УДК 531.38 DOI: 10.18698/2308-6033-2023-1-2242

Устойчивость сферического движения твердого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение

© Вин Ко Ко, А.Н. Темнов, Ян Наинг У

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Получены и исследованы уравнения сферического движения твердого тела с вращающейся неоднородной несжимаемой жидкостью, полностью заполняющей эллипсоидальную полость. Рассмотрена устойчивость вращения твердого тела с неоднородной жидкостью, обладающей линейным распределением плотности. Произвольные поля плотности и скорости частиц жидкости представлены в виде степенного ряда по пространственным переменным с коэффициентами, зависящими только от времени. Приведены достаточные условия устойчивости вращения твердого тела с жидкостью вокруг вертикальной оси динамической симметрии. Полученные уравнения движения позволяют исследовать устойчивость стационарных движений рассматриваемой системы с целью оценки влияния расслоения жидкости на динамку тела. По аналогии с движением твердого тела утверждается, что полученные условия также являются необходимыми и достаточными условиями стационарных вращений неоднородной жидкости в эллипсоидальной полости.

Ключевые слова: *неоднородная жидкость, твердое тело, эллипсоидальная полость, однородное вихревое движение, устойчивость*

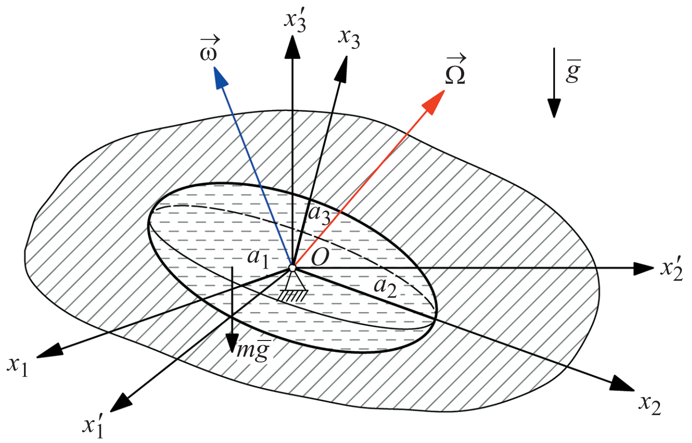
Введение. Задачи о движении твердых тел с полостями, заполненными однородной идеальной или вязкой жидкостью, достаточно хорошо изучены. Однако развитие современной техники и потребности практики в настоящее время приводят к тому, что перед исследователями встают новые задачи, относящиеся к динамике твердых тел, имеющих полости с жидкостью. Одной из них является задача о движении твердых тел с полостями, заполненными неоднородной жидкостью.

Движение твердого тела, имеющего полость, полностью заполненную жидкостью, которая совершает однородное вихревое движение, исследовали такие ученые, как: Уильям Томсон (лорд Кельвин), Гораций Лэмб, Н.Е. Жуковский [1], Ф.А. Слудский [2], С.С. Хаф [3], А. Пуанкаре [4]. Интерес к этой проблеме не пропал и в настоящее время, о чем свидетельствуют работы [5–8]. В этих исследованиях просматривается такая особенность, как предположение об однородности жидкости, заполняющей полость твердого тела.

В статьях [9–11] рассмотрены движения твердого тела с эллипсоидальной и цилиндрической полостями, заполненными жидкостью, и представлены области неустойчивости этих рассматриваемых случаев. В работах [12–16] показано, что подобное движение неоднородной жидкости можно описать уравнениями, формально совпадающими с уравнениями движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

Цель данной статьи — исследование влияние неоднородной жидкости внутри твердого тела на устойчивость его вращения вокруг оси динамической симметрии.

Постановка задачи. Пусть твердое тело с эллипсоидальной полостью вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ вокруг неподвижной точки O, а неоднородная идеальная жидкость, полностью заполняющая эту полость, совершает в ней однородное вихревое движение с угловой скоростью $\vec{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ (рисунок).



Расчетная схема

Рассмотрим случай, когда центр масс твердого тела совпадает с неподвижной точкой, являющейся одновременно геометрическим центром эллипсоидальной полости внутри него. Введем неподвижную систему координат $Ox_1'x_2'x_3'$ и подвижную $Ox_1x_2x_3$, связанную с твердым телом. Положение твердого тела относительно системы координат $Ox_1'x_2'x_3'$ будет характеризоваться углами Эйлера ψ, φ, ϑ. Положение частиц жидкости в эллипсоидальной полости относительно системы координат, связанной с твердым телом — носителем, также охарактеризуем углами Эйлера $\psi_1, \varphi_1, \vartheta_1$. Предположим, что оси x_1, x_2, x_3 совпадают с полуосями эллипсоидальной полости a_1, a_2, a_3 и являются главными центральными осями инерции твердого тела с диагональной матрицей инерции Θ^{T}, $\Theta^{\mathrm{T}} = \{A_0, B_0, C_0\}$. Однородным вихревым движением неоднородной жидкости назовем такое движение, при котором не только скорости частиц жидкости, но и плотность являются линейными функциями пространственных координат с коэффициентами, зависящими от времени [17]:

$$u_1 = \frac{a_1}{a_3}\Omega_2 x_3 - \frac{a_1}{a_2}\Omega_3 x_2 \quad (1, 2, 3), \tag{1}$$

$$v_1 = \frac{a_1}{a_3}\Omega_2 x_3 - \frac{a_1}{a_2}\Omega_3 x_2 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 \qquad (1, 2, 3), \tag{2}$$

где u_i — проекция относительной скорости жидкости на ось Ox_i; v_i — абсолютная скорость движения жидкости в переменных Эйлера;

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3\,, \tag{3}$$

$\rho(x,t)$ — плотность неоднородной жидкости; $\rho_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ — неизвестные функции времени.

Сферическое движение твердого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Уравнения движения рассматриваемой системы можно составить, воспользовавшись уравнениями Эйлера — Лагранжа [18]. Полученные уравнения сферического движения твердого тела с неоднородной жидкостью имеют вид

$$\frac{d}{dt}(\vec{M}^{\Sigma} + \vec{M}^{\text{г}}) + \vec{\omega}\times(\vec{M}^{\Sigma} + \vec{M}^{\text{г}}) = mg[\vec{\gamma}\times\vec{c}]; \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{M}^{*} + \vec{M}^{\text{ж}}) + (\vec{M}^{*} + \vec{M}^{\text{ж}})\times\vec{\Omega} = mg[\vec{\bar{\gamma}}\times\vec{\bar{c}}]; \tag{5}$$

к ним следует присоединить уравнения, определяющие положение центра масс жидкости в полости и положение твердого тела в пространстве:

$$\frac{d\vec{\bar{c}}}{dt} = [\vec{\Omega}\times\vec{\bar{c}}]; \tag{6}$$

$$\frac{d\vec{\gamma}}{dt} = [\vec{\gamma}\times\vec{\omega}], \tag{7}$$

где $\bar{c}_i = \dfrac{c_i}{a_i}$; $\bar{\gamma}_i = \gamma_i a_i$; $(i = 1, 2, 3)$.

В уравнениях (4), (5) приняты обозначения: $\vec{M}^{\Sigma} = \Theta^{\Sigma}\cdot\vec{\omega}$ — сумма кинетических моментов твердого тела $(\vec{M}^{\text{Т}} = \Theta^{\text{Т}}\cdot\vec{\omega})$ и «затвердевшей» жидкости $(M^{\text{з.ж}} = \Theta^{\text{з.ж}}\cdot\vec{\omega})$; $\vec{M}^{\text{г}} = \Theta^{*}\cdot\vec{\Omega}$ — гиростатический момент жидкости; $\vec{M}^{\text{ж}} = \Theta^{\text{з.ж}}\cdot\vec{\Omega}$ — кинетический момент жидкости при движении с угловой скоростью затвердевшей жидкости $\Theta_{11}^{\text{з.ж}} = A_1$; $\Theta_{22}^{\text{з.ж}} = B_1$; $\Theta_{33}^{\text{з.ж}} = C_1$; $\vec{M}^* = \Theta^* \cdot \vec{\omega}$ — кинетический момент жидкости при движении с угловой скоростью твердого тела $\Theta_{11}^* = F$; $\Theta_{22}^* = G$; $\Theta_{33}^* = H$.

Отметим, что уравнение (4) такое же, как уравнение движения вокруг неподвижной точки твердого тела с кинетическим моментом $\vec{M}^{\text{T}}$, к которому присоединено вращающееся носимое твердое тело с кинетическим моментом $\vec{M}^{\text{Г}}$. Однако вращение присоединенного твердого тела происходит так, что центр масс носимого тела меняет свое положение относительно несущего, а моменты инерции носимого тела остаются постоянными.

Следовательно, рассматриваемая механическая система вследствие переменности положения центра масс носимого тела в системе координат, связанной с несущим телом, не является гиростатом и представляет собой более общую механическую систему.

Пусть твердое тело удерживается неподвижным. Тогда уравнение одной жидкости описывается уравнениями

$$\frac{d\vec{M}^{\text{ж}}}{dt} + \vec{M}^{\text{ж}} \times \vec{\Omega} = mg\left(\bar{\vec{\gamma}} \times \bar{\vec{c}}\right); \qquad \frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{c}, \tag{8}$$

которые после замены $\vec{\omega}$ на $-\vec{\omega}$ совпадают с уравнениями Эйлера — Пуассона движения твердого тела вокруг неподвижной точки [14, 15].

В проекциях на подвижные оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 уравнения (4), (5) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A\omega_1 + F\Omega_1) + \omega_2\omega_3(C - B) + H\omega_2\Omega_3 - G\omega_3\Omega_2 = mg(\gamma_2 c_3 - \gamma_3 c_2),\\
&\frac{d}{dt}(B\omega_2 + G\Omega_2) + \omega_1\omega_3(A - C) + F\omega_3\Omega_1 - H\omega_1\Omega_3 = mg(\gamma_3 c_1 - \gamma_1 c_3),\\
&\frac{d}{dt}(C\omega_3 + H\Omega_3) + \omega_1\omega_2(B - A) + G\omega_1\Omega_2 - F\omega_2\Omega_1 = mg(\gamma_1 c_2 - \gamma_2 c_1);
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A_1\Omega_1 + F\omega_1) + \Omega_2\Omega_3(B_1 - C_1) + G\omega_2\Omega_3 - H\omega_3\Omega_2 = mg(\overline{\gamma_2}\,\overline{c_3} - \overline{\gamma_2}\,\overline{c_3}),\\
&\frac{d}{dt}(B_1\Omega_2 + G\omega_2) + \Omega_1\Omega_3(C_1 - A_1) + H\omega_3\Omega_1 - F\omega_1\Omega_3 = mg(\overline{\gamma_3}\,\overline{c_1} - \overline{\gamma_1}\,\overline{c_3}),\\
&\frac{d}{dt}(C_1\Omega_3 + H\omega_3) + \Omega_1\Omega_2(A_1 - B_1) + F\omega_1\Omega_2 - G\omega_2\Omega_1 = mg(\overline{\gamma_1}\,\overline{c_2} - \overline{\gamma_2}\,\overline{c_1}).
\end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения (6), (7) запишутся в виде

$$\frac{1}{a_1}\frac{dc_1}{dt}=\frac{c_3}{a_3}\Omega_2-\frac{c_2}{a_2}\Omega_3,\quad \frac{1}{a_2}\frac{dc_2}{dt}=\frac{c_1}{a_1}\Omega_3-\frac{c_3}{a_3}\Omega_1,$$
$$\frac{1}{a_3}\frac{dc_3}{dt}=\frac{c_2}{a_2}\Omega_1-\frac{c_1}{a_1}\Omega_2; \tag{11}$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt}=\gamma_2\omega_3-\gamma_3\omega_2,\quad \frac{d\gamma_2}{dt}=\gamma_3\omega_1-\gamma_1\omega_3,\quad \frac{d\gamma_3}{dt}=\gamma_1\omega_2-\gamma_2\omega_1. \tag{12}$$

Об устойчивости вращения твердого тела с неоднородной жидкостью. Уравнения движения твердого тела с неоднородной жидкостью допускают ряд первых интегралов. Домножим уравнения (9) на $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно и сложим, в результате с учетом уравнения (12) получим

$$\frac{d}{dt}(A\omega_1{}^2+B\omega_2{}^2+C\omega_3{}^2)+2F\omega_1\frac{d\Omega_1}{dt}+2G\omega_2\frac{d\Omega_2}{dt}+2H\omega_3\frac{d\Omega_3}{dt}=$$
$$=-2mg\left(c_1\frac{d\gamma_1}{dt}+c_2\frac{d\gamma_2}{dt}+c_3\frac{d\gamma_3}{dt}\right). \tag{13}$$

Домножим уравнения (10) на $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ и сложим, учитывая равенство (11), придем к выражению

$$\frac{d}{dt}(A_1\Omega_1{}^2+B_1\Omega_2{}^2+C_1\Omega_3{}^2)+2F\Omega_1\frac{d\omega_1}{dt}+2G\Omega_2\frac{d\omega_2}{dt}+2H\Omega_3\frac{d\omega_3}{dt}=$$
$$=-2mg\left(\gamma_1\frac{dc_1}{dt}+\gamma_2\frac{dc_2}{dt}+\gamma_3\frac{dc_3}{dt}\right). \tag{14}$$

Суммируя равенства (13) и (14), получим интеграл энергии

$$A\omega_1{}^2+B\omega_2{}^2+C\omega_3{}^2+2F\omega_1\Omega_1+2G\omega_2\Omega_2+2H\omega_3\Omega_3+$$
$$+2mg(c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+c_3\gamma_3)=V_1.$$

Умножим далее уравнения (9) на $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ соответственно и сложим их. Принимая во внимание уравнение (12), получим интеграл площадей

$$\gamma_1(A\omega_1+F\Omega_1)+\gamma_2(B\omega_2+G\Omega_2)+\gamma_3(C\omega_3+H\Omega_3)=V_2.$$

Уравнения (11), (12) допускают, очевидно, геометрические интегралы для твердого тела и жидкости соответственно:

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=V_3;$$
$$a_2{}^2a_3^2c_1^2+a_1^2a_3^2c_2^2+a_1^2a_2^2c_3^2=V_4.$$

Предварительно умножив уравнения (10) на $\frac{c_1}{a_1}$, $\frac{c_2}{a_2}$, $\frac{c_3}{a_3}$ поочередно и сложив результаты, придем к интегралу площадей для жидкости

$$(A_1\Omega_1 + F\omega_1)\frac{c_1}{a_1} + (B_1\Omega_2 + G\omega_2)\frac{c_2}{a_2} + (C_1\Omega_3 + H\omega_3)\frac{c_3}{a_3} = V_5 .$$

Исследуем устойчивость движения твердого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное движение по отношению к изменению переменных $\Omega_i^*, \omega_i, \gamma_i, c_i \ \ (i = 1, 2, 3)$, где

$$\Omega_1^* = \omega_1 + \frac{a_2^2 + a_3^2}{2a_2a_3}\Omega_1 , \ \Omega_2^* = \omega_2 + \frac{a_2^2 + a_3^2}{2a_1a_3}\Omega_2 , \ \Omega_3^* = \omega_3 + \frac{a_1^2 + a_2^2}{2a_1a_2}\Omega_3 . \quad (15)$$

Используя (14), преобразуем уравнения (4), (9) и (10) к виду

$$\Theta_* \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \Theta^{(2)} \frac{d\vec{\Omega}^*}{dt} + \vec{\omega}\times(\Theta_* \cdot \vec{\omega} + \Theta^{(2)} \cdot \vec{\Omega}^*) = mg(\vec{\gamma}\times\vec{c}), \quad (16)$$

$$\begin{gathered} \frac{2}{5}a_2a_3\frac{d\Omega_1^*}{dt} + \frac{4}{5}\frac{(a_3^2 - a_2^2)a_1^2a_2a_3}{(a_3^2 + a_2^2)(a_1^2 + a_2^2)}\Omega_2^*\Omega_3^* + \\ + \frac{4}{5}a_1^2a_2a_3\left(\frac{\omega_2\Omega_3^*}{a_1^2 + a_3^2} - \frac{\omega_3\Omega_2^*}{a_1^2 + a_3^2}\right) = g\left(\gamma_2c_3\frac{a_2}{a_3} - \gamma_3c_2\frac{a_1}{a_3}\right), \end{gathered} \quad (17)$$

$$\frac{1}{a_1^2}\frac{dc_1}{dt} = \frac{2c_3}{a_1^2 + a_3^2}(\Omega_2^* - \omega_2) - \frac{2c_2}{a_1^2 + a_2^2}(\Omega_3^* - \omega_3), \ (1, 2, 3), \quad (18)$$

где $\Theta_* = \Theta^{\text{т}} + \Theta^{\text{э}}$, $\Theta^{\text{э}} = \{A_{\text{э}}, B_{\text{э}}, C_{\text{э}}\}$ — тензор инерции эквивалентного тела с компонентами

$$\Theta_{11}^{\text{э}} = A_{\text{э}} = \frac{m}{5}\frac{(a_2^2 - a_3^2)^2}{a_2^2 + a_3^2} \quad (A_{\text{э}}, B_{\text{э}}, C_{\text{э}};\ 1, 2, 3);$$

$\Theta^{(2)} = \{A_2, B_2, C_2\}$ — тензор, равный разности между тензором инерции «затвердевшей» жидкости и эквивалентного тела и определенный компонентами

$$\Theta_{11}^{(2)} = A_2 = A_1 - A_{\text{э}} = \frac{4}{5}m\frac{a_2^2a_3^2}{a_2^2 + a_3^2} \quad (A_2, B_2, C_2;\ 1, 2, 3).$$

Здесь и далее $A = A_0 + A_{\text{э}}$, $B = B_0 + B_{\text{э}}$, $C = C_0 + C_{\text{э}}$.

Преобразованные уравнения также допускают первые интегралы:

интеграл энергии

$$A\omega_1{}^2 + B\omega_2{}^2 + C\omega_3{}^2 + A_2\Omega_1^{*2} + B_2\Omega_2^{*2} + C_2\Omega_3^{*2} + 2mg(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3) = V_1;$$

интеграл площадей для твердого тела с жидкостью

$$A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C\omega_3\gamma_3 + A_2\Omega_1^*\gamma_1 + B_2\Omega_2^*\gamma_2 + C_2\Omega_3^*\omega_3 = V_2.$$

Интеграл площадей для жидкости при использовании переменных $\Omega_1^*, \Omega_2^*, \Omega_3^*$ имеет вид

$$a_2^2 a_3^2 \Omega_1^* c_1 + a_1^2 a_2^2 \Omega_2^* c_2 + a_1^2 a_2^2 \Omega_3^* c_3 = V_5.$$

Уравнения движения системы (16)–(18), (12) допускают следующее частное решение:

$$\begin{aligned} &\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad &&\omega_3 = \omega_0; \quad &&\Omega_1^* = \Omega_2^* = 0, \quad &&\Omega_3^* = \Omega_0; \\ &c_1 = c_2 = 0, \quad &&c_3 = z_0; \quad &&\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad &&\gamma_3 = 1, \end{aligned} \tag{19}$$

которому соответствует равномерное вращение твердого тела вокруг оси, параллельной вектору $\vec{g}$ и установившемуся движению с угловой скоростью Ω_0 неоднородной жидкости, плотность которой в установившемся вращении изменяется по закону

$$\rho = \rho_0 + \rho_3 x_3.$$

Движение системы, описываемое частным решением (19), примем за невозмущенное движение твердого тела и жидкости в его полости и исследуем устойчивость вращательных движений твердого тела и жидкости. Отметим, что твердое тело с жидкостью является системой, обладающей бесконечным числом степеней свободы. Однако переменные $c_i (i = 1, 2, 3)$ позволяют описать движение системы тело — жидкость конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом случае под устойчивостью движения системы, как и при исследовании устойчивости движения одной жидкости, следует понимать не устойчивость по отношению ко всем переменным, характеризующим движение, а устойчивость по отношению к части переменных [19].

Такая постановка является наиболее правомерной в прикладных задачах, изучающих главным образом вопрос об устойчивости движения твердого тела. Это обстоятельство позволяет рассматривать задачу об устойчивости системы тело — жидкость как задачу об устойчивости системы с конечным числом переменных. Для решения проблемы устойчивости движения системы воспользуемся вторым методом Ляпунова, распространенным на подобные системы в работе [19].

Уравнения возмущенного движения получим из уравнений (12), (16)–(18), положив в возмущенном движении

$$\omega_3 = \omega_0 + y_1, \quad \Omega_3^* = \Omega_0 + y_2, \quad \gamma_3 = 1 + y_3, \quad c_3 = z_0 + y_4 \qquad (20)$$

и сохранив прежние обозначения для других переменных.

Уравнения возмущенного движения в общем случае обладают следующими первыми интегралами:

$$V_1 = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C(y_1^2 + 2\omega_0 y_1) + A_2\Omega_1^{*2} + B_2\Omega_2^{*2} + C_2(y_2^2 + 2\Omega_0 y_0) + \\ + 2mg(c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + z_0 y_3 + y_4 + y_3 y_4),$$

$$V_2 = A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C(y_1 + y_1 y_3 + \omega_0 y_3) + A_2\gamma_1\Omega_1^* + B_2\gamma_2\Omega_2^* + \\ + C_2(y_2 + y_2 y_3 + \Omega_0 y_3),$$

$$V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2y_3 + y_3^2,$$

$$V_4 = a_2^2 a_3^2 c_1^2 + a_1^2 a_3^2 c_2^2 + a_1^2 a_2^2 (y_4^2 + 2z_0 y_4),$$

$$V_5 = a_2^2 a_3^2 \Omega_1^* c_1 + a_1^2 a_2^2 \Omega_2^* c_2 + a_1^2 a_2^2 (y_2 y_4 + y_2 z_0 + \Omega_0 y_4).$$

Для построения функции Ляпунова воспользуемся методом Четаева [20]. Составим связку первых интегралов

$$V = V_1 - 2\omega_0 V_2 + T_1 V_4 - 2T_2 V_5 + \mu V_3 + \frac{1}{4}\chi V_3^2,$$

где

$$T_1 = \frac{(\Omega_0 - \omega_0)C_2\Omega_0}{z_0^2 a_1^2 a_2^2} - \frac{mg}{z_0 a_1^2 a_2^2} = T_2\frac{\Omega_0}{z_0} - \frac{mg}{z_0 a_1^2 a_2^2},$$

$$T_2 = \frac{(\Omega_0 - \omega_0)C_2}{z_0 a_1^2 a_2^2}, \quad \mu = (C\omega_0 + C_2\Omega_0)\omega_0 - mgz_0.$$

После небольших преобразований функцию V приведем к виду

$$V = A\omega_1^2 - 2\omega_0 A\omega_1\gamma_1 - 2\omega_0 A_2\Omega_1^*\gamma_1 + \mu\gamma_1^2 + A_2\Omega_1^{*2} - 2T_2 a_2^2 a_3^2 \Omega_1^* c_1 + \\ + T_1 a_2^2 a_3^2 c_1^2 + 2mgc_1\gamma_1 + \\ + B\omega_2^2 - 2\omega_0 B\omega_2\gamma_2 - 2\omega_0 B_2\Omega_2^*\gamma_2 + \mu\gamma_2^2 + B_2\Omega_2^{*2} - 2T_2 a_1^2 a_3^2 \Omega_2^* c_2 + \\ + T_1 a_1^2 a_3^2 c_2^2 + 2mgc_2\gamma_2 + \\ + Cy_1^2 - 2\omega_0 C y_1 y_3 - 2\omega_0 C_2 y_2 y_3 + \mu y_3^2 + C_2 y_2^2 - 2T_2 a_1^2 a_2^2 y_2 y_4 + \\ + T_1 a_1^2 a_2^2 y_4^2 + 2mgy_3 y_4 + \chi y_3^2 + \ \ldots$$

Многоточие означает невыписанные члены выше 2-го порядка малости, а коэффициент χ остается пока произвольным. Функцию V

можно рассматривать как сумму трех квадратичных форм, каждая из которых зависит от четырех переменных:

$$V = V^{(1)}(\omega_1, \gamma_1, \Omega_1^*, c_1) + V^{(2)}(\omega_2, \gamma_2, \Omega_2^*, c_2) + V^{(3)}(y_1, y_2, y_3, y_4).$$

Согласно критерию Сильвестра, для положительной знакоопределенности первых двух форм необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\Delta_3^{*A} = (C - A^*)\omega_0{}^2 + C_2\Omega_0\omega_0 - mgz_0 > 0,$$

$$\begin{gathered} \Delta_4^{*A} = \Delta_3^{*A}\frac{a_3^2}{a_1^2}\left\{(\Omega_0 - \omega_0)\Omega_0 A_2 C_2 - (\Omega_0 - \omega_0)^2 C_2^2 \frac{a_3^2}{a_1^2} - A_2 mgz_0\right\} - \\ - A_2\left\{(\Omega_0 - \omega_0)C_2\omega_0\frac{a_3^2}{a_1^2} - mgz_0\right\}^2 > 0, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\Delta_3^{*B} = (C - B^*)\omega_0^2 + C_2\Omega_0\omega_0 - mgz_0 > 0,$$

$$\begin{gathered} \Delta_4^{*B} = \Delta_3^{*B}\frac{a_3^2}{a_2^2}\left\{(\Omega_0 - \omega_0)\Omega_0 B_2 C_2 - (\Omega_0 - \omega_0)^2 C_2^2 \frac{a_3^2}{a_2^2} - B_2 mgz_0\right\} - \\ - B_2\left\{(\Omega_0 - \omega_0)C_2\omega_0\frac{a_3^2}{a_2^2} - mgz_0\right\}^2 > 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Для положительной определенности последней квадратичной формы достаточно выбрать постоянную χ

$$\chi = \omega_0 C_2(\Omega_0 - \omega_0) - mgz_0.$$

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости, неравенства (21), (22) будут достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения (20) по отношению к переменным $\omega_i, \Omega_i^*, c_i, \gamma_i$. Практически интересными являются случаи, когда Ω_0 очень мало и неоднородная жидкость совершает движение, близкое к потенциальному, и случай $\Omega_0 = \omega_0$, когда жидкость вследствие своей вязкости и тело вращаются как одно твердое тело.

Рассмотрим сначала случай, когда $\Omega_0 = \omega_0$. Пусть $z_0 = 0$. Тогда неравенства (21), (22) принимают вид условий

$$C^* - A^* > 0, \quad C^* - B^* > 0,$$

которые совпадают с достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения по инерции твердого тела с однородной жидкостью, обладающих суммарными моментами инерции

$$A^* = A_0 + A_э + A_2, \qquad B^* = B_0 + B_э + B_2, \qquad C^* = C_0 + C_э + C_2.$$

Если $z_0 \neq 0$, то для динамически симметричного относительно оси Ox_3 твердого тела $(A_0 = B_0)$ с эллипсоидальной полостью вращения $(a_1 = a_2)$ неравенства (21), (22) принимают вид

$$
\begin{gathered}
(C^* - A^*)\omega_0^2 - mgz_0 > 0, \\
A_2 mgz_0 \frac{a_3^2}{a_1^2}\left\{(A^* - C^*)\omega_0^2 + mgz_0 \frac{a_3^2 - a_1^2}{a_3^2}\right\} > 0.
\end{gathered} \tag{23}
$$

При $z_0 > 0$ неравенства (23) являются несовместными, и достаточные условия устойчивости решения в этом случае не могут быть указаны. При $z_0 < 0$ невозмущенное движение системы будет устойчиво, если выполняются неравенства:

$$
\begin{gathered}
(C_0 - A_0)\omega_0^2 + (C_1 - A_1)\omega_0^2 + mgz_0 > 0, \\
(A_0 - C_0)\omega_0^2 + (A_1 - C_1)\omega_0^2 + mgz_0 \frac{a_3^2 - a_1^2}{a_3^2} < 0.
\end{gathered}
$$

Отсюда следует, что для динамически симметричного твердого тела с шаровой полостью достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (20) будет являться неравенство $C_0 > A_0$ совпадающее с одним из условий устойчивости перманентных вращений одного твердого тела.

Рассмотрим теперь случай, когда Ω_0 достаточно мало, т. е. $\Omega_0 \approx 0$. Это имеет место в начальные моменты времени раскрутки, когда основная масса неоднородной жидкости либо покоится, либо совершает движение, близкое к потенциальному. В этом случае выражения (21), (22) имеют вид

$$
(C - A^*)\omega_0^2 - mgz_0 > 0, \tag{24}
$$

$$
\begin{gathered}
\left[(C - A^*)\omega_0^2 - mgz_0\right] \frac{a_3^2}{a_1^2}\left(\omega_0^2 C_2^2 \frac{a_3^2}{a_1^2} + A_2 mgz_0\right) + \\
+ A_2\left(\omega_0^2 C_2 \frac{a_3^2}{a_1^2} + mgz_0\right)^2 < 0.
\end{gathered} \tag{25}
$$

При $z_0 \geq 0$ неравенства (24), (25) несовместны, условия знакоопределенности функции V, а следовательно, и достаточные условия устойчивости не могут быть указаны. При $z_0 < 0$ из неравенства (24) следует неравенство

$$
A_1 {\omega_0}^2 + mgz_0 < 0 , \tag{26}
$$

которое совместно с неравенством (24), и будут достаточными условиями невозмущенного движения.

Для твердого тела, представляющего собой тонкую оболочку, моментами инерции которой можно пренебречь по сравнению с моментами инерции жидкости, достаточным условием устойчивости в рассматриваемом случае при $z_0 < 0$ может служить одно неравенство (26). Отметим, что из неравенства (26) следует физически правильный результат: незакрученная жидкость может быть устойчивой только при $z_0 < 0,$ т. е. когда плотность жидкости в невозмущенном состоянии увеличивается в направлении однородного силового поля.

Полученные достаточные условия устойчивости движения могут и не охватывать всей области устойчивости системы. Соответствие достаточных условий, получаемых с помощью второго метода Ляпунова, необходимым и достаточным условиям во многом зависит от удачного построения функции Ляпунова. В связи с этим укажем иные достаточные условия устойчивости системы, когда ось Ox_3 является осью симметрии полости и осью динамической симметрии твердого тела. В этом случае уравнения возмущенного движения системы тело — жидкость допускают еще один первый интеграл

$$V_6 = y_1 .$$

Составим связку интегралов: $V_i \, (i = 1, ..., 6)$:

$$V = V_1 + 2\lambda V_2 - 2\frac{\Phi_2}{a_1^4} V_5 - (mgz_0 + C\omega_0\lambda + C_2\Omega_0\lambda)V_3 -$$

$$-\frac{\Phi_1}{a_2^4} V_4 - 2C(\omega_0 + \lambda)V_6 + \frac{C(C-A)}{A} V_6^2 + \chi_1 V_4^2 + \chi_2 V_5^2;$$

$$V = A\omega_1^2 + 2\lambda A\omega_1\gamma_1 - \mu_1\gamma_1^2 + B\omega_2^2 + 2\lambda A\omega_2\gamma_2 - \mu_1\gamma_2^2 + \frac{C^2}{A} y_1^2 +$$

$$+ 2C\lambda y_1 y_3 - \eta_1 y_3^2 + A_2\Omega_1^{*2} + 2\lambda A_2\Omega_1^*\gamma_1 - C_2\Omega_0\lambda\gamma_1^2 - \Phi_1 \frac{a_3^2}{a_1^2} c_1^2 +$$

$$+ 2mgc_1\gamma_1 - 2\Phi_2 \frac{a_3^2}{a_1^2} \Omega_1^* c_1 + B_2\Omega_2^{*2} + 2\lambda A_2\Omega_2^*\gamma_2 - C_2\Omega_0\lambda\gamma_2^2 - \qquad (27)$$

$$- \Phi_1 \frac{a_3^2}{a_1^2} c_2^2 + 2mgc_2\gamma_2 - 2\Phi_2 \frac{a_3^2}{a_1^2} \Omega_2^* c_2 + C_2 y_2^2 + 2\lambda C_2 y_2 y_3 -$$

$$- C_2\Omega_0\lambda {y_3}^2 - \Phi_1 {y_4}^2 + 2mgy_3y_4 - 2\Phi_2 y_3 y_4 +$$

$$+ \chi_2 a_1^8 (y_2^2 z_0^2 + 2y_2y_4\Omega_0 z_0 + \Omega_0^2 y_4^2) + 4\chi_1 a_1^8 z_0^2 y_4^2 + ...$$

В выражении (27) введены обозначения:

$$\Phi_1 = \frac{mz}{z_0} - \frac{C_2({\Omega_0}^2 - \Omega_0\lambda)}{{z_0}^2}, \quad \Phi_2 = \frac{C_2(\Omega_0 + \lambda)}{z_0}, \; \mu_1 = mgz_0 + C\omega_0\lambda,$$

λ, χ — некоторые постоянные.

Функцию V будем рассматривать как сумму трех квадратичных форм относительно двух переменных и трех квадратичных форм относительно трех переменных. Первые две квадратичные формы, как следует из выражения (27), в каждом случае являются однотипными:

$$V = V^{(1)}(\omega_1, \gamma_1) + V^{(2)}(\omega_2, \gamma_2) + V^{(3)}(y_1, y_3) +$$
$$+ V^{(4)}(\Omega_1^*, \gamma_1, c_1) + V^{(5)}(\Omega_2^*, \gamma_2, c_2) + V^{(6)}(y_2, y_3, y_4).$$

Первые три квадратичные формы относительно двух переменных представляют собой функцию Ляпунова для твердого тела с затвердевшей жидкостью. Эта функция будет определенно-положительна при выполнении неравенства

$$f_0(\lambda) = A\lambda^2 + C\omega_0\lambda + mgz_0 < 0, \tag{28}$$

четвертая и пятая квадратичные формы будут определенно положительны при выполнении следующих условий, получающихся с помощью критерия Сильвестра:

$$\lambda > \lambda_3 = -\frac{C_2}{2A_2}\Omega_0 \frac{{a_3}^2}{{a_1}^2}, \tag{29}$$

$$\Delta_3(\lambda) = \frac{2}{5}\lambda\Omega_0 a_3^2 \frac{(a_3^2 - a_1^2)^2}{a_3^2 + a_1^2} f_1(\lambda) + f_2(\lambda) > 0, \tag{30}$$

где

$$f_1(\lambda) = (\lambda + \Omega_0)(\lambda + \frac{C_2}{A_2 - C_2}\Omega_0),$$

$$f_2(\lambda) = -\frac{gz_0}{m}(\lambda^2 A_2 + \lambda C_2\Omega_0 \frac{a_3^2}{a_1^2} + mgz_0).$$

Последняя, шестая квадратичная форма всегда может быть сведена к определенно-положительной форме с помощью выбора неопределенных параметров χ_1 и χ_2, и следовательно, условия знакоопределенности этой формы могут быть проигнорированы.

Выясним теперь условия совместности неравенств (28)–(30) в некоторых конкретных случаях. Условия совместности неравенств обеспечат наличие функции V, удовлетворяющей всем требованиям теоремы [19] об устойчивости по части переменных, и следовательно, будут достаточными условиями устойчивости решения. Заметим, что поведение функции $f_1(\lambda)$ зависит только от геометрии полости, а функции $f_2(\lambda)$ — от знака z_0 и размеров полости. Пусть $z_0 > 0$ и $a_1 > a_3$, Ω_0 и ω_0 — конечные величины.

Неравенство (28) будет выполнено при условии

$$C^2{\omega_0}^2 - 4Amgz_0 > 0. \tag{31}$$

При этом получаем ограничение на коэффициент λ, который может принимать любое значение в диапазоне

$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < 0,$$

где λ_1, λ_2 — корни уравнения

$$A\lambda^2 + C\omega_0\lambda + mgz_0 = 0.$$

Для выполнения неравенства (30) в рассматриваемом случае достаточно потребовать выполнение условия

$$C_2^2\Omega_0^2\frac{a_3^4}{a_1^4} - 4A_2mgz_0 > 0. \tag{32}$$

Поскольку $\lambda_3 > \Omega_0$, $\Delta_3(-\Omega_0) < 0$, $f_2(-\Omega_0) < 0$, при $a_1 > a_3$ неравенства (29), (30) будут совместны, а чтобы выполнялось ограничение, наложенное на коэффициент λ, потребуется выполнение условий

$$\begin{aligned} &\lambda_5 < \lambda < \lambda_3, \\ &\lambda_3 < \lambda < \lambda_4, \end{aligned} \tag{33}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ — корни квадратичных форм соответственно $f_0(\lambda)$, $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$.

Таким образом, при выполнении неравенств (31)–(33) в рассматриваемом случае невозмущенное движение будет устойчиво по отношению к величинам $\omega_i, \Omega_i, c_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Отметим один интересный момент: неравенства (33) можно рассматривать как условия, при которых функции $f_0(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ имеют своими нулями корни, расположенные левее оси ординат. Необходимым условием для этого может служить неравенство

$$\omega_0\Omega_0 > 0, \tag{34}$$

показывающее, что жидкость и твердое тело в установившемся движении должны вращаться в одну сторону.

Заключение. В данной работе получены и проанализированы уравнения сферического движения твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, полностью наполненную неоднородной идеальной жидкостью. Выведены достаточные условия устойчивости вращения твердого тела с жидкостью вокруг вертикальной оси динамической симметрии. Полученное условие имеет вид неравенств корней квадратичных форм, соответствующих возмущенному движению тела с жидкостью. Как следует из приведенных результатов, условия устойчивого вращения твердого тела с неоднородной жидкостью существенно отличаются от аналогичного случая вращения с однородной жидкостью. В случае твердого тела с неоднородной жидкостью для устойчивости перманентных вращений вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс и геометрическим центром полости, требование неравенства между моментами инерции $(A, B > C)$, $(A, B < C)$ становится недостаточным.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Жуковский Н.Е. *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 137 с.

[2] Sloudsky Th. De la rotation de la terre supposee fluide a son interieur. *Bulletin de la Societe Imperiale des naturalistes de Moscou*, 1895, Tome IX, pp. 285–318.

[3] Hough S.S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. A, 1895, vol. 186, part 1, pp. 469–506.

[4] Poincare H. Sur la precession des corps deformables. *Bulletin astronomique*, 1910, vol. 27, pp. 321–356.

[5] Дерендяев Н.В. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного стратифицированной несжимаемой жидкостью. *Докл. АН СССР*, 1983, т. 272, № 5, с. 1073–1076.

[6] Савченко А.Я., Игнатов А.Л. Исследование устойчивости равномерных вращений симметричного волчка с жидким заполнением. *Прикладная математика и механика*, 1974, т. 10, № 8, с. 107–111.

[7] Игнатьев А.О. К достаточным условиям устойчивости осесимметричного волчка с жидким заполнением. *Механика твердого тела: Респ. межвед. сб. № 9*. Киев, Наукова думка, 1977, с. 82–86.

[8] Позднякович Е.В. Равномерные вращения твердого тела с жидким заполнителем. *Механика твердого тела: Респ. межвед. сб. № 10*. Киев, Наукова думка, 1978, с. 49–54.

[9] Ай Мин Вин, Темнов А.Н. Вращение твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной стратифицированной жидкостью. *Труды МАИ*, 2015, № 79. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=55633

[10] Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. О параметрических осесимметричных колебаниях жидкости в цилиндрическом сосуде. *Труды МАИ*, 2017, № 95. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=84412

[11] Пак Сонги, Григорьев В.Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках. *Труды МАИ*, 2021, № 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-08

[12] Должанский Ф.В. О гидродинамической интерпретации уравнений движения тяжелого волчка. *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1977, № 2, с. 201–203.

[13] Темнов А.Н. Однородное вихревое движение неоднородной жидкости. *Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана, № 293*. Москва, 1979, с. 50–57.

[14] Темнов А.Н. Ян Наинг У. Механический аналог движений неоднородной жидкости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2022, вып. 7. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-7-2192

[15] Темнов А.Н. Устойчивость стационарных вращений неоднородной жидкости в эллипсоидальной полости. *Известия вузов. Машиностроение*, 1979, № 7, с. 149–151.

[16] Ян Наинг У. Движение твердого тела с жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. *Сб. материалов конф. «Наука, технологии и бизнес. III Межвузовская конференция аспирантов, соискателей и молодых ученых». Москва, 27–28 апреля 2021 г., МГТУ им. Н.Э. Баумана*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021, с. 209–222. URL: https://bmstu.press/catalog/item/7324/

[17] Мельхиор П. *Земные приливы*. Москва, Мир, 1968, 482 с.

[18] Лурье А.И. *Аналитическая механика*. Москва, Физматгиз, 1961, 824 с.

[19] Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. *Динамика тела с полостями, содержащими жидкость*. Москва, Наука, 1965, 439 с.

[20] Меркин Д.Р. *Введение в теорию устойчивости движения*. Москва, Наука, 1976, 320 с.

Статья поступила в редакцию 25.11.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Вин Ко Ко, Темнов А.Н., Ян Наинг У. Устойчивость сферического движения твердого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2023, вып. 1.

http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2023-1-2242

Вин Ко Ко — канд. физ.-мат. наук, стажер кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: win.c.latt@gmail.com

Темнов Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: antt45@mail.ru

Ян Наинг У — аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yno64528@gmail.com

Stability of the spherical motion of a solid body with an inhomogeneous fluid performing a uniform vortex motion

© Win Ko Ko, A.N. Temnov, Yan Naing Oo

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

In this paper, the equations of spherical motion of a solid body with a rotating inhomogeneous incompressible fluid that fills a completely ellipsoidal cavity are obtained and investigated. The stability of rotation of a solid with an inhomogeneous fluid having a linear density distribution is considered. Arbitrary fields of density and velocity of fluid particles are represented as a power series by spatial variables with coefficients that depend only on time. Sufficient conditions for the stability of the rotation of a solid body with a fluid around the vertical axis of dynamic symmetry are presented. The obtained equations of motion make it possible to study the stability of stationary motions of the system under consideration in order to assess the effect of fluid separation on the dynamics of the body. By analogy with the motion of a solid body, it is stated that the obtained conditions are also necessary and sufficient conditions for stationary rotations of an inhomogeneous fluid in an ellipsoidal cavity.

Keywords: *inhomogeneous liquid, solid body, ellipsoidal cavity, uniform vortex motion, stability*

REFERENCES

[1] Zhukovsky N.E. *O dvizhenii tverdogo tela, imeyuschego polosti, napolnennye odnorodnoi kapelnoi zhidkostyu* [On the motion of a rigid body with cavities filled with homogenous drop-like liquid]. Moscow, BMSTU Publ., 2017, 137 p.

[2] Sloudsky Th. De la rotation de la terre supposee fluide a son interieur. *Bulletin de la Societe Imperiale des naturalistes de Moscou*, 1895, Tome IX, pp. 285–318.

[3] Hough S.S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. A, 1895, vol. 186, part 1, pp. 469–506.

[4] Poincare H. Sur la precession des corps deformables. *Bulletin astronomique*, 1910, vol. 27, pp. 321–356.

[5] Derendyaev N.V. Ob ustoichivosti statsionarnogo vrashcheniya tsilindra, zapolnennogo stratifitsirovannoy neszhimaemoy zhidkostyu [Stability of the stationary rotation of a cylinder filled with a stratified viscous incompressible fluid]. *Doklady AN SSSR* (Reports of the USSR Academy of Sciences), 1983, vol. 272, no. 5, pp. 1073–1076.

[6] Savchenko A.Ya., Ignatov A.L. Issledovanie ustoichivosti ravnomernykh vrascheniy simmetrichnogo volchka s zhidkim zapolnitelem [Investigation of the stability of uniform rotations of a symmetric top with a liquid filler]. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1974, vol. 10, no. 8, pp. 107–111.

[7] Ignatyev A.O. K dostatochnym usloviyam ustoichivosti osesimmetrichnogo volchka s zhidkim zapolnitelem [To sufficient stability conditions of an axisymmetric spinning top with a liquid filler]. In: *Mekhanika tverdogo tela: Resp. mezhved. sb. no. 9* [Solid body mechanics: Republican interdepartmental collection, no. 9]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1977, pp. 82–86.

[8] Pozdnyakovich E.V. Ravnomernye vrashcheniya tverdogo tela s zhidkim zapolnitelem [Uniform rotations of a solid body with a liquid filler]. In: *Mekhanika tverdogo tela: Resp. mezhved. sb. no. 10* [Solid body mechanics: Republican interdepartmental collection, no. 10]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1978, pp. 49–54.

[9] Aye Min Win, Temnov A.N. Vraschenie tverdogo tela s ellipsoidalnoy polostyu, tselikom napolnennoy stratifitsirovannoy zhidkostyu [Rotation of a rigid body with an ellipsoidal cavity is completely filled with stratified fluid]. *Trudy MAI*, 2015, no. 79. Available at: http://trudymai.ru/published.php?ID=55633

[10] Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. O parametricheskikh osesimmetrichnykh kolebaniyakh zhidkosti v tsilindricheskom sosude [On axisymmetric parametric oscillations of a fluid in a cylindrical vessel]. *Trudy MAI*, 2017, no. 95. Available at: https://trudymai.ru/published.php?ID=84412

[11] Park SongYi, Grigoriev V.G. Ustoichivost tonkostennykh osesimmetrichnykh soosnykh konstruktsii, soderzhaschikh zhidkost, pri mnogofaktornykh nagruzkakh [Stability of thin-walled axisymmetric coaxial structures containing liquid under multifactor loads]. *Trudy MAI*, 2021, no. 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-08

[12] Dolzhansky F.V. O gidrodinamicheskoy interpretatsii uravneniy dvizheniya tyazhelogo volchka. [On the hydrodynamic interpretation of the equations of motion of a heavy spinning top]. Izv. AN SSSR. *Fizika atmosfery i okeana — Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Atmospheric and Oceanic Physics*, 1977, no. 2, pp. 201–203.

[13] Temnov A.N. Odnorodnoe vikhrevoe dvizhenie neodnorodnoy zhidkosti [Homogeneous vortex motion of an inhomogeneous fluid]. *Trudy MVTU im. N.E. Baumana no. 293* [Proc. of the Bauman MHTS, no. 293]. Moscow, 1979, pp. 50–57.

[14] Temnov A.N., Yan Naing Oo. Mekhanicheskiy analog dvizheniy neodnorodnoy zhidkosti [Mechanical analogue of the motions of an inhomogeneous fluid]. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2022, iss. 7. https://doi.org/10.18698/2308-6033-2022-7-2192

[15] Temnov A.N. Ustoichivost statsionarnykh vrascheniy neodnorodnoy zhidkosti v ellipsoidalnoy polosti. [Stability of stationary rotations of an inhomogeneous fluid in an ellipsoidal cavity] *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye — Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building*, 1979, no. 7, pp. 149–151.

[16] Yan Naing Oo. Dvizhenie tverdogo tela s zhidkostyu, sovershayuschey odnorodnoe vikhrevoe dvizhenie. [Motion of a solid body with a liquid performing a homogeneous vortex motion]. In: *Sb. materialov konf. "Nauka, tekhnologii i biznes. III Mezhvuzovskaya konferentsiya aspirantov, soiskateley i molodykh uchenykh"* [Collection of conference materials "Science, technologies and business. III Interacademic conference of graduate students, aspirants and young researchers". Moscow, April 27–28, 2021, Bauman Moscow State Technical University]. Moscow, BMSTU Publ., 2021, pp. 209–222. Available at: https://bmstu.press/catalog/item/7324/

[17] Melchior P. *The Earth Tides*, Pergamon Press, 1966 [In Russ.: Melkhior P. Zemnye prilivy. Moscow, Mir Publ., 1968, 482 p.].

[18] Lure A.I. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical mechanics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 824 p.

[19] Moiseyev N.N., Rumyantsev V.V. *Dinamika tela s polostyami soderzhaschimi zhidkost* [Dynamics of a body with cavities containing liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 439 p.

[20] Merkin D.R. *Vvedenie v teoriyu ustoichivosti dvizheniya [Introduction to the theory of motion stability]*. Moscow, Nauka Publ., 1976, 320 p.

Win Ko Ko, Cand. Sc. (Phys.-Math.), Young Researcher of the Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: win.c.latt@gmail.com

Temnov A.N., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: antt45@mail.ru

Yan Naing Oo, Post-graduate student, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yno64528@gmail.com