

Использование системы двигателей-маховиков при реализации режима солнечной ориентации космического аппарата

© А.И. Игнатов, Г.А. Иванов, Е.С. Коломиец, Е.В. Мартыненко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Исследование посвящено поддержанию режима солнечной ориентации космического аппарата-гиростата на низкой околоземной орбите в течение длительного времени. Форма аппарата близка к цилиндру с двумя неподвижными панелями солнечных батарей, расположенными вдоль продольной оси цилиндра, симметрично относительно нее. В режиме солнечной ориентации нормаль к плоскости солнечных батарей аппарата неизменно направлена на Солнце, продольная ось совершает колебания относительно плоскости орбиты. Для реализации указанного режима движения космического аппарата используется система четырех двигателей-маховиков, оси вращения которых направлены параллельно боковым ребрам четырехугольной пирамиды. Положение боковых ребер пирамиды, относительно жестко связанной с аппаратом системы координат, задается двумя углами, являющимися параметрами системы двигателей-маховиков. Рассмотрен закон управления гиростатическим моментом, при котором обеспечивается затухание возмущенного движения космического аппарата в окрестности положения его солнечной ориентации и ограничивается накопление собственного кинетического момента двигателей-маховиков посредством управления углом поворота аппарата вокруг нормали к светочувствительной стороне солнечных батарей. Показано, что выбор определенных параметров системы координат двигателей-маховиков поможет реализовать режим солнечной ориентации без проведения разгрузок гиростатического момента в течение всего времени полета. Приведены результаты численного моделирования полной системы уравнений движения космического аппарата в режиме его солнечной ориентации с учетом воздействия гравитационного и аэродинамического моментов, подтверждающие правильность выбранных значений параметров.

Ключевые слова: космический аппарат-гиростат, двигатель-маховик, солнечная ориентация, гравитационный момент, аэродинамический момент

Введение. В процессе эксплуатации космических аппаратов (КА) часто используется режим солнечной ориентации, поскольку он обеспечивает максимальный приток электроэнергии на борт. Исследуем возможность поддержания режима солнечной ориентации КА на низкой околоземной орбите с помощью гиросистемы в течение длительного времени. Специфика рассматриваемого КА состоит в том, что на нем расположены неподвижные панели солнечных батарей, поэтому для наиболее эффективного их применения необходимо поддерживать непрерывную ориентацию вектора нормали к светочувствительной стороне панелей батарей на Солнце. При использовании гиросистемы одним из основных требований к режиму

ориентации КА является малая скорость накопления собственного кинетического момента гиросистемы (гиростатического момента) для увеличения интервалов времени между проведением разгрузок. Накопление гиростатического момента происходит посредством воздействия на КА гравитационного и аэродинамического моментов. Цель настоящего исследования — рассмотреть закон управления гиростатическим моментом КА, при котором обеспечивается затухание возмущенного движения КА в окрестности положения его солнечной ориентации и ограничивается накопление гиростатического момента с помощью управления углом поворота КА вокруг нормали к светочувствительной стороне солнечных батарей [1–3].

Уравнения движения космического аппарата. Считаем КА гиросилом, для описания его движения будем использовать три правых декартовых системы координат.

1. Связанная система координат $Oy_1y_2y_3$ образована главными центральными осями инерции КА. Полагаем, что КА имеет форму прямого кругового цилиндра (рис. 1) радиусом R_c и высотой L_c , с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами — солнечными батареями суммарной площадью S_b . Ось цилиндра совпадает с осью Oy_1 . Солнечные батареи расположены в плоскости Oy_1y_3 симметрично относительно оси Oy_1 , стороны батарей параллельны осям Oy_1 и Oy_3 , ось Oy_2 перпендикулярна плоскости солнечных батарей. Светочувствительная сторона солнечных батарей обращена к полупространству $y_2 > 0$. Координаты геометрических центров цилиндра и пластин солнечных батарей обозначим $(y_c, 0, 0)$ и $(y_b, 0, 0)$ соответственно, базисные орты этой системы — e_1, e_2, e_3 . Далее, если особо не оговорено, компоненты векторов и координаты точек относятся к системе $Oy_1y_2y_3$.

2. Начало гринвичской системы координат $O_EY_1Y_2Y_3$ находится в центре Земли, плоскость $O_EY_1Y_2$ совпадает с плоскостью экватора, ось O_EY_1 пересекает гринвичский меридиан, ось O_EY_3 направлена к Северному полюсу.

3. В квазиинерциальной системе координат $O_EZ_1Z_2Z_3$ ось O_EZ_2 параллельна вектору кинетического момента орбитального движения КА, ось O_EZ_3 лежит в плоскости экватора и направлена в восходящий узел оскулирующей орбиты КА. Базис этой системы образован ортами E_1, E_2, E_3 .

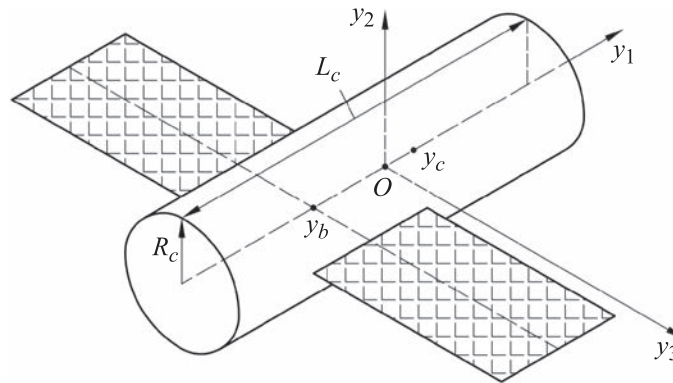


Рис. 1. Общая форма КА и положение осей связанной системы координат

Матрицу перехода от системы $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ к системе $O_E Y_1 Y_2 Y_3$ обозначим $C = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где c_{ij} — косинус угла между осями $O_E Y_i$ и $O_E Z_j$. Элементы этой матрицы выражаются через координаты и компоненты скорости центра масс КА в гринвичской системе координат. Матрицы перехода от системы $O y_1 y_2 y_3$ к гринвичской системе координат и системе $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ обозначим соответственно $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^3$ и $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$. Здесь b_{ij} и a_{ij} — косинусы углов, которые образует ось $O y_j$ с осями $O_E Y_i$ и $O_E Z_i$. Справедливы соотношения $a_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_j$, $B = CA$.

Положение системы $O y_1 y_2 y_3$ относительно системы $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ будем также задавать углами ψ , θ и φ , которые введем следующим образом. Если точку O_E перенести в точку O , то систему $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ можно перевести в систему $O y_1 y_2 y_3$ тремя последовательными поворотами:

- 1) на угол ψ вокруг оси $O_E Z_2$;
- 2) на угол $\pi/2 - \theta$ вокруг новой оси $O_E Z_1$;
- 3) на угол $\varphi + \pi$ вокруг новой оси $O_E Z_2$, совпадающей с осью $O y_2$.

Элементы матрицы A выражаются через эти углы с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta, & a_{12} &= \sin \psi \cos \theta, \\ a_{21} &= -\sin \varphi \cos \theta, & a_{22} &= \sin \theta, \\ a_{31} &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \theta, & a_{32} &= \cos \psi \cos \theta, \\ a_{13} &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \sin \theta, \end{aligned}$$

$$a_{23} = \cos \varphi \cos \theta,$$

$$a_{33} = \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta.$$

Уравнения движения КА состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс КА в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы; другая — движение КА относительно центра масс (вращательное движение).

В векторном виде подсистему уравнений движения центра масс КА можно представить так [4]:

$$\frac{\tilde{d}^2 \mathbf{r}}{dt^2} + 2(\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{v}) + \boldsymbol{\omega}_E \times (\boldsymbol{\omega}_E \times \mathbf{r}) = -\frac{\mu_E}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{f}_d,$$

$$\mathbf{f}_d = \nabla U_B - c \rho_a \mathbf{v} \mathbf{v}.$$

Здесь символом \tilde{d}/dt обозначена локальная производная вектора в системе $O_E Y_1 Y_2 Y_3$; $\boldsymbol{\omega}_E$ — вектор угловой скорости вращения Земли; $\mathbf{v} = \tilde{d} \mathbf{r} / dt$ — относительная скорость движения центра масс КА, $v = |\mathbf{v}|$; \mathbf{r} — радиус-вектор центра масс КА, $r = |\mathbf{r}|$; μ_E — гравитационный параметр Земли; \mathbf{f}_d — вектор суммарных возмущающих ускорений, действующих на КА; ∇U_B — градиент потенциала гравитационного поля Земли, за исключением потенциала центрального поля; c — баллистический коэффициент КА; ρ_a — плотность атмосферы в точке, задаваемой вектором \mathbf{r} .

Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16, 16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Влияние атмосферы на движение центра масс КА учитывается в виде силы лобового сопротивления с нулевым углом атаки. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели, изложенной в ГОСТ Р 25645.166–2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент КА считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения КА имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{d} \mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_a, \quad \mathbf{K} = \hat{I} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}, \quad \frac{\tilde{d} \mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = -\mathbf{M}_c, \\ \frac{\tilde{d} \mathbf{b}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_1 = \boldsymbol{\omega}_E \mathbf{b}_2, \quad \frac{\tilde{d} \mathbf{b}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_2 = -\boldsymbol{\omega}_E \mathbf{b}_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь символом \tilde{d}/dt обозначена локальная производная вектора в системе $Oy_1y_2y_3$; $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)^T$ — кинетический момента КА в его движении относительно центра масс; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — абсолютная угловая скорость КА; $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции КА; $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$ — гиростатический момент КА (собственный кинетический момент гиросистемы); \mathbf{M}_g — гравитационный момент, действующий на КА; \mathbf{M}_a — аэродинамический момент, действующий на КА; \mathbf{M}_c — момент, действующий со стороны гиросистемы на корпус КА; $\omega_E = |\boldsymbol{\omega}_E|$ — угловая скорость вращения Земли; \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 — первая и вторая строки матрицы перехода B соответственно, третья строка этой матрицы $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$. Строки \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 связаны условиями ортогональности матрицы B (\mathbf{b}_i — орты осей $O_E Y_i$), которые учитываются при задании начальных условий для этих переменных.

Гравитационный момент задается формулой [5]

$$\mathbf{M}_g = 3 \frac{\mu_E}{r^5} (\mathbf{r} \times \hat{I} \mathbf{r}).$$

Формула аэродинамического момента имеет вид

$$\mathbf{M}_a = p(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1), \quad p = \rho_a \left(\pi R_c^2 y_c |v_1| + S_b y_b |v_2| + 2R_c L_c y_c \sqrt{v_2^2 + v_3^2} \right), \quad (2)$$

где v_i — компоненты вектора \mathbf{v} , $i = 1, 2, 3$.

При выводе формулы (2) считалось, что молекулы атмосферы при столкновении с корпусом КА испытывают абсолютно неупругий удар [5], и не учитывалось взаимное затенение корпуса КА и солнечных батарей от набегающего аэродинамического потока. Такое упрощение оправданно, поскольку для большинства движений КА относительная продолжительность отрезков времени, на которых указанное затенение существенно, невелика.

Для того чтобы замкнуть подсистему уравнений вращательного движения, надо добавить к уравнениям (1) выражение для \mathbf{M}_c , которое приведено ниже.

В расчетах использовались следующие параметры описанной модели:

параметры КА

$$m = 6440 \text{ кг}; \quad I_1 = 2600 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad I_2 = 11\,100 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_3 = 10\,900 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; R_c = 1,3 \text{ м}; L_c = 5,0 \text{ м}; S_b = 33 \text{ м}^2;$$

$$c = 0,005 \text{ м}^2/\text{кг}; y_b = -1 \text{ м}; y_c = 0,3 \text{ м};$$

параметры модели атмосферы

$$F_{10,7} = F_{81} = 150, A_p = 12.$$

Начальные условия движения центра масс КА задавались в восходящем узле орбиты в момент времени 07:13:07 UTC 21.12.2013. При этом элементы орбиты составляли:

высота в апогее 575,2 км;

высота в перигее 546,8 км;

наклонение 64,87°;

аргумент широты перигея -124,65°;

долгота восходящего узла в гринвичской системе координат 209,70°.

На отрезке времени моделирования движения КА максимальное значение угла ϑ между ортом направления «Земля — Солнце» и плоскостью орбиты КА достигало 88°.

Начальные условия уравнений (1) задавались в тот же момент времени, что и начальные условия орбитального движения КА. Этот момент служил началом отсчета времени — точкой $t = 0$.

Режим солнечной ориентации космического аппарата. Сначала рассмотрим режим трехосной солнечной ориентации КА, в котором Oy_2 неизменно направлена на Солнце, ось Oy_1 лежит в плоскости орбиты, абсолютная угловая скорость КА мала. Пусть \mathbf{s} — орт направления «Земля — Солнце». Орт $\mathbf{n} = (\mathbf{s} \times \mathbf{E}_2) / |\mathbf{s} \times \mathbf{E}_2|$ лежит в плоскости орбиты КА и ортогонален орту \mathbf{s} . Изменение ортов \mathbf{s} и \mathbf{n} в системе $Oy_1y_2y_3$ описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s} = 0, \quad \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = 0.$$

Закон управления гиросистемой $\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_c(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}, \mathbf{n})$, обеспечивающий затухание возмущенного движения КА в окрестности положения $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$ с требуемой скоростью, имеет вид [2]

$$\mathbf{M}_c = \xi^2 \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{s} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}) - 2\xi \hat{I} \hat{W} \boldsymbol{\omega},$$

где ξ — положительный параметр; $\hat{W} = \text{diag}(1, 1, \sqrt{2})$.

Рассмотрим возможность использования закона управления, позволяющего не только обеспечить затухание возмущенного движения КА в окрестности положения $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$ с требуемой скоростью, но и дополнительно ограничить возрастание накапливаемого кинетического

момента гиросистемы. Чтобы не нарушать режим солнечной ориентации КА, накопление кинетического момента гиросистемы будем контролировать только посредством управления углом поворота КА вокруг орта $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$. Закон управления гиросистемой, обеспечивающий поддержание режима солнечной ориентации с заданными выше условиями, имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c &= \xi^2 \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{s} + \mathbf{e}_1 \times \mathbf{n}) - 2\xi \hat{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} - \hat{I}(\chi \boldsymbol{\omega}_2 + f) \mathbf{e}_2; \\ f &= -\frac{3\mu_E}{r^5} \left[-(\kappa_3 - \kappa_1) r_1 r_2 K_1 + \kappa_2 (r_1^2 - r_3^2) K_2 + (\kappa_3 - \kappa_1) r_2 r_3 K_3 \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где χ , κ_i — положительные постоянные; r_i — компоненты вектора \mathbf{r} , $i = 1, 2, 3$.

Полагаем, что закон управления (3) формируется в соответствии с показаниями установленных на КА датчиков ориентации и угловой скорости; значения величин r_i в системе управления можно получить, используя показания датчика центра Земли.

Покажем, что выбранный закон изменения управляющего момента (3) действительно обеспечивает солнечную ориентацию КА и при этом ограничивает накопление кинетического момента гиросистемы. С этой целью вычислим решение системы (1), (3), приняв $\chi = 2\xi$, $\xi = 0,01 \text{ с}^{-1}$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1,0 (\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с})^{-1}$, $\kappa_3 = 3,0 (\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с})^{-1}$. На рис. 2 показаны углы, определяющие положение связанной системы координат относительно системы $O_E Z_1 Z_2 Z_3$ при условии $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$.

Компоненты орта \mathbf{s} в гринвичской системе координат рассчитывались по приближенным формулам [6]. Начальные условия системы (1), (3) в момент времени $t = 0$ задавались следующим образом. В гринвичской системе координат КА занимает положение $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$. Гиростатический момент $\mathbf{H}(0) = 0$, начальные значения компонент угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_i$ задавались с учетом ошибок в их реализации: $\boldsymbol{\omega}_1(0) = \boldsymbol{\omega}_2(0) = \boldsymbol{\omega}_3(0) = 0,01 \text{ }^\circ/\text{с}$. Результаты расчетов движения КА, полученные в рамках принятой модели, приведены на рис. 3–5. Эти результаты представлены как графики зависимостей от времени углов ψ , θ и φ , угла $\sigma = \arccos(\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_2)$ ($\theta = \vartheta$ при $\sigma = 0$, см. рис. 2). На рисунках также представлены графики компонент абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_i$, гиростатического момента КА H_i ($i = 1, 2, 3$) и модуля вектора гиростатического момента $|\mathbf{H}|$.

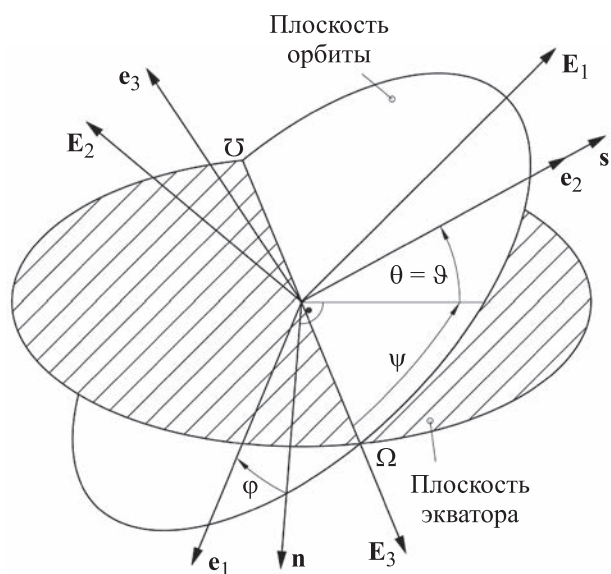


Рис. 2. Схема углов ориентации осей связанной с КА системы координат относительно осей квазиинерциальной системы координат (при $\sigma = 0$)

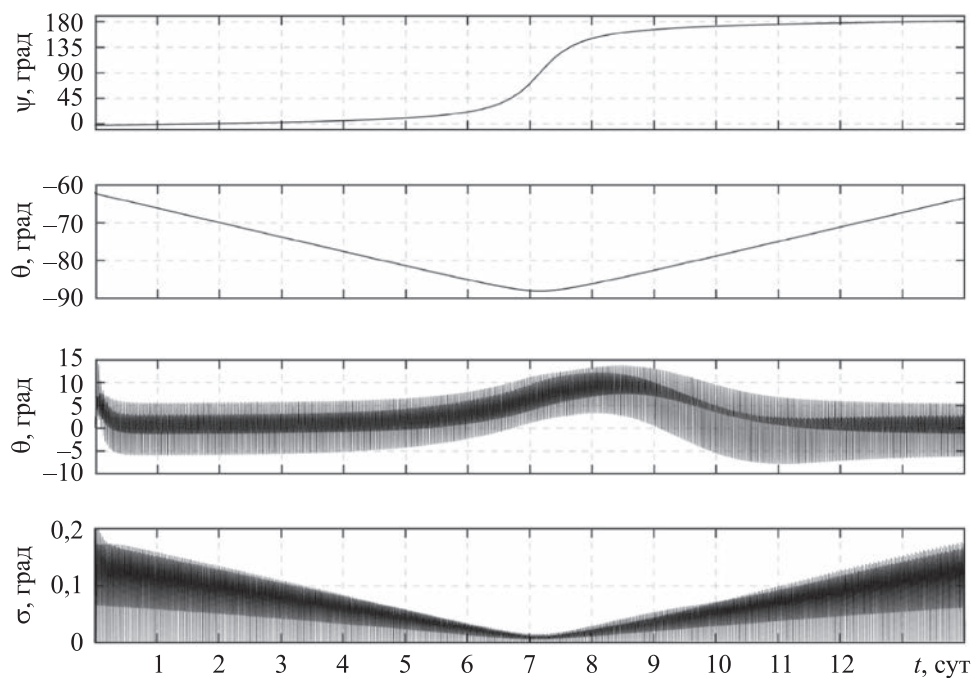


Рис. 3. Углы ориентации КА

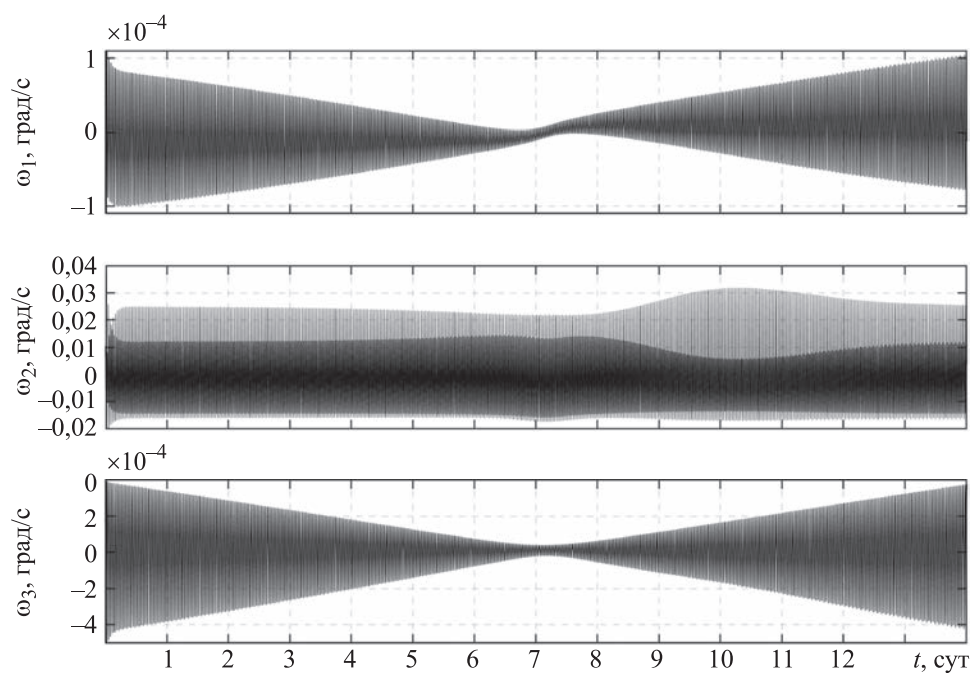


Рис. 4. Компоненты вектора абсолютной угловой скорости КА

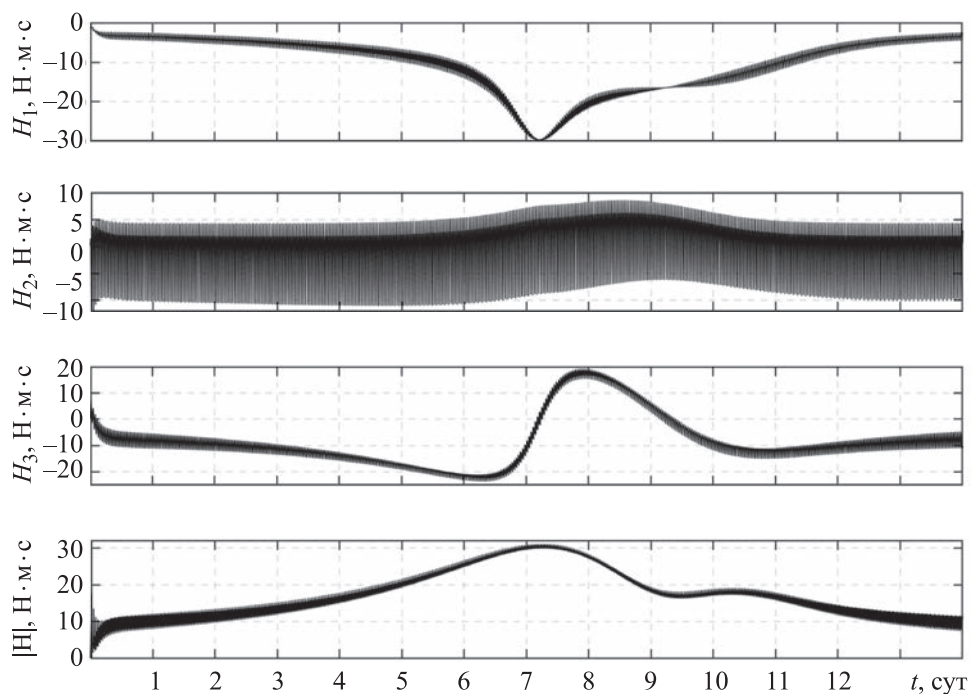


Рис. 5. Компоненты и модуль вектора гиросtatического момента

Все графики на рис. 3–5 построены на интервалах времени 14 суток. Переходной процесс (процесс гашения возмущенного движения КА), обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости, длится менее 20 мин и из-за масштаба на рисунках не виден. Результаты моделирования показывают, что использование закона управления (3) обеспечивает солнечную ориентацию КА и затухание его возмущенного движения в окрестности положения $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}$. Согласно приведенному на рис. 3 графику угла $\sigma(t)$, ошибка солнечной ориентации достаточно мала. На рис. 4, 5 видны установившиеся колебания соответствующих величин ω_i , H_i ($i = 1, 2, 3$) с доминирующей частотой $2\omega_0$ (ω_0 — среднее движение центра масс КА, $\omega_0 \approx 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ для рассматриваемой орбиты). Эти колебания вызваны воздействием гравитационного момента [3]. Поскольку использован закон управления (3), постоянного возрастания (накопления) величины кинетического момента гиросистемы не происходит, значение $|\mathbf{H}|$ остается ограниченным на всем интервале времени моделирования (см. рис. 5). Однако когда Солнце относительно плоскости орбиты поднимается достаточно высоко ($\vartheta > 70^\circ$), значение $|\mathbf{H}|$ начинает возрастать, достигая своего максимума $|\mathbf{H}| \approx 31 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ при $\vartheta \approx 88^\circ$. Это связано с тем, что по мере увеличения угла θ изменение угла поворота φ КА вокруг Oy_2 уже не может остановить накопление $|\mathbf{H}|$ ввиду воздействия гравитационного момента. В дальнейшем, при уменьшении θ , уменьшается и кинетический момент гиросистемы до значений $|\mathbf{H}| < 12 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$.

Таким образом, результаты моделирования подтвердили, что, используя закон управления (3), можно реализовать режим солнечной ориентации КА без постоянного накопления абсолютного значения кинетического момента гиросистемы $|\mathbf{H}|$. В работах [1–3] также показано, что в случаях когда угол $\vartheta < 70^\circ$, величина $|\mathbf{H}|$ не превышает значения $12 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ при использовании закона управления (3). Можно утверждать, что на рис. 5 представлен один из самых неблагоприятных случаев с точки зрения накопления гиростатического момента гиросистемы, когда величина $|\mathbf{H}|$ достигает наибольшего значения для всех возможных положений Солнца относительно рассматриваемой орбиты КА. В данной работе конкретные параметры гиросистемы КА подбираются для случая реализации максимального накопления значения $|\mathbf{H}|$.

Реализация режима солнечной ориентации космического аппарата с помощью системы двигателей-маховиков. Динамические требования к системе управления КА, включающей в свой состав

гиросистему, во многом определяются множеством соответствующих значений кинетического момента H_T . Множество H_T является областью изменения в связанной с КА системе координат вектора суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой. Изменение этого вектора в указанной области в соответствии с реализуемыми в системе законами должно обеспечивать требуемое управление параметрами вращательного движения КА. Естественно, что множество H_T должно содержаться внутри множества максимальных значений кинетического момента H_C , реализуемых гиросистемой.

Таким образом, для всех вариантов построения гиросистемы должно быть обеспечено выполнение условия

$$H_T \subset H_C. \quad (4)$$

При этом можно утверждать, что величина суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой, будет достаточна для обеспечения требуемой угловой скорости вращения КА [7].

В данной работе в качестве гиросистемы, предназначенной для создания управляющих моментов, рассматривается система четырех двигателей-маховиков (ДМ) [7]. Область вариации возможных значений суммарного кинетического момента H_C , создаваемого системой ДМ, зависит от схемы их расположения относительно связанной с КА системы координат и максимального значения кинетического момента, реализуемого каждым из ДМ. Суммарный кинетический момент системы ДМ выражается формулой

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^4 h_k \mathbf{g}_k, \quad (5)$$

где h_k — алгебраическое значение кинетического момента ДМ с номером k ($k = 1, \dots, 4$); \mathbf{g}_k — орт оси вращения ДМ с номером k .

Введем связанную с системой ДМ правую декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, в которой вектор \mathbf{H} представлен своими компонентами H_i ($i = 1, 2, 3$). Рассмотрим область P_4 пространства $R^3(H_1, H_2, H_3)$, заполняемую концами векторов (5), начала векторов помещены в точку O . Здесь и далее считаем, что система состоит из одинаковых ДМ. В этом случае

$$-h_{\max} \leq h_k \leq h_{\max},$$

где h_{\max} — абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного ДМ. В данном случае принято значение $h_{\max} = 18 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$.

Оси вращения ДМ расположены параллельно боковым ребрам четырехугольной пирамиды. Высота пирамиды параллельна оси Ox_1 , линии пересечения граней пирамиды с плоскостью Ox_2x_3 параллельны или перпендикулярны осям Ox_2 , Ox_3 (рис. 6).

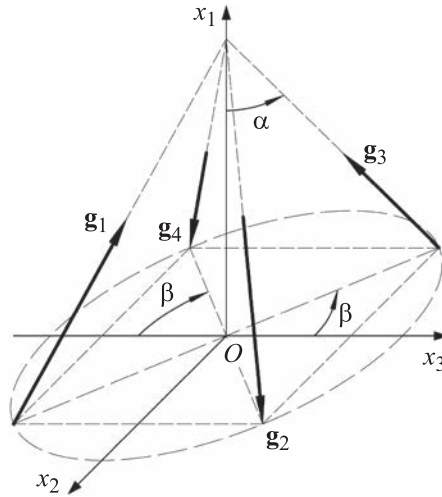


Рис. 6. Схема расположения ортов осей вращения ДМ

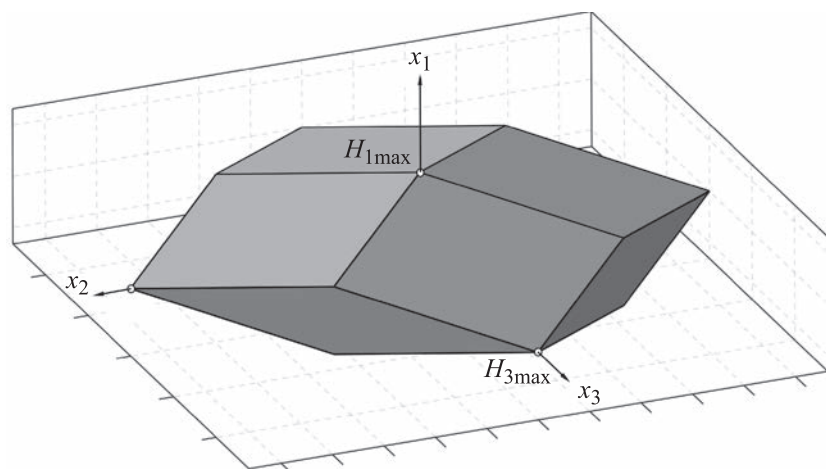
В системе $Ox_1x_2x_3$ орты \mathbf{g}_k ($k=1, \dots, 4$) имеют компоненты:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (d_1, -d_2, d_3)^T; \quad \mathbf{g}_2 = (-d_1, d_2, d_3)^T; \\ \mathbf{g}_3 &= (d_1, d_2, -d_3)^T; \quad \mathbf{g}_4 = (-d_1, -d_2, -d_3)^T, \end{aligned}$$

где $d_1 = \cos \alpha$, $d_2 = \sin \alpha \sin \beta$, $d_3 = \sin \alpha \cos \beta$, α — угол между осью Ox_1 и каждым из ортов \mathbf{g}_k , β — угол между осью Ox_3 и проекцией каждого из ортов \mathbf{g}_k на плоскость Ox_2x_3 . Углы α и β — параметры системы. Полагаем, что $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$. Основание пирамиды, лежащее в плоскости Ox_2x_3 , представляет собой прямоугольник, а в случае $\beta = \pi/2$ — квадрат. Скалярная запись векторного выражения (5) в системе $Ox_1x_2x_3$ имеет вид

$$\begin{aligned} H_1 &= (h_1 - h_2 + h_3 - h_4)d_1; \\ H_2 &= (-h_1 + h_2 + h_3 - h_4)d_2; \\ H_3 &= (h_1 + h_2 - h_3 - h_4)d_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Область пространства, заполняемая концами векторов \mathbf{H} , представляет собой выпуклый многогранник P_4 (рис. 7).

Рис. 7. Общий вид многогранника P_4

Все необходимые при построении P_4 соотношения для координат вершин, а также параметризация граней приведены в [7]. На рис. 7 обозначены вершины многогранника P_4 , в которых реализуются значения $H_{i \max}$ — максимальные абсолютные значения кинетического момента создаваемые системой ДМ по каждой из осей Ox_i ($i = 1, 2, 3$). Для системы четырех ДМ, расположенных по схеме «четырёхугольная пирамида», значения $H_{i \max}$ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} H_{1 \max} &= 4h_{\max} \cos \alpha; \\ H_{2 \max} &= 4h_{\max} \sin \alpha \sin \beta; \\ H_{3 \max} &= 4h_{\max} \sin \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (7)$$

Расположение двигателей-маховиков на космическом аппарате. Множество H_T в данном случае задается множеством значений гиростатического момента \mathbf{H} системы ДМ, реализуемого в процессе поддержания режима солнечной ориентации КА (см. рис. 5). На рис. 8 представлен годограф вектора \mathbf{H} (кривые линии черного цвета), а также показана аппроксимация области его вариации частью прямого эллиптического цилиндра.

Проверить выполнение условия (4) можно путем сравнения области вариации H_T и многогранника P_4 , для чего их необходимо построить в одной системе координат и едином масштабе. Как видно на рис. 5, максимальное значение $|H_2|$ примерно в 2,5 раза меньше,

чем максимальное значение $|H_3|$, и примерно в 3 раза меньше, чем максимальное значение $|H_1|$. Исходя из этих соотношений между размерами области вариации вектора \mathbf{H} , наиболее рационально будет расположить систему ДМ таким образом, чтобы вершина «пирамиды» находилась на оси Oy_2 . Совместим начала систем координат $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ в центре масс КА (начало системы $Ox_1x_2x_3$ можно расположить в любом месте, важно лишь угловое положение осей Ox_i относительно осей Oy_i), и расположим ось Ox_1 вдоль оси Oy_2 , а ось Ox_3 вдоль оси Oy_3 . Зная значение h_{\max} , для построения многогранника P_4 остается только выбрать значения параметров α и β системы ДМ, используя разные критерии, из которых самый очевидный — максимальный объем многогранника P_4 .

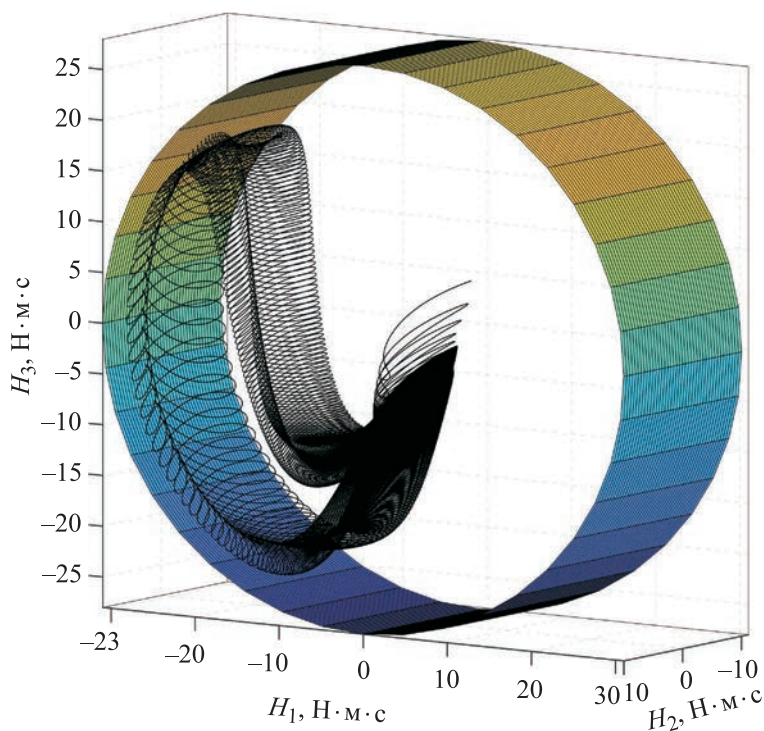


Рис. 8. Годограф \mathbf{H} и аппроксимирующий цилиндр

Рассмотрим все возможные расстояния от каждой из граней P_4 до точки O . Эти расстояния, по сути, представляют собой абсолютные значения кинетического момента, реализуемого системой ДМ в направлении, перпендикулярном соответствующей грани. Для схемы ДМ «четырёхугольная пирамида» все грани многогранника P_4

можно условно подразделить на три группы (I, II, III) с учетом их удаленности от геометрического центра многогранника. Соответствующие значения H_I , H_{II} , H_{III} кинетического момента, реализуемого системой ДМ в направлении от точки O по нормали к какой-либо грани, принадлежащей своей группе, можно вычислить по одной из следующих формул:

$$H_I = \frac{2h_{\max} \sin 2\alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}};$$

$$H_{II} = \frac{2h_{\max} \sin 2\alpha \cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}};$$

$$H_{III} = 2h_{\max} \sin \alpha \sin 2\beta.$$

Наименьшее из значений H_I , H_{II} , H_{III} соответствует максимальному радиусу сферы, полностью вписанной в многогранник P_4 . На рис. 9 представлены три поверхности: $\tilde{H}_I(\alpha, \beta) = H_I / h_{\max}$ (показана красным цветом), $\tilde{H}_{II}(\alpha, \beta) = H_{II} / h_{\max}$ (показана фиолетовым цветом) и $\tilde{H}_{III}(\alpha, \beta) = H_{III} / h_{\max}$ (показана зеленым цветом). Поверхности имеют одну точку пересечения, соответствующую значениям углов $\alpha = \arctg(\sqrt{2}) \approx 54,7^\circ$ и $\beta = 45^\circ$ (рис. 10), при которых максимальный радиус сферы, полностью вписанной в многогранник P_4 , а также объем P_4 будут иметь наибольшее значение, равное $H_I = H_{II} = H_{III} = 4h_{\max} / \sqrt{6}$.

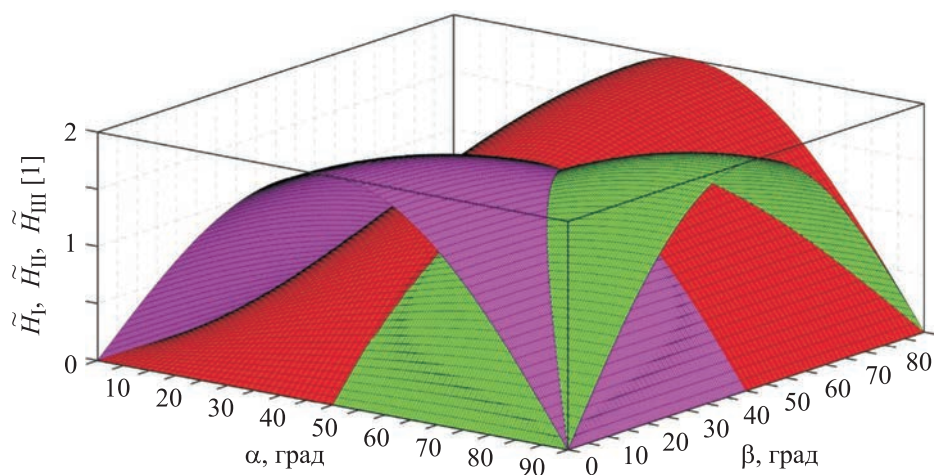


Рис. 9. Пересечение поверхностей $\tilde{H}_I(\alpha, \beta)$, $\tilde{H}_{II}(\alpha, \beta)$, $\tilde{H}_{III}(\alpha, \beta)$

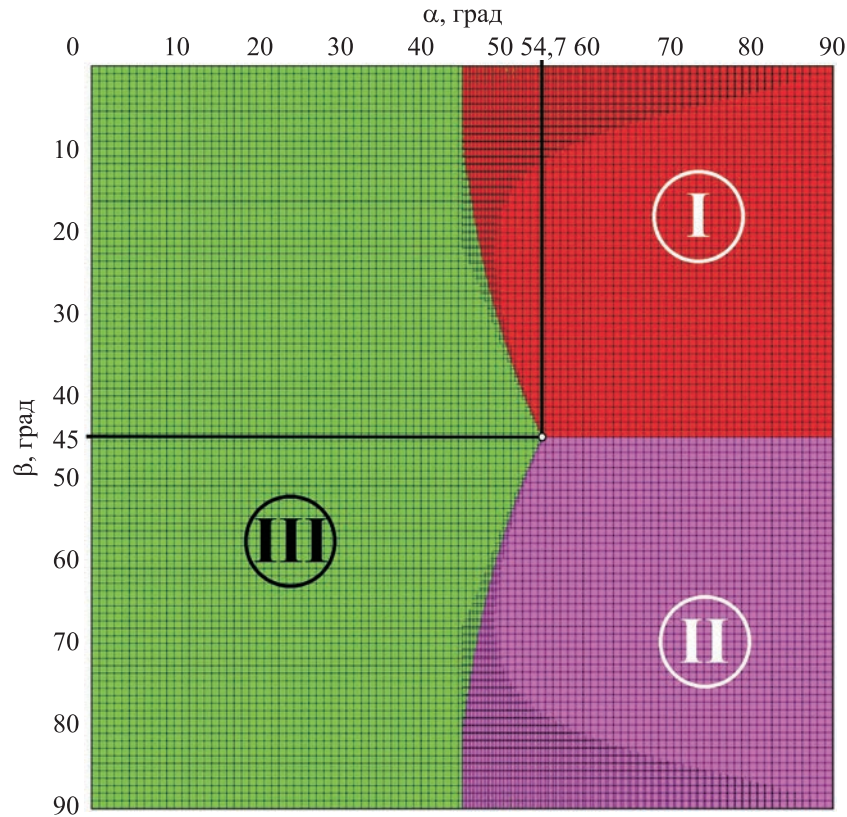


Рис. 10. Вид снизу на пересечение поверхностей $\tilde{H}_I(\alpha, \beta)$, $\tilde{H}_{II}(\alpha, \beta)$, $\tilde{H}_{III}(\alpha, \beta)$

Еще один из способов выбора значения углов α и β — размещение аппроксимирующего цилиндра, изображенного на рис. 8, внутри многогранника P_4 таким образом, чтобы кратчайшие расстояния δ_I , δ_{II} , δ_{III} от поверхности цилиндра до каждой из трех групп граней, образующих P_4 , были равны между собой. Взаимное расположение проекций цилиндра и граней многогранника на координатные плоскости систем $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ схематично показано на рис. 11.

Значения δ_I , δ_{II} , δ_{III} вычисляются по формулам:

$$\delta_I = \frac{d_2L_1 + d_1L_2 - 4h_{\max}d_1d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}};$$

$$\delta_{II} = \frac{d_3L_1 + d_1L_3 - 4h_{\max}d_1d_3}{\sqrt{d_1^2 + d_3^2}};$$

$$\delta_{III} = \frac{d_3 \tilde{L}_2 + d_2 \tilde{L}_3 - 4h_{\max} d_2 d_3}{\sqrt{d_2^2 + d_3^2}};$$

$$\tilde{L}_2 = \frac{d_3 L_2^2}{\sqrt{d_3^2 L_2^2 + d_2^2 L_3^2}};$$

$$\tilde{L}_3 = \frac{d_2 L_3^2}{\sqrt{d_3^2 L_2^2 + d_2^2 L_3^2}}.$$

Здесь $L_1 = 10$ Н·м·с — половина высоты цилиндра; $L_2 = 31$ Н·м·с и $L_3 = 28$ Н·м·с — значения полуосей эллипса, образованного пересечением цилиндра с плоскостью Ox_2x_3 (Oy_1y_3); \tilde{L}_2 и \tilde{L}_3 — координаты точки соприкосновения эллипса с касательной, параллельной прямой, образованной пересечением грани многогранника и плоскостью Ox_2x_3 (Oy_1y_3).

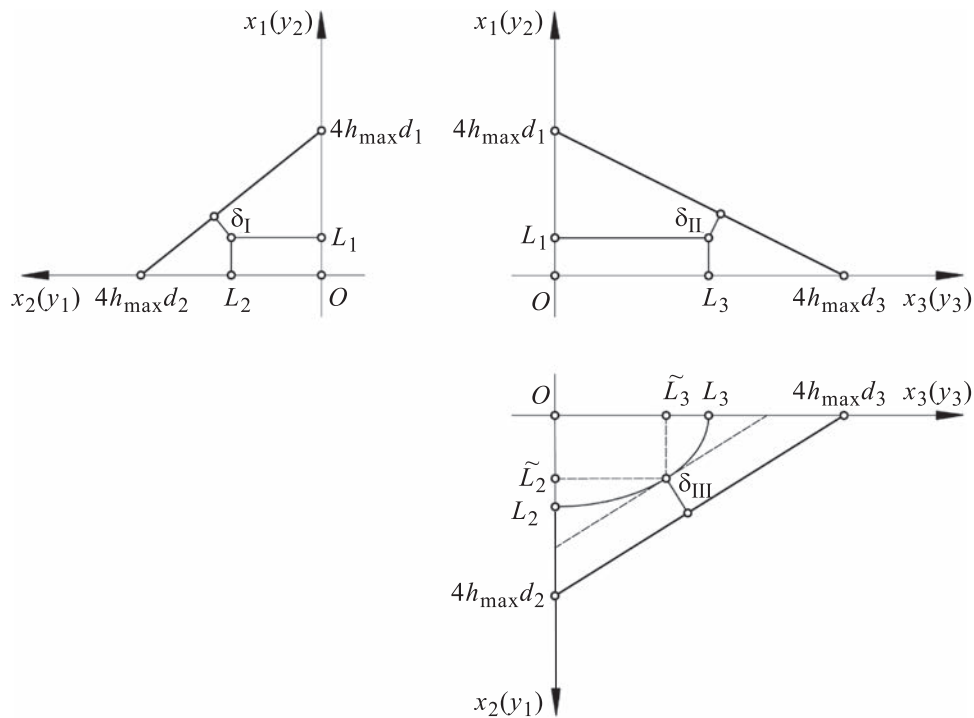


Рис. 11. Проекция цилиндра и граней многогранника на координатные плоскости систем $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$

При выполнении условий

$$\frac{L_1}{4d_1} + \frac{L_2}{4d_2} < h_{\max};$$

$$\frac{L_1}{4d_1} + \frac{L_3}{4d_3} < h_{\max};$$

$$\frac{\tilde{L}_2}{4d_2} + \frac{\tilde{L}_3}{4d_3} < h_{\max}$$

аппроксимирующий цилиндр будет находиться внутри многогранника P_4 . Значения углов α и β можно найти из условия $\delta_I = \delta_{II} = \delta_{III}$, построив три поверхности $\delta_I(\alpha, \beta)$, $\delta_{II}(\alpha, \beta)$, $\delta_{III}(\alpha, \beta)$ и найдя точку их пересечения. Можно также воспользоваться уравнением $\text{tg}(\beta) = L_2/L_3$ для вычисления значения угла β .

Для приведенных выше значений L_1 , L_2 , L_3 угол $\beta = 48^\circ$. Зная угол β , значение угла α можно найти как точку пересечения трех кривых $\delta_I(\alpha)$, $\delta_{II}(\alpha)$, $\delta_{III}(\alpha)$, приведенных на рис. 12. На графиках кривая $\delta_I(\alpha)$ показана черным, $\delta_{II}(\alpha)$ — красным, $\delta_{III}(\alpha)$ — зеленым цветом. По данным на рис. 12 принято значение угла $\alpha = 60^\circ$.

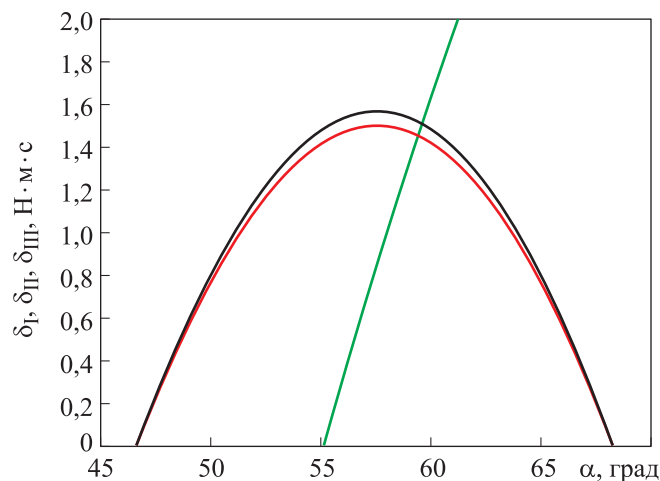


Рис. 12. Графики кривых $\delta_I(\alpha)$ (—), $\delta_{II}(\alpha)$ (—), $\delta_{III}(\alpha)$ (—) при $\beta = 48^\circ$

Взаимное расположение проекций годографа \mathbf{H} , аппроксимирующего цилиндра и двух вариантов многогранника P_4 приведено на рис. 13. Красным цветом показаны проекции многогранника

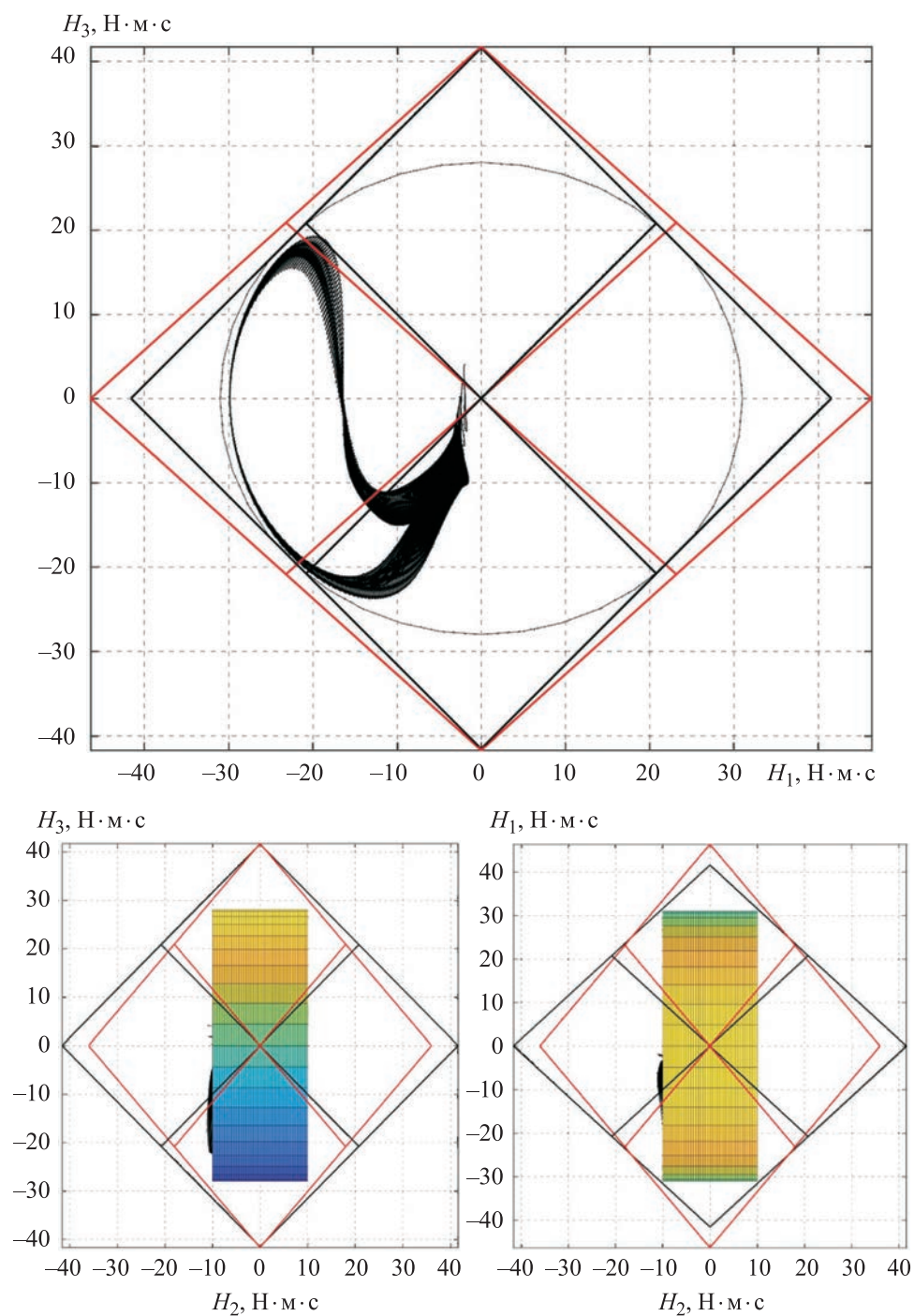


Рис. 13. Проекция годографа H , аппроксимирующего цилиндра и двух вариантов многогранника P_4

при значении углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 48^\circ$, черным — при значении углов $\alpha = 54,7^\circ$ и $\beta = 45^\circ$. На рис. 13 видно, что при значениях углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 48^\circ$ грани многогранника P_4 располагаются на большем расстоянии от поверхности цилиндра, чем в случае $\alpha = 54,7^\circ$ и $\beta = 45^\circ$.

Собственный кинетический момент двигателей-маховиков при реализации режима солнечной ориентации космического аппарата. Выбрав значения углов α и β , проверим возможность системы ДМ реализовать рассматриваемый режим солнечной ориентации КА, т. е. на всем заданном интервале времени движения КА должно выполняться условие $|h_k| < h_{\max}$ ($k = 1, \dots, 4$). Для этого подсистему уравнений вращательного движения КА (1), (3) необходимо дополнить уравнениями, описывающими изменение собственного кинетического момента каждого из ДМ системы. Матрицу перехода от $Ox_1x_2x_3$ к $Oy_1y_2y_3$ обозначим U ,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем орты \mathbf{g}_k ($k = 1, \dots, 4$) осей вращения маховиков в виде матрицы $D = \|\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\|$, тогда выражение (5) можно представить как

$$\mathbf{H} = U D \mathbf{G}, \quad (8)$$

где D — прямоугольная матрица размерности 3×4 , $\mathbf{G} = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$. Соотношение (8) нельзя единственным образом разрешить относительно величин h_k ($k = 1, \dots, 4$). Для достижения единственности потребуем, чтобы решение системы (8) относительно h_k имело минимальную евклидову норму

$$l_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^4 h_k^2}.$$

Тогда

$$\mathbf{G} = D^+ U^T \mathbf{H}, \quad (9)$$

где $D^+ = D^T (D D^T)^{-1}$ — матрица, псевдообратная для матрицы D [8]. Матрица D^+ существует при условии, что в системе есть любые три ДМ, у которых орты \mathbf{g}_k ($k = 1, \dots, 4$) осей вращения линейно незави-

симы. Для схемы ДМ «четырёхугольная пирамида» (см. рис. 6) матрицы D и D^+ можно представить в виде

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & -d_1 & d_1 & -d_1 \\ -d_2 & d_2 & d_2 & -d_2 \\ d_3 & d_3 & -d_3 & -d_3 \end{pmatrix};$$

$$D^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} d_1^{-1} & -d_2^{-1} & d_3^{-1} \\ -d_1^{-1} & d_2^{-1} & d_3^{-1} \\ d_1^{-1} & d_2^{-1} & -d_3^{-1} \\ -d_1^{-1} & -d_2^{-1} & -d_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

Графики зависимости от времени собственных кинетических моментов h_k ($k = 1, \dots, 4$) каждого из ДМ, полученные в результате численного моделирования движения КА в рамках приведенной выше модели, с учетом соотношений (8), (9), при значениях углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 48^\circ$ показаны на рис. 14. Как и на рис. 3–5, представленные

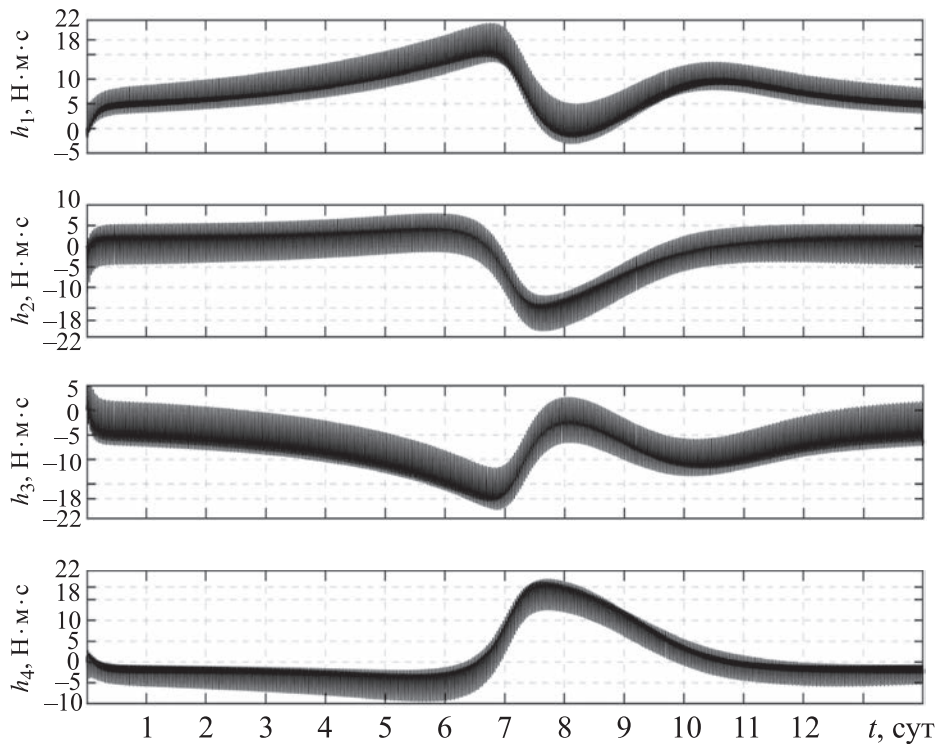


Рис. 14. Собственные кинетические моменты каждого ДМ системы (с использованием нормы l_2)

на рис. 14 графики построены на интервалах времени 14 суток. Переходной процесс (процесс гашения возмущенного движения КА), обусловленный ошибками в задании начальной угловой скорости, длится менее 20 мин и из-за масштаба на рисунках не виден.

По данным на рис. 14 видно, что на интервале времени с 6-х по 8-е сутки полета КА величины h_k ($k = 1, \dots, 4$) превышают максимально допустимое значение $h_{\max} = 18$ Н·м·с. Это вызвано наличием колебаний составляющих вектора гиростатического момента КА (см. рис. 5). Ограничить колебания величин h_k ($k = 1, \dots, 4$) можно, если использовать другое условие достижения единственности при решении системы (8) относительно h_k .

Применение метода минимальной нормы l_∞ . Еще одним из способов достижения единственности решения системы (8) относительно h_k ($k = 1, \dots, 4$) является требование минимума нормы:

$$l_\infty = \max_{1 \leq k \leq 4} |h_k|.$$

В случае применения метода минимальной нормы l_∞ система ДМ наиболее эффективно использует весь возможный объем области H_C создаваемого кинетического момента. В общем случае указанный метод представлен в виде некоторых алгоритмов поиска решения, примеры их реализации приведены в работах [9–11]. Однако когда гиросистема состоит из четырех ДМ, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам симметричной пирамиды (см. рис. 6), решение системы (8) с помощью метода минимальной нормы l_∞ можно представить в виде [10]

$$\mathbf{G} = D^+U^T\mathbf{H} + h_0\tilde{\mathbf{G}}; \quad h_0 = -\frac{\min(D^+U^T\mathbf{H}) + \max(D^+U^T\mathbf{H})}{2}. \quad (10)$$

Здесь символами $\min(\cdot)$ и $\max(\cdot)$ обозначены компоненты вектора, имеющие минимальное и максимальное значения соответственно; $\tilde{\mathbf{G}}$ — вектор ядра [12] матрицы UD , удовлетворяющий условию $UD\tilde{\mathbf{G}} = (0, 0, 0)^T$. Для рассматриваемой схемы расположения ДМ ядро матрицы UD состоит из единственного (помимо нулевого) базисного вектора $\tilde{\mathbf{G}} = (1, 1, 1, 1)^T$.

Представленные на рис. 15 графики аналогичны тем, которые приведены на рис. 14. Они получены в результате численного моделирования движения КА с учетом соотношений (8), (10) и также построены на интервалах времени 14 суток при значениях углов $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 48^\circ$.

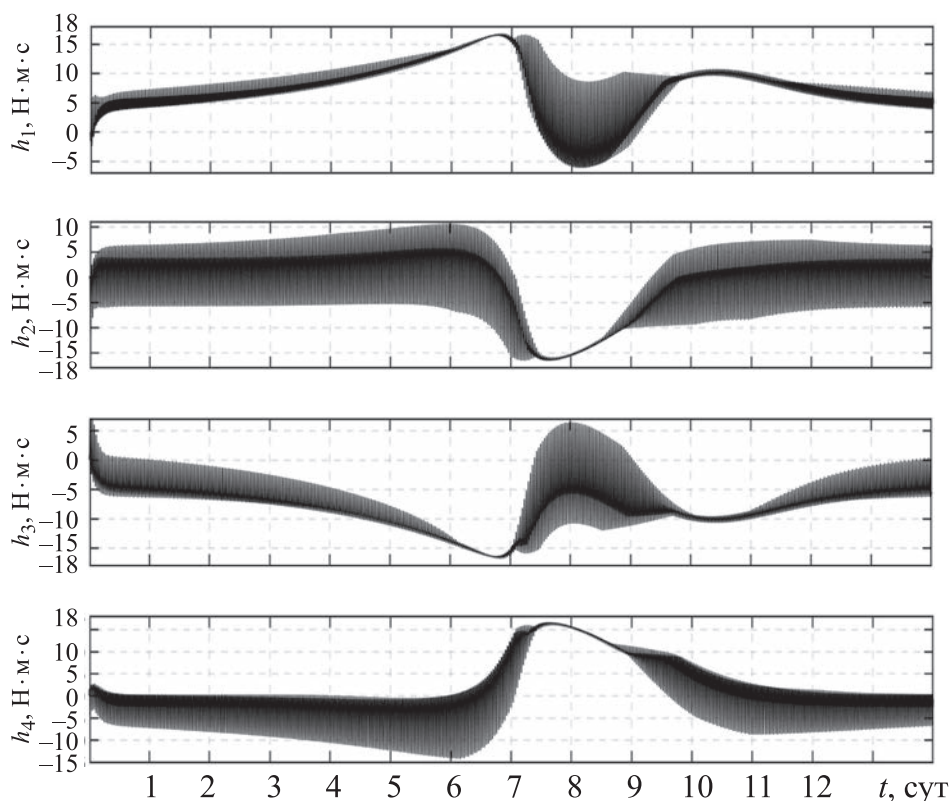


Рис. 15. Собственные кинетические моменты каждого ДМ системы (с использованием нормы l_∞)

Результаты моделирования показали, что использование метода минимальной нормы l_∞ при решении системы (8) позволяет выполнить условие $|h_k| < h_{\max}$ ($k=1, \dots, 4$) в процессе реализации рассматриваемого режима солнечной ориентации КА на всем интервале времени моделирования.

Заключение. В работе показано, что с помощью системы ДМ, расположенных по схеме «четырёхугольная пирамида», можно реализовать режим солнечной ориентации КА без проведения разгрузок кинетического момента. Предложенный способ сравнения областей требуемого и реализуемого кинетического момента позволяет выбрать необходимые значения геометрических параметров схемы расположения ДМ. Полученные результаты численного моделирования системы уравнений движения КА подтверждают правильность выбранных значений геометрических параметров, обеспечивающих реализацию режима солнечной ориентации КА.

Полученные в работе результаты могут быть использованы на этапе предварительного проектирования систем управления ориентацией КА, использующих в качестве исполнительных органов ДМ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Игнатов А.И., Сазонов В.В. Оценка низкочастотных микроускорений на борту ИСЗ в режиме одноосной солнечной ориентации. *Космические исследования*, 2013, т. 51, № 5, с. 380–388.
- [2] Игнатов А.И. Стабилизация режима солнечной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы. *Известия РАН. ТУСУ*, 2020, № 3, с. 164–176.
- [3] Игнатов А.И. Оценка низкочастотных микроускорений на борту искусственного спутника Земли в режиме солнечной ориентации. *Космические исследования*, 2022, т. 60, № 1, с. 1–14.
- [4] Бажинов И.К., Гаврилов В.П., Ястребов В.Д. и др. *Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6» — «Союз» — «Прогресс»*. Москва, Наука, 1985.
- [5] Белецкий В.В. *Движение искусственного КА относительно центра масс*. Москва, Наука, 1965.
- [6] Меес Ж. *Астрономические формулы для калькуляторов*. Москва, Мир, 1988.
- [7] Игнатов А.И. Выбор геометрических параметров расположения системы двигателей-маховиков при управлении вращательным движением космического аппарата. *Известия РАН. ТУСУ*, 2022, № 1, с. 124–144.
- [8] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. Москва, Наука. Главная редакция физ.-мат. лит.-ры, 1988.
- [9] Markley F.L., Reynolds R.G., Liu F.X. Maximum torque and momentum envelopes for reaction-wheel arrays. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, vol. 33, no. 5, pp. 1606–1614.
- [10] Yoon H., Seo H.H., Choi H.-T. Optimal uses of reaction wheels in the pyramid configuration using a new minimum infinity-norm solution. *Aerospace Science and Technology*, 2014, vol. 39, pp. 109–119.
- [11] Yoon H., Seo H.H., Park Y.-W., Choi H.-T. A new minimum infinity-norm solution: with application to capacity analysis of spacecraft reaction wheels. *American Control Conference (ACC)*, 2015, pp. 1241–1245.
- [12] Стренг Г. *Линейная алгебра и ее применения*. Москва, Мир, 1980.

Статья поступила в редакцию 31.08.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Игнатов А.И., Иванов Г.А., Коломиец Е.С., Мартыненко Е.В. Использование системы двигателей-маховиков при реализации режима солнечной ориентации космического аппарата. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2022, вып. 10. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-10-2219>

Игнатов Александр Иванович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: управление вращательным движением космических аппаратов. e-mail: general_z@mail.ru

Иванов Георгий Алексеевич — студент кафедры «Динамика полета ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Коломиец Ева Сергеевна — студентка кафедры «Динамика полета ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Мартыненко Екатерина Вадимовна — студентка кафедры «Динамика полета ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Using the flywheel engines system in implementing the spacecraft solar orientation mode

© A.I. Ignatov, G.A. Ivanov, E.S. Kolomiets, E.V. Martynenkova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The study is devoted to maintaining the solar orientation mode of the gyrostat spacecraft in the low earth orbit through a long period. The device shape is close to a cylinder with two fixed solar panels installed along the cylinder longitudinal axis symmetrically relative to it. In the solar orientation mode, the normal to the device solar arrays plane is invariably directed towards the Sun and the longitudinal axis oscillates relative to the orbit plane. To implement the specified spacecraft motion mode, a system of four flywheel engines is used, which rotation axes are directed in parallel to the side edges of the quadrangular pyramid. Position of the pyramid side edges relative to the coordinate system rigidly connected to the device is determined by two angles, which are the parameters of the flywheel engine system. The law of the gyrostatic moment control is considered ensuring attenuation of the perturbed spacecraft motion in the vicinity of its solar orientation and limiting accumulation of its intrinsic kinetic moment of the flywheel engines by controlling the device rotation angle around the normal to the light-sensitive side of the solar arrays. It is demonstrated that selection of certain parameters of the flywheel engines coordinate system would assist in implementing the solar orientation mode without unloading the gyrostatic moment during the entire flight time. Results of numerical simulation of the complete system of the spacecraft motion equations in its solar orientation mode are presented taking into account the influence of gravitational and aerodynamic moments, which confirms correctness of the selected parameter values.

Keywords: *gyrostat spacecraft, flywheel engine, solar orientation, gravitational moment, aerodynamic moment*

REFERENCES

- [1] Ignatov A.I., Sazonov V.V. Otsenka nizkochastotnykh mikrouskoreniy na bortu ISZ v rezhime odnoosnoy solnechnoy orientatsii [Evaluation of low-frequency microaccelerations on board a satellite in the monoaxial solar orientation mode]. *Kosmicheskiye issledovaniya — Cosmic Research*, 2013, vol. 51, no. 5, pp. 342–349.
- [2] Ignatov A.I. Stabilizatsiya rezhima solnechnoy orientatsii sputnika Zemli bez nakopleniya kineticheskogo momenta girusistemy [Stabilization of the satellite solar orientation mode without accumulation of the gyro system kinetic moment]. *Izvestiya RAN. TiSU — Bulletin of the RAS. Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2020, no. 3, pp. 164–176.
- [3] Ignatov A.I. Otsenka nizkochastotnykh mikrouskoreniy na bortu ISZ v rezhime solnechnoy orientatsii [Evaluation of low-frequency microaccelerations on board a satellite in the solar orientation mode]. *Kosmicheskiye issledovaniya — Cosmic Research*, 2022, vol. 60, no. 1, pp. 1–14.
- [4] Bazhinov I.K., Gavrilov V.P., Yastrebov V.D., et al. Navigatsionnoye obespechenie poleta orbitalnogo kompleksa “Salyut-6” — “Soyuz” — “Progress” [Navigation support in the flight of the “Salyut-6” – “Soyuz” – “Progress” orbital system]. Moscow, Nauka Publ., 1985.
- [5] Beletsky V.V. *Dvizhenie iskusstvennogo KA otноситelno tsentra mass* [Artificial spacecraft motion relative to the center of mass]. Moscow, Nauka Publ., 1965.

- [6] Meeus J. *Astronomical Formulae for Calculators*. Enlarged 2nd edition. Willmann-Bell Publ., 1982 [In Russ.: Meeus J. *Astronomicheskie formuly dlya kalkulyatorov*. Moscow, Mir Publ., 1988].
- [7] Ignatov A.I. Vybór geometricheskikh parametrov raspólozheniya sistemy dvigateley-makhovikov pri upravlenii vraschatelnym dvizheniem kosmicheskogo apparata [Selection of geometric parameters of the flywheel engine system position in controlling the spacecraft angular motion]. *Izvestiya RAN, TiSU — Bulletin of the RAS, Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2022, vol. 61, no. 1, pp. 83–103.
- [8] Gantmacher Felix. R. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka Publ., Chief editorial board of physical and mathematical literature, 1988.
- [9] Markley F.L., Reynolds R.G., Liu F.X. Maximum torque and momentum envelopes for reaction-wheel arrays. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, vol. 33, no. 5, pp. 1606–1614.
- [10] Yoon H., Seo H.H., Choi H.-T. Optimal uses of reaction wheels in the pyramid configuration using a new minimum infinity-norm solution. *Aerospace Science and Technology*, 2014, vol. 39, pp. 109–119.
- [11] Yoon H., Seo H.H., Park Y.-W., Choi H.-T. A new minimum infinity-norm solution: with application to capacity analysis of spacecraft reaction wheels. *American Control Conference (ACC)*, 2015, pp. 1241–1245.
- [12] Strang G. *Lineynaya algebra i ee primeneniya* [Linear algebra and its application]. Moscow, Mir Publ., 1980.

Ignatov A.I., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assistant Professor, Department of Theoretical Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. Field of scientific interests: spacecraft's angular motion control. e-mail: general_z@mail.ru

Ivanov G.A., Student, Department of Flight Dynamics of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University.

Kolomiets E.S., Student, Department of Flight Dynamics of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University.

Martynenkova E.V., Student, Department of Flight Dynamics of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University.