

## Неосесимметричная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра

© Д.А. Шляхин, В.А. Юрин

Самарский государственный технический университет, Самара, 443100, Россия

*Построено новое замкнутое решение несвязанной неосесимметричной задачи термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра в случае нестационарного изменения температуры на его внутренней поверхности с учетом конвективного теплообмена между внешней поверхностью и окружающей средой. Цилиндрические поверхности электродированы и подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением (режим холостого хода), а внутренняя поверхность заземлена. Нестационарное уравнение теплопроводности Фурье — Кирхгофа рассмотрено без учета влияния изменения размеров тела и электрического поля на температурное поле. Замкнутое решение задачи теплопроводности построено методом конечных интегральных преобразований (КИП). Квазистатическая связанная задача электроупругости при определенном температурном поле решена без учета инерционных свойств цилиндра методом КИП. Полученные расчетные соотношения позволили определить температурное поле, напряженно-деформированное состояние, а также электрическое поле в длинном пьезокерамическом цилиндре при нестационарном неосесимметричном воздействии в виде функции изменения температуры. Численный анализ результатов позволил определить толщину стенки цилиндра и область изменения температурного воздействия, при которых возможно наиболее эффективное преобразование деформаций в электрический импульс.*

**Ключевые слова:** задача термоэлектроупругости, неосесимметричное температурное поле, конечные интегральные преобразования

**Введение.** Для описания работы и повышения функциональных возможностей тепловых пьезокерамических датчиков [1–4], принцип действия которых основан на взаимном влиянии термоэлектроупругих полей, используются различные математические теории [5–7]. Для более точного учета эффекта связанности полей возникает необходимость использовать методы, позволяющие получить замкнутое решение. При этом для преодоления математических трудностей при интегрировании исходной системы несамосопряженных дифференциальных уравнений рассматриваются, как правило, осесимметричные задачи. Здесь можно отметить связанные и несвязанные задачи термоэлектроупругости для градиентно-неоднородного пьезокерамического слоя [8, 9], длинного цилиндра [10–23] и полой сферы [21, 24].

В неосесимметричной постановке можно отметить очень ограниченный круг статических задач термоэлектроупругости. Так, несвязанные задачи для функционально-градиентного пьезокерамического длинного цилиндра исследуются в статьях [17, 19, 21, 22]. При этом его электродное покрытие замкнуто между внешней и внутренней поверхностями, что позволяет судить об осесимметричном изменении электрического поля. В исследованиях [23, 24] анализируется распространение температурных, электрических и упругих полей в сплошном цилиндре, подверженном температурно-механическому воздействию.

Цель настоящей работы — построение замкнутого решения несвязанной неосесимметричной задачи термоэлектроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра в случае удовлетворения на его поверхностях граничных условий 1-го и 3-го родов. Рассматривается случай, когда скорость изменения действующей температуры не оказывает влияния на инерционные характеристики упругой системы, что позволяет включить в исходные линейные расчетные соотношения уравнения равновесия, электростатики и теплопроводности. Замкнутое решение строится методом конечных интегральных преобразований.

**Постановка задачи.** Пусть полый, не закрепленный в радиальной плоскости длинный пьезокерамический цилиндр (рис. 1) занимает в цилиндрической системе координат  $(r_*, \varphi, z_*)$  область  $\Sigma = \{(r_*, \varphi, z_*) \mid r_* \in [a; b], \varphi \in [0; 2\pi), z_* \in \mathbb{R}\}$ . На внутренней цилиндрической поверхности  $(r_* = a)$  рассматривается неосесимметричное нестационарное воздействие в виде функции изменения температуры  $\omega_1^*(\varphi, t_*)$  — граничное условие 1-го рода, а на внешней поверхности  $(r_* = b)$  задан закон конвективного теплообмена (граничное условие 3-го рода) и известна температура окружающей среды  $\vartheta^*$ . Цилиндрические поверхности электродированы и подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением (режим холостого хода), внутренняя поверхность заземлена.

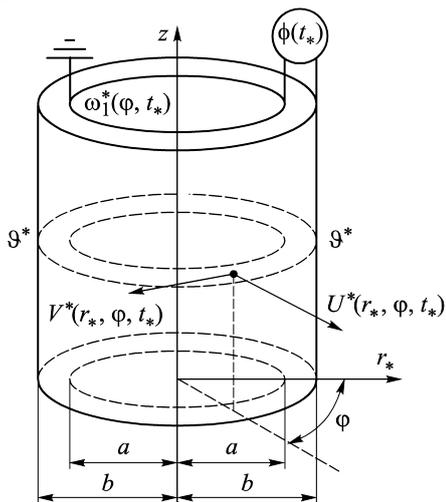


Рис. 1. Расчетная схема

Разрабатываемое в данной работе замкнутое решение задачи позволит установить зависимость между интенсивностью темпера-

турного воздействия на внутреннюю поверхность полого пьезокерамического цилиндра и величиной индуцируемого электрического импульса. Данная зависимость позволяет описать работу температурного электроупругого преобразователя.

В данном случае математическая формулировка задачи в безразмерной форме включает в себя дифференциальные уравнения равновесия, электростатики, теплопроводности, а также граничные условия для пьезокерамического материала с гексагональной кристаллической решеткой класса *btt* при его радиальной поляризации [25, 26]:

$$L_{n+1}(U) + L_{n+2}(V) + L_{n+3}(\Phi) + L_{n+4}(\Theta) = 0, \quad n = 0, 4, 8; \quad (1)$$

$$L_{13}(\Theta) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \Theta + a_{12} \nabla U + a_{12} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - a_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 0; \quad (2)$$

$$r = R, 1: \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{a_3}{r} \left( U + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Theta = 0;$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + a_{14} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0; \quad (3)$$

$$\Phi|_{r=R} = 0, \quad \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + a_8 \frac{\partial U}{\partial r} + a_9 \frac{U}{r} + a_9 \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + a_{11} \Theta \right) \Big|_{r=1} = 0; \quad (4)$$

$$\Theta|_{r=R} = \omega_1, \quad \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r} + a_{15} \Theta \right) \Big|_{r=1} = a_{15} \vartheta; \quad (5)$$

$$m = \overline{1, \infty}: \{U, V, \Phi, \Theta\}_{|\varphi=0} = \{U, V, \Phi, \Theta\}_{|\varphi=2\pi m},$$

$$\frac{\partial \{U, V, \Phi, \Theta\}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial \{U, V, \Phi, \Theta\}}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi m}; \quad (6)$$

$$t = 0: U = V = \Phi = \Theta = 0, \quad (7)$$

где  $L_1 = \nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_1}{r^2} + a_2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ,  $L_2 = \frac{1}{r} \left[ (a_2 + a_3) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(a_1 + a_2)}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ,  
 $L_3 = \nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_4}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_5}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ,  $L_4 = \frac{a_6}{r} - \nabla$ ,  $L_5 = \frac{1}{r} \left( a_2 \nabla + a_3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ,

$$\begin{aligned}
 L_6 &= a_2 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{a_2}{r^2}, & L_7 &= \frac{1}{r} \left( a_4 \frac{\partial}{\partial r} + a_5 \nabla \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, & L_8 &= -a_6 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
 L_9 &= a_8 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_9}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_{10}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, & L_{10} &= \frac{1}{r} \left[ (a_{10} + a_9) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_{10}}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\
 L_{11} &= -\nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_7}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, & L_{12} &= a_{11} \nabla, & L_{13} &= \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; & t &= \frac{\Lambda}{kb^2} t_*; \\
 \nabla &= \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}; & \{U, V, r, R\} &= \{U^*, V^*, r_*, a\} / b, & \Phi &= \frac{e_{33}}{bc_{33}} \Phi^*, \\
 \{\Theta, \omega_1, \mathfrak{G}\} &= \frac{\gamma_{33}}{c_{33}} \{\Theta^* - T_0, \omega_1^* - T_0, \mathfrak{G}^* - T_0\}; & a_1 &= \frac{c_{11}}{c_{33}}, & a_2 &= \frac{c_{44}}{c_{33}}, & a_3 &= \frac{c_{13}}{c_{33}}, \\
 a_4 &= \frac{e_{31}}{e_{33}}, & a_5 &= \frac{e_{15}}{e_{33}}, & a_6 &= \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{33}}, & a_7 &= \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}}, & a_8 &= \frac{e_{33}^2}{c_{33} \varepsilon_{33}}, & a_9 &= \frac{e_{31} e_{33}}{c_{33} \varepsilon_{33}}, \\
 a_{10} &= \frac{e_{15} e_{33}}{c_{33} \varepsilon_{33}}, & a_{11} &= \frac{e_{33} g_3}{\varepsilon_{33} \gamma_{33}}, & a_{12} &= T_0 \frac{\gamma_{33}^2}{c_{33} k}, & a_{13} &= T_0 \frac{\gamma_{33} g_3}{k e_{33}}, & a_{14} &= \frac{a_5}{a_2}, \\
 a_{15} &= \alpha \frac{b}{\Lambda}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $U^*(r_*, \varphi, t_*)$ ,  $V^*(r_*, \varphi, t_*)$ ,  $\Phi^*(r_*, \varphi, t_*)$ ,  $\Theta^*(r_*, \varphi, t_*)$  — радиальная и угловая компоненты вектора перемещений, потенциал электрического поля и температура тела в размерной форме;  $T_0(r_*)$  — температура первоначального состояния тела, при которой отсутствуют механические напряжения;  $c_{ms}$ ,  $e_{ms}$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{33}$  — модули упругости, пьезомодули и коэффициенты диэлектрической проницаемости пьезокерамического материала, где  $\{m, s\} = \overline{1, 5}$ ;  $\gamma_{11} = c_{11} \alpha_t$ ,  $\gamma_{33} = c_{33} \alpha_t$  — компоненты тензора температурных напряжений;  $\alpha_t$  — коэффициент линейного температурного расширения материала;  $g_3$  — компонента тензора пироккоэффициентов;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи.

Расчетные соотношения (3)–(5) учитывают отсутствие механических напряжений на цилиндрических поверхностях, их подключение к измерительному прибору, заземление внутренней поверхности, а также граничные условия теплопроводности. Соотношения (6) являются условиями периодичности для круговой области. В начальный момент времени цилиндр находится в недеформированном состоянии, а его температурное поле определяется температурой первоначального состояния  $T_0(r)$ .

При заземлении внутренней поверхности пьезокерамического цилиндра напряжение холостого хода  $\phi(t_*)$  определяется потенциалом электрического поля на его внешней поверхности:

$$\phi(t_*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(1, \varphi, t_*) d\varphi. \quad (8)$$

Проблема решения несамосопряженной системы дифференциальных уравнений (1), (2) приводит к исследованию рассматриваемой задачи в несвязанной постановке.

На первом этапе решается уравнение теплопроводности с соответствующими граничными условиями без учета изменения объема тела  $\left( \nabla U = 0, \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \right)$  и электрического поля  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \right)$ . На следующем этапе рассматривается связанная задача электроупругости с учетом известного температурного поля  $\Theta(r, \varphi, t)$ .

**Решение задачи теплопроводности.** Нестационарная задача теплопроводности — уравнение (2) и соответствующие граничные условия (5) — решается методом неполного разделения переменных в виде конечного косинус-преобразования Фурье [27] с использованием трансформанты:

$$\Theta_H(r, n, t) = \int_0^{2\pi} \Theta(r, \varphi, t) \cos(n\varphi) d\varphi \quad (9)$$

и формулы обращения

$$\Theta(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \Theta_H(r, n, t) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad (10)$$

причем  $(n = 0: \Omega_n = (2\pi)^{-1}; n \neq 0: \Omega_n = \pi^{-1})$ .

Алгоритм преобразования, с учетом условий периодичности решения (6), позволяет получить в пространстве изображений начально-краевую задачу:

$$\nabla \frac{\partial \Theta_H}{\partial r} - n^2 \frac{\Theta_H}{r^2} - \frac{\partial \Theta_H}{\partial t} = 0; \quad (11)$$

$$r = R, 1: \Theta_H|_{r=R} = \omega_{1H}, \left( \frac{\partial \Theta_H}{\partial r} + a_{15} \Theta_H \right)_{|r=1} = a_{15} \vartheta_H; \quad (12)$$

$$t = 0: \Theta_H = 0, \quad (13)$$

где  $\{\omega_{1H}(n, t), \vartheta_H\} = \int_0^{2\pi} \{\omega_1(\varphi, t), \vartheta\} \cos(n\varphi) d\varphi$ .

На следующем этапе решения выполняется процедура стандартизации, связанная с приведением неоднородных краевых условий (12) к однородным, с помощью следующего разложения:

$$\Theta_H(r, n, t) = f_1(r)\omega_{1H}(n, t) + f_2(r)\vartheta_H + T_H(r, n, t), \quad (14)$$

где  $f_1(r)$ ,  $f_2(r)$  — дважды дифференцируемые функции, причем:

$$f_1(R) = 1, \quad f_2(R) = 0, \quad \frac{df_1(1)}{dr} + a_{15}f_1(1) = 0, \quad \frac{df_2(1)}{dr} + a_{15}f_2(1) = a_{15}. \quad (15)$$

Подстановка выражения (14) в (11)–(13) при выполнении условий (15) позволяет получить начально-краевую задачу относительно функции  $T_H$  с однородными граничными условиями:

$$\nabla \frac{\partial T_H}{\partial r} - n^2 \frac{T_H}{r^2} - \frac{\partial}{\partial t} T_H = F; \quad (16)$$

$$r = R, 1: T_H|_{r=R} = 0, \quad \left( \frac{\partial T_H}{\partial r} + a_{15}T_H \right)_{|r=1} = 0; \quad (17)$$

$$t = 0: T_H = T_{0H}, \quad (18)$$

где  $F = f_1(r)\frac{\partial \omega_{1H}}{\partial t} - \left[ \nabla \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} - n^2 \frac{f_1(r)}{r^2} \right] \omega_{1H} - \left[ \nabla \frac{\partial f_2(r)}{\partial r} - n^2 \frac{f_2(r)}{r^2} \right] \vartheta_H$ ,  
 $T_{0H} = -f_1(r)\omega_{1H} - f_2(r)\vartheta_H$ .

При решении задачи (16)–(18) применяется структурный алгоритм обобщенного КИП [28]. Для этого на сегменте  $[R, 1]$  вводится КИП с неизвестной вектор-функцией преобразования  $K(\lambda_{in}, r)$ :

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_R^1 T_H(r, n, t) K(\lambda_{in}, r) r dr \quad (19)$$

и формула обращения

$$T_H(r, n, t) = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2}, \quad (20)$$

где  $\|K_{in}\|^2 = \int_R^1 K(\lambda_{in}, r)^2 r dr$ ,  $\lambda_{in}$  — собственные значения, образующие счетное множество.

В результате формируется задача для трансформанты  $G(\lambda_{in}, n, t)$ :

$$\frac{dG_{in}}{dt} + \lambda_{in}^2 G_{in} = -F_H; \quad (21)$$

$$t = 0 : G_{in} = G_0 \quad (22)$$

и функции ядра преобразований  $K(\lambda_{in}, r)$ :

$$\frac{d^2 K}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dK}{dr} - n^2 \frac{K}{r^2} + \lambda_{in}^2 K = 0; \quad (23)$$

$$r = R, 1 : K|_{r=R} = 0, \left( \frac{dK}{dr} + a_{15} K \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad (24)$$

где  $F_H = \int_R^1 F K r dr$ ,  $G_0 = \int_R^1 T_{0H} K r dr$ .

Общие интегралы уравнений (21), (23) с учетом начальных (22) и краевых (24) условий имеют вид

$$G(\lambda_{in}, n, t) = G_0 \exp(-\lambda_{in}^2 t) - \int_0^t F_H(\lambda_{in}, n, \tau) \exp \lambda_{in}^2 (\tau - t) d\tau; \quad (25)$$

$$K(\lambda_{in}, r) = Y_n(\lambda_{in} R) J_n(\lambda_{in} r) - J_n(\lambda_{in} R) Y_n(\lambda_{in} r), \quad (26)$$

где  $J_n, Y_n$  — функции Бесселя 1-го и 2-го родов порядка  $n$  [29].

Трансцендентное уравнение для определения собственных значений  $\lambda_{in}$  записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & Y_n(\lambda_{in} R) \left[ (n + a_{15}) J_n(\lambda_{in}) - \lambda_{in} J_{n+1}(\lambda_{in}) \right] - \\ & - J_n(\lambda_{in} R) \left[ (n + a_{15}) Y_n(\lambda_{in}) - \lambda_{in} Y_{n+1}(\lambda_{in}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Окончательно  $\Theta(r, \varphi, t)$  определяется путем применения к трансформанте (25) формул обращения (20) и (10) с учетом разложения (14):

$$\begin{aligned} \Theta(r, \varphi, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \left[ f_1(r) \omega_{1H}(n, t) + f_2(r) \vartheta_H + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos(n\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (28)$$

Функции  $f_1(r), f_2(r)$  определяются при решении дифференциальных уравнений вида  $\nabla \frac{df_p(r)}{dr} - n^2 \frac{f_p(r)}{r^2} = 0$  при  $(p = 1, 2)$ , что

позволяет существенно упростить правую часть расчетного соотношения (16).

**Решение задачи электроупругости.** Неосесимметричная квазистатическая задача электроупругости — расчетные соотношения (1), (3), (4) относительно функций  $U(r, \varphi, t)$ ,  $V(r, \varphi, t)$ ,  $\Phi(r, \varphi, t)$  — решается при использовании конечных косинус- и синус-преобразования Фурье [27] и введении трансформант

$$\{U_H(r, n, t), \Phi_H(r, n, t)\} = \int_0^{2\pi} \{U(r, \varphi, t), \Phi(r, \varphi, t)\} \cos(n\varphi) d\varphi, \quad (29)$$

$$V_H(r, n, t) = \int_0^{2\pi} V(r, \varphi, t) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad (30)$$

а также формул обращения

$$\{U(r, \varphi, t), \Phi(r, \varphi, t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \{U_H(r, n, t), \Phi_H(r, n, t)\} \cos(n\varphi) d\varphi, \quad (31)$$

$$V(r, \varphi, t) = \pi^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} V_H(r, n, t) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad (32)$$

причем ( $n = 0$ :  $\Omega_n = (2\pi)^{-1}$ ;  $n \neq 0$ :  $\Omega_n = \pi^{-1}$ ).

Применение в пространстве изображений алгоритма преобразования с учетом условий периодичности решения (6) приводит к формированию следующей краевой задачи:

$$\tilde{L}_{n+1}(U_H) + \tilde{L}_{n+2}(V_H) + \tilde{L}_{n+3}(\Theta_H) = -\tilde{L}_{n+4}(\Theta_H), \quad n = 0, 4, 8; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} r = R, 1: \quad & \frac{\partial U_H}{\partial r} + a_3 \frac{U_H}{r} + a_3 n \frac{V_H}{r} + \frac{\partial \Phi_H}{\partial r} = \Theta_H, \\ & \frac{\partial V_H}{\partial r} - \frac{V_H}{r} - n \frac{U_H}{r} - a_{14} n \frac{\Phi_H}{r} = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\Phi_{H|r=R} = 0, \quad \left( -\frac{\partial \Phi_H}{\partial r} + a_8 \frac{\partial U_H}{\partial r} + a_9 \frac{U_H}{r} + a_9 n \frac{V_H}{r} \right)_{|r=1} = -a_{11} \Theta_H,$$

$$\text{где } \tilde{L}_1 = \nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(a_1 + a_2 n^2)}{r^2}, \quad \tilde{L}_2 = \frac{n}{r} \left[ (a_3 + a_2) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(a_2 + a_1)}{r} \right],$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_4 &= \frac{a_6}{r} - \nabla, \quad \tilde{L}_3 = \nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_4}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_5 n^2}{r^2}, \quad \tilde{L}_5 = -\frac{n}{r} \left( a_2 \nabla + a_3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_1}{r} \right), \\ \tilde{L}_6 &= a_2 \nabla \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(a_1 n^2 + a_2)}{r^2}, \quad \tilde{L}_7 = -\frac{n}{r} \left( a_4 \frac{\partial}{\partial r} + a_5 \nabla \right), \quad \tilde{L}_8 = a_6 \frac{n}{r}, \\ \tilde{L}_9 &= a_8 \nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_9}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_{10} n^2}{r^2}, \quad \tilde{L}_{10} = \frac{n}{r} \left[ (a_{10} + a_9) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{a_{10}}{r} \right], \\ \tilde{L}_{11} &= -\nabla \frac{\partial}{\partial r} + \frac{a_7 n^2}{r^2}, \quad \tilde{L}_{12} = a_{11} \nabla; \quad \Theta_H(r, n, t) = \int_0^{2\pi} \Theta(r, \varphi, t) \cos(n\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Для определенности, связанной с численной реализацией построенного решения краевой задачи (33), (34), принимается линейная зависимость изменения температурного поля по радиальной координате:

$$\Theta_H(r, n, t) = [N_1(n)r + N_2(n)]E(t), \quad (35)$$

где  $N_1(n)$ ,  $N_2(n)$ ,  $E(t)$  — составляющие температурного поля по соответствующей переменной.

В общем случае решение системы (33)–(34) записывается следующим образом:

$$U_H(r, n, t) = E(t) \sum_{p=1}^6 D_{pn} A_{1pn} r^{m_p} + U_H^*(r, n, t), \quad (36)$$

$$V_H(r, n, t) = E(t) \sum_{p=1}^6 D_{pn} r^{m_p} + V_H^*(r, n, t), \quad (37)$$

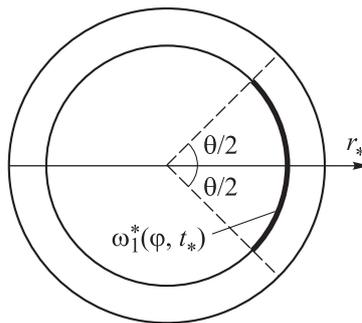
$$\Phi_H(r, n, t) = E(t) \sum_{p=1}^6 D_{pn} A_{2pn} r^{m_p} + \Phi_H^*(r, n, t), \quad (38)$$

где  $A_{1pn} = \frac{b_{2pn} b_{6pn} - b_{3pn} b_{5pn}}{b_{2pn} b_{4pn} - b_{1pn} b_{5pn}}$ ,  $A_{2pn} = \frac{b_{3pn} b_{4pn} - b_{1pn} b_{6pn}}{b_{2pn} b_{4pn} - b_{1pn} b_{5pn}}$ ,  
 $b_{1pn} = m_p^2 - a_1 - a_2 n^2$ ,  $b_{2pn} = m_p^2 - a_4 m_p - a_5 n^2$ ,  
 $b_{3pn} = [a_1 + a_2 - (a_2 + a_3) m_p] n$ ,  $b_{4pn} = a_8 m_p^2 + a_9 m_p - a_{10} n^2$ ,  
 $b_{5pn} = a_7 n^2 - m_p^2$ ,  $b_{6pn} = [a_{10} - (a_9 + a_{10}) m_p] n$ ;  $m_1 \dots m_6$  — корни бикубического уравнения  $(m^2)^3 + e_1 (m^2)^2 + e_2 m^2 + e_3 = 0$ ;  $e_1, e_2, e_3$  — различные комбинации коэффициентов  $a_1 \dots a_{11}$ ;  $\{U_H^*, V_H^*, \Phi_H^*\} / E(t) =$

$= \{F_1, F_3, F_5\}r^2 + \{F_2, F_4, F_6\}r$ ;  $F_1 \dots F_6$  — составляющие решения неоднородного уравнения.

Постоянные интегрирования  $D_{1n} \dots D_{6n}$  определяются в результате подстановки (36)–(38) в граничные условия (34).

**Численный анализ результатов.** В качестве примера рассматривается длинный полый цилиндр ( $b = 0,02$  м,  $a = 0,005$  м) с коэффициентом теплоотдачи между цилиндрической поверхностью и окружающей воздушной средой (естественная конвекция)  $\alpha = 5,6$  Вт/(м<sup>2</sup> · К), изготовленный из радиально поляризованной пьезокерамики состава PZT-4, имеющей следующие физико-механические характеристики [26, 30]:  $\{c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{44}\} = \{13,9; 7,43; 11,5; 2,56\} \cdot 10^{10}$  Па,  $\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}\} = \{6,45; 5,62\} \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $\{e_{15}, e_{31}, e_{33}\} = \{12,7; -5,2; 15,1\}$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\rho = 7600$  кг/м<sup>3</sup>,  $k = 3 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К),  $\Lambda = 1,6$  Вт/(м · К),  $\alpha_t = 0,4 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>,  $g_3 = -0,6 \cdot 10^{-6}$  Кл/(м<sup>2</sup> · К).



**Рис. 2.** Участок изменения температуры на внутренней поверхности

Рассматривается изменение температуры на внутренней поверхности цилиндра (рис. 2) в виде зависимости, позволяющей проанализировать работу электроупругой системы как при стационарном, так и при нестационарном температурном режиме на внутренней поверхности цилиндра:

$$\begin{aligned} \omega_1^*(\varphi, t_*) = Y(t_*) \left[ H\left(\frac{\theta}{2} - \varphi\right) + H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right] + \\ + T_0 \left[ H\left(\varphi - \frac{\theta}{2}\right) - H\left(\varphi + \frac{\theta}{2} - 2\pi\right) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

где  $Y(t_*) = T_{\max} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2t_{\max}^*} t_*\right) H(t_{\max}^* - t_*) + H(t_* - t_{\max}^*) \right]$ ;  $\theta$  — участок, на котором происходит изменение температуры  $Y(t_*)$ ;  $H(\tilde{t})$  — единичная функция Хэвисайда ( $\tilde{t} \geq 0$ :  $H(\tilde{t}) = 1$ ;  $\tilde{t} < 0$ :  $H(\tilde{t}) = 0$ );  $T_{\max}$ ,  $t_{\max}^*$  — максимальное значение функции внешнего температурного воздействия и соответствующее ему время в размерной форме ( $T_{\max} = 373$  К (100 °С);  $T_0 = 293$  К (20 °С);  $t_{\max}^* = 1$  с).

Температура окружающей среды  $\vartheta^*$  равна температуре первоначального состояния тела  $T_0(r_*) = T_0$ , т. е.  $\vartheta = 0$ .

Графики изменения температуры  $\Theta^*(r_*, 0, t_*)$  по радиальной координате в различные моменты времени представлены на рис. 3.

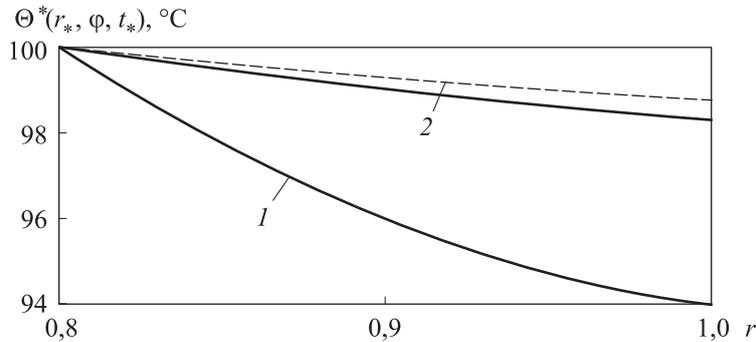


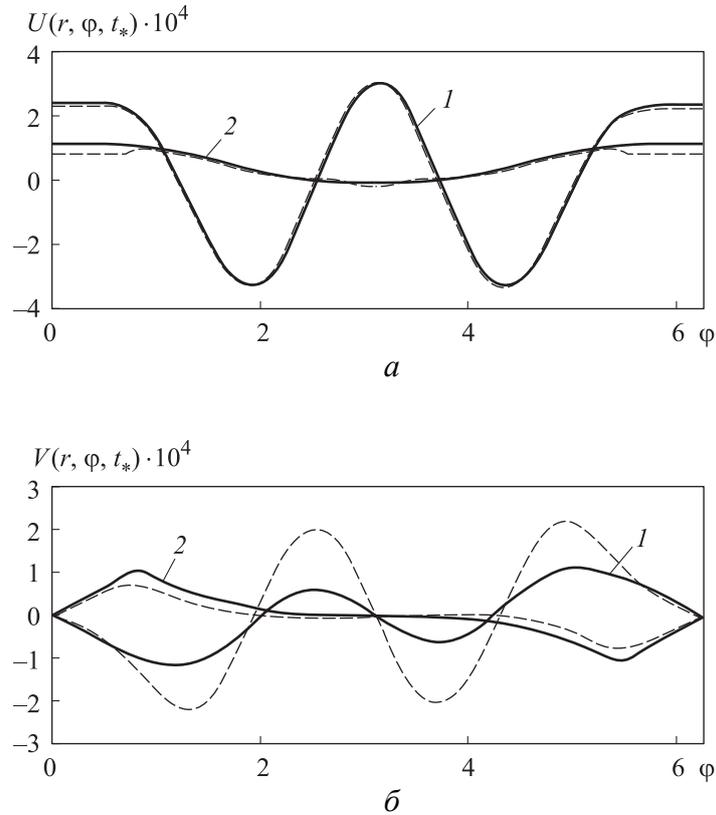
Рис. 3. Графики изменения температуры по радиальной координате:

— —  $\theta = \pi/2$ ; -- —  $\theta = \pi$ ; 1 —  $t_* = 40t_{\max}^*$ ; 2 —  $t_* = 100t_{\max}^*$

Результаты расчета позволяют сделать вывод, что в процессе прогрева величина участка, на котором изменяется температура, не оказывает влияния на температуру  $\Theta^*(r_*, 0, t_*)$  в стенке цилиндра. Однако при установившемся режиме ( $t_* \geq 100t_{\max}^*$ ) разница наблюдается, и увеличение участка приводит к повышению температуры в материале.

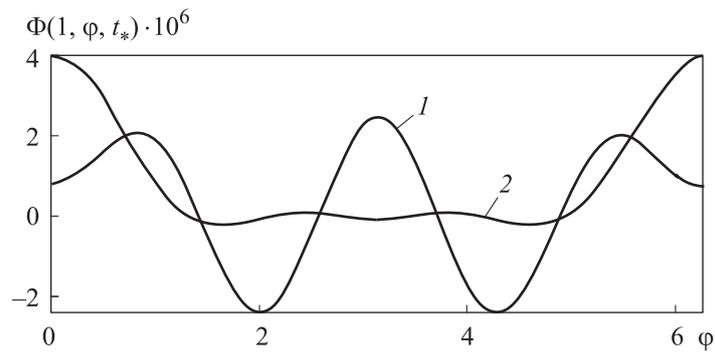
Графики изменения радиальной и тангенциальной компонент векторов перемещения и потенциала электрического поля по угловой координате в различные моменты времени показаны на рис. 4, 5.

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы: на первом этапе изменения температурного поля  $t_* = t_{\max}^*$  отмечается сложный процесс деформирования цилиндра и изменение электрического поля; при установившемся температурном режиме  $t_* = 100t_{\max}^*$  увеличение внутреннего и внешнего радиусов цилиндра в основном



**Рис. 4.** Изменение радиальной (а) и тангенциальной (б) компонент вектора перемещений по угловой координате:

— —  $r = 1$ ; --- —  $r = R$ ; 1 —  $t_* = t_{\max}^*$ ; 2 —  $t_* = 100t_{\max}^*$



**Рис. 5.** Изменение вектора электрического поля по угловой координате при  $r = 1$ :

1 —  $t_* = t_{\max}^*$ ; 2 —  $t_* = 100t_{\max}^*$

происходит в зоне изменения температуры (см. рис. 3; 4, а), а тангенциальные перемещения имеют наибольшие абсолютные значения на границе действия нагрузки при  $\varphi = \pm \pi/4$  (см. рис. 3; 4, б); увеличение толщины стенки цилиндра в зоне изменения температуры при  $t_* = 100t_{\max}^*$  приводит к образованию в данной области наибольшей величины электрического потенциала (см. рис. 5).

Зависимости  $\phi(t) - t$  для различных участков загрузки и толщин стенки цилиндра представлены на рис. 6 и 7. Результаты расчета показывают, что увеличение области температурного «загружения» и толщины электроупругого элемента приводят к росту перемещений, что позволяет повысить величину индуцируемого электрического сигнала.

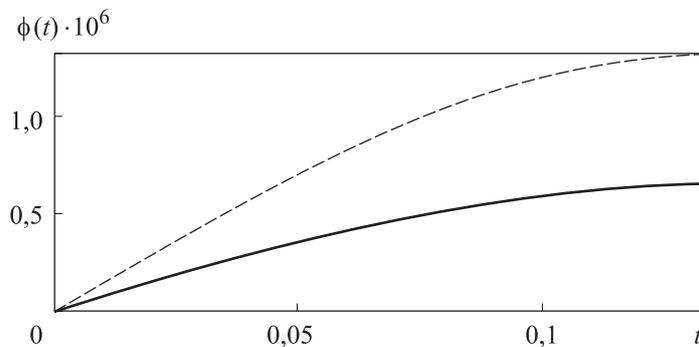


Рис. 6. Изменение напряжения в стенке цилиндра по времени при  $R = 0,8$ :

$$\text{— — } \theta = \frac{\pi}{2}; \quad \text{---} \text{---} \theta = \pi$$

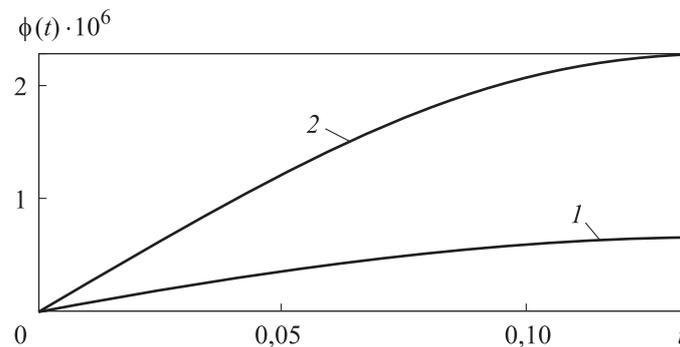


Рис. 7. Изменение напряжения в стенке цилиндра по времени при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$1 - R = 0,8; \quad 2 - R = 0,5$$

**Заключение.** Построенное замкнутое решение позволяет точно определить температурное поле, а также напряженно-деформированное состояние и электрическое поле при установившемся режиме температурного воздействия. При нестационарном режиме результаты получены с некоторой погрешностью за счет использования гипотезы о линейном распределении температурного поля. В этом случае, как показывают аналогичные исследования в осесимметричной постановке [14, 31], разница между точным замкнутым решением и приближенным с учетом принятого допущения о линейности распределения температуры достигает 30 %. Использование нелинейной функции изменения температурного поля в дальнейшем позволит уточнить расчет в рамках разработанного алгоритма решения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ионов Б.П., Ионов А.Б. Спектрально-статистический подход к бесконтактному измерению температуры. *Датчики и системы*, 2009, № 2, с. 9–11.
- [2] Казарян А.А. Тонкопленочный датчик давления и температуры. *Датчики и системы*, 2016, № 3, с. 50–56.
- [3] Паньков А.А. Резонансная диагностика распределения температуры пьезоэлектролюминесцентным оптоволоконным датчиком по решению интегрального уравнения Фредгольма. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2018, № 2, с. 72–82.
- [4] Kalmova M. The scope of application of devices whose operation is based on taking into account the connectivity of thermoelectroelastic fields. *Austrian J. of Technical and Natural Sciences*, 2022, vol. 3 (4), pp. 14–16. <https://doi.org/10.29013/AJT-22-3.4-14-16>
- [5] Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates. *Int. J. of Solids and Structures*, 1974, vol. 10 (6), pp. 625–637.
- [6] Lord H.W., Shulman Y.A. generalized dynamical theory of thermoelasticity. *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, 1967, vol. 15 (5), pp. 299–309.
- [7] Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation. *J. of Elasticity*, 1993, vol. 31, pp. 189–208.
- [8] Ватульян А.О., Нестеров С.А. Динамическая задача термоэлектроруконости для функционально-градиентного слоя. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2017, т. 10, № 2, с. 117–126.
- [9] Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions. *Doklady Physics*, 2007, vol. 52, pp. 90–95.
- [10] Saadatfar M., Razavi A.S. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient. *J. of Mechanical Science and Technology*, 2009, vol. 23, pp. 45–53.
- [11] Akbarzadeh A.H., Babaei M.H., Chen Z.T. The Thermoelectromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder. *Smart Materials and Structures*, 2011, vol. 20 (6). <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>
- [12] Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, vol. 32 (8), pp. 997–1008.

- [13] Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки*, 2020, т. 14, № 4, с. 677–691.
- [14] Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного цилиндра. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2021, № 2, с. 181–190.
- [15] Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная динамическая осесимметричная задача термоэлектроупругости для длинного полого пьезокерамического цилиндра. *Advanced Engineering Research*, 2022, т. 22, № 2, с. 81–90.
- [16] Dai H.L., Wang X, Dai Q.H. Thermo-electro-elastic responses in orthotropic piezoelectric hollow cylinders subjected to thermal shock and electric excitation. *J. of Reinforced Plastics and Composites*, 2005, vol. 24 (10), pp. 1085–1103. <https://doi.org/10.1177/0731684405048834>
- [17] Dai H.L., Luo W.F., Dai T., Luo W.F. Exact solution of thermo-electro-elastic behavior of a fluid-filled FGPM cylindrical thin-shell. *Composite Structures*, 2017, vol. (162), pp. 411–423. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.002>
- [18] Dai H.L., Wang X. Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures. *International J. of Solids and Structures*, 2005, vol. 42 (3–4), pp. 1151–1171. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.06.061>
- [19] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to non-axisymmetric steady-state loads. *J. of Applied Mechanics*, 2003, vol. 70 (1), pp. 111–118.
- [20] Atrian A., Fesharaki J.J., Majzooobi G.H., Sheidaee M. Effects of electric potential on thermo-mechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder under non-axisymmetric loads. *International J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 2011, vol. 5 (11), pp. 2441–2444.
- [21] Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material. *J. of Thermal Stresses*, 1994, vol. 17 (3), pp. 471–487.
- [22] Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. A general solution technique for electroelastic fields in piezoelectric bodies with  $D_{\infty}$  symmetry in cylindrical coordinates. *J. of Wood Science*, 2016, vol. 62, pp. 29–41.
- [23] Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. Analytical technique for thermo-electro-elastic field in piezoelectric bodies with  $D_{\infty}$  symmetry in cylindrical coordinates. *J. of Thermal Stresses*, 2017, vol. 41 (6), pp. 1–20.
- [24] Chen W.Q., Shioya T. Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shell. *J. of Thermal Stresses*, 2001, vol. 24, pp. 105–120.
- [25] Коваленко А.Д. *Основы термоупругости*. Киев, Наукова думка, 1970, 307 с.
- [26] Партон В.З., Кудрявцев Б.А. *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. Москва, Наука, 1988, 470 с.
- [27] Снеддон И.Н. *Преобразования Фурье*. Москва. Иностранная литература, 1955, 668 с.
- [28] Сеницкий, Ю.Э. *Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований*. Саратов, Изд-во Саратовского университета, 1985, 174 с.
- [29] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции*. Москва, Наука, 1977, 342 с.

- [30] Hong C.H., Kim H.P., Choi B.Y., Han H.S., Son J.S., Ahn C.W., Jo W. Lead-free piezoceramics – Where to move on? *J. of Materiomics*, 2016, vol. 2 (1), pp. 1–24. <https://doi.org/10.1016/j.jmat.2015.12.002>
- [31] Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. Uncoupled Problem of Thermoelastoelectricity for a Cylindrical Shell. In: *XXX Russian–Polish–Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering (RSP 2021)*, pp. 263–271. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1\\_31](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1_31)

Статья поступила в редакцию 25.05.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Шляхин Д.А., Юрин В.А. Неосесимметричная нестационарная задача термоэлектростроупругости для длинного пьезокерамического цилиндра. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 7.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-7-2288>



**Шляхин Дмитрий Аверкиевич** — д-р техн. наук, доцент, заведующий кафедрой «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты», Самарский государственный технический университет. e-mail: [d-612-mit2009@yandex.ru](mailto:d-612-mit2009@yandex.ru)



**Юрин Владимир Андреевич** — аспирант кафедры «Строительная механика, инженерная геология, основания и фундаменты», Самарский государственный технический университет. e-mail: [get8ack@mail.ru](mailto:get8ack@mail.ru)

## **Non-axisymmetric non-stationary problem of thermoelectroelasticity for a long piezo-ceramic cylinder**

© D.A. Shlyakhin, V.A. Yurin

Samara State Technical University, Samara, 443100, Russia

*A new closed solution to the uncoupled non-axisymmetric problem of thermoelectroelasticity was constructed for a long hollow piezo-ceramic cylinder for the case of non-stationary temperature alteration on its inner surface, taking into account the convective heat transfer between the outer surface and the environment. Cylindrical surfaces were electroded and connected to a measurement device with large input resistance (idle mode), while the internal surface was grounded. The Fourier—Kirchhoff non-stationary heat conduction equation was considered without taking into account the influence of alteration in the body dimensions and the electric field on the temperature field. The closed solution to the heat conduction problem was constructed by the finite integral transformations (FIT) method. The quasi-static coupled electroelasticity problem at a certain temperature field was solved without taking into account the cylinder inertial properties by the FIT method. The calculated relations obtained made it possible to determine the temperature field, the stress-strain state, as well as the electric field in the long piezo-ceramic cylinder under non-stationary non-axisymmetric action in the form of a function of the temperature alteration. Numerical analysis of the results made it possible to determine the cylinder wall thickness and the region of the temperature effect alteration, where deformation could most efficiently transform into the electrical pulse.*

**Keywords:** *thermoelectroelasticity problem, non-axisymmetric temperature field, finite integral transformations*

### REFERENCES

- [1] Ionov B.P., Ionov A.B. Spektralno-statisticheskiy podkhod k beskontaktnomu izmereniyu temperatury [Spectral statistical approach to contactless measurement of temperature]. *Datchiki i sistemy — Sensors & Systems*, 2009, no. 2, pp. 9–11.
- [2] Kazaryan A.A. Tonkoplennyy datchik davleniya i temperatury [Thin-film sensor of pressure and temperature]. *Datchiki i sistemy — Sensors & Systems*, 2016, no. 3, pp. 50–56.
- [3] Pankov A.A. Rezonansnaya diagnostika raspredeleniya temperatury pyzeoelectrolyuminiscentnykh optovolokonnym datchikom po resheniyu integralnogo uravneniya Fredgolma [Resonant diagnostics of temperature distribution by the piezo-electro-luminescent fiber-optical sensor according to the solution of the Fredholm integral equation]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika — PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 72–82.
- [4] Kalmova M. The scope of application of devices whose operation is based on taking into account the connectivity of thermoelectroelastic fields. *Austrian J. of Technical and Natural Sciences*, 2022, vol. 3 (4), pp. 14–16. <https://doi.org/10.29013/AJT-22-3.4-14-16>
- [5] Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates. *Int. J. of Solids and Structures*, 1974, vol. 10 (6), pp. 625–637.

- [6] Lord H.W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, 1967, vol. 15 (5), pp. 299–309.
- [7] Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation. *J. of Elasticity*, 1993, vol. 31, pp. 189–208.
- [8] Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Dinamicheskaya zadacha termoelektrouprugosti dlya funktsionalno-gradientnogo sloya [The dynamic problem of thermoelectroelasticity for functionally graded layer]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred — Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 117–126.
- [9] Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V. On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions. *Doklady Physics*, 2007, vol. 52, pp. 90–95.
- [10] Saadatfar M., Razavi A.S. Piezoelectric hollow cylinder with thermal gradient. *J. of Mechanical Science and Technology*, 2009, vol. 23, pp. 45–53.
- [11] Akbarzadeh A.H., Babaei M.H., Chen Z.T. The thermoelectromagnetoelastic behavior of a rotating functionally graded piezoelectric cylinder. *Smart Materials and Structures*, 2011, vol. 20 (6). <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/6/065008>
- [12] Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J. Application and analysis of functionally graded piezoelectrical rotating cylinder as mechanical sensor subjected to pressure and thermal loads. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, vol. 32 (8), pp. 997–1008.
- [13] Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. Svyazannaya nestatsionarnaya zadacha termoelektrouprugosti dlya dlinnogo pologo tsilindra [The coupled non-stationary thermo-electro-elasticity problem for a long hollow cylinder]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki — Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 14, no. 4, pp. 677–691.
- [14] Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. Nestatsionarnaya zadacha termoelektrouprugosti dlya dlinnogo pyezokeramicheskogo tsilindra [The nonstationary thermoelectric elasticity problem for a long piezoceramic cylinder]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika — PNRPU Mechanics Bulletin*, 2021, no. 2, pp. 181–190.
- [15] Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. Svyazannaya dinamicheskaya osesimmetrichnaya zadacha termoelektrouprugosti dlya dlinnogo pologo pyezokeramicheskogo tsilindra [Related dynamic axisymmetric thermo-electroelasticity problem for a long hollow piezoceramic cylinder]. *Advanced Engineering Research*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 81–90.
- [16] Dai H.L., Wang X., Dai Q.H. Thermoelastic responses in orthotropic piezoelectric hollow cylinders subjected to thermal shock and electric excitation. *J. of Reinforced Plastics and Composites*, 2005, vol. 24 (10), pp. 1085–1103. <https://doi.org/10.1177/0731684405048834>
- [17] Dai H.L., Luo W.F., Dai T., Luo W.F. Exact solution of thermoelectroelastic behavior of a fluid-filled FGPM cylindrical thin-shell. *Composite Structures*, 2017, vol. (162), pp. 411–423. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.002>
- [18] Dai H.L., Wang X. Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures. *International J. of Solids and Structures*, 2005, vol. 42 (3–4), pp. 1151–1171. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.06.061>
- [19] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to non-axisymmetric steady-state loads. *J. of Applied Mechanics*, 2003, vol. 70 (1), pp. 111–118.

- [20] Atrian A., Fesharaki J.J., Majzoubi G.H., Sheidaee M. Effects of electric potential on thermo-mechanical behavior of functionally graded piezoelectric hollow cylinder under non-axisymmetric loads. *International J. of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 2011, vol. 5 (11), pp. 2441–2444.
- [21] Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material. *J. of Thermal Stresses*, 1994, vol. 17 (3), pp. 471–487.
- [22] Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. A general solution technique for electroelastic fields in piezoelectric bodies with  $D_{\infty}$  symmetry in cylindrical coordinates. *J. of Wood Science*, 2016, vol. 62, pp. 29–41.
- [23] Ishihara M., Ootao Y., Kameo Y. Analytical technique for thermoelectroelastic field in piezoelectric bodies with  $D_{\infty}$  symmetry in cylindrical coordinates. *J. of Thermal Stresses*, 2017, vol. 41 (6), pp. 1–20.
- [24] Chen W.Q., Shioya T. Piezothermoelastic behavior of a pyroelectric spherical shell. *J. of Thermal Stresses*, 2001, vol. 24, pp. 105–120.
- [25] Kovalenko A.D. *Osnovy termouprugosti* [Fundamentals of thermoelasticity]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1970, 307 p.
- [26] Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. *Elektromagnitoupругost pyzoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel* [Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electrically conductive solids]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 470 p.
- [27] Sneddon I.N. *Fourier Transforms*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1951 [In Russ.: Sneddon I.N. Preobrazovaniya Furye. Moscow, Inostrannaya Literatura Publ., 1955, 668 p.].
- [28] Senitsky Y.E. *Issledovanie uprugogo deformirovaniya elementov konstruksii pri dinamicheskikh vozdeystviyakh metodom konechnykh integralnykh preobrazovaniy* [Study of the elastic deformations of structural elements under dynamic influences by the method of finite integral transformations]. Saratov, Saratov University Publ., 1985, 174 p.
- [29] Janke E., Emde F., Losch F. *Tafeln Höherer Funktionen*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1960 [In Russ.: Janke E., Emde F., Losch F. Spetsialnye funktsii. Moscow, Nauka Publ., 1977, 342 p.].
- [30] Hong C.H., Kim H.P., Choi B.Y., Han H.S., Son J.S., Ahn C.W., Jo W. Lead-free piezoceramics – Where to move on? *J. of Materiomics*, 2016, vol. 2 (1), pp. 1–24. <https://doi.org/10.1016/j.jmat.2015.12.002>
- [31] Shlyakhin D.A., Kalmova M.A. Uncoupled problem of thermoelectroelasticity for a cylindrical shell. In: *XXX Russian–Polish–Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering (RSP 2021)*, pp. 263–271. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1\\_31](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86001-1_31)

**Shlyakhin D.A.**, Dr. Sc. (Eng.), Associate Professor, Head of the Department of Construction Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations, Samara State Technical University. e-mail: d-612-mit2009@yandex.ru

**Yurin V.A.**, Postgraduate, Department of Construction Mechanics, Engineering Geology, Bases and Foundations, Samara State Technical University. e-mail: get8ack@mail.ru