

## Расчетно-экспериментальное исследование продольной устойчивости конструкции тонкостенного плоского стержня

© А.В. Егоров<sup>1</sup>, В.Н. Егоров<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

<sup>2</sup>Московский авиационный институт, Москва, 125993, Россия

*Исследована продольная устойчивость центрально-сжатых гибких плоских стержней с применением расчетных и экспериментальных методов. Расчеты проведены по методологии динамического анализа в программном комплексе LS-DYNA. Методология основана на трех определяющих факторах: объемность, технологические отклонения, режим реального времени. При построении модели шарнирно-закрепленного стержня применены конечные 3D-элементы, упругопластическая модель материала, несимметричные вырезы малого объема, имитирующие геометрические технологические отклонения. Проведено сравнение определяемых по методологии критических сил с силами Эйлера и с экспериментальными данными. Эксперимент проводился на стержнях с заостренными концами, которые упирались в угловую технологическую оснастку и обеспечивали свободный поворот торцов стержня. В результате выполненного расчетно-экспериментального исследования устойчивости гибких стержней установлено, что в реальных конструкциях стержней имеют место начальные несовершенства формы, заметно влияющие на величину критических сил, причем это влияние тем сильнее, чем более гибкий стержень. Найдено также количественное соотношение между экспериментально замеренными и рассчитанными по методологии и по формуле Эйлера критическими силами. Затронуты вопросы возникновения начальных несовершенств формы в реальных стержнях. Показаны три возможные направления поиска решения задачи устойчивости стержней по методологии динамического анализа в зависимости от способа введения технологических отклонений в расчетную схему конструкции. Приведены диаграммы деформирования шарнирно-закрепленных плоских стержней при испытаниях на сжатие.*

**Ключевые слова:** *гибкий плоский стержень, тонкостенный плоский стержень, сжатие, устойчивость, расчетная схема, эксперимент, начальные несовершенства формы*

**Введение.** Одним из важнейших факторов несущей способности тонкостенных силовых конструкций является устойчивость, при нарушении которой происходит недопустимое изменение формы конструкции. Тонкостенные конструкции эффективны по массе, поэтому их широко применяют в различных областях техники и промышленности, в связи с чем задачи устойчивости таких конструкций имеют высокую значимость. Этим объясняется тот факт, что до настоящего времени продолжается развитие теоретических и экспериментальных методов исследования устойчивости тонкостенных конструкций с учетом их реальных геометрических и механических

свойств — неоднородных с силу технологических причин изготовления.

Цель данной работы — провести на основе испытаний валидацию нового расчетного метода динамического анализа на примере устойчивости конструкции центрально-сжатого тонкостенного плоского стержня.

**Обзор расчетных схем.** Наиболее распространенным для расчета на продольную устойчивость сжатых стержней является подход Эйлера [1], согласно которому критическая сила перехода стержня от прямолинейной формы равновесия к смежной изогнутой устанавливается по формуле

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \quad (1)$$

где  $P_{\text{кр}}$  — критическая сила, Н;  $E$  — модуль упругости материала стержня, Па;  $I$  — момент инерции поперечного сечения стержня,  $\text{м}^4$ ;  $\mu$  — коэффициент приведения длины, для шарнирно опертого по торцам стержня  $\mu = 1$ ;  $l$  — длина стержня, м.

Формула (1) получена для упругих прямолинейных стержней с идеальной геометрией и однородными механическими свойствами, при действии центральной сжимающей силы. В подходе Эйлера не определяются поперечные перемещения стержня при потере устойчивости, из-за чего нельзя применять приближенные методы [2] анализа реальных конструкций стержней с начальными несовершенствами формы.

Исследование устойчивости сжатого идеального стержня, выполненное аналитически и численно методом конечных разностей в 2D-формате [3, 4], показало, что учет инерционных нагрузок ведет к получению несимметричных форм потери устойчивости стержня в отличие от симметричных эластик Эйлера. В решениях использовалось начальное произвольное местное отклонение формы оси стержня от прямолинейной, что отражалось на величине критической силы.

В публикации [5] показано, что деформирование стержня происходит по-разному при воздействии кратковременного и продолжительного удара. В первом случае отмечается волновой процесс, во втором — монотонный изгибный. Согласно изложенному в книге [6], потерю устойчивости стержня необходимо в общем случае определять с применением уравнений движения. Для того чтобы учесть геометрические и механические особенности реальных конструкций стержней, 3D-формат деформирования, процесс движения стержня при продолжительном ударе, в статьях [7, 8] предложена новая методология динамического анализа конструкций. Из результатов испытаний [9]

гибкого стержня при сжатии установлена достоверность методологии динамического анализа.

Существуют публикации по устойчивости стержней при других условиях нагружения, например, при действии следящей осевой силы [10], при нагружении трубчатого стержня с внешним боковым ограничением [11], бимодульных стержней [12], стержней с сосредоточенной массой (tip mass) [13, 14], плоских стержней (damped planar beams) [15], сжатых и скрученных стержней [16], стержней как элементов конструкций [17], стержней при ударных нагрузках [18]. Наиболее универсальным методом расчета считается метод конечных элементов, поэтому применительно к гибким стержням разрабатываются специальные конечные элементы [18–21]. Следует отметить, что в расчетные модели заранее вводятся местные поперечные прогибы стержней без объяснения причин их появления.

В отличие от известных публикаций в настоящей работе в качестве начальных несовершенств принимаются регламентированные технологические отклонения (ТО), которые могут иметь геометрическую или механическую природу. В зависимости от способа назначения технологических отклонений поиск решения возможен по трем направлениям.

В первом направлении все ТО, имеющиеся в реальной конструкции (РК) стержня, сводятся к одному минимальному технологическому отклонению  $(ТО)_{\min}$ , чтобы определять критическую нагрузку  $Q_{\text{кр}}^{\text{РК}}$  реальной конструкции, приближающуюся к критическому значению  $Q_{\text{кр}}^{\text{ИК}}$  идеальной конструкции (ИК) стержня, т. е. из задания

$$(ТО)_{\min} \infty \sum_i (ТО)_i \Rightarrow Q_{\text{кр}}^{\text{РК}} \rightarrow Q_{\text{кр}}^{\text{ИК}}, \quad (2)$$

где  $\infty$  — знак замены параметров;  $i = 1, 2, \dots$

Указанный замещающий прием поиска критической нагрузки используется в настоящей работе в расчетах и экспериментах.

Во втором направлении случайным образом формируется ряд  $(n = 1, 2, \dots)$  систем технологических отклонений  $\{(ТО)_i\}_n$ , входящих в область  $\Omega$  допустимых технологических отклонений  $[(ТО)_i]$ , что ведет к нахождению минимального значения критической нагрузки  $\min(Q_{\text{кр}}^{\text{РК}})$  реальной конструкции стержня, т. е. из задания

$$\forall \{(ТО)_i\}_n \quad \Omega([(ТО)_i]) \Rightarrow Q_{\text{кр}}^{\text{РК}} \rightarrow \min(Q_{\text{кр}}^{\text{РК}})_n. \quad (3)$$

Этот подход использовался в работе [22] для анализа устойчивости реальной панели фюзеляжа самолета.

В третьем направлении исследуется конкретная (единичная) реальная конструкция (КРК), для чего измеряются и вводятся в расчетную модель все технологические отклонения  $\sum_i (TO)_i$ , присущие

этой КРК, что приводит к установлению критической нагрузки  $Q_{кр}^{КРК}$  конкретной реальной конструкции, т. е. из задания

$$\sum_i (TO)_i \text{ (ПК)} \Rightarrow Q_{кр}^{ПК} \rightarrow Q_{кр}^{КРК}. \quad (4)$$

Такой подход возможен, но трудно реализуем на практике ввиду большой размерности задачи. Однако он применим, если ограничить все имеющиеся  $\sum_i (TO)_i$  несколькими ( $m = 1, 2, \dots$ ) выявленными

наиболее значимыми  $\sum_m (TO)_m$ , где  $m < i$ .

**Объект исследования.** Исследование устойчивости проводится на плоских конструктивно подобных гибких стержнях двух типов (рис. 1), различающихся толщиной  $h$  (табл. 1). Гибкость  $\lambda$  стержня второго типа в 2,167 раза меньше гибкости стержня первого типа.

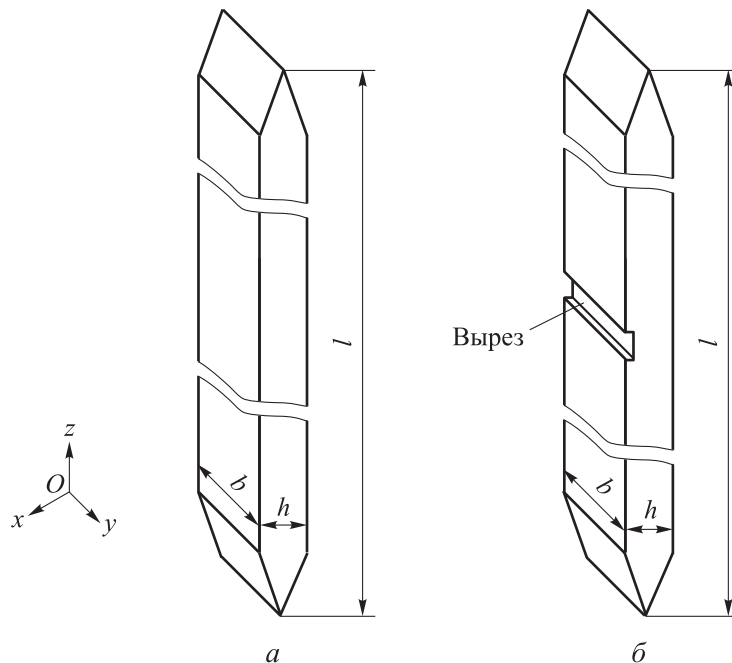


Рис. 1. Форма стержня без выреза (а) и с вырезом (б)

Плоская форма стержней выбрана для того, чтобы однозначно задать плоскость изгиба ( $x, z$ ) стержня при потере устойчивости. Стержень каждого типа выполнялся в двух вариантах: без выреза (рис. 1, а) и с несимметричным вырезом в центральной части стержня (рис. 1, б). Вырезы имели малые размеры (см. табл. 1), соответствовали условию (2) о введении минимального технологического отклонения, которое допускается на местном изменении толщины в пределах 10 %.

Таблица 1

Характеристики стержней

Характеристика	Тип 1		Тип 2	
	Стержень	Вырез	Стержень	Вырез
Длина $l$ , мм	300	10	300	10
Ширина $b$ , мм	10	2	10	2
Толщина $h$ , мм	1,2	–	2,5	–
Глубина, мм	–	0,2	–	0,25
Модуль $E$ , ГПа	200	0	200	0

Все стержни шарнирно закреплены по торцам (рис. 2): внизу неподвижный шарнир, сверху — шарнирно-подвижная опора. Конструктивное исполнение опоры (рис. 3) предполагает повороты концов стержня вокруг оси  $y$  за счет разных углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  [9].

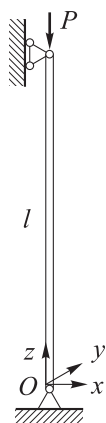


Рис. 2. Схема закрепления и нагружения стержня

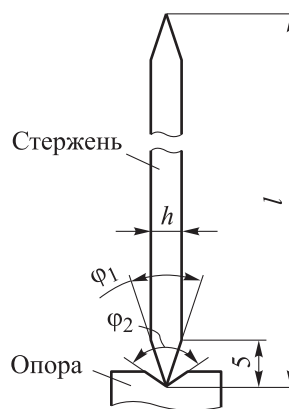


Рис. 3. Схема контакта стержня с технологической оснасткой

Кинематическое нагружение стержня сжимающей силой  $P$  (см. рис. 2) осуществляется на специальных машинах. Расчеты стержней проводились по формуле Эйлера (1) и по методике динамического анализа [8].

**Расчет на устойчивость.** Сначала определим эйлерову критическую силу (1), не принимая во внимание центральные вырезы в стержнях. В этом случае критические силы стержней первого ( $P_1^{\ominus}$ ) и второго ( $P_2^{\ominus}$ ) типов (табл. 2) будут отличаться на порядок:

$$\frac{P_2^{\ominus}}{P_1^{\ominus}} = \frac{321,5}{31,5} = 10,2.$$

Гибкость стержня  $\lambda_1$  первого типа ( $h_1 = 1,2$  мм) в 2,167 раза больше гибкости стержня  $\lambda_2$  второго типа ( $h_2 = 2,6$  мм):

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{h_2}{h_1} = 2,167.$$

Отсюда следует, что увеличение толщины плоского стержня сильно влияет на повышение критической силы потери устойчивости сжатого шарнирно-закрепленного стержня.

Таблица 2

Результаты расчетно-экспериментальных испытаний

Стержень	$h$ , мм	$\lambda$	$P^{\ominus}$ , Н	$P^{LS}$ , Н	$P_k^{LS}$ , Н	$P^c$ , Н	$\delta^{LS}$ , %	$\delta^{\ominus}$ , %
Тип 1	1,2	867	31,5	40	28	22	27	43
Тип 2	2,6	400	321,5	345	308	280	10	15

Расчеты по методологии динамического анализа проводились методом конечных элементов в программном комплексе LS-DYNA в динамической постановке. Решалась геометрически и физически нелинейная задача. Весь стержень разбивался равномерно по осям координат на объемные конечные элементы ELEMENT\_SOLID. Модель содержала 18 384 элемента, 24 061 узлов, у каждого узла по три степени свободы. В моделях стержней с вырезом обнулялись соответствующие конечные элементы. Командой \*PIECEWISE\_LINEAR\_PLASTICITY задавали упругопластические свойства материала стержня с использованием диаграммы деформирования с упрочнением, построенной по пяти параметрам:

Модуль упругости $E$ , МПа .....	20000
Предел текучести $\sigma_T$ , МПа .....	1200
Предел прочности $\sigma_B$ , МПа .....	1300
Предел пропорциональности $\sigma_{пл}$ , МПа .....	900
Погрешность $\delta$ , % .....	4

Ударная нагрузка задается командой \*DEFINE\_CURVE, в которую вводится график изменения силы во времени. Время действия силы выбирается из условия продолжительного удара [8], когда в стержне развиваются изгибные деформации. За потерю устойчивости принимается момент появления поперечного амплитудного перемещения оси стержня, превышающего минимальный размер поперечного сечения стержня.

Расчеты показали, что критические силы  $P_1^{LS}$  и  $P_2^{LS}$  стержней двух типов с вырезом (см. табл. 2) превышают по величине силы Эйлера на 30 % и 7,3 %, что свидетельствует о более сильном влиянии начальных несовершенств формы на устойчивость более гибких стержней (тип 1). Это обусловлено процессом производства стержней, поэтому перед проведением испытаний стержней на сжатие измерялись начальные отклонения формы стержней от прямолинейной.

**Испытания стержней.** Для проведения испытаний было подготовлено четыре стержня (рис. 4): два стержня первого типа без выреза и с вырезом и два стержня второго типа без выреза и с вырезом. Стержни изготовлены на механообрабатывающем центре MC-300 с точностью  $\pm 0,05$  мм в специальной технологической оснастке. После извлечения стержней из оснастки они деформировались ввиду наличия в них остаточных напряжений.



Рис. 4. Стержни второго типа перед испытаниями

Для того чтобы оценить уровень начальных несовершенств формы стержней, была выполнена оптическая 3D-оцифровка их поверхности на машине ATOS Core 300. За базу измерений была выбрана 3D-модель геометрически идеального стержня. Проведенные измерения показали, что все четыре стержня имели малые деформации изгиба и неоднородное поле поперечных перемещений (рис. 5).

Максимальное отклонение  $V_0$  составило 0,35 мм у стержней первого типа и 0,28 мм у стержней второго типа. На основании этих данных рассчитанные в LS-DYNA критические нагрузки  $P_1^{LS}$  и  $P_2^{LS}$  (см. табл. 2) были уточнены по приближенной модели [2]:

$$P_{iPK}^{LS} = P_i^{LS} \left( 1 + \frac{V_{0i}}{V} \right)^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где  $P_{iPK}^{LS}$  — критическая сила, найденная по методологии динамического анализа с учетом начальной неправильности формы стержня;  $V = V_{\Pi} - V_0$ ,  $V_{\Pi}$  — полное амплитудное перемещение оси стержня при потере устойчивости.

Уточненные по формуле (5) значения  $P_{1PK}^{LS}$  и  $P_{2PK}^{LS}$  критических сил (см. табл. 2) реальных конструкций стержней первого и второго типа оказались заниженными, что приблизило их к экспериментальным значениям.

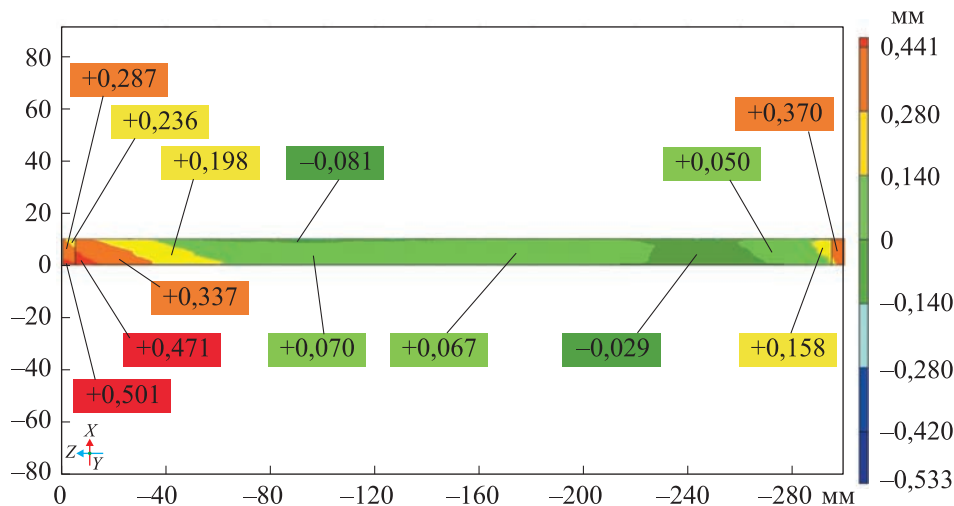


Рис. 5. Начальные отклонения стержня второго типа

Испытание стержней на сжатие проводилось на установке Instron 8801. Стержни были закреплены с помощью специальной оснастки (см. рис. 3), имитирующей шарнирную опору. Угол раствора  $\varphi_1$  оснастки в 4 раза превышал угол  $\varphi_2$  заостренного конца стержня. В ходе испытаний автоматически строились диаграммы деформирования стержней: по горизонтальной оси откладывались перемещения верхнего торца стержня  $u_T$ , по вертикальной оси — соответствующие осевые силы сжатия  $P^c$ . По построенным диаграммам



деформирования  $P^c = P^c(u_T)$  определены критические силы  $P_k^c$  из условия экстремума функции  $P^c(u_T)$

$$\frac{\partial P^c}{\partial u_T} = 0 \quad (6)$$

и условия ее минимальности (минимума)

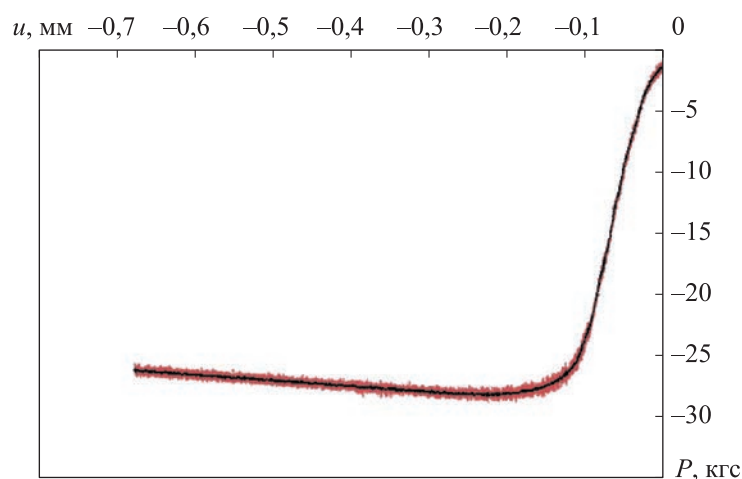
$$\frac{\partial^2 P^c}{\partial u_T^2} > 0. \quad (7)$$

Очевидно, что условия (6) и (7) для экспериментальных диаграмм выполняются приблизительно путем сглаживания функций  $P^c(u_T)$ .

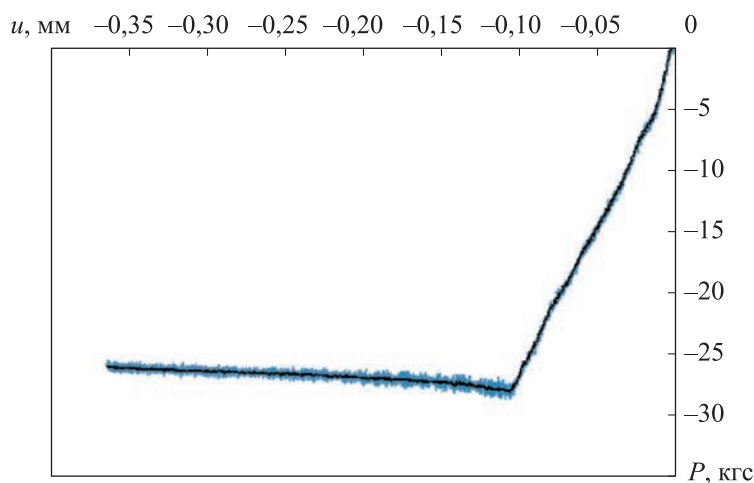
При испытании стержней второго типа (см. рис. 4) были получены диаграммы деформирования стержней без выреза (рис. 6. а) и с вырезом (рис. 6. б). Согласно диаграммам (рис. 6) и условиям (6), (7), установлены критические силы  $P_k^c$  (см. табл. 2), которые оказались одинаковыми для стержней второго типа без выреза и с вырезом. Таким образом, экспериментально подтверждена применимость введенного понятия технологических отклонений по направлению (2), связанному с заменой комплекса исходных технологических отклонений реальной конструкции минимальным значением технологических отклонений  $(TO)_{\min}$ . Аналогичный результат о равенстве критических сил для стержней без выреза и с вырезом был получен при испытаниях на сжатие [9] стержней первого типа.

При сравнении расчетных  $P_k^{LS}$  и экспериментально найденных  $P_k^c$  критических нагрузок (см. табл. 2) установлено, что погрешность  $\delta^{LS}$  результатов расчета  $P_k^{LS}$  относительно экспериментальных данных  $P_k^c$  больше у стержней первого типа ( $\delta^{LS} = 27\%$ ), чем у стержней второго типа ( $\delta^{LS} = 10\%$ ). Такой эффект закономерен, он объясняется тем, что более гибкие стержни (первого типа) при изготовлении механообработкой приобретают повышенные начальные несовершенства формы из-за их меньшей жесткости. Подобный результат прослеживается и при сравнении данных эксперимента с эйлеровыми критическими силами  $P^{\text{Э}}$  (см. табл. 2), погрешность  $\delta^{\text{Э}}$  расчета которых составляет 43% для стержней первого типа и 15% — для стержней второго типа. По данным табл. 2 также видно, что критические силы  $P^{LS}$ , найденные по методологии динамического анализа, оказываются завышенными по отношению к силам Эйлера  $P^{\text{Э}}$  для

стержней идеальной формы и являются заниженными  $P_k^{LS}$  для стержней с начальными неправильностями формы. Отличие критической силы  $P^{LS}$  от критической силы  $P^Э$  обусловлено учетом динамики, геометрической и физической нелинейности, начальными неправильностями формы.



а



б

**Рис. 6.** Диаграммы нагружения для стержней второго типа без выреза (а) и с вырезом (б), полученные на установке Instron 8801

**Закключение.** На примере сжатых плоских стержней проведено исследование, направленное на количественную оценку влияния изгибной жесткости тонкостенных элементов на их устойчивость, выполнен сравнительный анализ критических сил, найденных по методологии динамического анализа, с экспериментальными данными

и силами Эйлера. По результатам расчетов и испытаний гибких стержней двух типов (с гибкостью  $\lambda_1 = 867$  и  $\lambda_2 = 400$ ) была установлена зависимость продольной устойчивости сжатых стержней от величины начальных несовершенств формы. Оказалось, что такая зависимость сильнее у более гибких стержней. Определено соотношение между критическими силами Эйлера и теми, что были установлены по методологии, это соотношение может применяться для сопоставления расчетных схем разного уровня сложности: по Эйлеру — статическая упругая схема, по методологии — динамическая схема с учетом геометрической и физической нелинейности.

Введено понятие «технологические отклонения» как малые местные отклонения геометрических и механических параметров конструкции от номинальных значений в пределах заданных допусков.

Критические силы по методологии  $P_k^{LS}$ , найденные с учетом измеренных начальных несовершенств формы реальных стержней, отличаются от критических сил  $P_k^c$ , полученных при испытаниях, на 27 % для стержней первого типа и на 10 % — для менее гибких стержней второго типа. Такая малая погрешность  $\delta^{LS}$  расчета устойчивости реальных стержней подтверждает адекватность предложенной в методологии конечно-элементной модели и динамического подхода. Реализация методологии в программном комплексе LS-DYNA открывает возможности усложнения расчетных схем при выборе иных типов конечных элементов, материалов, нагрузений.

Для испытаний на сжатие конструкций шарнирно-опертых гибких стержней были разработаны специальные образцы стержней с концевыми заострениями и отвечающая им в зонах контакта угловая оснастка, имитирующая шарнирное опирание.

Проведенное расчетно-экспериментальное исследование продольной устойчивости центрально сжатых гибких стержней свидетельствует о хорошем согласовании теории (методология) и эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Эйлер Л. *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле*. Москва; Ленинград, ГИТТЛ, 1934, 600 с.
- [2] Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. 2-е изд., перераб. и доп. Москва, Машиностроение, 1991, 336 с.
- [3] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при кратковременном продольном ударе. *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1*. 2013, вып. 3, с. 131–141.
- [4] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Устойчивость стержня при длительном осевом сжатии. *Проблемы прочности и пластичности*, 2015, т. 77, № 1, с. 40–48. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2015-77-1-40-48>

- [5] Беляев А.К., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Биения в задаче о продольном ударе по тонкому стержню. *Механика твердого тела*, 2015, № 4, с. 112–125.
- [6] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. 4-е изд. Москва, Наука, 1973, 400 с.
- [7] Egorov A.V., Egorov V.N. Flexible bar buckling under short-time and long-term compressions. *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, 2020, vol. 17, no. 1, pp. 199–210. <https://doi.org/10.1108/MMMS-11-2019-0193>
- [8] Egorov A.V., Egorov V.N. Buckling of the flexible rod under shock loads. In: Zingoni A., ed. *Advances in Engineering Materials, Structures and Systems: Innovations, Mechanics and Applications*. London, Taylor & Francis Group, 2019, pp. 879–883. ISBN 978-1-138-38696-9
- [9] Егоров А.В. Испытание гибкого стержня на сжатие. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 5. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-5-2079>
- [10] Лагозинский С.А., Соколов А.И. Устойчивость прямолинейных стержней, нагруженных следящими силами. *Проблемы прикладной механики, динамики и прочности машин: сб. статей*. В.А. Светлицкий, О.С. Нарайкин, ред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с. 244–259.
- [11] Gao D-L., Huang W-J. A review of down-hole tubular string buckling in well engineering. *Petroleum Science*, 2015, vol. 12 (3), pp. 443–457. DOI: 10.1007/s12182-015-0031-z
- [12] Olhoff N., Seyranian A.P. Bifurcation and post-buckling analysis of bimodal optimum columns. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, vol. 45, pp. 3967–3995.
- [13] Andersen S.B., Thomsen J.J. Post-critical behavior of Beck’s column with a tip mass. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2002, vol. 37, pp. 135–151.
- [14] Detinko F.M. Lumped damping and stability of Beck column with a tip mass. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, vol. 40, pp. 4479–4486.
- [15] Di Egidio A., Luongo A., Paolone A. Linear and nonlinear interactions between static and dynamic bifurcations of damped planar beams. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2007, vol. 42 (1), pp. 88–98. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2006.12.010
- [16] Дубровин В.М., Бутина Т.А. Моделирование устойчивости сжатого и скрученного стержня в точной постановке задачи. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 3, с. 3–16. DOI: 10.18698/2309-3684-2015-3-316
- [17] Ванько В.И. *Очерки об устойчивости элементов конструкций*. 2-е изд., испр. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015, 223 с. ISBN 978-5-7038-4127-3
- [18] Ефремов А.К. Критериальные оценки механического удара. *Наука и образование: научное издание*, 2016, № 8, с. 104–120. DOI: 10.7463/0816.0843269
- [19] Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с раздельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов. *Труды МАИ*, 2017, вып. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832> (дата обращения 30.11.2022).
- [20] Meiera C., Wall W., Popp A. *Geometrically exact finite element formulations for curved slender beams: Kirchhoff–Love Theory vs. Simo–Reissner Theory*. Cornell University Library, 2016. URL: <https://arxiv.org/abs/1609.00119> (дата обращения 19.10.2018).

- [21] Seyranian A.P., Mailybaev A.A. *Multiparameter stability theory with mechanical applications*. World Scientific, New Jersey, 2004.
- [22] Elder D., Thomson R. Probabilistic assessment of a stiffened carbon fibre composite panel operating in its postbuckled region. In: *6<sup>th</sup> European LS-DYNA Users' Conference*. Gothenburg, 2007. URL: <http://www.dynalook.com/european-conf-2007/probabilistic-assessment-of-a-stiffened-carbon.pdf> (дата обращения 11.10.2021).

Статья поступила в редакцию 17.02.2023

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Егоров А.В., Егоров В.Н. Расчетно-экспериментальное исследование продольной устойчивости конструкции тонкостенного плоского стержня. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 3.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-3-2256>

**Егоров Антон Витальевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители», МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: [antegor177@mail.ru](mailto:antegor177@mail.ru)  
SPIN-код 7513-3026  
ORCID iD 0000-0002-7401-5534

**Егоров Виталий Николаевич** — д-р техн. наук, профессор, кафедра 802 Московского авиационного института. e-mail: [vnegorov51@yandex.ru](mailto:vnegorov51@yandex.ru)

## Computational and experimental study of longitudinal stability of the thin-walled flat bar structure

© A.V. Egorov<sup>1</sup>, V.N. Egorov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

<sup>2</sup> Moscow Aviation Institute, Moscow, 125993, Russia

*The paper studies longitudinal stability of the centrally compressed flexible flat bars using computational and experimental methods. Calculations were carried out according to the dynamic analysis methodology in the LS-DYNA software package. This methodology is based on three determining factors, i. e. volume, technological deviations and real-time mode. When constructing a hinged bar model, 3D finite elements, elastic-plastic material model, asymmetrical cuts of small volumes simulating geometric technological deviations were used. Critical forces determined by the methodology were compared with the Euler forces and with the experimental data. The experiment was carried out on bars with pointed ends, which were abutted against the angular technological equipment and provided with free rotation of the bar ends. As a result of the computational and experimental study of the flexible bars stability, it was established that in real bar designs there appeared initial shape imperfections noticeably affecting the critical forces magnitude, and the more flexible the bar was, the stronger this effect was. Quantitative relationship was also found between the experimentally measured critical forces and those calculated by the methodology and by the Euler formula. The issues of the origin of initial form imperfections in real bars were touched upon. Three possible directions for searching for a solution to the problem of bar stability using the methodology of dynamic analysis are shown depending on the method of introducing technological deviations into the structure calculation scheme. Diagrams of the hinged flat bars deformation during compression tests are provided.*

**Keywords:** flexible flat bar, thin-walled flat bar, compression, stability, calculation scheme, experiment, initial shape imperfections

### REFERENCES

- [1] Euler L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*. Lausanne & Geneva. Marcum-Michaellem Bousquet Publ., Vol. 1744, pp. 1–322. [In Russ.: Metod nakhozhdeniya krivyykh liniy, obladayuschikh svoystvami maksimuma libo minimuma ili reshenie isoperimetricheskoy zadachi, vzyatoy v samom shirokom smysle. Moscow, Leningrad, GITTL Publ., 1934, 600 p.]
- [2] Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoychivost uprugikh system* [The fundamentals of calculating the stability of elastic systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991, 336 p.
- [3] Morozov N.F., Tovstik P.E. Dinamika sterzhnya pri kratkovremennom prodolnom udare [The rod dynamics under short longitudinal impact]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Ser.1 — Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1*, 2013, no. 3, pp. 131–141.
- [4] Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Ustoychivost sterzhnya pri dlitelnom osevom szhatii [Stability of a rod under the long-term axial compression]. *Problemy prochnosti i plastichnosti — Problems of Strength and Plasticity*, 2015, vol. 77, no. 1, pp. 40–48. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2015-77-1-40-48>

- [5] Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Bieniya v zadache o prodolnom udare po tonkomu sterzhnyu [Beating in the problem of longitudinal impact on a thin rod]. *Mekhanika tverdogo tela — Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 4, pp. 451–462. DOI: 10.3103/S0025654415040111
- [6] Feodosyev V.I. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* [The selected tasks and questions regarding the strength of materials]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 400 p. (in Russ.).
- [7] Egorov A.V., Egorov V.N. Flexible bar buckling under short-time and long-term compressions. *Multidiscipline Modeling in Materials and Structures*, 2020, vol. 17, no. 1, pp. 199–210. <https://doi.org/10.1108/MMMS-11-2019-0193>
- [8] Egorov A.V., Egorov V.N. Buckling of the flexible rod under shock loads. In: Zingoni A., ed. *Advances in Engineering Materials, Structures and Systems: Innovations, Mechanics and Applications*. London, Taylor & Francis Group, 2019, pp. 879–883. ISBN 978-1-138-38696-9
- [9] Egorov A.V. Ispytanie gibkogo sterzhnya na szhatii [Flexible bar compression test]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2021, iss. 5. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2021-5-2079>
- [10] Lagozinsky S.A., Sokolov A.I. Ustoychivost pryamolineynykh sterzhney, nagruzhennykh sledyaschimi silami [Stability of rectilinear rods loaded with tracking force]. In: *Problemy prikladnoy mekhaniki, dinamiki i prochnosti mashin: sbornik statey* [Collection of articles “Problems of applied mechanics, dynamics and strength of machines”]. Svetlitsky V.A., Naraykin O.S., eds. Moscow, BMSTU Publ., 2005, pp. 244–259.
- [11] Gao D-L., Huang W-J. A review of down-hole tubular string buckling in well engineering. *Petroleum Science*, 2015, vol. 12 (3), pp. 443–457. <https://doi.org/10.1007/s12182-015-0031-z>
- [12] Olhoff N., Seyranian A.P. Bifurcation and post-buckling analysis of bimodal optimum columns. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, vol. 45, pp. 3967–3995.
- [13] Andersen S.B., Thomsen J.J. Post-critical behavior of Beck's column with a tip mass. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2002, vol. 37, pp. 135–151.
- [14] Detinko F.M. Lumped damping and stability of Beck column with a tip mass. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, vol. 40, pp. 4479–4486.
- [15] Di Egidio A., Luongo A., Paolone A. Linear and nonlinear interactions between static and dynamic bifurcations of damped planar beams. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 2007, vol. 42 (1), pp. 88–98. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2006.12.010>
- [16] Dubrovin V.M., Butina T.A. Modelirovanie ustoychivosti szhatogo i skruchenogo sterzhnya v tochnoy postanovke zadachi [Modeling the stability of compressed and twisted rods in precise problem statement]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody — Mathematical Modeling and Numerical Methods*, 2015, no. 3, pp. 3–16. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2015-3-316>
- [17] Vanko V.I. *Ocherki ob ustoychivosti elementov konstruksiy* [Essays on the stability of structural elements]. 2nd ed., rev. Moscow, BMSTU Publ., 2015, 223 p. ISBN 978-5-7038-4127-3
- [18] Efremov A.K. Kriterialnye otsenki mekhanicheskogo udara [Critical estimations of mechanical impact]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie — Science & Education: scientific edition of Bauman MSTU*, 2016, no. 8, pp. 104–120. <https://doi.org/10.7463/0816.0843269>
- [19] Popov V.V., Sorokin F.D., Ivannikov V.V. Razrabotka konechnogo elementa gibkogo sterzhnia s razdelnym khraneniem nakoplenykh i dopolnitelnykh povorotov dlia modelirovaniya bolshikh peremescheniy elementov konstruksii

- letatelykh apparatov [A flexible rod finite element with separate storage of cumulated and extra rotations for large displacements of aircraft structural parts modeling]. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832> (accessed November 30, 2022).
- [20] Meiera C., Wall W., Popp A. *Geometrically exact finite element formulations for curved slender beams: Kirchhoff—Love Theory vs. Simo—Reissner Theory*. Cornell University Library, 2016. Available at: <https://arxiv.org/abs/1609.00119> (accessed October 19, 2018).
- [21] Seyranian A.P., Mailybaev A.A. *Multiparameter stability theory with mechanical applications*. World Scientific, New Jersey, 2004.
- [22] Elder D., Thomson R. Probabilistic assessment of a stiffened carbon fiber composite panel operating in its postbuckled region. In: *6th European LS-DYNA Users' Conference*. Gothenburg, 2007. Available at: <http://www.dynalook.com/european-conf-2007/probabilistic-assessment-of-a-stiffened-carbon.pdf> (accessed October 11, 2021).

**Egorov A.V.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor at the Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: [antegor177@mail.ru](mailto:antegor177@mail.ru)  
SPIN code 7513-3026  
ORCID ID 0000-0002-7401-5534

**Egorov V.N.**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department 802, Moscow Aviation Institute. e-mail: [vnegorov51@yandex.ru](mailto:vnegorov51@yandex.ru)