

## Модальный анализ модели крыла в потоке воздуха в консервативной постановке

© А.М. Наумов, О.А. Домнина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Одним из важнейших видов исследования динамических свойств упругих систем является модальный анализ. С его помощью исследованы собственные частоты и формы колебаний модели крыла в виде плоского стержня переменной геометрии, близкой к геометрии реального крыла, в потоке воздуха с нулевым углом атаки. Влияние набегающего потока воздуха учитывается посредством внутренних силовых факторов, появляющихся под действием лобовой аэродинамической силы со стороны потока. Приращения аэродинамических сил и моментов, возникающих при малых колебаниях модели, не учитываются, т. е. не происходит «подкачки» энергии при малых колебаниях со стороны потока воздуха, и задача решается в консервативной постановке. Численно определены первые три частоты собственных колебаний и соответствующие им формы. Показано, что все они являются чисто изгибными. Исследована зависимость поведения первых трех частот от скорости набегающего потока.*

**Ключевые слова:** модель крыла с переменной геометрией, набегающий поток воздуха, аэродинамические силы, собственные частоты колебаний, собственные формы колебаний, консервативная задача динамики

**Введение.** Известно [1], что колебательные свойства в значительной степени влияют на эффективность применения летательного аппарата (ЛА), надежность и безопасность полета. Спектр собственных частот и форм колебаний конструкции ЛА устанавливаются расчетом и экспериментом. Результаты определения собственных частот и форм колебаний служат основой для анализа динамических свойств ЛА. Натурные (экспериментальные) методы исследования колебаний элементов ЛА в аэродинамических трубах, на вибростендах и с привлечением иного испытательного оборудования являются самыми точными и надежными. Однако такие исследования крайне трудоемки, достаточно длительны и дорогостоящи, для их проведения требуется привлекать большое число специалистов и применять специализированное оборудование. В связи с этим в последнее время благодаря развитию вычислительной техники и повышению ее быстродействия появилась возможность численного исследования большинства физических явлений, происходящих с элементами ЛА. Математическое моделирование таких процессов позволяет быстро и с относительно низкими затратами исследовать различные варианты элементов ЛА, в том числе геометрию и материалы этих элементов, свойства внешней среды и т.д.

Исследованию собственных частот и форм колебаний уделено большое внимание в современной как научной, так учебно-методической литературе. В частности, в [2] данная проблема рассмотрена с применением конечно-элементного метода, но не учтено статическое нагружение крыла набегающим потоком. В [1] исследованы колебания крыла с помощью системы дифференциальных уравнений (ДУ) совместных изгибно-крутильных колебаний (изгибных колебаний четвертого порядка и крутильных колебаний второго порядка). Предложено их решать итерационным методом, а также методом сосредоточенных масс и методом обобщенных координат. Однако все эти методы достаточно громоздки, требуется высокая математическая подготовка инженера.

В статье [3] также применен модальный анализ модели крыла при определении симметричных и кососимметричных форм колебаний крыла, рассмотрены приемы «отстройки» от флаттера. В работе [4] акцент сделан на обработке результатов экспериментальных исследований частот и форм колебаний. В работе [5] представлен модальный анализ крыла, выполнены теоретические и численные расчеты при рассмотрении крыла самолета как свободной балки. Получены собственные частоты и связанные с ними формы колебаний. В результате исследования сделан вывод о том, что крыло самолета можно рассматривать как консольную балку, пренебрегая всеми силами, действующими на самолет (кроме силы тяжести).

В статье [6] модальный анализ крыльев планеров и транспортных самолетов проведен методом динамической жесткости. Крыло представлено набором элементов динамической жесткости связанных балок на изгиб–кручение, которые собраны в общую матрицу динамической жесткости всего крыла. В работе [7] исследовано влияние больших деформаций конструкции крыла на его модальные характеристики. В монографии [8] рассмотрены колебания крыльев летательных аппаратов, при этом доказывается, что в процессе эксплуатации могут появляться так называемые колебания катастрофического изменения формы в потоке газа.

Настоящая работа посвящена модальному анализу свободных колебаний в потоке воздуха в самой простой консервативной постановке. Приращения внешних сил со стороны набегающего потока на данном этапе исследования не учитываются, а рассматриваются лишь внутренние силовые факторы, возникающие в модели крыла при взаимодействии со стационарным набегающим потоком воздуха. Фактически решается задача определения собственных частот колебаний модели крыла, предварительно нагруженной внешним потоком. В основе исследований лежит система уравнений малых колебаний предварительно нагруженного стержня [9]. Информация о спектре

собственных частот важна для дальнейших исследований динамической устойчивости модели крыла в потоке.

**Постановка задачи.** Одна из актуальных задач современной аэромеханики — задача отстройки резонансных частот крыльев летательных аппаратов от рабочих частот. Любые задачи аэроупругости можно рассматривать как в статической, так и динамической постановке. Статическая постановка задач аэроупругости возможна в силу того, что аэродинамические силы и моменты, возникающие при статических деформациях элементов конструкции, не зависят от времени. Одной из главных трудностей, с которыми сталкиваются при исследовании процессов деформирования под действием аэродинамических сил, является определение сил и моментов, действующих на конструкцию. В общем случае получить информацию о величине сил, возникающих в процессе нагружения крыла потоком воздуха, возможно исключительно путем обобщения большого массива экспериментальных данных для некоторых характерных частных случаев. В данной работе рассматривается частный случай нагружения модели крыла переменного эллиптического поперечного сечения при нулевом угле атаки.

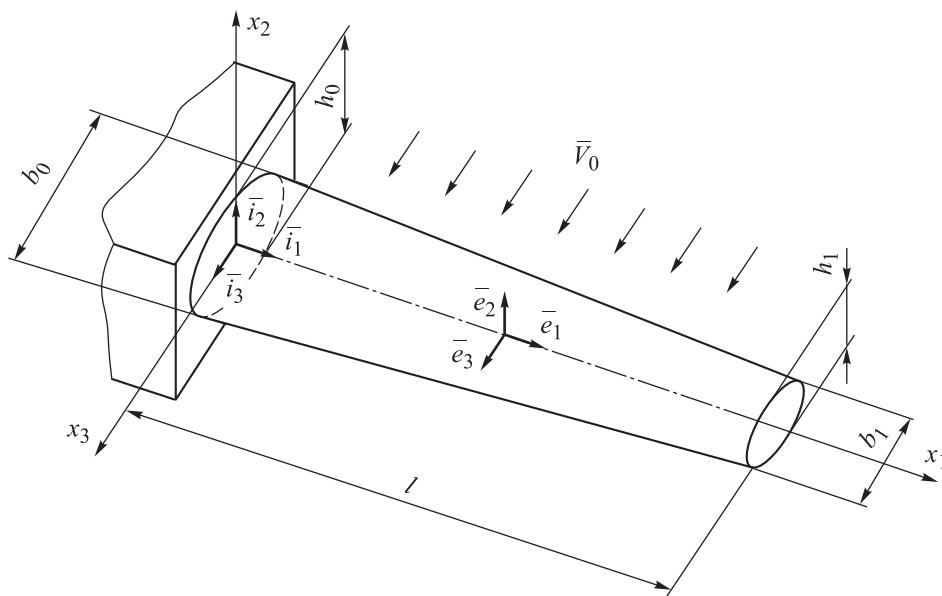


Рис. 1. Схема модели крыла:

$x_j$  — координатные оси декартового базиса;  $\bar{e}_j$  — орты связанного главного недеформированного базиса (направлены по главным центральным осям сечения и по касательной к осевой линии);  $\bar{i}_j$  — орты декартового базиса;  $\bar{V}_0$  — вектор скорости набегающего потока

Цель работы — провести модальный анализ стержневой модели крыла в потоке. Модальный анализ, особенно в отношении определения собственных частот, крайне важен для дальнейших исследований

явлений потери динамической устойчивости в потоке воздуха. Задача решается в консервативной постановке.

Рассмотрим модель крыла в самой упрощенной постановке (рис. 1). Представим модель крыла в виде плоского стержня переменного эллиптического сечения в потоке движущегося воздуха с нулевым углом атаки. Она имеет следующие характеристики: длина модели  $l = 15$  м; ширина в заделке  $b_0 = 2$  м; ширина на конце  $b_1 = 1$  м; толщина в заделке  $h_0 = 0,15$  м; толщина на конце  $h_1 = 0,05$  м; модуль упругости  $E = 72\,000$  МПа; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,33$ ; плотность материала  $\rho = 2780$  кг/м<sup>3</sup>.

**Структура аэродинамических сил.** При нагружении модели крыла набегающим потоком, как принято считать в прикладной теории аэроупругости, в общем случае возникают три силовых фактора (рис. 2):

$\bar{q}_L$  — подъемная сила, компонента силы, направленная нормально к скорости потока;

$\bar{q}_n$  — лобовая сила, компонента силы, направленная по направлению скорости потока;

$\bar{\mu}_a$  — аэродинамический момент.

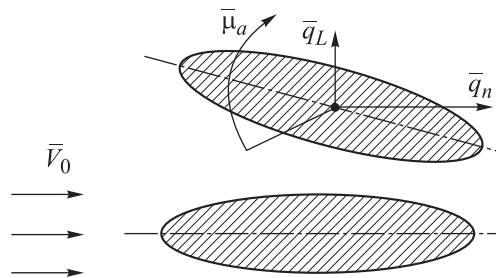


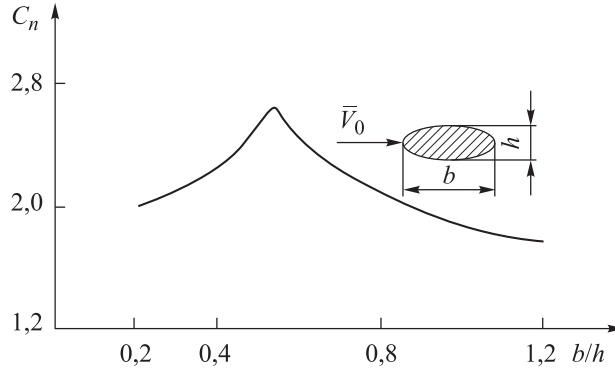
Рис. 2. Аэродинамические силы и момент, действующие на модель

В данном случае, так как угол атаки равен нулю (скорость потока  $V_0$  направлена по оси  $e_{30}$ ), подъемная сила  $\bar{q}_L$  и момент  $\bar{\mu}_a$  отсутствуют. Рассмотрим лобовую силу  $\bar{q}_n$ . Ее можно рассчитать следующим образом:

$$q_n = \frac{1}{2} C_n V_0^2 \rho_v h, \quad (1)$$

где  $C_n$  — безразмерный коэффициент лобового сопротивления (пропорциональности);  $\rho_v$  — плотность воздуха (далее  $\rho_v = 1,225$  кг/м<sup>3</sup>).

Теперь для определения величины лобовой силы необходимо знать только  $C_n$ . График изменения этого коэффициента для различных соотношений ширины и толщины крыла приведен на рис. 3.



**Рис. 3.** Зависимость коэффициента лобового сопротивления (пропорциональности)  $C_n$  от отношения ширины крыла  $b$  к его толщине  $h$

Видим, что когда соотношение ширины крыла к его высоте стремится к бесконечности, коэффициент пропорциональности стремится к 1,2. Таким образом, лобовая сила со стороны потока определена.

**Общий вид разрешающей системы.** За основу дальнейших исследований возьмем систему дифференциальных уравнений для малых колебаний стержня в связанных осях в безразмерной форме [9]:

$$\begin{aligned}
 n_1(\varepsilon) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta \mathbf{Q}}{\partial \varepsilon} - A_Q \Delta \mathbf{x} - A_x \Delta \mathbf{Q} &= \Delta \mathbf{F}; \\
 J \frac{\partial^2 \mathfrak{g}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta \mathbf{M}}{\partial \varepsilon} - A_M \Delta \mathbf{x} - A_x \Delta \mathbf{M} - A_1 \Delta \mathbf{Q} &= \Delta \mathbf{T}; \\
 \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \varepsilon} + A_x \mathfrak{g} - \Delta \mathbf{x} &= 0; \\
 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varepsilon} + A_x \mathfrak{g} + A_1 \mathfrak{g} &= 0; \\
 \Delta \mathbf{M} &= A_{ii} \Delta \mathbf{x},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $n_1(\varepsilon)$  — функция распределения погонной массы стержня,  $\varepsilon$  — безразмерная координата;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $\tau$  — безразмерное время;  $\Delta \mathbf{Q}$  — вектор приращений внутренних сил;  $A_{ii}$  — жесткости стержня;  $\Delta \mathbf{x}$  — вектор приращения кривизн;  $\Delta \mathbf{F}$  — вектор приращений внешних сил;  $J$  — физический тензор инерции элемента стержня;  $\mathfrak{g}$  — вектор углов поворота;  $\Delta \mathbf{M}$  — вектор приращений внутренних моментов;  $\Delta \mathbf{T}$  — вектор приращений внешних моментов.

Для переменного по длине сечения безразмерный коэффициент погонной массы определяется отношением

$$n_1(\varepsilon) = \frac{m_0(\varepsilon)}{m_0(0)},$$

где  $m_0(\varepsilon)$  — масса единицы длины стержня,  $m_0(\varepsilon) = \rho b(\varepsilon)h(\varepsilon)\frac{\pi}{4}$ ;

$b(\varepsilon)$  — ширина крыла,  $b(\varepsilon) = 2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ;  $h(\varepsilon)$  — толщина крыла,

$h(\varepsilon) = 0,15\left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right)$ .

Зависимость  $n_1(\varepsilon)$  от безразмерной длины представлена на рис. 4.

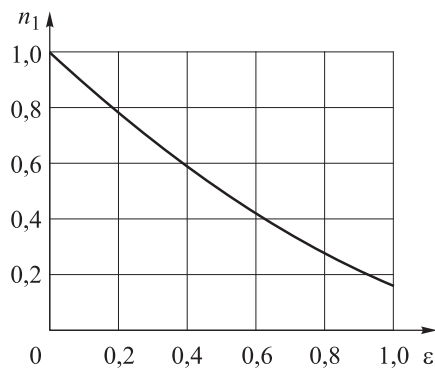


Рис. 4. Зависимость погонной массы стержня от безразмерной координаты

Для численной алгоритмизации решения необходимо представить матрицы, входящие в систему уравнений (2) в скалярном виде:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{pmatrix};$$

$$A_Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_{30}^* & -Q_{20}^* \\ -Q_{30}^* & 0 & Q_{10}^* \\ Q_{20}^* & -Q_{10}^* & 0 \end{pmatrix}; \quad A_M = \begin{pmatrix} 0 & M_{30}^* & -M_{20}^* \\ -M_{30}^* & 0 & M_{10}^* \\ M_{20}^* & -M_{10}^* & 0 \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & -x_{30} & x_{20} \\ x_{30} & 0 & -x_{10} \\ -x_{20} & x_{10} & 0 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $J_{11} = \rho J'_{11}$ ,  $J'_{11}$  — полярный момент инерции;  $J_{22} = \rho J'_{22}$ ,  $J_{33} = \rho J'_{33}$ ,  $J'_{22}$ ,  $J'_{33}$  — осевые моменты инерции;  $Q_{i0}^*$ ,  $M_{i0}^*$  — внутренние силовые факторы, возникающие в модели от набегающего потока воздуха.

Распишем систему уравнений (1) в скалярной форме:

$$\begin{aligned}
 n_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \varepsilon} - Q_{30}^* \Delta \alpha_2 + Q_{20}^* \Delta \alpha_3 + \alpha_{30} \Delta Q_2 - \alpha_{20} \Delta Q_3 &= \Delta F_1; \\
 n_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \varepsilon} + Q_{30}^* \Delta \alpha_1 - Q_{10}^* \Delta \alpha_3 - \alpha_{30} \Delta Q_1 + \alpha_{10} \Delta Q_3 &= \Delta F_2; \\
 n_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \varepsilon} - Q_{20}^* \Delta \alpha_1 + Q_{10}^* \Delta \alpha_2 + \alpha_{20} \Delta Q_1 - \alpha_{10} \Delta Q_2 &= \Delta F_3; \\
 J_{11} \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_1}{\partial \varepsilon} - M_{30}^* \Delta \alpha_2 + M_{20}^* \Delta \alpha_3 + \\
 + \alpha_{30} \Delta M_2 - \alpha_{20} \Delta M_3 &= \Delta T_1; \\
 J_{22} \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_2}{\partial \varepsilon} + M_{30}^* \Delta \alpha_1 - M_{10}^* \Delta \alpha_3 - \alpha_{30} \Delta M_1 + \\
 + \alpha_{10} \Delta M_3 + \Delta Q_3 &= \Delta T_2; \\
 J_{33} \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_3}{\partial \varepsilon} - M_{20}^* \Delta \alpha_1 + M_{10}^* \Delta \alpha_2 + \\
 + \alpha_{20} \Delta M_1 - \alpha_{10} \Delta M_2 - \Delta Q_2 &= \Delta T_3; \\
 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varepsilon} - \alpha_{30} \vartheta_2 + \alpha_{20} \vartheta_3 - \Delta \alpha_1 &= 0; \\
 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varepsilon} + \alpha_{30} \vartheta_1 - \alpha_{10} \vartheta_3 - \Delta \alpha_2 &= 0; \\
 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \varepsilon} - \alpha_{20} \vartheta_1 + \alpha_{10} \vartheta_2 - \Delta \alpha_3 &= 0; \\
 \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} - \alpha_{30} u_2 + \alpha_{20} u_3 &= 0; \\
 \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + \alpha_{30} u_1 - \alpha_{10} u_3 - \vartheta_3 &= 0; \\
 \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} - \alpha_{20} u_1 + \alpha_{10} u_2 + \vartheta_2 &= 0; \\
 \Delta M_1 = G J_k \Delta \alpha_1; \quad \Delta M_2 = E J_2 \Delta \alpha_2; \quad \Delta M_3 = E J_3 \Delta \alpha_3,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где  $G$  — модуль упругости второго рода.

Колебания в плоскости самого крыла ( $e_{10}, e_{30}$ ) в силу высокой жесткости высокочастотные, их можно исключить из рассмотрения, поскольку при дальнейших исследованиях поведения модели, связанных уже с динамической потерей устойчивости в потоке, они никакого влияния не окажут.

Тогда некоторые компоненты вектора состояния обнуляются:

$$u_1 = 0, u_3 = 0, \Delta Q_1 = 0, \Delta Q_3 = 0, \Delta M_2 = 0, \vartheta_2 = 0. \quad (5)$$

Для рассматриваемого случая упростим систему (4). В случае равенства угла атаки нулю имеем дело с задачей о свободных колебаниях изогнутого в одной плоскости стержня, т. е. справедливы следующие тождества:

$$\mathfrak{x}_{10} = 0, \mathfrak{x}_{30} = 0, Q_{10}^* = 0, Q_{20}^* = 0, M_{10}^* = 0, M_{30}^* = 0. \quad (6)$$

Далее, в силу малости колебаний и консервативности поставленной задачи, справедливо предположить, что приращения внешних сил отсутствуют:  $\Delta F = 0, \Delta T = 0$ .

С учетом сделанных предположений система уравнений (4) 12-го порядка может быть упрощена до системы 6-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \varepsilon} + Q_{30}^* \Delta \mathfrak{x}_1 &= 0; & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varepsilon} - \Delta \mathfrak{x}_1 &= 0; \\ J_{11} \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_1}{\partial \varepsilon} + M_{20}^* \Delta \mathfrak{x}_3 &= 0; & \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \varepsilon} - \Delta \mathfrak{x}_3 &= 0; \\ J_{33} \frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta M_3}{\partial \varepsilon} - M_{20}^* \Delta \mathfrak{x}_1 &= 0; & \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} - \vartheta_3 &= 0; \\ & & \Delta M_1 &= A_{11} \Delta \mathfrak{x}_1; \\ & & \Delta M_3 &= A_{33} \Delta \mathfrak{x}_3, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $A_{11} = GJ_k$ ;  $A_{22} = EJ_2$ ;  $A_{33} = EJ_3$ .

Перед решением системы конкретизируем вид ненулевых начальных функций  $Q_{30}^*$ ,  $M_{20}^*$ , входящих в систему (7). Для этого рассмотрим изгиб модели крыла в плоскости воздействия равномерно распределенной нагрузки.

Запишем систему ДУ изгиба балки:

$$\frac{dQ_{30}^*}{d\varepsilon} = q_n l, \quad \frac{dM_{20}^*}{d\varepsilon} = Q_{30}^* l. \quad (8)$$



В итоге получим

$$\begin{aligned} Q_{30}^*(\varepsilon) &= \frac{1}{2} C_n V_0^2 \rho h(\varepsilon)(1-\varepsilon); \\ M_{20}^*(\varepsilon) &= \frac{1}{2} C_n V_0^2 \rho h(\varepsilon) \left( -\frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В системе (7) будем искать неизвестные функции в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_{02}(\varepsilon) e^{i\lambda t}, \quad \vartheta_1 = \vartheta_{01}(\varepsilon) e^{i\lambda t}, \quad \vartheta_3 = \vartheta_{03}(\varepsilon) e^{i\lambda t}; \\ Q_2 &= Q_{02}(\varepsilon) e^{i\lambda t}, \quad M_1 = M_{01}(\varepsilon) e^{i\lambda t}, \quad M_3 = M_{03}(\varepsilon) e^{i\lambda t}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $u_{02}$ ,  $\vartheta_{01}$ ,  $\vartheta_{03}$ ,  $Q_{02}$ ,  $M_{01}$ ,  $M_{03}$  — функции, отвечающие за формы колебаний;  $\lambda$  — частоты колебаний.

Подставляя (10) в (7), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \varepsilon} + \lambda^2 u_2 - Q_{30}^* \Delta \mathbf{x}_1 &= 0; & \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varepsilon} - \Delta \mathbf{x}_1 &= 0; \\ \frac{\partial \Delta M_1}{\partial \varepsilon} + J_{11} \lambda^2 \vartheta_1 - M_{20}^* \Delta \mathbf{x}_3 &= 0; & \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \varepsilon} - \Delta \mathbf{x}_3 &= 0; \\ \frac{\partial \Delta M_3}{\partial \varepsilon} + J_{33} \lambda^2 \vartheta_3 + M_{20}^* \Delta \mathbf{x}_1 &= 0; & \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} - \vartheta_3 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Система (11) из шести дифференциальных уравнений может быть дополнена системой из четырех алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta M_1 &= A_{11} \Delta \mathbf{x}_1; \\ \Delta M_3 &= A_{33} \Delta \mathbf{x}_3; \\ Q_{30}^* &= \frac{1}{2} C_n V_0^2 \rho h(1-\varepsilon); \\ M_{20}^* &= \frac{1}{2} C_n V_0^2 \rho h \left( -\frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Представим полученную систему (11) в матрично-векторном виде

$$\frac{d\mathbf{Z}}{d\varepsilon} = -B(\varepsilon, \lambda) \cdot \mathbf{Z}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{Z}$  — вектор состояния системы;  $B(\varepsilon, \lambda)$  — матрица коэффициентов,

$$B(\varepsilon, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{Q_{30}^*}{A_{11}} & 0 & 0 & 0 & n_1(\varepsilon)\lambda^2 \\ 0 & 0 & -\frac{M_{20}^*}{A_{33}} & J_{11}\lambda^2 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{M_{20}^*}{A_{11}} & 0 & 0 & J_{33}\lambda^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{A_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнений (13) будем искать методом начальных параметров. Задавшись числовым значением  $\lambda$ , находим (численно) решение уравнения

$$\mathbf{Z} = K(\varepsilon, \lambda) \cdot \mathbf{C}, \quad (14)$$

где  $K(\varepsilon, \lambda)$  — фундаментальная матрица решений однородного уравнения ( $K(0, \lambda) = 0$ ). Для получения фундаментальной матрицы  $K(\varepsilon, \lambda)$  уравнение (13) решается шесть раз при начальных условиях:

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{Z}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При  $\varepsilon = 0$  (заделка, запрещены все перемещения) из условия следует, что  $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ . Оставшиеся три компонента вектора  $\mathbf{C}$  находим из трех краевых условий при  $\varepsilon = 1$  (свободный край, равны нулю силовые компоненты вектора состояния). В итоге имеем систему уравнений

$$\begin{cases} k_{11}(1, \lambda)C_1 + k_{12}(1, \lambda)C_2 + k_{13}(1, \lambda)C_3 = 0; \\ k_{21}(1, \lambda)C_1 + k_{22}(1, \lambda)C_2 + k_{23}(1, \lambda)C_3 = 0; \\ k_{31}(1, \lambda)C_1 + k_{32}(1, \lambda)C_2 + k_{33}(1, \lambda)C_3 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Для того чтобы система (15) имела нетривиальное отличное от нуля решение, определитель системы должен быть равен нулю:

$$D = \det \begin{bmatrix} k_{11}(1, \lambda) & k_{12}(1, \lambda) & k_{13}(1, \lambda) \\ k_{21}(1, \lambda) & k_{22}(1, \lambda) & k_{23}(1, \lambda) \\ k_{31}(1, \lambda) & k_{32}(1, \lambda) & k_{33}(1, \lambda) \end{bmatrix} = 0.$$

Решая уравнение (12) для ряда значений  $\lambda_i$ , находим такие  $\lambda_i$ , при которых определитель  $D$  с заданной степенью точности можно считать равным нулю. Такие  $\lambda_i$  являются частотами стержня.

Составим алгоритм для нахождения векторов решения. Для этого выпишем значения используемых жесткостей и моментов инерции и приведем их к безразмерному виду

$$A_{11}^p(\varepsilon) = GJ_{\kappa}^p(\varepsilon) = G \frac{\pi \left( \frac{b(\varepsilon)}{h(\varepsilon)} \right)^3}{\left( \frac{b(\varepsilon)}{h(\varepsilon)} \right)^3 + 1} \left( \frac{h(\varepsilon)}{2} \right)^4;$$

$$A_{22}^p(\varepsilon) = EJ_{22}^p(\varepsilon) = E \frac{\pi b^3(\varepsilon) h(\varepsilon)}{64};$$

$$A_{33}^p(\varepsilon) = EJ_{33}^p(\varepsilon) = E \frac{\pi b(\varepsilon) h^3(\varepsilon)}{64},$$

где  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ ;  $J_{11}^p = J_{22}^p(\varepsilon) + J_{33}^p(\varepsilon)$ .

Безразмерные жесткости:

$$A_{11}^0(\varepsilon) = \frac{A_{11}^p(\varepsilon)}{A_{33}^p(0)}; \quad A_{22}^0(\varepsilon) = \frac{A_{22}^p(\varepsilon)}{A_{33}^p(0)}; \quad A_{33}^0 = \frac{A_{33}^p(\varepsilon)}{A_{33}^p(0)}.$$

Безразмерные величины:

$$J_{11}^0 = \frac{J_{11}^p(\varepsilon)}{m_0(0)l^2}, \quad J_{22}^0 = \frac{J_{22}^p(\varepsilon)}{m_0(0)l^2}, \quad J_{33}^0 = \frac{J_{33}^p(\varepsilon)}{m_0(0)l^2};$$

$$Q_{30}^0 = Q_{30}^p \frac{l^2}{A_{33}^p(\varepsilon)}, \quad M_{20}^0 = M_{20}^p \frac{l}{A_{33}^p(\varepsilon)}.$$

В программном комплексе Mathcad был составлен алгоритм расчета предварительно нагруженной потоком воздуха модели крыла методом начальных параметров, в результате чего получен график изменения характеристического определителя в зависимости от частоты  $\lambda$  (рис. 5).

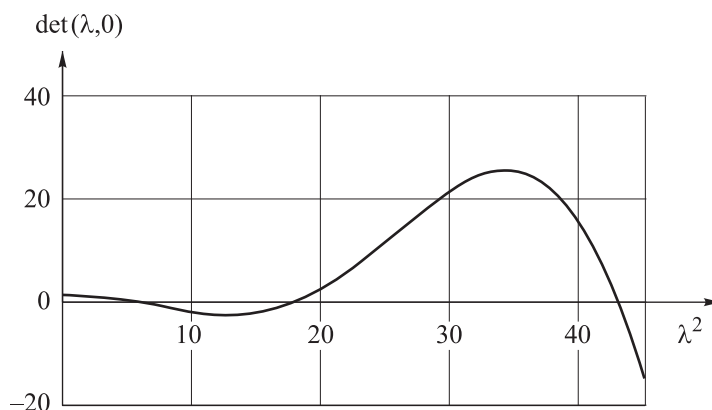


Рис. 5. График изменения характеристического определителя при  $V_0 = 0$

По графику (см. рис. 5) получаем значения первых трех собственных частот в безразмерном виде:

$$\lambda_1 = 2,1982; \lambda_2 = 4,2489; \lambda_3 = 6,5565.$$

Затем можем получить зависимость изменения первых трех частот от скорости набегающего потока (рис. 6). Очевидно, что частоты изменяются крайне незначительно. Далее этому будет дано объяснение.

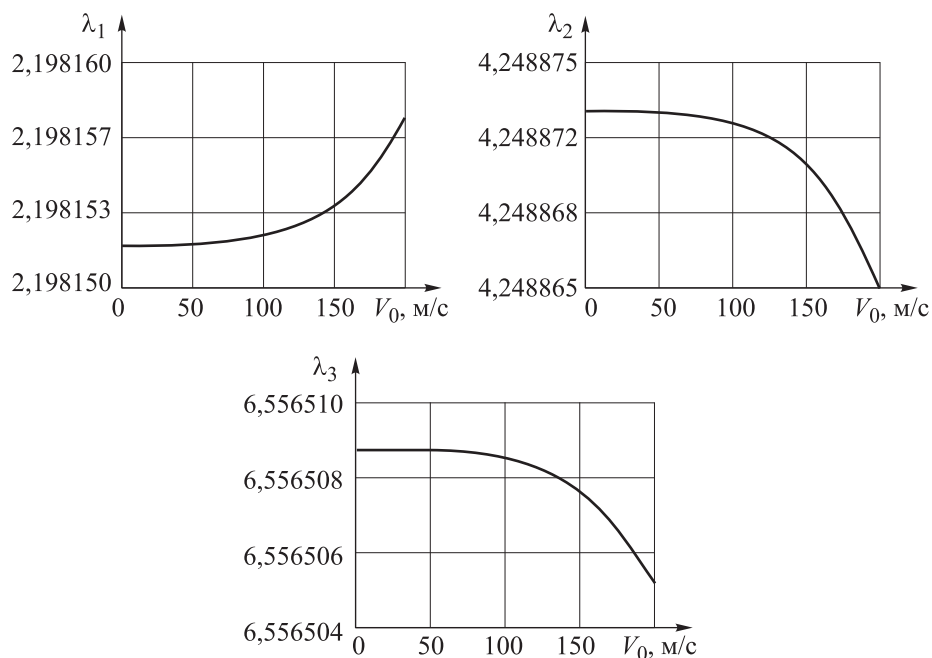


Рис. 6. Зависимость первых трех частот от скорости  $V_0$

По полученным частотам можно построить формы колебаний. После определения  $\lambda_i$  находим из уравнения (13) собственные векторные функции  $\mathbf{Z}_0^{(i)}$ , удовлетворяющие краевым условиям задачи:

$$\mathbf{Z}_0^{(i)} = K(\varepsilon, \lambda_i) \mathbf{C}^{(i)}, \quad (16)$$

где  $K(\varepsilon, \lambda_i)$  — фундаментальная матрица решений для собственных значений частот  $\lambda_i$ .

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} k_{11}(1, \lambda_i) C_1^{(i)} + k_{12}(1, \lambda_i) C_2^{(i)} + k_{13}(1, \lambda_i) C_3^{(i)} = 0; \\ k_{21}(1, \lambda_i) C_1^{(i)} + k_{22}(1, \lambda_i) C_2^{(i)} + k_{23}(1, \lambda_i) C_3^{(i)} = 0; \\ k_{31}(1, \lambda_i) C_1^{(i)} + k_{32}(1, \lambda_i) C_2^{(i)} + k_{33}(1, \lambda_i) C_3^{(i)} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

из которой, взяв два уравнения, определяем  $C_1^{(i)}$ ,  $C_2^{(i)}$  в зависимости от  $C_3^{(i)}$ :  $C_k^{(i)} = \gamma C_3^{(i)}$ ,  $k=1, 2$ .

Пусть  $C_3^{(i)} = 1$ . Тогда, определив  $\mathbf{C}^{(i)}$ , находим из уравнения (16) собственный вектор  $\mathbf{Z}_0^{(i)}$ .

Необходимо заметить, что для тестирования программы была рассчитана модель крыла постоянного сечения по длине следующего размера:  $l = 15$  м, ширина  $b = 2$  м, толщина  $h = 0,1$  м. Характеристики материала указаны выше. Есть аналитическое решение для частот изгибных колебаний подобной модели [9], которые в безразмерной форме могут быть определены следующим образом:

$$\lambda_k = \frac{2k-1}{2} \pi, \quad (18)$$

а размерные частоты — по формуле

$$p_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EJ}{(m_0 l^4)}}. \quad (19)$$

В итоге получаем первые три теоретические частоты:

$$p_1^T = 2,295 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad p_2^T = 14,387 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad p_3^T = 40,2786 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

В программе Mathcad был составлен алгоритм определения собственных частот и вектора состояния для каждой формы и для построения графиков компонентов собственного вектора  $\mathbf{Z}_0^{(i)}$ . В частности,

для упрощенной модели крыла постоянного сечения были получены следующие первые три частоты (при нулевой скорости потока):

$$\lambda_1 = 1,8751; \lambda_2 = 4,6940; \lambda_3 = 7,8542.$$

При приведении к размерному виду

$$p_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{A_{33}}{(m_0 l^4)}},$$

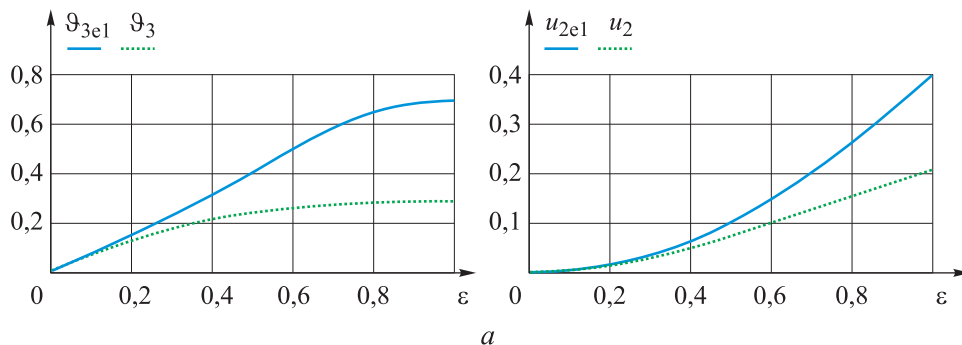
тогда имеем

$$p_1 = 2,2957 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; p_2 = 14,3863 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; p_3 = 40,2786 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Очевидна высокая степень совпадения теоретических и численных частот упрощенной модели крыла.

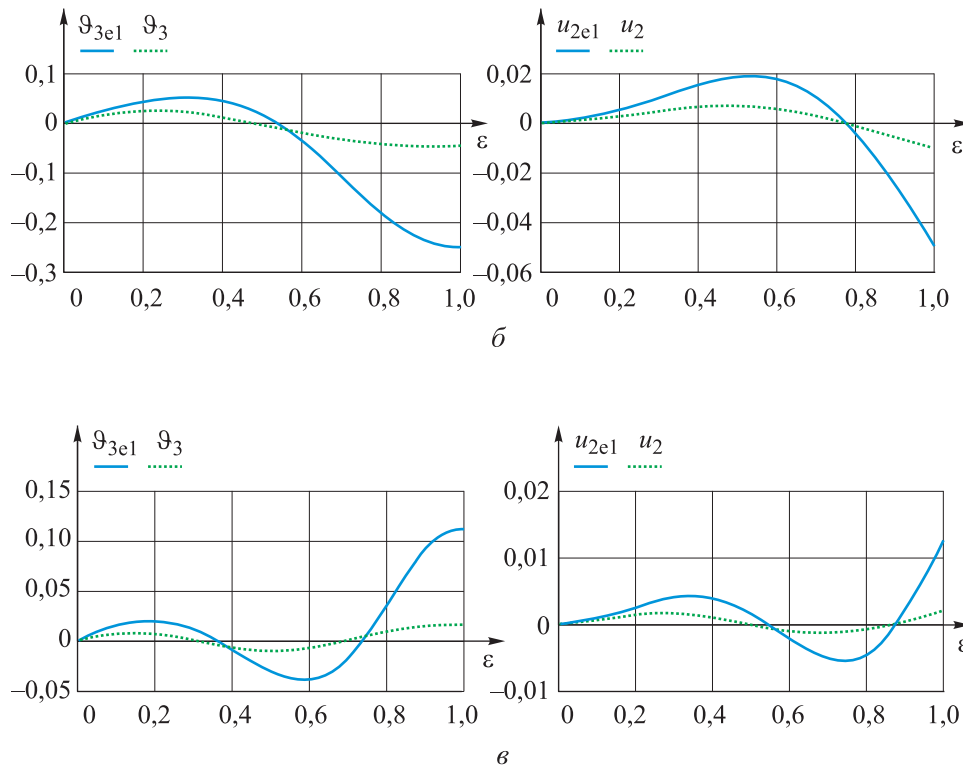
Приведем для сравнения на рис. 7 графики изменения компонентов векторов состояния стержня эллиптического переменного сечения (синяя линия) и прямоугольного постоянного сечения (зеленая линия). На рисунке указаны частоты с индексом «э» — для эллиптического сечения, с индексом «п» — для прямоугольного. Не представленные на графиках компоненты векторов состояния  $(\vartheta_1, \Delta M_1)$  являются нулевыми.

Очевидно, что представленные на рис. 7 результаты свидетельствуют о том, что первые три частоты являются чисто изгибными. Теоретические исследования [10] показывают, что крутильные колебания упрощенной модели крыла прямоугольного сечения (а значит, можно с уверенностью утверждать, что то же самое относится и к эллиптическому переменному сечению) крайне высокочастотные.



**Рис. 7 (начало).** Амплитудные значения компонентов вектора состояния:

$a$  — при  $\lambda_1^{(э)} = 2,1982$  и  $\lambda_1^{(п)} = 1,8751$  (компоненты перемещений)



**Рис. 7 (окончание).** Амплитудные значения компонентов вектора состояния:  
 $\bar{b}$  — при  $\lambda_2^{(s)} = 4,2489$  и  $\lambda_2^{(n)} = 4,6941$  (компоненты перемещений);  $v$  — при  $\lambda_3^{(s)} = 6,5565$   
 и  $\lambda_3^{(n)} = 7,8548$  (компоненты перемещений)

Как было отмечено выше, частоты практически не изменяются в зависимости от скорости потока. Внутреннее напряжение в плоскости крыла (в горизонтальной плоскости) не влияет на колебания крыла в вертикальной плоскости. Очевидно, что колебания крыла в самой плоскости были бы более чувствительны к внутренним напряжениям в крыле.

**Заключение.** В работе проведен модальный анализ модели крыла по схеме плоского стержня переменного эллиптического сечения в потоке воздуха с нулевым углом атаки. С помощью внутренних силовых факторов, появляющихся под действием лобовой аэродинамической силы со стороны потока, учитывалось влияние набегающего потока воздуха. Численно определены первые три частоты собственных колебаний, а также установлены формы колебаний, т. е. собственные вектора. Программа расчета была протестирована на примере модели крыла постоянного сечения, результаты хорошо согласуются с теоретическими частотами, полученными аналитическими методами, известными из литературы, посвященной данной

тематике. Представленный метод решения задачи определения собственных частот и форм колебаний позволяет исследовать модели крыла достаточно сложной геометрии, для которых решения могут быть найдены только численно. Полученные в работе результаты важны для дальнейших исследований поведения модели крыла в потоке воздуха, а именно для исследования динамической потери устойчивости (явления флаттера). В следующей работе авторы надеются представить результаты данного исследования, где спектр собственных частот, полученный в данной работе, станет основой этих исследований.

Данная работа может быть интересна как для студентов технических специальностей, изучающих теорию механических колебаний, так и для инженеров, занимающихся колебаниями систем с распределенными параметрами.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Челомей В.Н., ред. *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов*. Ф.М. Диментберг, К.С. Колесников, ред. Москва, Машиностроение, 1980, 544 с.
- [2] Рукин Ю.Б., Лопатин А.Ю., Шершнева Ю.А. Исследование собственных колебаний модели крыла самолета методом конечных элементов. *Информационные технологии в строительных, социальных и экономических системах*, 2020, № 1 (19), с. 152–154.
- [3] Мензульский С.Ю., Бура Р.В. Определение модальных характеристик и расчетные исследования по обеспечения безопасности летательного аппарата от флаттера. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 12. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-12-1833>
- [4] Гарифуллин М.Ф., Бородина Ю.Н., Слитинская А.Ю. Коррекция параметров математической модели крыла большого удлинения по результатам экспериментальных исследований форм и частот собственных колебаний. В книге: *Модели и методы аэродинамики. Материалы Восемнадцатой международной школы-семинара*. Москва, Изд. отдел ЦАГИ, 2018, с. 59.
- [5] Demirtas A.M., Bayraktar M. Free vibration of an aircraft wing by considering as a cantilever beam. *Selcuk University Journal of Engineering Sciences*, 2019, vol. 7, no. 1, pp. 12–21.
- [6] Banerjee J.R. Modal analysis of sailplane and transport aircraft wings using the dynamic stiffness method. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, ser. 721, art. no. 012005. DOI: 10.1088/1742-6596/721/1/012005
- [7] Безуевский А.В. Влияние больших деформаций конструкции крыла на его модальные характеристики. *Труды 55-й научной конференции МФТИ. Аэромеханика и летательная техника*. Москва, МФТИ, 2012, с. 51–53.
- [8] Павлов В.А. Механика крыла самолета. Катастрофические колебания. Открытие: монография. Казань, Изд. КНИТУ-КАИ, 2017, 200 с.
- [9] Наумов А.М., Тихонова О.Н. Определение частот и форм свободных колебаний предварительно нагруженного резинокордного шланга (трубопровода), находящегося в потоке газа или жидкости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2000, № 3, с. 91–102.



- [10] Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. [и др.]. *Расчеты на прочность в машиностроении: в 3 т. Т. 3. Инерционные нагрузки*. С.Д. Пономарев, ред. Москва, Машгиз, 1959., 1118 с.

Статья поступила в редакцию 12.06.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Наумов А.М., Домнина О.А. Модальный анализ модели крыла в потоке воздуха в консервативной постановке. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 6. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-6-2280>

**Наумов Андрей Михайлович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сфера научных интересов: статика и динамика пространственно-криволинейных стержней. Автор около 30 научных статей.  
e-mail: [naumov\\_am@bmstu.ru](mailto:naumov_am@bmstu.ru)

**Домнина Ольга Александровна** — студентка кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: [domninaoa@student.bmstu.ru](mailto:domninaoa@student.bmstu.ru)

## Wing model modal analysis in the airflow in conservative formulation

© A.M. Naumov, O.A. Domnina

*Modal analysis of the elastic system dynamic properties is one of the most important types of research. The paper investigates eigen frequencies and oscillation modes of a wing model in the form of a flat rod of variable geometry, close to the real wing geometry in the air flow with zero angle of attack. Influence of the oncoming airflow is considered due to the internal force factors appearing under the frontal aerodynamic force action from the flow side. Aerodynamic forces and moments increment arising from the model small oscillations are not taken into account, i.e. the energy is not being “pumped” at small oscillations from the airflow side, and the problem is solved in the conservative formulation. First three frequencies of natural oscillations and their corresponding forms are numerically determined; it is shown that all of them are purely bending. Dependence of the first three frequencies behavior on the oncoming flow speed was studied.*

**Keywords:** variable geometry wing model, oncoming airflow, aerodynamic forces, oscillation eigen frequencies, oscillation eigen modes, dynamics conservative problem

### REFERENCES

- [1] Dimentberg F.M., Kolesnikov K.S., ed. *Vibratsii v tekhnike: Spravochnik. V 6 tomakh. Tom 3. Kolebaniya mashin, konstruksiy i ikh elementov* [Vibrations in technology: Reference book. In 6 vols. Vol. 3. Vibrations of machines, structures and their elements], Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980, 544 p.
- [2] Rukin Yu.B., Lopatin A.Yu., Shershneva Yu.A. Issledovanie sobstvennykh kolebaniy modeli kryla samoleta metodom konechnykh elementov [Investigation of natural vibrations of the wing model aircraft finite element method]. *Informatsionnye tekhnologii v stroitelnykh, sotsialnykh i ekonomicheskikh sistemakh — Information technologies in construction, social and economy systems*, 2020, no. 1 (19), pp. 152–154.
- [3] Menzul'skiy S.Yu., Bura R.V. Opredelenie modalnykh kharakteristik i raschetnye issledovaniya po obespecheniyu bezopasnosti letatel'nogo apparata ot flattera [Determination of modal characteristics and calculated analysis of ensuring the aircraft flutter safety]. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, iss. 12. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-12-1833>
- [4] Garifullin M.F., Borodina Yu.N., Slitinskaia A.Yu. Korrektsiya parametrov matematicheskoy modeli kryla bolshogo udlineniya po rezultatam eksperimentalnykh issledovaniy form i chastot sobstvennykh kolebaniy [Correction of the mathematical model parameters of a large aspect ratio wing based on the results of experimental studies of the eigenforms and eigenfrequencies]. In: *Modeli i metody aerodinamiki. Materialy Vosemnadtsatoy mezhdunarodnoy shkoly-seminara* [Models and methods of aerodynamics. Materials of the Eighteenth International School-Seminar]. Moscow, TsAGI Publ., 2018, 59 p.
- [5] Demirtas A.M., Bayraktar M. Free vibration of an aircraft wing by considering as a cantilever beam. *Selcuk University Journal of Engineering Sciences*, 2019, vol. 7, no. 1, pp. 12–21.
- [6] Banerjee J.R. Modal analysis of sailplane and transport aircraft wings using the dynamic stiffness method. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, ser. 721, art. no. 012005. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/721/1/012005>

- [7] Bezuyevskiy A.V. Vliyaniye bolshikh deformatsiy konstruktssii kryla na yego modalnye kharakteristiki [Influence of large deformations of the wing structure on its modal characteristics]. In: *Trudy 55-y nauchnoy konferentsii MFTI. Aeromekhanika i letatel'naya tekhnika* [Proceedings of the 55<sup>th</sup> MIPT Scientific Conference. Aeromechanics and Aircraft Technology]. Moscow, MFTI Publ., 2012, pp. 51–53.
- [8] Pavlov V.A. *Mekhanika kryla samoleta. Katastroficheskie kolebaniya. Otkrytie: monografiya* [Aircraft wing mechanics. catastrophic oscillations. Discovery: monography]. Kazan, KNITU-KAI Publ., 2017, 200 p.
- [9] Naumov A.M., Tikhonova O.N. Opredeleniye chastot i form svobodnykh kolebaniy predvaritelno nagruzhennogo rezinokordnogo shlanga (truboprovoda), nakhodyaschegosya v potoke gaza ili zhidkosti [Determination of frequency and modes of free oscillation of the pre-loaded hose (pipe-line) in gas or liquid stream]. *Vestnik MGTU im N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2000, no. 3, pp. 91–101.
- [10] Ponomarev S.D., Biderman V.L., Likharev K.K., et al. *Raschety na prochnost v mashinostroenii: v 3 tomakh. Tom 3 Inertsionnye nagruzki* [Strength calculations in mechanical engineering. In 3 vols. Vol. 3. Inertial loads]. S.D. Ponomarev, ed. Moscow, Mashgiz Publ., 1959, 1118 p.

**Naumov A.M.**, Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: statics and dynamics of spatial curvilinear rods. Author of about 30 scientific articles.  
e-mail: naumov\_am@bmstu.ru

**Domnina O.A.**, Student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: domninaoa@student.bmstu.ru