4].

Основная цель проведения представленного расчета конструкции КА — предварительное построение математической модели его возмущенного движения на этапах запуска с поверхности и спуска в атмосфере планеты назначения.

**Построение математической модели возмущенного движения КА.** В разрабатываемой математической модели определяющими параметрами возмущения являются скорость ветра  $W$ , как встречного, так и попутного; тяга двигателя  $P$ ; линейный эксцентриситет тяги  $h$  [5, 6]. Математическую модель целесообразно применять при исследовании запуска КА с наклонной и с вертикальной стартовых установок, а также при спуске КА в атмосфере планеты назначения для посадки на ее поверхность (например, спускаемые аппараты) в диапазоне углов атаки  $0 < \alpha < 90^\circ$ , но без учета работы тормозных двигателей [7].

Участок движения КА по направляющим стартовой установки определяется его длиной  $L$  и начальным углом тангажа  $\vartheta_0$ . В процессе движения по направляющим вычисляются время, скорость, вес и тяга КА в момент его схода с направляющих [8].

Исходные данные для их расчета следующие: начальный вес  $G_0$ , вес топлива  $G_T$ , импульс  $I_{дв}$  и тяга  $P$  двигателя. По этим параметрам определяются:

– удельная тяга двигателя на 1,0 кг ( $\sim 10,0$  Н) топлива

$$P_{уд} = \frac{I_{дв}}{G_T};$$

– момент времени, когда КА стронулся с места в направляющих,

$$t'_0 = \frac{G_0 \sin \vartheta_0}{P_{max}} \tau_1,$$

где  $P_{max}$  — максимальная тяга двигателя, Н;  $\tau_1$  — время начала движения КА, с;

– время от начала движения КА до выхода тяги на максимальную величину  $P_{\max}$

$$t_1 = \tau_1 - t'_0;$$

– достигнутая к моменту времени  $t_1$  скорость движения

$$V_1 = \frac{P_{\max}}{\tau_1} \frac{1}{m_0} \frac{t_1^2}{2},$$

где  $m_0$  — начальная масса КА, кг;  $P_{\max}/\tau_1$  — градиент роста тяги, Н/с;

– длина пути КА до выхода двигателя на режим

$$l_1 = \frac{P_{\max}}{\tau_1 m_0} \frac{t_1^3}{6};$$

– продолжительность остатка пути при движении КА по направляющим

$$l_2 = L - l_1;$$

– ускорение при движении КА по направляющим

$$a = \frac{P_{\max}}{m_0} - g \sin \vartheta_0, \text{ м/с}^2,$$

где  $g$  — ускорение свободного падения;

– скорость в момент схода КА с направляющих

$$V_{00} = \sqrt{V_1^2 + 2al_2};$$

– время прохождения остатка пути

$$t_2 = \frac{V_{00} - V_1}{a};$$

– время прохождения в направляющих  $L$  всего пути

$$t_{00} = \tau_1 - t_2;$$

– топливо, израсходованное при движении по направляющим,

$$\Delta G_T = \frac{P_{\max}}{P_{\text{уд}}} \left( \frac{\tau_1}{2} + t_2 \right);$$

– начальный вес КА в момент схода с направляющих

$$G_{00} = G_0 - \Delta G_T.$$

Кроме того, в земной системе координат задается угол наклона траектории  $\theta_{00} = \vartheta_0$ , что соответствует углу установки направляющих стартового стола.

Для расчета движения КА на участке его полета необходимо иметь следующие параметры [9]:

1) характеризующие работу двигателя после схода с направляющих, определяемые по диаграмме  $P = f(t)$  (рис. 1, а); импульс

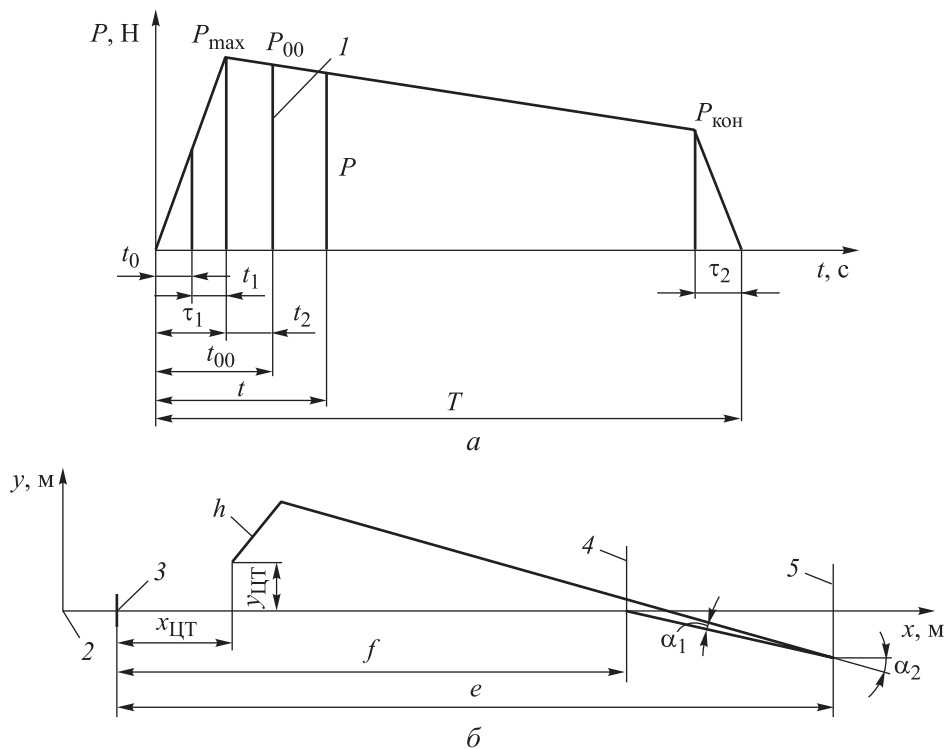
$I = \int P dt$ ; секундный расход топлива  $G_{сек} = \frac{P}{P_{уд}}$ ; расход топлива

$G_T = \int_0^t G_{сек} dt$ ; относительный расход топлива  $\bar{G}_T = \frac{G_T}{G_{T пол}}$ , где  $G_{T пол}$  —

начальный вес топлива, кг; соответственно вес  $G = G_{T пол} - G_T$ ;

2) координату центра тяжести  $x_{ЦТ} = x_{ЦТ}(\bar{G}_T)$  и момент инерции  $I_z = I_z(\bar{G}_T)$ , задаваемые в виде зависимости от относительного расхода топлива в процентах (%);

3) линейный эксцентриситет тяги  $h$ , возникающий при работе двигателя в процессе полета (рис. 1, б),  $h = B - \alpha_3 x_{ЦТ}$ .



**Рис. 1.** Информация о работе двигательной установки ускорителя:

а — диаграмма работы двигателя; б — формирование плеча линейного эксцентриситета тяги; 1 — сход с направляющих; 2 — нос космического аппарата; 3 — начало средней аэродинамической хорды; 4 — стык ускорителя со второй ступенью; 5 — сопло двигателя

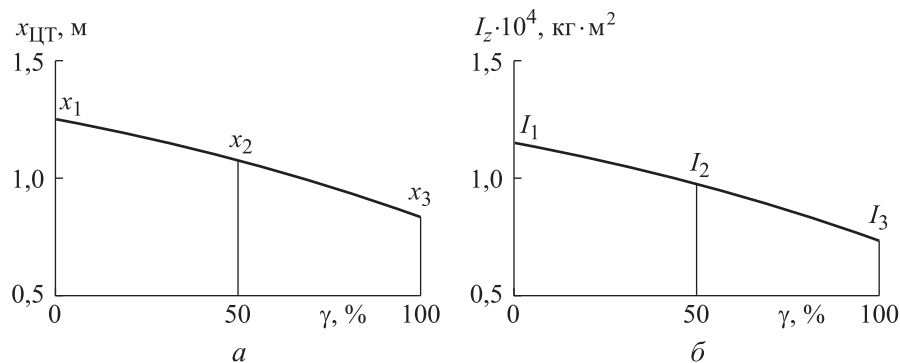
Здесь  $B = \alpha_1 f + \alpha_2 e - y$ , где  $\alpha_1, \alpha_2$  — углы поворота осей ускорителя и сопла соответственно, град;  $f$  — деформационный эксцентриситет, зависящий от несимметричной деформации корпуса двигателя и сопла в процессе полета;  $e$  — газодинамический эксцентриситет в зависимости от удельного расхода топлива;  $y = y_0 + \frac{y_k - y_0}{x_{тк} - x_{т0}} x$ ;

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2;$$

4) координату центра тяжести и момент инерции в зависимости от удельного расхода топлива  $\gamma$ , рассчитываемого по формуле

$$\gamma = \frac{G_{т}}{P}. \quad (1)$$

Аппроксимация зависимостей  $x_{ЦТ}$  и  $I_z$  осуществляется по трем точкам расхода топлива, например:  $x_1$  при  $\gamma = 0$ ;  $x_2$  при  $\gamma = 50\%$ ;  $x_3$  при  $\gamma = 100\%$  (рис. 2, а), где  $x_i = x_{ЦТ}$ . Аналогично кривой на рис. 2, а имеет вид и кривая зависимости для  $I_z$  (рис. 2, б), но уже со своими параметрами, например,  $I_1 = 1,15 \cdot 10^4$  кг·м<sup>2</sup> при  $\gamma = 0$ ;  $I_2 = 9,8 \cdot 10^3$  кг·м<sup>2</sup> при  $\gamma = 50\%$ ;  $I_3 = 7,2 \cdot 10^3$  кг·м<sup>2</sup> при  $\gamma = 100\%$ .



**Рис. 2.** Диаграммы, характеризующие статическую устойчивость КА:  
 а — зависимость координаты центра тяжести от удельного расхода топлива;  
 б — зависимость момента инерции от удельного расхода топлива

Координата центра тяжести и момент инерции в зависимости от удельного расхода топлива определяются по формулам:

$$x_{ЦТ} = x - (3x_1 - 4x_2 + x_3)\gamma + 2(x_1 - 2x_2 + x_3)\gamma^2; \quad (2)$$

$$I_z = I_z - (3I_1 - 4I_2 + I_3)\gamma + 2(I_1 - 2I_2 + I_3)\gamma^2. \quad (3)$$

При этом система уравнений движения КА в вертикальной плоскости с учетом линейного эксцентриситета тяги и возмущений,

вызванных ветром, в осях скоростной системы координат имеет следующий вид [9, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{P \cos \alpha - X}{m_0} - g \sin \theta; \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{P \cos \alpha + Y}{m_0} - \frac{g \cos \theta}{V} + \frac{P\alpha_3}{m_0 V}; \\ \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= \frac{1}{I_z} (M_\vartheta + M_{z-c_n} + M_{z_\omega} + M_{z_0}). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $V$  — скорость набегающего потока, м/с;  $\alpha$  — угол атаки, град,  $\alpha = \vartheta - \theta$ ;  $\theta$  — угол наклона траектории, град;  $\vartheta$  — угол тангажа, град;  $X$  — сила лобового сопротивления, Н,  $X = c_x S \frac{\rho V^2}{2}$  ( $c_x$  — коэффициент лобового сопротивления;  $S$  — характерная площадь, м<sup>2</sup>;  $\rho$  — плотность среды, кг/м<sup>3</sup>);  $Y$  — аэродинамическая подъемная сила, Н,  $Y = c_y S \frac{\rho V^2}{2}$  ( $c_y$  — коэффициент аэродинамической подъемной силы);  $M_\vartheta$  — момент, вызванный от линейного эксцентриситета тяги, Н·м,  $M_\vartheta = -P_H h_\vartheta$  ( $P_H$  — сила, вызванная от линейного эксцентриситета тяги, Н,  $P_H = P + \Delta P_H$ ;  $\Delta P_H$  — высотная поправка расхода топлива, Н,  $\Delta P_H = (p_0 - p_H) F$ ;  $p_0$  — давление у поверхности планеты назначения, Н/м<sup>2</sup>;  $p_H$  — давление на высоте, Н/м<sup>2</sup>;  $F$  — площадь сопла, м<sup>2</sup>);  $M_{z-c_n}$  — аэродинамический момент тангажа, Н·м,  $M_{z-c_n} = m_{z-c_n} S \frac{\rho V^2}{2} b_a$  ( $m_{z-c_n}$  — коэффициенты аэродинамического момента тангажа);  $M_{z_\omega}$  — демпфирующий момент тангажа, Н·м,  $M_{z_\omega} = m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z \frac{q}{V} \frac{d\vartheta}{dt} S b_a^2$  ( $m_z^{\bar{\omega}_z}$  — коэффициенты демпфирующего момента тангажа;  $\bar{\omega}_z$  — безразмерная угловая скорость вращения КА,  $\bar{\omega}_z = \frac{\omega_z b_a}{V}$ ;  $\omega_z$  — угловая скорость вращения КА, м/с<sup>2</sup>;  $b_a$  — средняя аэродинамическая хорда (САХ), м;  $q$  — скоростной напор, кг/(м·с<sup>2</sup>),  $q = \rho V^2 / 2$ );  $M_{z_0}$  — момент от ветровой нагрузки, Н·м.

Для учета горизонтального ветра используют две системы координат: земную (с нижним индексом «з») и скоростную (без нижнего индекса) [5, 8].

Переход от земной системы координат в скоростную имеет вид

$$\begin{aligned} V_x &= V_{x3} - W_x, \\ V_y &= V_{y3}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $V_{x3} = V_3 \cos \theta_3$ ;  $V_{y3} = V_3 \sin \theta_3$ .

$$\text{Тогда } V = \sqrt{V_{y3}^2 + (V_{x3} - W_x)^2}, \text{ а } \operatorname{tg} \theta = \frac{V_{y3}}{V_{x3} - W_x}.$$

Переход от скоростной системы координат в земную имеет вид

$$\begin{aligned} V_{x3} &= V_x - W_x; \\ V_{y3} &= V_y, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $V_x = V \cos \theta$ ;  $V_y = V \sin \theta$ .

$$\text{Тогда } V_3 = \sqrt{V_y^2 + (V_x - W_x)^2}, \text{ а } \operatorname{tg} \theta = \frac{V_{y3}}{V_x + W_x}.$$

Аэродинамические характеристики КА представлены на рис. 3. Так, для числа Маха  $M \leq 0,8$  на рис. 3, а показана зависимость коэффициента аэродинамической нормальной силы первой ступени от угла атаки  $c_n = f(|\alpha|)$ , в этом случае определяются  $c_y = c_n \cos \alpha$ ;  $c_x = c_{x0} + c_y \operatorname{tg} \alpha$ , где  $c_{x0} = \text{const}$ . На рис. 3, б представлена зависимость центра давления (ЦД) первой ступени от числа Маха  $x_{\text{ЦД}} = f(M)$ .

Для  $M > 0,8$  на рис. 3, б представлена зависимость производной коэффициента  $c_y = c_y^\alpha \alpha$  аэродинамической подъемной силы от угла атаки от числа Маха для первой (1) и второй (2) ступеней,  $c_y^\alpha = f(M)$ , а на рис. 3, в приведена зависимость коэффициента лобового сопротивления первой ступени от числа Маха  $c_{x0} = f(M)$ .

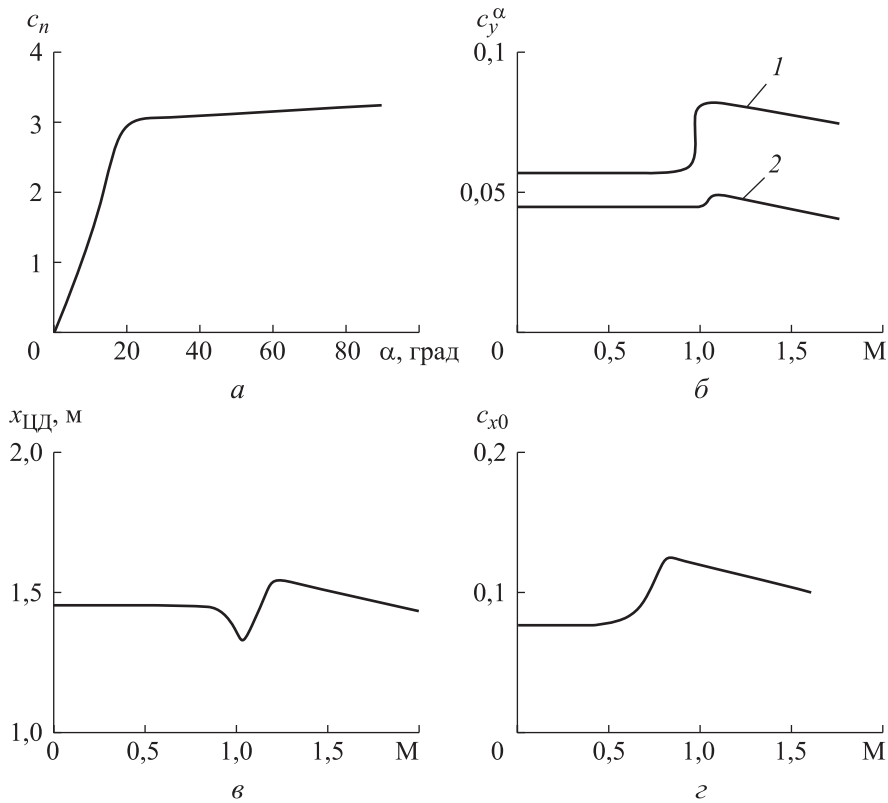
Коэффициент аэродинамического момента тангажа определяется формулой

$$m_{z-c_n} = c_n (\bar{x}_{\text{ЦТ}} - \bar{x}_{\text{ЦД}}), \quad (7)$$

где  $\bar{x}_{\text{ЦТ}}$  — координата положения центра тяжести;  $\bar{x}_{\text{ЦД}}$  — координата положения центра давления.

Коэффициент демпфирующего момента тангажа рассчитывают по формуле

$$m_z^{\bar{\omega}_z} = \left| -c_{y2}^\alpha \bar{x}_{\text{ЦД}1}^2 - c_{y1}^\alpha \bar{x}_{\text{ЦД}2}^2 \right|, \quad (8)$$



**Рис. 3.** Аэродинамические характеристики КА:

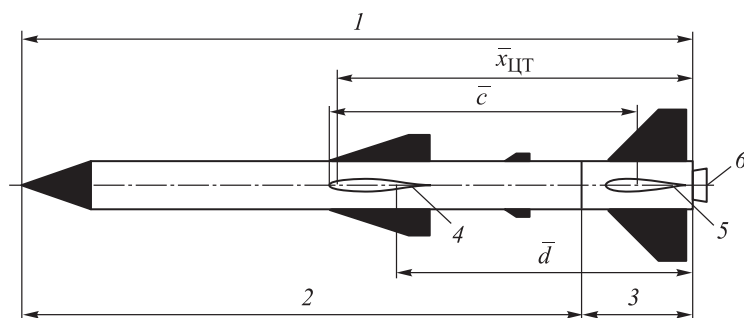
*a* — зависимость коэффициента аэродинамической нормальной силы первой ступени от угла атаки; *б* — зависимость производной коэффициента аэродинамической подъемной силы от угла атаки от числа Маха для первой (1) и второй (2) ступеней; *в* — зависимость центра давления первой ступени от числа Маха; *г* — зависимость коэффициента лобового сопротивления первой ступени от числа Маха

где  $\bar{x}_{ЦД_1} = \bar{d} - \bar{x}_{ЦД}$ ;  $\bar{x}_{ЦД_2} = \bar{c} - \bar{x}_{ЦД}$ ;  $\bar{d}$  — положение ЦД в САХ крыла;  $\bar{c}$  — относительное расстояние от начала САХ крыла до 40 % САХ горизонтального оперения.

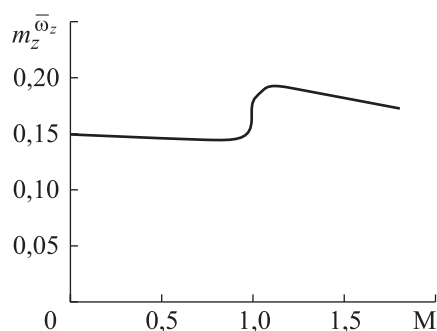
Схема рассматриваемого КА приведена на рис. 4.

Зависимости  $c_{y_1}^\alpha = f(M)$  и  $c_{y_2}^\alpha = f(M)$ , представленные на рис. 3, б, характеризуют коэффициенты аэродинамической подъемной силы от угла атаки на высотах до  $2,5 \cdot 10^3$  м и при различных скоростях полета; а зависимость  $m_z^{\bar{\omega}_z} = f(M)$ , приведенная на рис. 5, — коэффициенты демпфирующего момента тангажа на высотах до  $2,5 \cdot 10^3$  м при различных скоростях полета.





**Рис. 4.** Схема двухступенчатого космического аппарата с ускорителем:  
 1 — первая ступень; 2 — вторая ступень; 3 — ускоритель; 4 — средняя аэродинамическая хорда крыла; 5 — средняя аэродинамическая хорда горизонтального оперения; 6 — сопло двигателя



**Рис. 5.** Зависимость коэффициента демпфирующего момента тангажа от числа Маха

Исследование движения КА сопровождается вычислением температуры, давления:

$$\frac{dp}{dH} = -\frac{p}{RT}, \quad (9)$$

где  $p$  — давление у поверхности планеты назначения,  $\text{Н/м}^2$ ;  $R = 8,134$  — универсальная газовая постоянная,  $\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ ;  $H$  — высота полета, м;  $T$  — температура окружающей среды,  $^{\circ}\text{C}$ ,

а также плотности и скорости звука по высоте полета [11, 12]:

$$\rho = \frac{p}{gR};$$

$$a = \sqrt{kgRT},$$

где  $k = 1,4$  — показатель адиабаты для воздуха.

Аппроксимация уравнения (9) для первой ступени КА до высоты  $H = 2,5 \cdot 10^3$  м и при температуре окружающей среды  $T$ , например, у поверхности Земли равной  $-50$  °С (в условиях зимы), должна иметь тогда давление у поверхности Земли  $p = 1,076 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup>. При этом градиент изменения температуры по высоте  $\beta_H$  может быть представлен следующим образом:

$$\beta_H = 1,0 \cdot 10^4 \text{ град/м при } 0 \leq H \leq 1,0 \cdot 10^3 \text{ м,} \quad (10)$$

$$\beta_H = 0 \text{ град/м при } 1,0 \cdot 10^3 \leq H \leq 2,5 \cdot 10^3 \text{ м.} \quad (11)$$

В этом случае температура будет представлена выражением

$$T = T^* + \beta_H (H - H^*),$$

где верхний индекс (\*) относится к нижней границе данного слоя атмосферы.

Проведем расчет динамики полета КА на участке запуска первой ступени аппарата с помощью ускорителя. Анализу подвергается полет первой ступени в плоскости тангажа двухступенчатого КА при схеме без управления по тангажу, но со стабилизацией по крену, что обеспечивается установкой на ускорителе оперения с элероном [9].

Полет КА рассматривается в неспокойной атмосфере, в которой скорость ветра может достигать до 30 м/с, вместе с тем существует вероятность возникновения и линейного эксцентриситета тяги [13].

Характеристика статической устойчивости на дозвуковом режиме формируется путем сопоставления положения центра тяжести и центра давления. Изменение положения центра давления в зависимости от угла атаки получено на основе анализа продувок моделей КА подобного класса в дозвуковой трубе (рис. 6).

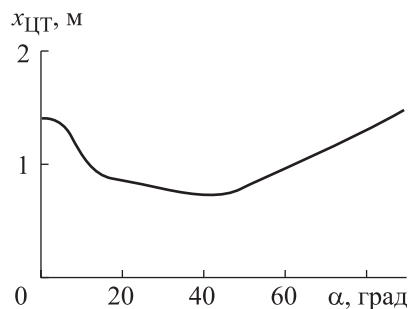


Рис. 6. Зависимость центра давления первой ступени от угла атаки

Большие углы атаки возникают на начальном участке автономного полета после схода с направляющих при ветре, скорость которого может достигать 30 м/с. Полет на неустойчивом режиме (при скорости

ветра до 30 м/с) сопровождается вращением КА в плоскости тангажа в сторону увеличения его угла атаки [11]. Вращение продолжается по инерции и после достижения устойчивости при скорости ветра 30 м/с.

Для того чтобы обеспечить устойчивость движения КА, определяются коэффициенты усиления его системы управления, в которой исполнительными органами (далее — органы управления) являются газовые рули. Выбор этих коэффициентов ( $k_1, k_2$ ) осуществляется с помощью построения области устойчивости, в которой они вычисляются по следующим формулам [14]:

$$k_1 = \frac{1}{b_1^2 f^2 + b_2^2} (A_{16} f^6 + A_{14} f^4 + A_{12} f^2 + A_{10}), \quad (12)$$

$$k_2 = \frac{1}{b_1^2 f^2 + b_2^2} (A_{24} f^4 + A_{22} f^2 + A_{20}). \quad (13)$$

Здесь  $A_{16} = -a_0 b_1 T_2^2$ ;  $a_0 = m_0 I_z$ ;  $b_1 = -m_0 c_{y\delta}$ ;  $A_{14} = b_1 (a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) - b_2 (a_1 T_2^2 + a_0 T_1)$ ;  $a_1 = m_0 \mu_z + c_{yy} J_z$ ;  $a_2 = m_0 c_{y\delta} + \mu_z c_{yy} - c_{y\delta} v_y$ ;  $A_{12} = b_2 (a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1) - b_1 (a_2 + a_3 T_1)$ ;  $b_2 = c_{y\delta} c_{y\delta} - c_{yy} c_{y\delta}$ ;  $a_3 = c_{yy} c_{y\delta} - c_{y\delta} c_{y\delta}$ ;  $A_{10} = -a_3 b_2$ ;  $A_{24} = b_1 (a_1 T_2^2 + a_0 T_1) - a_0 b_2 T_2^2$ ;  $A_{22} = b_2 \times (a_0 + a_2 T_2^2 + a_1 T_1) - b_1 (a_1 + a_3 T_2^2 + a_2 T_1)$ ;  $A_{20} = a_3 b_1 - b_2 (a_2 + a_3 T_1)$ ;  $f$  — собственная частота колебаний системы управления КА,  $c^{-1}$ ;  $T_1, T_2^2$  — постоянные времени системы управления КА;  $c_{y\delta}, c_{y\delta}$  — коэффициенты, характеризующие эффективность органов управления КА, например для газовых рулей,  $c_{y\delta} = \frac{1}{2} c_y^\delta S_p \rho_{и} V_{и}^2$ ,  $c_{y\delta} = -\frac{L_p}{2} c_y^\delta S_p \rho_{и} V_{и}^2$ ;  $\rho_{и}$  — плотность истекающих газов из сопла двигателя КА, кг/м<sup>3</sup>;  $S_p$  — площадь газовых рулей, м<sup>2</sup>;  $V_{и}$  — скорость истечения газов из сопла двигателя КА, м/с;  $c_y^\delta$  — производная коэффициента аэродинамической подъемной силы по углу отклонения газовых рулей;  $c_{yy}, c_{y\delta}, c_{y\delta}, c_{y\delta}$  — динамические коэффициенты, характеризующие конструктивные, геометрические и аэродинамические параметры КА,  $c_{yy} = \frac{1}{2} (c_{x0} + c_y^\alpha) \rho S V_c$ ,  $c_{y\delta} = \frac{x_f}{2} \times$

$$\times (c_{x0} + c_y^\alpha) \rho S V_c, \quad c_{y9} = -\left(P + \frac{1}{2} c_y^\alpha \rho S V_c^2\right), \quad c_{yy} = \frac{x_f}{2} (c_{x0} + c_y^\alpha) \rho S V_c^2;$$

$L_p$  — расстояние от центра давления газовых рулей до центра масс КА, м;  $V_c$  — скорость движения центра масс (ЦМ) КА, м/с;  $x_f$  — фокусное расстояние КА, м;  $\mu_z, \nu_y$  — коэффициенты демпфирования.

Область устойчивости движения КА при скорости ветра 30 м/с и линейном эксцентриситете тяги  $h = 1,94 \cdot 10^{-2}$  м показана на рис. 7. Общая часть полученной области устойчивости (см. рис. 7) представляет собой область выбора динамических параметров  $k_1, k_2$ , при которых устойчивость обеспечивается на всей траектории полета КА. При этом точка  $A$  (см. рис. 7) имеет координаты рациональных коэффициентов усиления по осям  $x$  и  $y$   $(k_1, k_2) = (40, 8; 20, 5)$ , которые в дальнейшем необходимы для исследования эффективности выбранных органов управления по уровням возмущающих сил и моментов.

Возмущающими факторами при полете КА являются задаваемая скорость ветра и линейный эксцентриситет тяги. Тогда возмущающие силы  $\Delta F_y$  и моменты  $\Delta M_z$ , действующие на КА по каналу тангажа, могут быть определены по формулам [14]:

$$\Delta F_y = \frac{1}{2} (c_{x0} + c_{y_{1,2}}^\alpha) \rho S V_c W - \frac{k_1}{k_2} S_p \rho_n V_n^2, \quad (14)$$

$$\Delta M_z = \frac{1}{2} x_f (c_{x0} + c_{y_{1,2}}^\alpha) \rho S V_c W - \frac{k_1}{k_2} (L_p - h) S_p \rho_n V_n^2, \quad (15)$$

где  $W$  — скорость ветра, м/с; нижние индексы  $y_{1,2}$  обозначают параметры для первой и для второй степени.

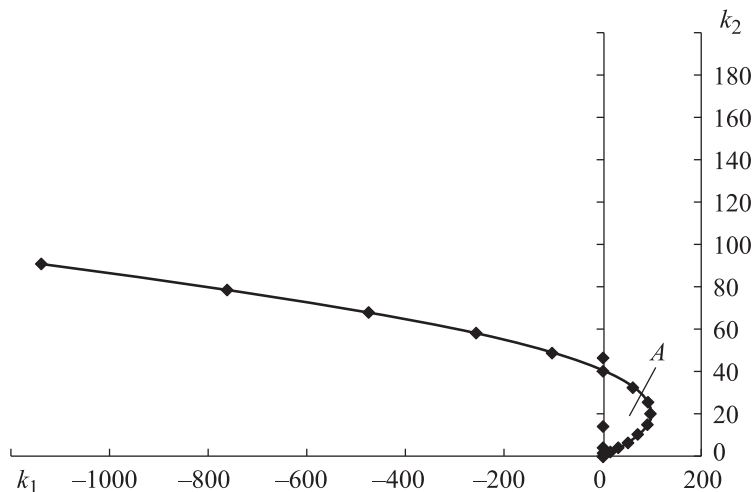
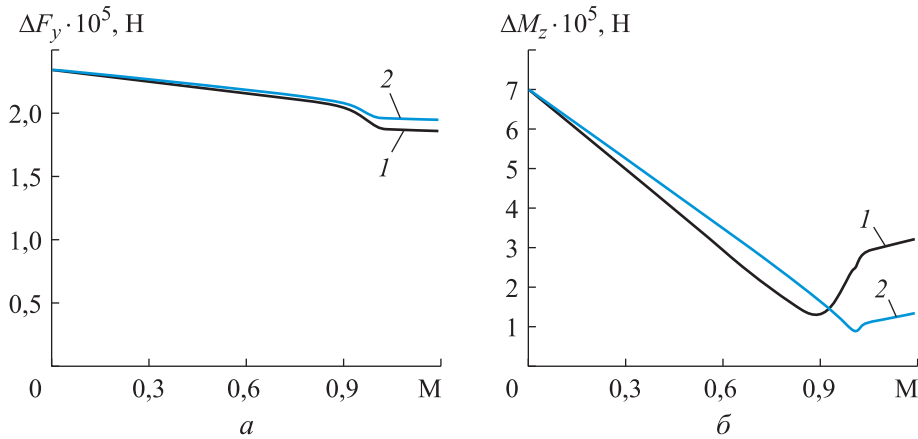
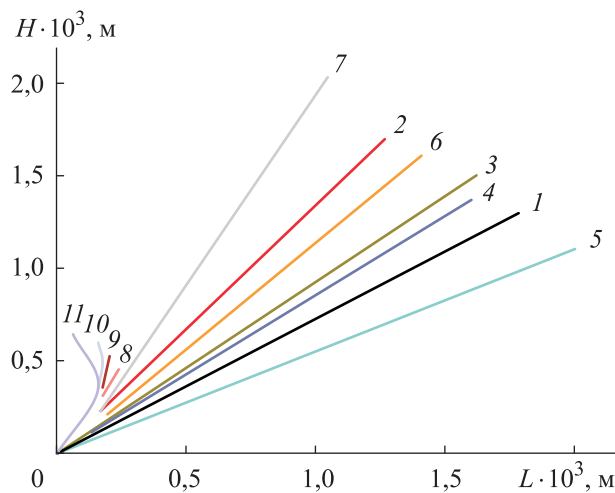


Рис. 7. Область устойчивости движения космического аппарата в зависимости от параметров  $k_1, k_2$

Зависимость возмущающих сил и моментов, действующих на КА по каналу тангажа в точке  $A$  (см. рис. 7), от скорости движения центра масс КА представлена на рис. 8, на котором видно, что при увеличении скорости движения центра масс КА возмущающие силы и моменты, действующие на первую и вторую ступени КА по каналу тангажа, резко уменьшаются, что свидетельствует об эффективности использования газовых рулей в качестве органов управления КА.



**Рис. 8.** Зависимость возмущающих сил ( $a$ ) и моментов ( $b$ ), действующих на первую (1) и вторую (2) ступени космического аппарата, от числа Маха



**Рис. 9.** Траектории полета КА

Виды траекторий полета КА с ускорителем в плоскости тангажа до сброса последнего показаны на рис. 9. Рассмотрим отдельные виды траекторий. Траектория 1 получена при отсутствии возмущений ( $W = 0$ ,  $h = 0$ ). В этом случае угол наклона траектории КА составляет  $32,7^\circ$ ,

и данная траектория рассматривается как номинальная. Ниже номинальной пролегает траектория 5, полученная при скорости попутного ветра  $W = 30,0$  м/с и линейном эксцентриситете тяги  $h = 1,94 \cdot 10^{-2}$  м (перед значением скорости встречного ветра введем обозначение (-) минус; перед значением скорости попутного ветра введем обозначение (+) плюс, но его не указываем). Следует отметить, что, несмотря на большую скорость попутного ветра в сочетании с линейным эксцентриситетом, данная траектория незначительно отклонилась от номинальной, а ее угол  $\theta = 26,5^\circ$ .

В таблице представлены параметры траекторий для случаев полета КА с минимальной тягой  $P = 7,65 \cdot 10^5$  Н при температуре окружающей среды  $T = -50$  °С.

Все траектории, лежащие выше номинальной (см. рис. 9), относятся к полету КА при возмущениях, возникающих от встречного ветра и линейного эксцентриситета тяги. Траектории 3 и 4 различаются тем, что в первом случае имеет место полет КА при скорости встречного ветра  $W = 30$  м/с и  $h = 0$ , а во втором — при  $W = 0$  и  $h = 1,94 \cdot 10^{-2}$  м.

**Параметры траекторий полета космического аппарата**

Номер траектории	$h \cdot 10^{-2}$ , м	$W$ , м/с	$\theta$ , град	$q_{\max} \cdot 10^{-2}$ , кг/(м · с <sup>2</sup> )	$V$ , м/с	$M$	$L \cdot 10^3$ , м	$H \cdot 10^3$ , м	$n_y, g$	$Y_{\max} \cdot 10^2$ , Н
1	0	0	32,7	2,28	586	1,90	2,17	1,55	0,22	0,17
2	-1,94	-20	51,7	2,10	568	1,90	1,53	2,08	3,01	2,31
3	0	-30	40,4	2,28	571	1,94	1,88	1,81	1,87	1,47
4	-1,94	0	38,8	2,19	580	1,90	1,99	1,75	0,70	5,51
5	-1,94	30	26,5	2,22	594	1,85	2,38	1,32	-1,14	-0,88
6	-1,94	-19	47,8	2,14	571	1,90	1,66	2,00	2,43	1,88
7	-1,94	-21	61,4	1,99	563	1,84	1,20	2,25	4,50	3,41
8	-1,94	-22	-	-	-	-	-	-	6,30	4,67
9	-1,94	-24	-	-	-	-	-	-	7,89	5,83
10	-1,94	-25	-	-	-	-	-	-	8,10	6,03
11	-1,94	-26	-	-	-	-	-	-	8,19	6,36

Примечание.  $\theta_{\text{доп}} = 50$ .

При совместном действии встречного ветра с  $W = 20$  м/с и линейном эксцентриситете тяги  $h = 1,94 \cdot 10^{-2}$  м рассчитана траектория 2, для которой угол перед отделением составил  $51,7^\circ$ . При этом допустимым углом траектории для включения в работу автономной системы

управления второй ступени является угол  $\theta = 50^\circ$ . Однако интересно рассмотреть влияние встречного ветра на вид траектории полета КА при постоянном линейном эксцентриситете тяги  $h = 1,94 \cdot 10^{-2}$  м. Для этого обратим внимание на траектории 2, 4, 6–11, полученные при скорости встречного ветра, соответственно равной 0, 19; 20, 21, 22, 24, 25 и 26 м/с. Уже на траектории 7 при  $W = 21$  м/с угол  $\theta = 61,4^\circ$ , что выходит за границу допустимого угла  $\theta_{\text{доп}} = 50^\circ$ .

Влияние скорости встречного ветра и угла атаки на движение КА на различных этапах полета (запуска и спуска) представлено на рис. 10. Исследование динамической устойчивости движения проведено на основе траекторий, показанных на рис. 9. В соответствии с полученными результатами на рис. 11 приведены графики зависимости траекторного угла, угла тангажа и поперечной перегрузки  $n_y$  от скорости встречного ветра, где начальные условия (высота  $H$ , дальность  $L$ , скорость  $V$  и др.) выбраны из таблицы.

Для исследуемого КА критическое состояние наступает в случае превышения величины скорости встречного ветра  $W = 20,0$  м/с при тяге  $P = 7,65 \cdot 10^5$  Н, линейном эксцентриситете тяги  $h = 1,94 \cdot 10^{-2}$  м и температуре у поверхности Земли  $T = -50^\circ\text{C}$ .

Для того чтобы избежать выхода на большие перегрузки, достаточно допустимую скорость ветра выбрать из условия выхода на угол  $\theta \approx 50^\circ$  перед отделением ускорителя первой ступени [15, 16].

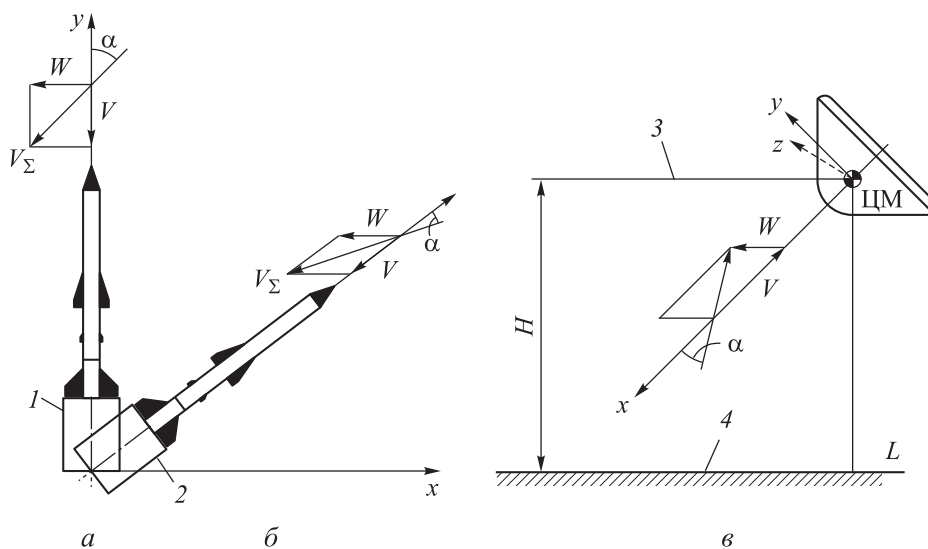
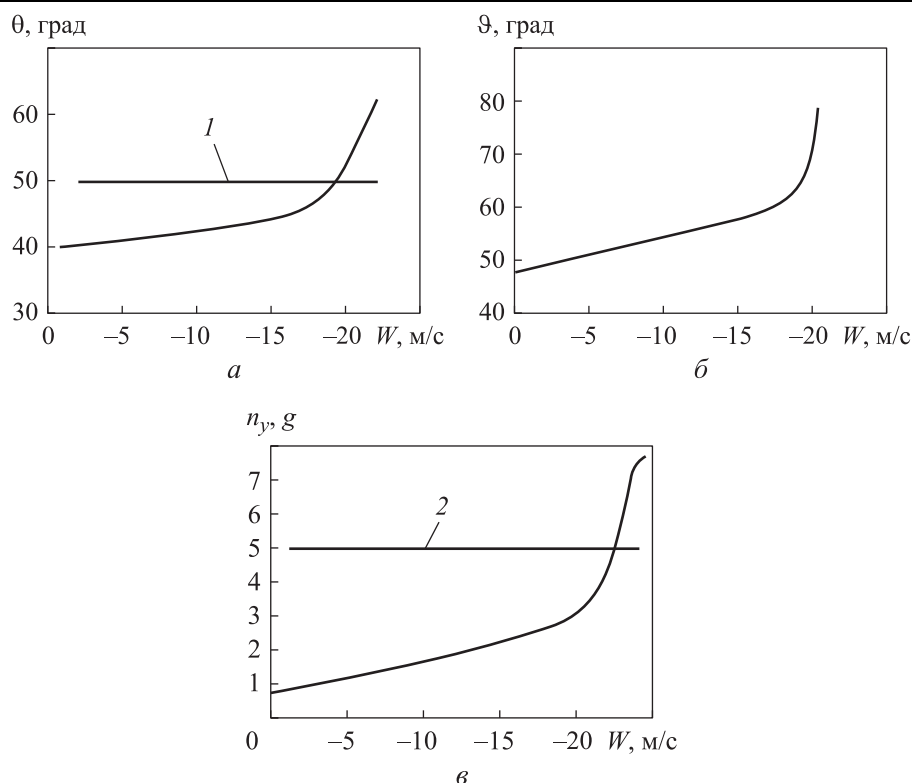


Рис. 10. Запуск и спуск космического аппарата:

*a* — запуск КА с вертикального стола; *b* — запуск КА с наклонного стола; *в* — спуск КА на поверхность планеты; 1, 2 — стартовый стол; 3 — начало отсчета спуска КА; 4 — поверхность планеты назначения



**Рис. 11.** Зависимость угла наклона траектории (а), угла тангажа (б), поперечной перегрузки (в) от скорости встречного ветра с учетом граничных условий: 1 — ограничение по управлению второй ступени; 2 — ограничение по прочности

Исходя из выше описанного условия, рассчитаны допустимые скорости ветра при температуре  $T = -50^{\circ}\text{C}$  в зависимости от значения линейного эксцентриситета тяги  $h = 1,94 \cdot 10^{-2}$  м при различных величинах угла атаки.

Анализ зависимостей, представленных на рис. 11, позволяет сделать вывод, что начиная с некоторой величины скорости встречного ветра значения угла наклона траектории, угла тангажа и поперечной перегрузки резко увеличиваются, что характеризует потерю динамической устойчивости КА.

**Заключение.** В результате проведенных исследований выявлено, что космический аппарат становится устойчив при малых углах атаки ( $\alpha < 13,0^{\circ}$ ) и неустойчив при углах, превышающих это значение. Это, в свою очередь, компенсируется устойчивостью полета космического аппарата за счет большого момента инерции, что позволяет получить границы допустимых ветров со скоростью до 20,0 м/с и при низких температурах в зависимости от величины линейного эксцентриситета тяги и при различных величинах угла атаки. Проведено исследование эффективности использования газовых рулей в качестве органов



управления космического аппарата, а также проанализировано движение устройств с раскрывающимися тормозными поверхностями в атмосфере. Разработана математическая модель возмущенного движения космического аппарата на различных этапах полета на планету назначения, которая была использована при оценке запуска со стартовой установки и спуска на поверхность с учетом ветровых и аэродинамических нагрузок.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алифанов О.М., Иванков А.А., Нетелев А.В., Финченко В.С. Исследование характеристик теплозащитного покрытия аэроупругих тормозных устройств спускаемых в атмосфере планет аппаратов. *Труды МАИ*, 2013, № 71, с. 18. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=46756>
- [2] Marrafa L., Finchenko V., Pichkhadze K., et. al. Inflatable Re-entry Technologies. *Flight Demonstration and Future Prospects. ESA Bulletin*, 2000, no. 103, pp. 78–85.
- [3] Алексашкин С.Н., Пичхадзе К.М., Финченко В.С. Принципы проектирования спускаемых в атмосферах планет аппаратов с надувными тормозными устройствами. *Вестник ФГУП «НПО имени С.А. Лавочкина»*, 2012, № 2, с. 4–11.
- [4] Лысков Д.В., Терентьев В.В., Харри А.М., Успенский М.В., Хаукка Х., Алексашкин С.Н., Финченко В.С. Спускаемые в атмосферах планет аппараты с аэроупругими (надувными) тормозными устройствами и моделирование тепловых стендовых испытаний их полномасштабных макетов. *Тепловые процессы в технике*, 2015, т. 7, № 8, с. 370–378.
- [5] Мартынов А.К. *Прикладная аэродинамика*. Москва, Машиностроение, 1972, 448 с.
- [6] Абрамов И.П., Алдашкин И.В., Алексеев Э.В. и др. *Машиностроение. Ракетно-космическая техника*. В.П. Легостаев, ред. Т. IV–22. В 2 кн. Кн. 2. Ч. 1. Москва, Машиностроение, 2014, с. 496–562.
- [7] Moss J.N., Glass C.E., Hollis B.R., Van Norman J.W. Low-Density aerodynamics of the inflatable re-entry vehicle experiment (IRWE). *AIAA Paper* 2006-1189, 2006.
- [8] Краснов Н.Ф. *Аэродинамика*. Москва, Высшая школа. Ч. 2, 1980, 416 с.
- [9] Рабинович Б.И. *Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов*. Москва, Машиностроение, 1983, 296 с.
- [10] Остафьевский И.В. *Динамика полета, устойчивость и управляемость летательных аппаратов*. Москва, Машиностроение, 1976, 442 с.
- [11] Ермаков В.Ю. Динамическое моделирование длинномерной конструкции объекта с учетом влияния воздушной среды. *Двойные технологии*, 2022, № 3 (100), с. 42–48.
- [12] Ермаков В.Ю., Туфан А. Проблемы, обусловленные работой систем с подвижными массами при эксплуатации космических аппаратов. *Космонавтика и ракетостроение*, 2022, вып. 5 (128), с. 134–145.
- [13] Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. *Управление космическими летательными аппаратами*. Москва, Машиностроение, 1974, 343 с.
- [14] Ермаков В.Ю., Туфан А. *Динамика космических аппаратов*. Москва, Изд-во МАИ, 2023, 92 с.

- [15] Ермаков В.Ю. Термовакuumные исследования по определению динамических характеристик длинномерных конструкций. *Тепловые процессы в технике*, 2022, т. 14, № 9, с. 386–393.
- [16] Бирюкова М.В., Туфан А., Ермаков В.Ю. Подход к снижению виброактивности малых космических аппаратов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2023, № 1 (144), с. 4–21.

Статья поступила в редакцию 27.04.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Ермаков В.Ю., Туфан А., Бирюкова М.В., Фирсюк С.О. Математическая модель продольного движения космического аппарата на различных участках его полета. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 8.  
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-8-2298>

**Ермаков Владимир Юрьевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры 601 «Космические системы и ракетостроение», МАИ (НИУ).  
e-mail: v\_ermakov2003@mail.ru

**Туфан Ант** — инженер кафедры 601 «Космические системы и ракетостроение», МАИ (НИУ). e-mail: anttufan@gmail.com

**Бирюкова Мария Васильевна** — старший преподаватель кафедры 601 «Космические системы и ракетостроение», МАИ (НИУ).  
e-mail: mar\_601\_24@mail.ru

**Фирсюк Сергей Олегович** — старший преподаватель кафедры 601 «Космические системы и ракетостроение», МАИ (НИУ).  
e-mail: iskramai@yandex.com

## **Mathematical model of the spacecraft longitudinal motion in its flight different segments**

© V. Yu. Ermakov, A. Tufan, M.V. Biryukova, S.O. Firsyuk

Moscow Aviation Institute (National Research University),  
Moscow, 125993, Russia

*The article studies the spacecraft stability at small and large angles of attack under the influence of disturbances arising from aerodynamic drag, wind speed and linear thrust eccentricity caused by deviations (misalignment) of the installation angle of the booster engine of the spacecraft. Possible use of spacecraft with opening braking surfaces when moving in the atmosphere is described. A mathematical model of disturbed motion of the spacecraft at various stages of its flight to the destination planet has been developed. The resulting mathematical model was used in the studies of the launch of a spacecraft from an inclined, vertical launch facilities and descent for landing on the surface without taking into account the operation of braking engines. The parameters of the trajectories of a spacecraft with a booster in the pitch plane are calculated depending on the flight altitude and the inclination of the launch pad.*

**Keywords:** *damping moment coefficient, engine thrust, thrust misalignment, angle of attack, mechanical trajectory, mean aerodynamic chord, head wind, ambient temperature*

### REFERENCES

- [1] Alifanov O.M., Ivankov A.A., Netelev A.V., Finchenko V.S. Issledovanie kharakteristik teplozaschitnogo pokrytiya aerouprugikh tormoznykh ustroystv spuskaemykh v atmosfere planet apparatov [Study of the characteristics of the heat-shielding coating of aero-elastic braking devices of vehicles descending in the atmosphere of planets]. *Trudy MAI*, 2013, no. 71, p. 18. Available at: <https://trudymai.ru/published.php?ID=46756>
- [2] Marrafa L., Finchenko V., Pichkhadze K., et al. Inflatable Re-entry Technologies. *Flight Demonstration and Future Prospects. ESA Bulletin*, 2000, no. 103, pp. 78–85.
- [3] Aleksashkin S.N., Pichkhadze K.M., Finchenko V.S. Printsipy proektirovaniya spuskaemykh v atmosferakh planet apparatov s naduvnymi tormoznymi ustroystvami [Design principles of the descent vehicles with inflatable braking device]. *Vestnik FGUP "NPO im. S.A. Lavochkina" — Bulletin of Lavochkin Association*, 2012, no. 2, pp. 4–11.
- [4] Lyskov D.V., Terentev V.V., Harri A.-M., Uspensky M.V., Haukka H., Alexsashkin S.N., Finchenko V.S. Spuskaemye v atmosferakh planet apparaty s aerouprugimi (naduvnymi) tormoznymi ustroystvami i modelirovanie teplovykh stendovykh ispytaniy ikh polnomasshtabnykh maketov [Descending in the atmospheres of planets vehicles with an inflatable braking device and modeling of thermal tests of full-scale mockups]. *Teplovye protsessy v tekhnike — Thermal Processes in Engineering*, 2015, vol. 7, no. 8, pp. 370–378.
- [5] Martynov A.K. *Prikladnaya aehrodinamika* [Applied Aerodynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972, 448 p.
- [6] Abramov I.P., Aldashkin I.V., Alekseev E.V., et al. *Mashinostroenie. Raketno-kosmicheskaya tekhnika* [Mechanical engineering. Rocket and space technology]. V.P. Legostaev, ed. Vol. IV-22. In 2 books. Book 2. Part 1. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2014, pp. 496–562.

- [7] Moss J.N., Glass C.E., Hollis B.R., Van Norman J.W. Low-density aerodynamics of the inflatable re-entry vehicle experiment (IRWE). *AIAA Paper* 2006-1189, 2006.
- [8] Krasnov N.F. *Aerodinamika* [Aerodynamics]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1980, pt. 2, 416 p.
- [9] Rabinovich B.I. *Vvedenie v dinamiku raket-nositeley kosmicheskikh apparatov* [Introduction to spacecraft launchers dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1983, 296 p.
- [10] Ostaslovskii I.V. *Dinamika poleta, ustoychivost i upravlyaemost letatelnykh apparatov* [Aircraft flight dynamics, stability and controllability]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 442 p.
- [11] Ermakov V.Yu. Dinamicheskoe modelirovanie dlinnomernoy konstruktssii obyektov s uchedom vliyaniya vozdukhnoy sredy [Dynamic modeling of a long-length structure of an object taking into account the influence of the air environment]. *Dvoynye tekhnologii — Dual Technologies*, 2022, no. 3 (100), pp. 42–48.
- [12] Ermakov V.Yu., Tufan A. Problemy, obuslovlennyye rabotoy sistem s podvizhnymi massami pri ekspluatatsii kosmicheskikh apparatov [Problems arising from systems with moving masses during the operation of spacecraft]. *Kosmonavtika i raketostroenie — Cosmonautics and Rocket Engineering*, 2023, no. 5 (128), pp. 134–145.
- [13] Alekseev K.B., Bebenin G.G. *Upravlenie kosmicheskimi letatelnyimi apparatami* [Spacecraft Control]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1974, 343 p.
- [14] Ermakov V.Yu., Tufan A. *Dinamika kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft dynamics]. Moscow, MAI Publ., 2023, 92 p.
- [15] Ermakov V.Yu. Termovakuumnyye issledovaniya po opredeleniyu dinamicheskikh kharakteristik dlinnomernykh konstruktssiy [Thermal-vacuum studies on determining dynamic characteristics of long-length structures]. *Teplovye protsessy v tekhnike — Thermal processes in engineering*, 2022, vol. 14, no. 9, pp. 386–393. (In Russ.).
- [16] Biryukova M.V., Tufan A., Ermakov V.Yu. Podkhod k snizheniyu vibroaktivnosti malykh kosmicheskikh apparatov [Approach to reducing vibro-activity of small spacecraft]. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2023, no. 1 (144), pp. 4–21.

**Ermakov V.Yu.**, Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department 601 “Space Systems and Rocket Science”, Moscow Aviation Institute (National Research University).  
e-mail: v\_ermakov2003@mail.ru

**Tufan Ant**, Engineer, Department 601 “Space Systems and Rocket Science”, Moscow Aviation Institute (National Research University). e-mail: anttufan@gmail.com

**Biryukova M.V.**, Senior Lecturer, Department 601 “Space Systems and Rocket Science”, Moscow Aviation Institute (National Research University).  
e-mail: mar\_601\_24@mail.ru

**Firsyuk S.O.**, Senior Lecturer, Department 601 “Space Systems and Rocket Science”, Moscow Aviation Institute (National Research University).  
e-mail: iskramai@yandex.com