

Анализ устойчивости по Якоби и восстановление параметров двойного маятника с демпфированием

© А.В. Сулимов

Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе, Севастополь, 299000, Россия
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

На основе теории Косамби – Картана – Черна, позволяющей определять геометрические структуры и пять геометрических инвариантов динамической системы, проведен анализ устойчивости по Якоби двойного маятника с демпфированием. Собственные значения второго инварианта (тензора кривизны отклонения) дают оценку устойчивости системы по Якоби, связанную с мерой нечувствительности к возмущениям собственно системы и окружающей среды. Подобные исследования актуальны в приложениях, где требуется определение областей устойчивости системы по Ляпунову и по Якоби одновременно. Сформулирована обратная задача восстановления параметров системы по косвенной информации, представленной собственными значениями тензора кривизны отклонения. Для двойного маятника с демпфированием доказаны условия устойчивости по Якоби в терминах его свободных параметров. Решение обратной задачи восстановления параметров маятника получено с использованием оптимизационного подхода. При минимизации регуляризованной критериальной функции применяется новый гибридный алгоритм глобальной оптимизации. Приведен численный пример движения двойного маятника с демпфированием.

Ключевые слова: двойной маятник, линейно-вязкое сопротивление, устойчивость по Якоби, восстановление параметров, критериальная функция, глобальная оптимизация, гибридный алгоритм

Введение. Исследования устойчивости динамических систем в современных условиях могут включать в себя применение теории Косамби — Картана — Черна (теории ККЧ) [1, 2]. При этом реализуется дифференциально-геометрический подход к вариационным дифференциальным уравнениям, описывающим отклонение целой траектории системы от ближайших траекторий. Геометрическое описание, основанное на теории ККЧ, позволяет определить пять геометрических инвариантов системы. Собственные значения второго инварианта — тензора кривизны отклонения — дают оценку устойчивости системы по Якоби. Анализ устойчивости системы в данном контексте связан с изучением ее робастности как меры нечувствительности и адаптации к изменению параметров собственно системы и окружающей среды. Применение теории ККЧ актуально в практических приложениях, где для системы требуется идентифицировать области,

в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби [3].

Цель работы — формулировка критериев устойчивости системы с двумя степенями свободы (плоского двойного маятника с демпфированием) по Якоби в терминах ее свободных параметров. Предложена постановка обратной задачи восстановления параметров системы по заданным собственным значениям тензора кривизны отклонения и приведены результаты ее численного решения. Реализуемый подход основан на применении теории ККЧ, теории обратных задач, методов глобальной оптимизации.

Геометрические инварианты и устойчивость системы по Якоби. Краткий обзор теории ККЧ дан в работах [1, 2]. Уравнения движения n -мерной системы (нелинейные в общем случае) могут быть получены с использованием уравнений Эйлера — Лагранжа и представлены в виде [2]

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x^j, \dot{x}^j, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где локальная система координат (x^i, \dot{x}^i, t) , $i = 1, 2, \dots, n$ введена на открытом связном подмножестве Ω евклидова $(2n + 1)$ -мерного пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$; $x^i = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $\dot{x}^i = dx^i / dt$, $\ddot{x}^i = d^2x^i / dt^2$; t — время; каждая функция $G^i(x^i, \dot{x}^i, t)$ имеет класс гладкости C^∞ в окрестности некоторых начальных условий $((x)_0, (\dot{x})_0, t_0)$ на Ω . Рассматриваются задачи определения пяти геометрических инвариантов системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1) при преобразованиях координат: $\tilde{t} = t$, $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Если преобразования координат являются несингулярными, то ККЧ-ковариантная производная векторного поля $\xi^i(x)$ на Ω определяется в виде [1, 2]

$$\frac{D\xi^i}{dt} = \frac{d\xi^i}{dt} + N_j^i \xi^j \quad (2)$$

(используется соглашение Эйнштейна о суммировании).

В случае $\dot{x}^i = \xi^i$ имеет место $N_j^i \dot{x}^j - 2G^i = -\varepsilon^i$. Контравариантное векторное поле ε^i на Ω называется первым ККЧ-инвариантом.

Если рассматривается случай, когда траектории $\tilde{x}^i(t) = x^i(t) + \eta \xi^i(t)$ (здесь η — малая величина) близки к траекториям системы уравнений (1), то при $\eta \rightarrow 0$ указанная система уравнений преобразуется к виду [1, 2]

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} + 2N_j^i \frac{d\xi^j}{dt} + 2Z_j^i \xi^j = 0, \quad (3)$$

где Z_j^i — кривизна нуль-связности, $Z_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial x^j}$.

Уравнение (3) с использованием (2) можно представить в ковариантной форме [2]

$$\frac{D^2\xi^i}{dt^2} = P_j^i \xi^j.$$

Здесь P_j^i — второй геометрический инвариант (тензор кривизны отклонения):

$$P_j^i = \frac{\partial N_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k - 2G^k G_{jk}^i + N_k^i N_j^k - 2Z_j^i,$$

коэффициенты связности Бервальда представлены как $G_{jk}^i = \frac{\partial^2 G^i}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}$.

В рамках теории ККЧ третий, четвертый и пятый геометрические инварианты системы (1) определяются, согласно [1], так:

$$P_{jk}^i = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial P_j^i}{\partial y^k} - \frac{\partial P_k^i}{\partial y^j} \right);$$

$$P_{jkl}^i = \frac{\partial P_{jk}^i}{\partial y^l};$$

$$D_{jkl}^i = \frac{\partial G_{jk}^i}{\partial y^l}.$$

Третий инвариант P_{jk}^i может быть интерпретирован как тензор кручения. Четвертый P_{jkl}^i и пятый D_{jkl}^i инварианты называются тензором кривизны Римана — Кристоффеля и тензором Дугласа соответственно. В общем случае указанные инварианты могут быть использованы для описания геометрических свойств систем дифференциальных уравнений второго порядка.

При анализе устойчивости по Якоби динамических систем с двумя степенями свободы используются собственные значения тензора P_j^i ,

определенные в виде $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$, где $\tau = P_1^1 + P_2^2$;

$$\Delta = P_1^1 P_2^2 - P_2^1 P_1^2.$$

Определение [1]. Траектории уравнений (1) устойчивы по Якоби, если и только если действительные части собственных значений тензора кривизны отклонения P_j^i всюду строго отрицательны, и неустойчивы по Якоби — в противном случае.

Двойной маятник с демпфированием. Плоский двойной маятник состоит из двух математических маятников, сочлененных шарниром [4, 5]. Первый (верхний) маятник, вращающийся вокруг горизонтальной оси неподвижного плоского шарнира, представляет собой безмассовый жесткий стержень длиной l_1 , несущий на свободном конце материальную точку массой m_1 . Вторым (нижним) маятником, вращающимся вокруг оси подвижного шарнира, связывающего оба маятника, состоит из безмассового жесткого стержня длиной l_2 с материальной точкой массой m_2 на его свободном конце. К первому маятнику присоединен демпфер; при этом отношение расстояния точки соединения стержня и подвижного элемента демпфера от неподвижного шарнира к длине стержня определяется безразмерным параметром γ . Демпфер характеризуется коэффициентом линейновязкого сопротивления μ . Для описания движения рассматриваемой системы с двумя степенями свободы введены две обобщенные координаты: θ_1 — угол отклонения первого стержня от вертикальной оси, проходящей через неподвижный шарнир; θ_2 — угол отклонения второго стержня от вертикальной оси, проходящей через подвижный шарнир, сочленяющий маятники. Дифференциальные уравнения малых движений двойного демпфированного маятника, полученные с использованием уравнений Эйлера — Лагранжа, имеют вид

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{\mu\gamma^2}{m_1} \dot{\theta}_1 + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_1} \theta_1 - \frac{m_2 g}{m_1 l_1} \theta_2 = 0;$$

$$\ddot{\theta}_2 - \frac{\mu\gamma^2 l_1}{m_1 l_2} \dot{\theta}_1 - \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2} \theta_1 + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2} \theta_2 = 0,$$

где g — ускорение свободного падения.

Применение к исследуемой системе подхода на основе теории ККЧ позволяет, в частности, определить компоненты ее тензора кривизны отклонения в следующем виде:

$$P_1^1 = \frac{\mu^2 \gamma^4}{4m_1^2} - \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_1}; \quad P_2^1 = \frac{m_2 g}{m_1 l_1};$$

$$P_1^2 = -\frac{\mu^2 \gamma^4 l_1}{4m_1^2 l_2} + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2}; \quad P_2^2 = -\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2}.$$

Тогда

$$\tau = P_1^1 + P_2^2 = \frac{\mu^2 \gamma^4}{4m_1^2} - \frac{(m_1 + m_2)g(l_1 + l_2)}{m_1 l_1 l_2};$$

$$\Delta = P_1^1 P_2^2 - P_2^1 P_1^2 = -\frac{\mu^2 \gamma^4 g}{4m_1^2 l_2} + \frac{(m_1 + m_2)g^2}{m_1 l_1 l_2}.$$

Условия устойчивости по Якоби системы с двумя степенями свободы имеют вид [2] $\tau < 0$, $\Delta > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \tau < 0 &\Leftrightarrow \frac{\mu^2 \gamma^4}{4m_1^2} - \frac{(m_1 + m_2)g(l_1 + l_2)}{m_1 l_1 l_2} < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu - \frac{2}{\gamma^2} \sqrt{m_1(m_1 + m_2) \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}} g < 0. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Leftrightarrow \frac{\mu^2 \gamma^4 g}{4m_1^2 l_2} < \frac{(m_1 + m_2)g^2}{m_1 l_1 l_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu - \frac{2}{\gamma^2} \sqrt{m_1(m_1 + m_2) \frac{g}{l_1}} < 0. \end{aligned}$$

С учетом $\frac{l_1 + l_2}{l_2} = 1 + \frac{l_1}{l_2}$ в окончательном виде получается

$$\mu - \frac{2}{\gamma^2} \sqrt{m_1(m_1 + m_2) \frac{g}{l_1}} < 0.$$

Доказан следующий результат (условия устойчивости по Якоби рассматриваемой системы в терминах ее свободных параметров).

Теорема. Если свободные параметры системы (двойного математического маятника с демпфированием) $l_1, l_2, m_1, m_2, \mu, \gamma$ удовлетворяют одновременно ограничениям

$$\mu - \frac{2}{\gamma^2} \sqrt{m_1(m_1 + m_2) \frac{g}{l_1}} < 0 \text{ и } 0 < \gamma \leq 1,$$

то система устойчива по Якоби, в противном случае система неустойчива по Якоби.

Замечание. Устойчивость по Якоби двойного маятника с демпфированием не зависит от свободного параметра l_2 .

Численный пример. Рассматривается движение двойного маятника с демпфированием в случае малого сопротивления, при этом $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$. Предполагается, что по результатам анализа экспериментальных данных для двойного маятника с демпфированием установлены следующие приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения: $\lambda_1^* \approx -30,46$; $\lambda_2^* \approx -5,030$ (система устойчива по Якоби). Приведенная косвенная информация получена моделированием системы при следующих значениях ее параметров: $l_* = 1$ м; $m_* = 0,5$ кг; $\mu_* = 8$ Н·с/м; $\gamma_* = 0,5$. Относительная погрешность входных данных не превышает 1,0 %. Свободными переменными являются относительные величины x_1 , x_2 и x_3 , соответствующие искомым параметрам l , m и μ , численные значения которых удовлетворяют заданным ограничениям: $0,2 \leq l \leq 1,2$ м; $0,1 \leq m \leq 1,1$ кг; $0 \leq \mu \leq 12,5$ Н·с/м. Требуется восстановить значения параметров l , m и μ по заданным приближенно собственным значениям λ_1^* и λ_2^* тензора P_j^i .

Следует отметить, что обратные задачи на собственные значения тензоров рассматривались, например, в работе [6]. Существенной особенностью при этом является возможное наличие кратных собственных значений тензоров [7]. Кроме того, вследствие неполноты входных данных, представленных только собственными значениями тензора, критериальная функция обратной задачи в общем случае является многоэкстремальной [8].

Рассматривается в общей постановке обратная задача восстановления параметров динамической системы, которая в рамках выбранной математической модели описывается уравнением

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

где X , Y — гильбертовы пространства; A — компактный линейный оператор, действующий из X в Y . Правая часть возмущенного уравнения представляет приближенные входные данные y^δ . Предполагается, что погрешность задания входной информации δ известна и справедливо неравенство $\|y^\delta - y\| \leq \delta$. Требуется определить устойчивые приближенные решения по заданной приближенно информации y^δ . Существенно, что во многих приложениях обратные задачи являются некорректно поставленными. Далее реализуется подход, основанный на методе регуляризации [8, 9].

Приближенное решение рассматриваемой обратной задачи восстановления параметров системы связано с поиском минимума функционала Тихонова:

$$x_\alpha^\delta = \arg \min_{x \in X} J_\alpha(x), \quad \alpha > 0.$$

Здесь x_α^δ — регуляризованное решение уравнения $Ax = y^\delta$ с параметром регуляризации α ; при этом минимизируемый функционал определен в виде

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y^\delta\|_Y^2 + \alpha \|x\|_X^2,$$

где $\|Ax - y^\delta\|_Y^2$ — функционал невязки (представлен квадратом нормы в пространстве Y); $\alpha \|x\|_X^2$ — стабилизирующий функционал.

Решение регуляризованной обратной задачи восстановления параметров системы получено с использованием оптимизационного подхода. Отмеченные выше особенности обратной задачи обуславливают необходимость применения методов глобальной недифференцируемой оптимизации. Актуальным направлением является разработка и применение гибридных алгоритмов, объединяющих стохастические методы сканирования пространства переменных и детерминированные процедуры локального поиска. В процессе вычислений применен гибридный алгоритм QOM-PCALMSI, интегрирующий стохастический алгоритм столкновения частиц (с построением квазиоппозиций) и вариант метода линеаризации с построением сглаживающих аппроксимаций [10–12]. Изменение значений свободных переменных задачи x_i , $i = \overline{1, 3}$ в заключительной фазе локального поиска при возрастании числа итераций представлено на рис. 1; соответствующее изменение значений критериальной функции $F(x)$ и нормы $Nr(w)$ вектора направления поиска w показано на рис. 2.

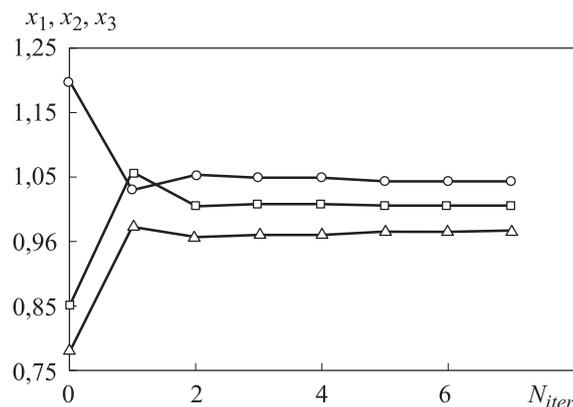


Рис. 1. Изменение значений переменных x_i , $i = \overline{1, 3}$ при возрастании числа итераций N_{iter} :
 —□— x_1 ; —○— x_2 ; —△— x_3

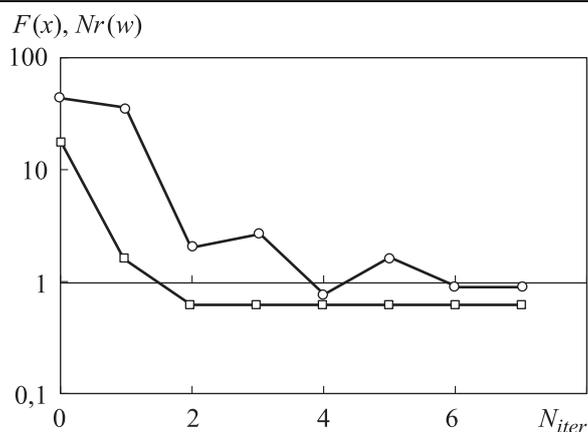


Рис. 2. Изменение значений критериальной функции $F(x)$ и нормы $Nr(w)$ вектора направления поиска при возрастании числа итераций N_{iter} :

—□— $F(x)$; —○— $Nr(w)$

По завершении семи итераций в заключительной фазе локального поиска определены следующие приближенные значения свободных переменных: $x_1^7 \approx 80,307\%$; $x_2^7 \approx 41,732\%$; $x_3^7 \approx 61,799\%$. Восстановлены значения искомым параметров системы: $\tilde{l}_* \approx 1,003$ м; $\tilde{m}_* \approx 0,5173$ кг; $\tilde{\mu}_* \approx 7,725$ Н·с/м. Максимальная относительная погрешность численного решения обратной задачи не превышает 3,5 %.

Заключение. В контексте теории Косамби — Картана — Черна выполнен анализ устойчивости по Якоби динамической системы — двойного маятника с демпфированием. Доказаны условия устойчивости в терминах параметров системы. Сформулирована обратная задача восстановления параметров устойчивой по Якоби системы по заданной приближенно косвенной информации, представленной собственным значениям тензора кривизны отклонения. Приведено численное решение обратной задачи с использованием нового гибридного алгоритма глобальной оптимизации. Точность восстановления параметров системы согласована с точностью задания входной информации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems — applications in gravitation and cosmology. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196.
- [2] Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, art. ID 1650014. DOI: 10.1142/S0219887816500146

- [3] Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.
- [4] Stachowiak T., Okada T. A numerical analysis of chaos in the double pendulum. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, vol. 29, no. 3, pp. 417–422.
- [5] Yao Y. Numerical study on the influence of initial conditions on quasi-periodic oscillation of double pendulum system. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1437, art. ID 012093. DOI: 10.1088/1742-6596/1437/1/012093
- [6] Ye K., Hu S. Inverse eigenvalue problem for tensors. *Communications in Mathematical Sciences*, 2017, vol. 15, no. 6, pp. 1627–1649.
- [7] Hu S., Ye K. Multiplicities of eigenvalues of tensors. *Communications in Mathematical Sciences*, 2016, vol. 14, no. 4, pp. 1049–1071.
- [8] Wang Y., Yagola A.G., Yang C. *Optimization and regularization for computational inverse problems and applications*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2010, XVIII+351 pp.
- [9] Benning M., Burger M. Modern regularization methods for inverse problems. *Acta Numerica*, 2018, vol. 27, pp. 1–111.
- [10] Torres R.H., Campos Velho H.F., da Luz E.F.P. Enhancement of the Multi-Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization. *Selecciones Matemáticas*, 2019, vol. 06 (2), pp. 156–177.
- [11] Шкапов П.М., Сулимов А.В., Сулимов В.Д. Вычислительная диагностика неустойчивых по Якоби динамических систем с использованием гибридных алгоритмов глобальной оптимизации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 4 (97), с. 40–56.
- [12] Сулимов В.Д., Сулимов А.В., Шкапов П.М. *Программа для ЭВМ, реализующая гибридный алгоритм глобальной недифференцируемой оптимизации QOM-PCALMSI*. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2022664841. Заявка № 2022663517. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 05 августа 2022.

Статья поступила в редакцию 28.06.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сулимов А.В. Анализ устойчивости по Якоби и восстановление параметров двойного маятника с демпфированием. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 7. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-7-2287>

Сулимов Андрей Валерьевич — старший преподаватель, кафедра физики и геофизики, Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе, аспирант кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: avsu7@mail.ru

Jacobi stability analysis and restoring parameters of the damped double pendulum

© A.V. Sulimov

Sevastopol Branch, Lomonosov MSU, Sevastopol, 299000, Russia
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Jacobi stability for a double damped pendulum was analyzed on the basis of the Kosambi–Cartan–Chern theory making it possible to determine geometric structures and five geometric invariants of the dynamical system. Eigenvalues of the second invariant (deviation curvature tensor) provided the estimate of the Jacobi stability related to the insensitivity measure against disturbances of the system itself and the environment. Such studies are relevant in applications, where it is required to determine the system stability regions according to Lyapunov and Jacobi simultaneously. Inverse problem of restoring the system parameters from indirect information represented by the eigenvalues of the deviation curvature tensor was formulated. For a double pendulum with damping, the Jacobi stability conditions were justified in terms of its free parameters. Solution to the inverse problem of restoring the pendulum parameters was obtained using the optimization approach. When minimizing the regularized criterion function, a new hybrid global optimization algorithm was applied. Numerical example is provided.

Keywords: double pendulum, linear viscous resistance, Jacobi stability, parameter recovery, criterion function, global optimization, hybrid algorithm

REFERENCES

- [1] Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems — applications in gravitation and cosmology. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196.
- [2] Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, art. ID 1650014. DOI: 10.1142/S0219887816500146
- [3] Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.
- [4] Stachowiak T., Okada T. A numerical analysis of chaos in the double pendulum. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, vol. 29, no. 3, pp. 417–422.
- [5] Yao Y. Numerical study on the influence of initial conditions on quasi-periodic oscillation of double pendulum system. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1437, art. ID 012093. DOI: 10.1088/1742-6596/1437/1/012093
- [6] Ye K., Hu S. Inverse eigenvalue problem for tensors. *Communications in Mathematical Sciences*, 2017, vol. 15, no. 6, pp. 1627–1649.
- [7] Hu S., Ye K. Multiplicities of eigenvalues of tensors. *Communications in Mathematical Sciences*, 2016, vol. 14, no. 4, pp. 1049–1071.
- [8] Wang Y., Yagola A.G., Yang C. *Optimization and regularization for computational inverse problems and applications*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2010, XVIII+351 pp.
- [9] Benning M., Burger M. Modern regularization methods for inverse problems. *Acta Numerica*, 2018, vol. 27, pp. 1–111.

- [10] Torres R.H., Campos Velho H.F., da Luz E.F.P. Enhancement of the Multi-Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization. *Selecciones Matemáticas*, 2019, vol. 06 (2), pp. 156–177.
- [11] Shkapov P.M., Sulimov A.V., Sulimov V.D. Vychislitel'naya diagnostika neustoichivyykh po Yakobi dinamicheskikh system s ispolzovaniem gibridnykh algoritmov globalnoy optimizatsii [Computational diagnostics of Jacobi unstable dynamical systems with the use of hybrid algorithms of global optimization]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2021, no. 4 (97), pp. 40–56.
- [12] Sulimov V.D., Sulimov A.V., Shkapov P.M. *Programma dlya EVM, realizuyuschaya gibridnyi algoritm globalnoy nedifferentsiruemoy optimizatsii QOM-PCALMSI* [Computer software program implementing the QOM-PCALMSI hybrid algorithm of global non-differentiable optimization]. *Svidetelstvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM No. 2022664841. Zayavka No. 2022663517. Data gosudarstvennoy registratsii v Reestre program dlya EVM 5 avgusta 2022* [Certificate of state registration of the ECM program No. 2022664841. Application No. 2022663517. Date of state registration in the Register of ECM programs August 5, 2022].

Sulimov A.V., Senior Lecturer, Department of Physics and Geophysics, Branch of the Lomonosov MSU in Sevastopol; Postgraduate, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: avsu7@mail.ru