

Методы и алгоритмы решения задачи выбора граничных точек районов базирования летательных аппаратов

© Г.В. Казаков, О.С. Терентьев

ФГБУ «4 ЦНИИ» Минобороны России,
г. Королев, Московская обл., 141091, Россия

Рассмотрен комплекс методик и алгоритмов, позволяющий определить геодезические координаты вершин выпуклого многоугольника (с количеством вершин, не превышающим заданного), ограничивающего исходное множество точек с известными геодезическими координатами. Представлены разработанные в ходе решения задачи: алгоритм определения геодезических координат вершин многоугольника, предложения по совершенствованию методики построения границ области расположения точек районов базирования летательных аппаратов, алгоритмы определения множества точек, являющихся вершинами выпуклого многоугольника, ограничивающего исходное множество точек, алгоритм сокращения количества вершин выпуклого многоугольника, методика селекции точек по направлению, методика селекции точек по дальности, методика определения величины угла при вершине многоугольника, методика определения геодезических координат вершин многоугольника, не принадлежащих исходному множеству точек. Для эффективного решения поставленной задачи рассмотрено несколько различных алгоритмов (например, алгоритм Джарвиса и алгоритм Грэхема). Использование этих алгоритмов и приведенных методик позволяет определить геодезические координаты вершин выпуклого многоугольника (при условии, что их количество не превышает заданного), ограничивающего исходное множество точек с известными геодезическими координатами, повышает обоснованность и точность определения геодезических координат граничных точек районов базирования летательных аппаратов.

Ключевые слова: алгоритм Грэхема, алгоритм Джарвиса, выпуклый многоугольник, летательный аппарат, район базирования, сферические координаты, эллипсоид Красовского

Введение. Подготовка районов базирования всегда рассматривалась как составная часть подготовки взлета и посадки летательных аппаратов (ЛА). Объем и содержание подготовки таких районов не являются постоянными, так как зависят от развития ЛА, характера и способов их эксплуатации. Основой подготовки районов можно считать создание инфраструктуры, обеспечивающей необходимые условия для эксплуатации летательных аппаратов и наиболее полной реализации их конструктивных возможностей. При этом одной из решаемых задач является определение формы и координат района базирования ЛА.

Приоритетные направления развития оборонной инфраструктуры, в том числе районов базирования, представлены в [1], однако там

не приведены алгоритмы их назначения. В статьях [2, 3] рассмотрены методы математического моделирования, причем особое внимание при этом уделяется имитационному моделированию. В статье [4] изложена методика выбора оптимальных мест базирования мобильных пунктов технического осмотра с использованием методов линейного математического программирования.

Применение геоинформационных систем и цифровых карт местности представлено в [5–8]. Описание информационной технологии для распознавания в автоматизированном режиме объектов на изображениях, которая основана на алгоритме контурного анализа этих изображений, приведено в [5]. Рассмотренная в [6] математическая модель составляющих стереопару изображений связывает координаты точек двух изображений, на которых запечатлен с разных ракурсов рельеф местности с распределением яркостей, вызванных одновременной фоторегистрацией всех точек этого рельефа. Цифровая модель движения на аэродроме, предназначенная для определения допустимых траекторий движения объектов в его пределах, предложена в [7]. Интерпретация космических снимков площадных объектов местности на основе вейвлет-анализа дана в [8].

Алгоритм определения длины и ширины плоских объектов произвольной формы, независимо от их ориентации на снимке, приведен в [9]. Предложен способ ускорения работы алгоритма за счет уменьшения точности вычислений.

Следует отметить, что приведенные выше методы и алгоритмы не помогают ответить на вопрос, как выбрать граничные точки районов базирования летательных аппаратов.

Для эффективного решения поставленной задачи существуют несколько различных алгоритмов, например, алгоритм Джарвиса и алгоритм Грэхема [10, 11]. Отметим, что вычислительная сложность алгоритма Джарвиса пропорциональна величине $(M \cdot N)$ [12], где M — количество точек в выпуклой оболочке, в предельном случае равное N . Вычислительная же сложность алгоритма Грэхема пропорциональна величине $(N \cdot \log(N))$ [12]. Алгоритм Джарвиса более удобен при построении выпуклой оболочки «вручную» на карте либо на схеме вследствие его простоты и наглядности, а алгоритм Грэхема более эффективен при построении выпуклой оболочки программными средствами.

В то же время существующие алгоритмы имеют ряд недостатков:

при построении границ области расположения точек ограничивающего многоугольника необоснованно увеличивается его площадь относительно фактически занимаемой площади, особенно при построении ограничивающего четырехугольника;

алгоритмы не позволяют сократить заданное количество вершин выпуклого многоугольника;

применение алгоритмов Джарвиса и Грэхема требует определения величин ориентированных углов между направлениями на сфере, что снижает точность вычислений;

в процессе формирования множества точек ограничивающего многоугольника с использованием алгоритмов Джарвиса и Грэхема возможна ситуация, когда в направлении поиска очередной вершины многоугольника может быть расположено несколько точек, что снижает эффективность этих алгоритмов;

существующие алгоритмы не позволяют определить геодезические координаты вершин многоугольника, не принадлежащих исходному множеству точек.

Для решения задачи выбора граничных точек районов базирования летательных аппаратов введем следующие обозначения: множество P , состоящее из N точек с известными геодезическими координатами на эллипсоиде Красовского (ЭК) $p_i = \{B_i, L_i, H_i\}$, $i = 1, \dots, N$ (B_i — геодезическая широта, L_i — геодезическая долгота, H_i — геодезическая высота i -й точки множества P), система сферических координат $O_c\phi\lambda$ (рис. 1), начало которой расположено в точке пересечения полярной оси ЭК и нормали к его поверхности, проходящей через среднюю точку области расположения множества P [12–14].

Геодезические координаты средней точки $p_0 = \{B_0, L_0\}$ области расположения множества P определим как

$$B_0 = \frac{B_{\max} + B_{\min}}{2}; \quad L_0 = \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2}, \quad (1)$$

где B_{\max} — широта самой северной точки; B_{\min} — широта самой южной точки; L_{\max} — долгота самой восточной точки; L_{\min} — долгота самой западной точки множества P .

Совместно с системой сферических координат $O_c\phi\lambda$ также будем использовать прямоугольную систему координат O_cxyz , центр которой совпадает с центром сферы, ось O_cx проходит через среднюю точку области расположения множества P (рис. 2). Ось O_cz расположена в плоскости меридиана с долготой $L_0 + \pi$, если $B_0 > 0$, и долготой L_0 , если $B_0 < 0$, вдоль полярной оси ЭК, если $B_0 = 0$.

Ось O_cy дополняет систему O_cxyz до правой.

Цель работы — разработать алгоритмы, позволяющие для заданного множества P определить геодезические координаты вершин G ($g_j = \{B_j, L_j, H_j\}$, $j = 1, \dots, M$) выпуклого M -угольника, ограничивающего область расположения исходного множества точек.

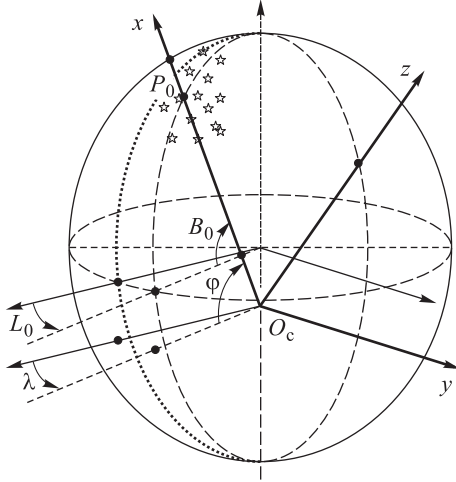


Рис. 1. Система сферических координат $O_c\varphi\lambda$

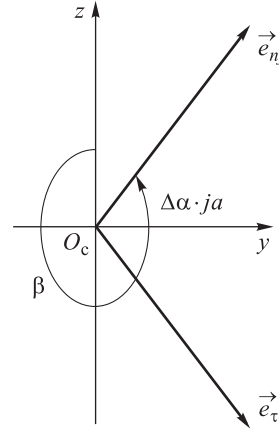


Рис. 2. Прямоугольная система координат O_cxyz

Алгоритм определения геодезических координат вершин многоугольника. Исходными данными для данного алгоритма являются координаты точек $p_i = \{B_i, L_i\}$, $i = 1, \dots, N$, а также требуемое количество вершин многоугольника M .

Поиск сторон искомого многоугольника производится начиная с направления на север, а нумерация их вершин выполняется против хода часовой стрелки. Тогда адаптированный алгоритм поиска геодезических координат вершин G выпуклого M -угольника, ограничивающего множество точек P , опишем в виде последовательного выполнения следующих действий.

Шаг 1. Определение координат средней точки области расположения множества P : $i = 1$; $B_{\max} = -100$; $B_{\min} = 100$; $L_{\max} = -100$; $L_{\min} = 100$.

Шаг 2. Если $i > N$, то продолжение с Шага 6.

Шаг 3. Если $B_{\max} > B_i$, то $B_{\max} = B_i$. Если $B_{\min} < B_i$, то $B_{\min} = B_i$.

Шаг 4. Если $L_{\max} > L_i$, то $L_{\max} = L_i$. Если $L_{\min} < L_i$, то $L_{\min} = L_i$.

Шаг 5. $i = i + 1$ и продолжение с Шага 2.

Шаг 6. Определение B_0 и L_0 в соответствии с (1).

Шаг 7. Для $i = 1, \dots, N$ определение в системе координат O_cxyz орт направлений \vec{e}_{P_i} на соответствующие точки p_i :

$$\vec{e}_{P_i} = \begin{Bmatrix} x_{P_i} \\ y_{P_i} \\ z_{P_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(B_i - B_0) \cos(L_i - L_0); \\ \cos(B_i - B_0) \sin(L_i - L_0); \\ \sin(B_i - B_0). \end{Bmatrix}$$

Шаг 8. Определение начального количества сторон многоугольника M_1 : $M_1 = M$. Если $M = N$, то $M_1 = N - 2$.

Шаг 9. Определение величины угла между соседними азимутальными направлениями поиска сторон: $\Delta\alpha = 2\pi/M_1$.

Шаг 10. Обнуление счетчика найденных сторон многоугольника: $j = 0$.

Шаг 11. Если $j = M_1$, то орты нормалей ко всем сторонам многоугольника найдены, продолжение с Шага 18.

Шаг 12. $ja = j$.

Шаг 13. Определение начальных координат орта, нормального плоскости, которая должна проходить через начало системы координат O_c и которой впоследствии должна принадлежать искомая сторона многоугольника:

$$\vec{e}_{n_j} = \begin{cases} x_{n_j} \\ y_{n_j} \\ z_{n_j} \end{cases} = \begin{cases} 0; \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\alpha \cdot ja\right) = -\sin(\Delta\alpha \cdot ja); \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\alpha \cdot ja\right) = \cos(\Delta\alpha \cdot ja) \end{cases} \quad (2)$$

и орта, коллинеарного линии пересечения данной плоскости с плоскостью $O_c yz$,

$$\vec{e}_\tau = \begin{cases} x_\tau \\ y_\tau \\ z_\tau \end{cases} = \begin{cases} x_{n_j} \\ z_{n_j} \\ -y_{n_j} \end{cases}.$$

Шаг 14. Поиск точки, наиболее удаленной от оси $O_c x$ в направлении, определяемом ортом \vec{e}_{n_j} , $i = 1$.

Шаг 15. Если $i > N$, то все точки просмотрены — продолжение поиска следующей стороны многоугольника в новом направлении начиная с Шага 11.

Шаг 16. Проверка взаимного расположения точки p_i , оси $O_c x$ и плоскости, нормальной текущему направлению поиска \vec{e}_{n_j} и проходящей через начало системы координат O_c . В соответствии со схемой (рис. 3) точка p_i будет являться очередным кандидатом на принадлежность стороне искомого многоугольника только в том случае, если угол $\beta < \pi/2$. Проверка данного условия осуществляется с использованием формулы скалярного произведения векторов \vec{e}_{n_j} и $\vec{e}_{p_i}^*$, записанной в координатной форме, согласно которой, если выражение $x_{p_i} \cdot x_{n_j} + y_{p_i} \cdot y_{n_j} + z_{p_i} \cdot z_{n_j} \leq 0$, то $i = i + 1$ и проверка следующей точки множества P , начиная с Шага 15.

Шаг 17. Очередная точка p_i может принадлежать искомой стороне многоугольника в данном направлении поиска; уточнение орт направления поиска:

$$\vec{e}_{nj} = \vec{e}_{pi} \times \vec{e}_\tau = \begin{Bmatrix} y_{pi} \cdot z_\tau - y_\tau \cdot z_{pi} \\ z_{pi} \cdot x_\tau - z_\tau \cdot x_{pi} \\ x_{pi} \cdot y_\tau - x_\tau \cdot y_{pi} \end{Bmatrix}$$

или, поскольку $x_\tau \equiv 0$, $\vec{e}_{nj} = \begin{Bmatrix} y_{pi} \cdot z_\tau - y_\tau \cdot z_{pi} \\ -z_\tau \cdot x_{pi} \\ x_{pi} \cdot y_\tau \end{Bmatrix}$.

Приведение \vec{e}_{nj} к единичной длине:

$$\vec{e}_{nj} = \begin{Bmatrix} x_{e_{nj}} \\ y_{e_{nj}} \\ z_{e_{nj}} \end{Bmatrix} / \sqrt{x_{e_{nj}}^2 + y_{e_{nj}}^2 + z_{e_{nj}}^2}.$$

Переход к проверке следующей точки p_i ($i = i + 1$) начиная с Шага 15.

Шаг 18. Определение орт направлений на вершины многоугольника при $j = 0$.

Шаг 19. Если $j = M_1$, то орты направлений на вершины многоугольника найдены, продолжение с Шага 23.

Шаг 20. $j_1 = j + 1$. Если $j_1 = M_1$, то $j_1 = 0$.

Шаг 21. Определение орт направления $\vec{e}_{g_j}^*$ на j -ю вершину многоугольника g_j :

$$\vec{e}_{g_j} = \vec{e}_{nj} \times \vec{e}_{nj1} = \begin{Bmatrix} y_{e_{nj}} \cdot z_{e_{nj1}} - y_{e_{nj1}} \cdot z_{e_{nj}} \\ z_{e_{nj}} \cdot x_{e_{nj1}} - z_{e_{nj1}} \cdot x_{e_{nj}} \\ x_{e_{nj}} \cdot y_{e_{nj1}} - x_{e_{nj1}} \cdot y_{e_{nj}} \end{Bmatrix},$$

где в плоскости $O_{cg_j p_k}$ (\vec{e}_{nj} — нормаль к ней) содержится линия границы ($g_j p_k$) многоугольника, проходящая через наиболее удаленную от оси O_{cx} точку p_k в j -м направлении поиска, а в плоскости $O_{cg_j p_{k1}}$ (\vec{e}_{nj1} — нормаль к ней) содержится линия границы ($g_j p_{k1}$) многоугольника, проходящая через наиболее удаленную от оси O_{cx} точку p_{k1} в $(j + 1)$ -м направлении (рис. 4). Приведение \vec{e}_{g_j} к единичной длине:

$$\vec{e}_{g_j} = \frac{\begin{Bmatrix} x_{g_j} \\ y_{g_j} \\ z_{g_j} \end{Bmatrix}}{\sqrt{x_{g_j}^2 + y_{g_j}^2 + z_{g_j}^2}}.$$

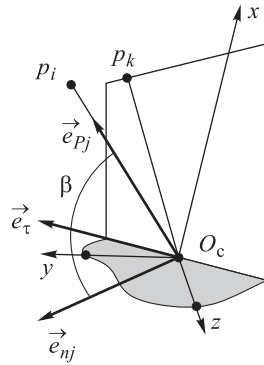


Рис. 3. Схема проверки взаимного расположения точки p_i , оси $O_c x$ и плоскости, нормальной текущему направлению поиска \vec{e}_{n_j}

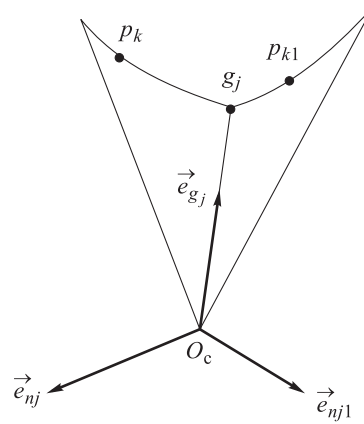


Рис. 4. Схема определения орта направления $\vec{e}_{g_j}^*$ на j -ю вершину многоугольника g_j

Шаг 22. $j = j + 1$ и переход к определению новой вершины, продолжая с Шага 19.

Шаг 23. Если $M_1 = 4$, то продолжение с Шага 39.

Шаг 24. Добавление еще двух сторон к полученному $(N - 2)$ -угольнику при $k = 0$.

Шаг 25. Если $k = 2$, то добавление двух сторон завершено, продолжение с Шага 39.

Шаг 26. Определение длины начальной стороны многоугольника (на сфере единичного радиуса) с использованием проекции ортов вершин g_0 и g_{M_1-1} на оси системы координат $O_c x y z$:

$$Dlina(0) = \sqrt{(x_0 - x_{M_1-1})^2 + (y_0 - y_{M_1-1})^2 + (z_0 - z_{M_1-1})^2},$$

а затем — длины остальных сторон при $j = 1$.

Шаг 27. Если $j = M_1$, то продолжение с Шага 30.

Шаг 28. Определение дальности между j -й и $(j - 1)$ -й вершинами многоугольника:

$$Dlina(j) = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_j - z_{j-1})^2}.$$

Шаг 29. При $j = j + 1$ продолжение с Шага 27.

Шаг 30. Поиск вершины с максимальной суммой длин прилегающих сторон при $j = 0$, $SUM_{\max} = 0$.

Шаг 31. Если $j = M_1$, то продолжение с Шага 35.

Шаг 32. При $j_1 = j + 1$, если $j_1 = M_1$, то $j_1 = 0$.

Шаг 33. Если $SUM_{\max} < Dlina(j) + Dlina(j_1)$, то $SUM_{\max} = Dlina(j) + Dlina(j_1)$; $i_{\max} = j$.

Шаг 34. При $j = j+1$ продолжение с Шага 31.

Шаг 35. Вершина i_{\max} -я с максимальной суммой прилегающих сторон найдена: $k = k + 1$; $M_1 = M_1 + 1$. Сдвиг данных об ортах вершин и нормалей к сторонам многоугольника, освобождающий место для результатов определения аналогичных характеристик новых вершины и стороны при ней (рис. 5): $\vec{e}_{g_j} = \vec{e}_{g_{j-1}}$ и $\vec{e}_{n_j} = \vec{e}_{n_{j-1}}$, $j = M_1 \dots (i_{\max} + 2)$ с шагом -1 .

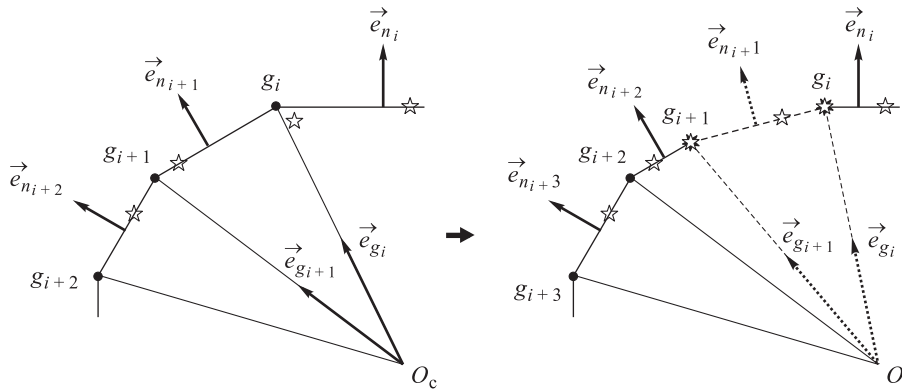


Рис. 5. Схема определения характеристик новых вершины и стороны при них

Шаг 36. Определение орт нормали $\vec{e}_{n_{i_{\max}+1}}$ к новой $(i_{\max} + 1)$ -й стороне. Последовательное выполнение операций, предусмотренных Шагами 13–17, полагая в (2) значение $ja = i_{\max} + 0,5$, а значение индекса $j = i_{\max} + 1$.

Шаг 37. Определение орт $\vec{e}_{g_{i_{\max}}}$ и $\vec{e}_{g_{i_{\max}+1}}$, направленных к двум новым вершинам многоугольника. Выполнение операций, предусмотренных Шагами 20 и 21, полагая индекс $j = i_{\max}$, выполнение этих же операций для индекса $j = i_{\max} + 1$.

Шаг 38. Продолжение начиная с Шага 25.

Шаг 39. К данному моменту определены все орты \vec{e}_{g_i} , $i = 0, \dots, (M_1 - 1)$ ($M_1 = 4$ либо $M_1 = N$), направленные к вершинам искомого многоугольника. С их помощью определение геодезических координат его вершин

$$\begin{cases} B_{g_i} = B_0 + \arcsin(z_{g_i}), \\ L_{g_i} = L_0 + \operatorname{arctg}(y_{g_i}/x_{g_i}). \end{cases}$$

Шаг 40. Выдача результатов.

Таким образом, представленный алгоритм позволяет определять геодезические широту и долготу вершин выпуклого многоугольника, ограничивающего множество P , состоящее из N точек с известными геодезическими координатами на ЭК.

Предложения по совершенствованию методики построения границ области расположения точек P . Несмотря на простоту и наглядность способов построения ограничивающего многоугольника, методика имеет ряд недостатков. Основной из них — необоснованное увеличение площади ограничивающего многоугольника относительно площади, фактически занимаемой областью расположения точек, особенно при построении ограничивающего четырехугольника (заштрихованные области на рис. 6, *а*). Однако в связи с методически детерминированной азимутальной ориентацией большинства сторон многоугольника (не учитывающей фактическую конфигурацию расположения точек множества P) в ряде случаев становится возможным «вырождение» его сторон, приводящее к дублированию вершин, как это представлено в качестве примера на рис. 6, *б*, где вершины g_{10} – g_{13} многоугольника совпадают.

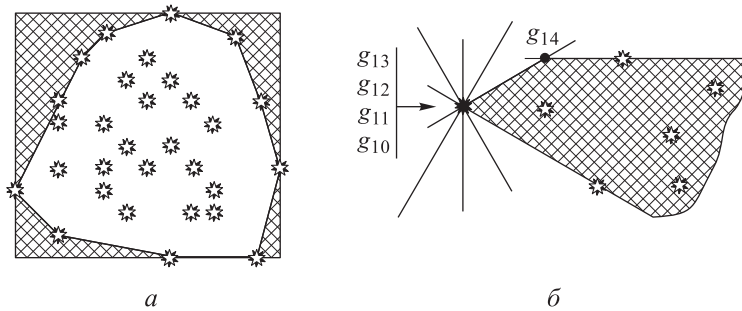


Рис. 6. Площадь ограничивающего многоугольника

Преодолеть эти несоответствия можно путем построения выпуклой оболочки G конечного множества точек P с последующей контролируемой ее деформацией в целях сокращения количества вершин многоугольника до приемлемого значения.

Алгоритм сокращения количества вершин выпуклого многоугольника. Предположим, что имеется множество точек $G = \{g_i, i = 1, \dots, M\} \in P$, являющихся вершинами выпуклого M -угольника и известны величины углов α_i при каждой из его вершин.

Известно также число $M_{\text{сокp}}$ — количество «лишних» вершин, сокращаемых в исходном многоугольнике.

Алгоритм сокращения количества вершин многоугольника изображен на рис. 7. Поскольку размеры области G при этом увеличиваются, требуется, чтобы размеры такого увеличения были минимальны.

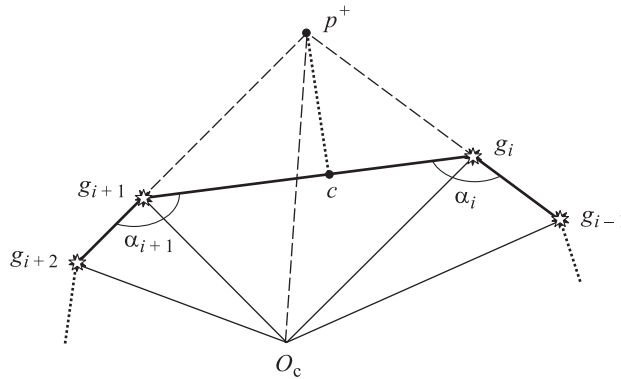


Рис. 7. Алгоритм сокращения количества вершин многоугольника

Каждому элементу множества G сопоставляем свойство — логический признак того, что данная вершина принадлежит множеству P . Среди всех соседних вершин g_i и g_{i+1} M -угольника найдем такую пару (с индексами вершин j и $j + 1$), для которой расстояние от точки пересечения лучей (p^+), определяемых $\overrightarrow{g_{i-1}g_i}$ и $\overrightarrow{g_{i+2}g_{i+1}}$, до стороны $g_i g_{i+1}$ (т. е. $\left| p^+ c \right|_{\text{сф}}$) минимально.

Определяем характеристики этой вершины p^+ . Производим замену характеристик j -й вершины характеристиками вершины p^+ . При этом признак того, что данная вершина принадлежит множеству P , «сбрасывается», и $M = M - 1$. Проведем сдвиг вершин: $g_i = g_{i+1}$, $i = (j + 1), \dots, M$, $M_{\text{сокp}} = M_{\text{сокp}} - 1$. Возвращаем уточненные координаты вершин многоугольника с информацией о наличии или отсутствии принадлежности каждой из них исходному множеству точек P .

Теперь покажем, каким образом можно определить расстояние $\left| p^+ c \right|_{\text{сф}}$.

При решении на сферической поверхности (O_c — центр сферы, R_c — ее радиус, $\left| p^+ c \right|_{\text{сф}}$ — сферическая дальность) имеем

$$\begin{cases} \left| p^+ c \right|_{\text{сф}} = R_c \cdot (\angle p^+ O_c c); \\ \sin(\angle g_i O_c c) + \sin(\angle c O_c g_i) = \text{tg}(\angle p^+ O_c c) \cdot \text{ctg}(\pi - \alpha_i) + \text{tg}(\angle p^+ O_c c) \cdot \text{ctg}(\pi - \alpha_{i+1}). \end{cases}$$

Поскольку $\angle g_i O_c c$, $\angle c O_c g_i$ и $\angle p^+ O_c c$ малы и можно принять, что синусы и тангенсы этих углов равны значениям самих углов, получим

$$\left| p^+ c \right|_{\text{сф}} = - \frac{\sin(\alpha_i) \cdot \sin(\alpha_{i+1})}{\sin(\alpha_i + \alpha_{i+1})} \cdot \left| g_i g_{i+1} \right|_{\text{сф}}, \quad (3)$$

или, если поделить левую и правую части (3) на R_c ,

$$\angle p^+ O_c c = - \frac{\sin(\alpha_i) \cdot \sin(\alpha_{i+1})}{\sin(\alpha_i + \alpha_{i+1})} \cdot \angle g_i O_c g_{i+1}.$$

Методика селекции точек по направлению. Для того чтобы воспользоваться алгоритмом Джарвиса или Грэхема, необходимо определять величины ориентированных углов между направлениями на сфере, для чего требуется информация не о величине ориентированного угла, а о его знаке (или равенстве угла нулю).

Поскольку рассмотрению подлежат только два варианта взаимного расположения пар векторов на плоскости (направлений на сфере), определяемых точками A, B, C, D (исходящими из одной точки либо являющимися продолжением друг друга — рис. 8), задачу, независимо от варианта их взаимного расположения, можно интерпретировать следующим образом.

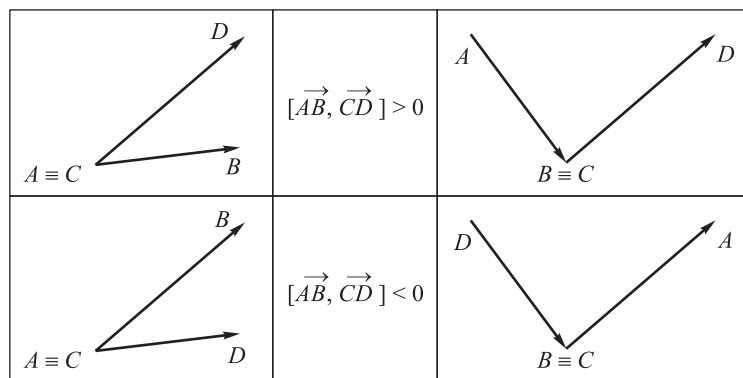


Рис. 8. Варианты взаимного расположения пар векторов на плоскости

Имеются три точки: A, B и D . Точками A и B задается направление перемещения от A к B . Необходимо получить положительное число, если точка D расположена слева от направления перемещения, отрицательное — если точка D расположена справа от направления перемещения, нуль — если точка D расположена на линии перемещения AB .

Запишем алгоритм решения данной задачи.

Имеем три точки: $A = \{\phi_A, \lambda_A\}$, $B = \{\phi_B, \lambda_B\}$ и $D = \{\phi_D, \lambda_D\}$ в системе координат $O_c\phi\lambda$. Определим во вспомогательной декартовой системе координат O_cxyz проекции ортов \vec{e}_i ($i = A, B, D$), соответственно направленные к этим точкам:

$$\vec{e}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos(\phi_i) \cdot \cos(\lambda_i) \\ \cos(\phi_i) \cdot \sin(\lambda_i) \\ \sin(\phi_i) \end{Bmatrix}, i = A, B, D.$$

Рассмотрим выражение $(\vec{e}_A \times \vec{e}_B) \cdot \vec{e}_D$.

$$\text{Вектор } \vec{W} = \begin{Bmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \end{Bmatrix} = \vec{e}_A \times \vec{e}_B = \begin{Bmatrix} y_A \cdot z_B - y_B \cdot z_A \\ z_A \cdot x_B - z_B \cdot x_A \\ x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A \end{Bmatrix} \text{ ортогонален плоскости } O_cAB$$

и направлен влево относительно направления перемещения от точки A к точке B . Тогда значение выражения

$$(\vec{e}_A \times \vec{e}_B) \cdot \vec{e}_D = \vec{W} \cdot \vec{e}_D = x_W \cdot x_D + y_W \cdot y_D + z_W \cdot z_D \quad (4)$$

будет положительным, если угол между \vec{W} и \vec{e}_D будет меньше, чем $\pi/2$ (т. е. точка D находится слева от направления перемещения от точки A к точке B), отрицательным — при угле, который больше, чем $\pi/2$ (точка D находится справа), и, наконец, нулевым — при угле, равном $\pi/2$ (точка D принадлежит плоскости O_cAB , т. е. расположена по направлению движения).

Методика селекции точек по дальности. В процессе формирования множества точек G посредством алгоритмов Джарвиса или Грэхема рассматривается ситуация, когда в направлении поиска очередной вершины многоугольника может быть расположено несколько точек. При этом в качестве вершины должна быть выбрана точка, наиболее удаленная от начальной точки поиска.

Итак, имеем точки A , B и D , расположенные в одном направлении поиска.

Посредством логической функции будем возвращать вызывающему программному блоку логическое значение ИСТИНА в случае, если точка D расположена дальше от точки A , чем точка B . Принятие решения о возврате того либо иного значения данной функцией будем осуществлять на основании проекций ортов \vec{e}_i ($i = A, B, D$) на оси вспомогательной системы координат O_cxyz . При этом вместо расчета сферической дальности (или центрального угла) между двумя точками определяется квадрат расстояния между ними, поскольку

в данной части рассматриваемого алгоритма такая замена, по сути, допустима. Значение ИСТИНА принимается, если

$$\begin{aligned} & \left((x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2 \right) - \\ & - \left((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \right) > 0. \end{aligned}$$

Методика определения величины угла при вершине многоугольника. Имеются координаты трех смежных вершин выпуклого многоугольника A , B и C .

Требуется определить величину угла при вершине B ($\angle ABC$). Поскольку многоугольник выпуклый, величина угла будет находиться в пределах диапазона $]0, \pi[$.

Предположим, что известны проекции ортов \vec{e}_A , \vec{e}_B и \vec{e}_C на оси вспомогательной декартовой системы координат O_cxyz (4). Для определения угла при вершине B сферического многоугольника необходимо определить вектора \vec{w}_A и \vec{w}_C (рис. 9).

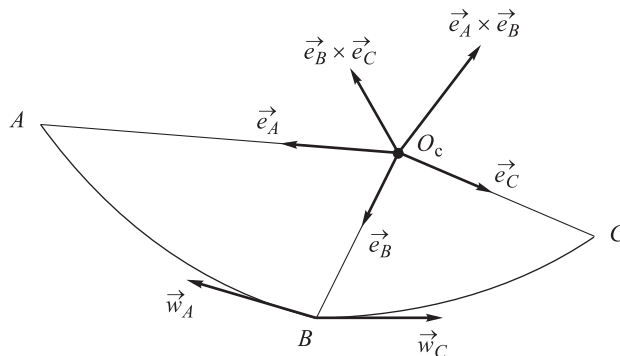


Рис. 9. Схема определения угла при вершине B

Вектор \vec{w}_A должен обладать следующими свойствами:

- принадлежать плоскости, проходящей через точки A , B и O_c ;
- быть перпендикулярным прямой O_cB , т. е. орту \vec{e}_B .

Аналогично, \vec{w}_C должен принадлежать плоскости, проходящей через точки C , B и O_c , и быть перпендикулярным прямой O_cB (\vec{e}_B).

Очевидно, что вышеописанными свойствами будут обладать вектора

$$\vec{w}_A = \begin{Bmatrix} x_{Wa} \\ y_{Wa} \\ z_{Wa} \end{Bmatrix} = \vec{e}_B \times (\vec{e}_A \times \vec{e}_B) \quad \text{и} \quad \vec{w}_C = \begin{Bmatrix} x_{Wc} \\ y_{Wc} \\ z_{Wc} \end{Bmatrix} = (\vec{e}_B \times \vec{e}_C) \times \vec{e}_B.$$

Величину угла при вершине B можно определить, воспользовавшись формулой скалярного произведения векторов \vec{w}_A и \vec{w}_C :

$$\vec{w}_A \cdot \vec{w}_C = |\vec{w}_A| \cdot |\vec{w}_C| \cdot \cos B,$$

$$\cos B = \frac{x_{Wa} \cdot x_{Wc} + y_{Wa} \cdot y_{Wc} + z_{Wa} \cdot z_{Wc}}{\sqrt{(x_{Wa}^2 + y_{Wa}^2 + z_{Wa}^2) \cdot (x_{Wc}^2 + y_{Wc}^2 + z_{Wc}^2)}}. \quad (5)$$

Следовательно, результатом будет значение, равное арккосинусу (5).

Методика определения геодезических координат вершин многоугольника, не принадлежащих исходному множеству точек. Данную задачу можно интерпретировать следующим образом (рис. 10).

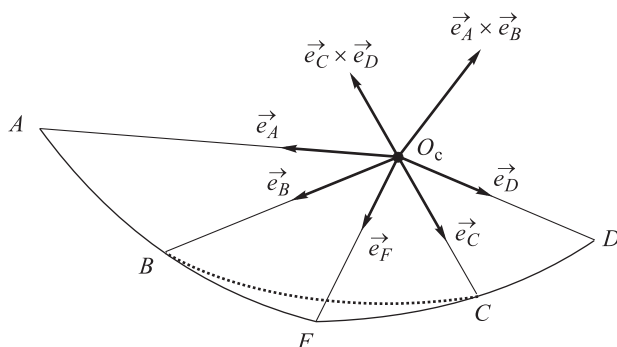


Рис. 10. Задача определения геодезических координат вершин многоугольника, не принадлежащих исходному множеству точек

Имеются четыре точки A , B , C и D . Необходимо найти координаты точки F , являющейся точкой пересечения линий AB и DC на поверхности сферы. Предположим, что известны проекции ортов \vec{e}_A , \vec{e}_B , \vec{e}_C и \vec{e}_D на оси вспомогательной декартовой системы координат O_cxyz (4).

Вначале определим проекции орта \vec{e}_F на оси вспомогательной декартовой системы координат O_cxyz . Он принадлежит линии пересечения двух плоскостей, первая из которых проходит через точки A , B и O_c , а вторая — через точки D , C и O_c .

Вектор $\vec{e}_A \times \vec{e}_B$ перпендикулярен первой плоскости и, соответственно, искомому орту \vec{e}_F , а вектор $\vec{e}_C \times \vec{e}_D$ — второй плоскости, и

также, соответственно, искомому орту \vec{e}_F . Тогда проекции орта \vec{e}_F на оси вспомогательной декартовой системы координат O_cxyz можно получить в следующем виде:

$$\vec{e}_F = \begin{cases} x_{e_F} \\ y_{e_F} \\ z_{e_F} \end{cases} = \frac{\begin{pmatrix} \vec{e}_A \times \vec{e}_B \\ \vec{e}_C \times \vec{e}_D \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} \vec{e}_A \times \vec{e}_B \\ \vec{e}_C \times \vec{e}_D \end{pmatrix} \right|}. \quad (6)$$

Поскольку ранее было принято допущение о том, что геодезические координаты (B, L) точек, находящихся вблизи области расположения исходного множества точек P , соответствуют координатам вспомогательной сферической системы $O_c\varphi\lambda$, можно записать, что

$$\begin{cases} B_F \cong \varphi_F = \arcsin z_{e_F}, \\ L_F \cong \lambda_F = \arctg 2(x_{e_F}, y_{e_F}), \end{cases} \quad (7)$$

где функция

$$\arctg 2(x, y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y \geq 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, y < 0; \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right), & \text{если } x > 0; \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{если } x < 0, y \geq 0; \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & \text{если } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Полученные в результате расчета по (6) и (7) координаты новой вершины $F = \{B_F, L_F\}$ совместно с проекциями орта \vec{e}_F возвращаются вызвавшему ее программному блоку.

Как уже отмечалось, при уменьшении количества вершин выпуклого многоугольника до заданного значения формируются новые вершины многоугольника, не принадлежащие исходному множеству точек P . Для них определяются только геодезические широта и долгота, а высота полагается равной нулю.

Разработанный комплекс методик позволяет определить геодезические координаты вершин многоугольника с относительной точностью примерно 0,06 %, величины угла при вершине многоугольника,

геодезические координаты вершин многоугольника, не принадлежащих исходному множеству точек, сократить количество вершин выпуклого многоугольника, провести селекцию вершин по направлению и по дальности, преодолеть несоответствия алгоритмов Джарвиса и Грэхема путем построения выпуклой оболочки конечного множества точек с последующей контролируемой ее деформацией в целях сокращения количества вершин многоугольника до приемлемого значения. Вычислительная сложность адаптированного алгоритма определения геодезических координат вершин выпуклого многоугольника в 8–9 раз снижает вычислительную сложность алгоритмов Джарвиса и Грэхема.

Заключение. Рассмотренные методики позволяют предъявить следующие требования к результирующему многоугольнику:

минимальная площадь района базирования должна отвечать конструктивно-аэробаллистическим возможностям летательного аппарата для достижения районов прибытия ЛА с любой точки района базирования;

минимальное количество вершин многоугольника, ограничивающего район базирования ЛА, должно соответствовать многоугольнику, включающему местность, необходимую для взлета и посадки летательного аппарата, а также обеспечивать минимальное время расчетов.

Представленный комплекс методик и алгоритмов позволяет определить геодезические координаты вершин выпуклого многоугольника (с количеством вершин, не превышающим заданного), ограничивающего исходное множество точек с известными геодезическими координатами.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Захаров В.Л., Соколов А.В. Роль оперативного оборудования территории страны в повышении эффективности применения ракетного вооружения. *Военная мысль*, 2008, № 2, с. 32–39.
- [2] Яншин А.С., Волков М.Н. К вопросу о применении имитационного моделирования для организации материально-технического обеспечения войск (сил). *Наука и военная безопасность*, 2018, № 4, с. 85–91.
- [3] Зарайский Д.А. Имитационное моделирование вероятности обнаружения и поражения одиночных и групповых целей высокоточным оружием. *Известия ТулГУ. Технические науки*, 2020, вып. 3, с. 122–133.
- [4] Репин С.В., Головкин В.А., Монгуш С.Ч. Решение задачи территориального размещения мест базирования мобильного пункта технического обслуживания транспортных средств. *Вестник Тувинского государственного университета*, 2016, № 3, с. 130–139.
- [5] Алексеев В.В., Лакомов Д.В., Шишкин А.А., Г. Аль Маамари. Обработка графических изображений сосредоточенных и площадных объектов. *Бизнес-Информатика*, 2019, № 4, т. 13, с. 49–59.
- [6] Загорский М.Ю., Богданов В.Л., Гарманов В.В., Королева В.П., Рябов Ю.В. Математическая модель снимков стереопары и алгоритм восстановления

- рельефа местности на ее основе. *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*, 2015, т. 12, № 3, с. 36–51.
- [7] Княжский А. Ю., Плясовских А. П. Цифровая модель движения на аэродроме. *Вестник Концерна ВКО «Алмаз-Антей»*, 2020, № 3, с. 96–106. <https://doi.org/10.38013/2542-0542-2020-3-96-106>
- [8] Назмутдинова А.И. Разработка и исследование метода интерпретации космических снимков площадных объектов местности на основе вейвлет-анализа: дис. ... канд. техн. наук. Ижевск, 2016, 158 с.
- [9] Садыков С.С., Стародубов Д.Н. Исследование алгоритма определения длины и ширины плоских объектов. *Труды международного симпозиума «Надежность и качество»*, Пензенский государственный университет, 2009, т. 2, с. 386–370.
- [10] Гренкин Г.В. Методы вычислительной реализации рангового метода кластеризации. *Моделирование систем*, 2012, № 1, с. 71–79.
- [11] Магдеев Р.Г., Биктимиров Л.Ш. Применение алгоритмов построения выпуклой оболочки при анализе изображений микроструктуры металла. *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, 2014, т. 16, № 6, с. 496–500.
- [12] Жаров В.Е. *Сферическая астрономия*. Фрязино, Век 2, 2006, 480 с.
- [13] Рассел Дж. *Система координат*. Москва, VSD, 2012, 100 с.
- [14] Скрыпник О.Н. Системы координат и координатные преобразования для задач аэронавигации. *Научный Вестник МГТУ ГА*, 2017, т. 20, № 4, с. 88–97.

Статья поступила в редакцию 20.03.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Казаков Г.В., Терентьев О.С. Методы и алгоритмы решения задачи выбора граничных точек районов базирования летательных аппаратов. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2022, вып. 7.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-7-2197>

Казаков Геннадий Викторович — канд. техн. наук, доцент, начальник управления ФГБУ «4 ЦНИИ» Минобороны России, почетный работник науки и техники Российской Федерации; автор более 100 публикаций. e-mail: kgv.64@mail.ru

Терентьев Олег Сергеевич — старший научный сотрудник ФГБУ «4 ЦНИИ» Минобороны России; автор более 30 публикаций. e-mail: kgv.64@mail.ru

Methods and algorithms for solving the problem of selecting boundary points of aircraft basing areas

© G.V. Kazakov, O.S. Terentyev

Federal State Budgetary Institution “4 Central Research Institute” of the Ministry of Defence of the Russian Federation, Korolyov, Moscow Region, 141091, Russia

The paper considers a set of methods and algorithms that allows determining the geodetic coordinates of the vertices of a convex polygon (with the number of vertices not exceeding a given one), limiting the initial set of points with known geodetic coordinates. When solving the problem, we developed the following: an algorithm for determining the geodetic coordinates of the polygon vertices; proposals for improving the methodology for constructing the boundaries of the area where points of the aircraft basing areas are located; algorithms for determining the set of points that are the vertices of a convex polygon that limits the initial set of points; an algorithm for reducing the number of vertices of a convex polygon; methods for selecting points by direction and by range; a method for determining the angle at the vertex of a polygon; a method for determining the geodetic coordinates of the vertices of a polygon that do not belong to the original set of points. To effectively solve the problem, we examined several different algorithms, e.g. the Jarvis March algorithm and the Graham scan. The use of the above methods and algorithms makes it possible to determine the geodetic coordinates of the vertices of a convex polygon (with the number of vertices not exceeding a given one), limiting the initial set of points with known geodetic coordinates, and increases the validity and accuracy of determining the geodetic coordinates of the boundary points of the aircraft basing areas.

Keywords: *Graham scan, Jarvis March algorithm, convex polygon, aircraft, basing area, spherical coordinates, Krasovsky ellipsoid*

REFERENCES

- [1] Zakharov V.L., Sokolov A.V. *Voennaya mysl (Military thought)*, 2008, no. 2, pp. 32–39.
- [2] Yanshin A.S., Volkov M.N. *Nauka i voennaya bezopasnost (Science and military security)*, 2018, no. 4, pp. 85–91.
- [3] Zarayskiy D.A. *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki (Proceedings of the TSU)*, 2020, no. 3, pp. 122–133.
- [4] Repin S.V., Golovko V.A., Mongush S.Ch. *Vestnik Tuvinskogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of Tuva State University*, 2016, no. 3, pp. 130–139.
- [5] Alekseev V.V., Lakomov D.V., Shishkin A.A., G. Al Maamari. *Biznes-Informatika — Business Informatics*, 2019, no. 4, vol. 13, pp. 49–59.
- [6] Zagorskiy M.Yu., Bogdanov V.L., Garmanov V.V., Koroleva V.P., Ryabov Yu.V. *Sovremennye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa — Current problems in remote sensing of the Earth from space*, 2015, no. 3, vol. 12, pp. 36–51.
- [7] Knyazhskiy A.Yu., Plyasovskikh A.P. *Vestnik Kontserna VKO «Almaz-Antey» — Journal of “Almaz-Antey” Air and Space Defence Corporation*, 2020, no. 3, pp. 96–106. <https://doi.org/10.38013/2542-0542-2020-3-96-106>
- [8] Nazmutdinova A.I. *Razrabotka i issledovanie metoda interpretatsii kosmicheskikh snimkov ploschadnykh obektov mestnosti na osnove veyvlet-analiza*. Diss. kand. tekn. nauk [Development and research of a method for interpreting space images of areal terrain objects based on wavelet analysis. Cand. eng. sc. diss.]. Izhevsk, 2016, 158 p.

- [9] Sadykov S.S., Starodubov D.N. Issledovanie algoritma opredeleniya dliny i shiriny ploskikh oektov [Study of the algorithm for determining the length and width of flat objects]. *Trudy mezhdunarodnogo simpoziuma «Nadezhnost i kachestvo»* [Proceedings of the International Symposium “Reliability and Quality”]. Penza State University, 2009, vol. 2, pp. 386–370.
- [10] Grenkin G.V. *Informatika i sistemy upravleniya — Information Science and Control Systems*, 2012, no. 1, pp. 71–79.
- [11] Magdeev R.G., Biktimirov L.Sh. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk — Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2014, vol. 16, no. 6, pp. 496–500.
- [12] Zharov V.E. *Sfericheskaya astronomiya* [Spherical astronomy]. Fryazino, Vek 2 Publ., 2006, 480 p.
- [13] Russell J. *Sistema koordinat* [Coordinate system]. Moscow, VSD Publ., 2012, 100 p. (In Russ.).
- [14] Skrypnik O.N. *Nauchny Vestnik MGTU GA — Civil Aviation High Technologies*, 2017, vol. 20, no. 4, pp. 88–97.

Kazakov G.V. (b. 1964) Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Head of the Federal State Budgetary Institution “4 Central Research Institute” of the Ministry of Defence of the Russian Federation, honorary worker of science and technology of the Russian Federation; author of more than 100 research papers in the field of automated control system reliability. e-mail: kgv.64@mail.ru (SPIN-code: 8553-9753).

Terentyev O.S., Senior Research Fellow, Federal State Budgetary Institution “4 Central Research Institute” of the Ministry of Defence of the Russian Federation; author of more than 30 research papers. e-mail: kgv.64@mail.ru