УДК 531.38 DOI: 10.18698/2308-6033-2022-7-2192

Механический аналог движений неоднородной жидкости

© А.Н. Темнов, Ян Наинг У

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрено с использованием переменных Лагранжа однородное вихревое движение неоднородной жидкости в неподвижной эллипсоидальной полости, произвольно ориентированной относительно направления однородного поля сил тяжести. Однородным вихревым движением жидкости называется движение, в котором ротор скорости для всех частиц имеет одинаковое значение и зависит только от времени. Показано, что уравнения однородного вихревого движения тяжелой неоднородной жидкости возможны для эллипсоидальной полости при линейном распределении плотности. Предложена геометрическая интерпретация движения жидкости. С помощью переменных Лагранжа получены уравнения движения неоднородной жидкости, которые совпадают с уравнениями движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, записанными в неподвижной системе координат, произвольно расположенной относительно направления однородного поля сил тяжести.

Ключевые слова: *переменные Лагранжа, уравнение Фридмана, вихревое движение, система координат*

Введение. Механические аналоги движений жидкости дают наглядное представление о решении сложных гидродинамических задач. Их часто применяют в инженерных расчетах, например при исследовании динамики ракет-носителей на жидком топливе [1]. Поскольку в настоящее время широко используются криогенные жидкости, представляет интерес рассмотреть простейшие движения такой неоднородной жидкости. Одним из них является однородное вихревое движение, которое применительно к однородной жидкости рассмотрено в работах [2–8] при исследовании движения твердого тела, имеющего эллипсоидальную полость, полностью заполненную однородной жидкостью. В этом случае механическим аналогом движений однородной жидкости являлись движения твердого тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром его масс.

В книге [9] утверждается, что движение неравномерно нагретой жидкости, полностью заполняющей неподвижную эллипсоидальную полость и подчиненной пространственно-линейным распределениям скорости и температуры и приближению Буссинеска, управляется дифференциальными уравнениями в неподвижной системе координат, которые оказываются эквивалентными дифференциальным уравнениям Эйлера — Пуассона тяжелого твердого тела.

Цель данной работы — показать, что однородное вихревое движение неоднородной жидкости в неподвижной эллипсоидальной полости возможно при линейном распределении плотности. С использованием переменных Лагранжа показано, что параметры, определяющие подобное движение неоднородной жидкости, могут быть найдены без применения приближения Буссинеска из уравнений, аналогичных уравнениям движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Постановка задачи. Рассмотрим однородное вихревое движение неоднородной жидкости, полностью заполняющей неподвижную полость в форме эллипсоида с полуосями $b_i (i = 1, 2, 3)$. Введем правую неподвижную систему координат $K: Ox_1x_2x_3$ с началом в геометрическом центре полости и с осями, совпадающими с полуосями b_i (рис. 1). Уравнение поверхности эллипсоида в системе координат $Ox_1x_2x_3$ запишется в виде

$$Э^2(x_1x_2x_3) = \frac{x_1^2}{b_1^2} + \frac{x_2^2}{b_2^2} + \frac{x_3^2}{b_3^2} - 1 = 0. \quad (1)$$

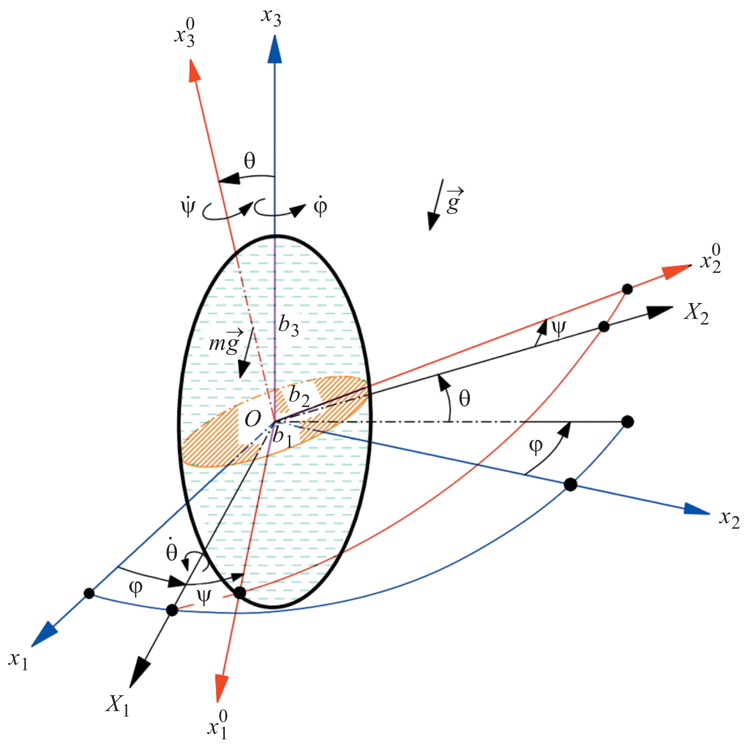

Рис. 1. Системы координат для неподвижной эллипсоидальной полости с неоднородной жидкостью

Введем также правую подвижную (сопутствующую) систему координат $K_0: Ox_1^0x_2^0x_3^0$, связанную с частицами жидкости, и пусть $x_1^0 = a,\ x_2^0 = b,\ x_3^0 = c$ — переменные Лагранжа, характеризующие начальное положение частиц жидкости в полости в системе K_0. Положим, что в начальный момент времени обе системы координат совпадают.

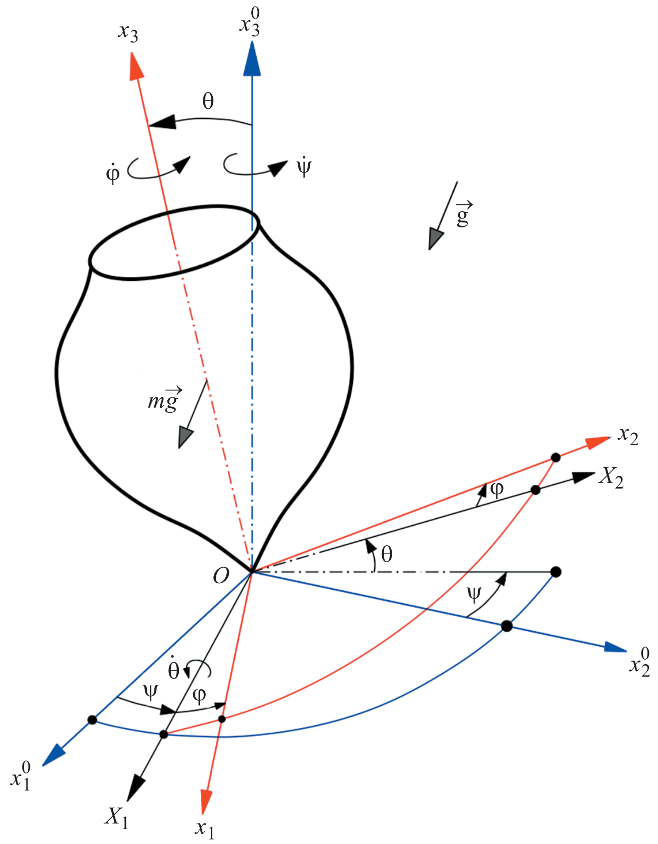

Рис. 2. Системы координат вращающегося вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела

Для получения кинематической картины движения неоднородной жидкости воспользуемся методом Пуанкаре [2] описания аналогичного движения однородной жидкости. Сопоставим однородному вихревому движению частиц жидкости в эллипсоидальной полости движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Рассматривая движение твердого тела, будем считать произвольно ориентированную в пространстве систему координат $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ неподвижной, а систему координат $Ox_1x_2x_3$, связанную с твердым телом, подвижной (рис. 2). При движении твердого тела вокруг неподвижной точки каждая точка твердого тела будет описывать кривую на поверхности сферы S^2 — неподвижной в пространстве, и будут справедливы соотношения [7]

$$x_i^0 = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3\ , \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{2}$$

где $\alpha_{ij}(t)$ — направляющие косинусы, определяющие положение подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с твердым телом, относительно неподвижной системы координат $Ox_1^0x_2^0x_3^0$.

Построим отображение $F : Э^2 \to S^2 \to A \cdot S^2 \to Э^2$, состоящее из трех последовательных преобразований:

1) преобразования внутренней области эллипсоида в шар $z_i = x_i^0\, R/b_i$, $i = 1, 2, 3$; $R = \sqrt[3]{b_1b_2b_3}$, z_i — координаты точек после преобразования;

2) преобразования поворота шара относительно центра $y_i = \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{ji} z_j$, где y_i — координаты точек шара после поворота;

3) обратного преобразования шара в область, ограниченную эллипсоидом, $x_i = y_i\, b_i/R$, $i = 1, 2, 3$.

В результате действия F траектории точки твердого тела на неподвижной поверхности сферы S^2 перейдут в траектории на поверхности $Э^2$. Тогда для частиц жидкости будут справедливы выражения:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}a + \alpha_{21}\frac{b_1}{b_2}b + \alpha_{31}\frac{b_1}{b_3}\ c, \\ x_2 &= \alpha_{12}\frac{b_2}{b_1}a + \alpha_{22}b + \alpha_{32}\frac{b_2}{b_3}\ c, \\ x_3 &= \alpha_{13}\frac{b_3}{b_1}a + \alpha_{23}\frac{b_3}{b_2}b + \alpha_{33}c, \end{aligned} \tag{3}$$

которые и примем для описания в переменных Лагранжа однородного вихревого движения жидкости. Выражения (3) показывают, что частицы жидкости, находящейся в момент t_0 в точках с координатами (a, b, c), в момент времени t будут находиться в точках с координатами (x_1, x_2, x_3) и матрица A направляющих косинусов $\alpha_{ij}(t)$ будет иметь вид [10]

$$A = \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta & \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & -\sin\psi\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}.$$

Дифференцируя выражение (3) по времени, получим следующие выражения для скорости частиц жидкости:

$$V_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3} \dot{\alpha}_{ji} \frac{b_i}{b_j} x_j^0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{4}$$

Принимая во внимание соотношения между направляющими косинусами [11] и их производными, зависящими от проекций угловой скорости в системах K и K_0, можно также выразить компоненты скорости V_i через эйлеровы координаты x_1, x_2, x_3:

$$V_i(t, x) = \frac{dx_i}{dt} = b_i \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \dot{\alpha}_{ji} a_{jk} \frac{x_k}{b_k} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5}$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} V_1(t, x) &= \frac{dx_1}{dt} = \omega_2 \frac{b_1}{b_3} x_3 - \omega_3 \frac{b_1}{b_2} x_2, \\ V_2(t, x) &= \frac{dx_2}{dt} = \omega_3 \frac{b_2}{b_1} x_1 - \omega_1 \frac{b_2}{b_3} x_3, \\ V_3(t, x) &= \frac{dx_3}{dt} = \omega_1 \frac{b_3}{b_2} x_2 - \omega_2 \frac{b_3}{b_1} x_1, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции мгновенной угловой скорости частицы жидкости на неподвижные оси $Ox_1x_2x_3$, которые выражаются через производные от направляющих косинусов

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\alpha}_{13}\alpha_{12} + \dot{\alpha}_{23}\alpha_{22} + \dot{\alpha}_{33}\alpha_{32}, \\ \omega_2 &= \dot{\alpha}_{11}\alpha_{13} + \dot{\alpha}_{21}\alpha_{23} + \dot{\alpha}_{31}\alpha_{33}, \\ \omega_3 &= \dot{\alpha}_{12}\alpha_{11} + \dot{\alpha}_{22}\alpha_{21} + \dot{\alpha}_{32}\alpha_{31}. \end{aligned} \tag{7}$$

Компоненты вектора вихря $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ определяются из векторного произведения $\nabla \times \bar{v}$ и представляются следующим образом:

$$\Omega_1 = \frac{b_2^2 + b_3^2}{b_2 b_3} \omega_1, \quad \Omega_2 = \frac{b_1^2 + b_3^2}{b_1 b_3} \omega_2, \quad \Omega_3 = \frac{b_1^2 + b_2^2}{b_1 b_2} \omega_3.$$

Вывод вихревого уравнения движения неоднородной жидкости. Движение жидкости в полости опишем в переменных Лагранжа уравнениями [12]

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} \frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} \frac{\partial x_2}{\partial a} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} \frac{\partial x_3}{\partial a} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial a} + \rho_0 \mathrm{A}_a^0, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} \frac{\partial x_1}{\partial b} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} \frac{\partial x_2}{\partial b} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} \frac{\partial x_3}{\partial b} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial b} + \rho_0 \mathrm{A}_b^0, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} \frac{\partial x_1}{\partial c} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} \frac{\partial x_2}{\partial c} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} \frac{\partial x_3}{\partial c} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial c} + \rho_0 \mathrm{A}_c^0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \qquad \rho_0(a, b, c, t) = \text{const}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t}\nu_1 + \frac{\partial x_2}{\partial t}\nu_2 + \frac{\partial x_3}{\partial t}\nu_3 = 0 \text{ на } Э^2, \tag{10}$$

где p — давление жидкости; ν_i — проекции орта внешней нормали к $Э^2$ на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3; ρ_0 — плотность жидкости, которая в начальный момент времени t_0 изменяется по закону

$$\rho_0 = S_0 + S_1^0 a + S_2^0 b + S_3^0 c. \tag{11}$$

Здесь коэффициенты S_i^0 можно рассматривать так же, как и коэффициенты разложения произвольного закона плотности $\rho_0 = \rho_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ в степенной ряд в начальный момент времени, если ограничиться линейными слагаемыми разложения и отбросить все произведения; символы (1, 2, 3) рядом с уравнениями указывают, что два других не выписанных уравнения получаются из написанного перестановкой цифр, указанных в скобках:

$$\mathrm{A}_a^0 = \frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial a} \quad (1, 2, 3), \tag{12}$$

где Φ — силовая функция массовых сил, действующих на жидкость.

Пусть полость произвольно расположена в пространстве с однородным полем сил тяготения. Силовую функцию Φ в этом случае представим как

$$\Phi = (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)g. \tag{13}$$

Здесь $\gamma_i (i = 1, 2, 3) = \text{const}$ — направляющие косинусы, определяющие положение осей b_i относительно направления однородного поля сил тяжести.

Подставим выражения (4), (11), (12) и (13) в уравнение гидродинамики (8). Затем, применив операцию rot к левой и правой частям уравнения (8), от полученного выражения придем к уравнениям вихревого движения жидкости в форме Фридмана [13], записанной в переменных Лагранжа:

$$(S_2^0 G_3 - S_3^0 G_2) + \frac{\rho_0}{b_2 b_3}[b_1{}^2(\ddot{\alpha}_{21}\alpha_{31} - \ddot{\alpha}_{31}\alpha_{21}) + b_2{}^2(\ddot{\alpha}_{22}\alpha_{32} - \ddot{\alpha}_{32}\alpha_{22}) +$$
$$+ b_3{}^2(\ddot{\alpha}_{23}\alpha_{33} - \ddot{\alpha}_{33}\alpha_{23})] = (\frac{\partial \rho_0}{\partial b}\frac{\partial \Phi_0}{\partial c} - \frac{\partial \rho_0}{\partial c}\frac{\partial \Phi_0}{\partial b}),$$

$$
\begin{gathered}
(S_3^0 G_1 - S_1^0 G_3) + \frac{\rho_0}{b_1 b_3}[b_1^{\,2}(\ddot\alpha_{31}\alpha_{11} - \ddot\alpha_{11}\alpha_{31}) + b_2^{\,2}(\ddot\alpha_{32}\alpha_{12} - \ddot\alpha_{12}\alpha_{32}) + \\
+ b_3^{\,2}(\ddot\alpha_{33}\alpha_{13} - \ddot\alpha_{13}\alpha_{33})] = (\frac{\partial\rho_0}{\partial c}\frac{\partial\Phi_0}{\partial a} - \frac{\partial\rho_0}{\partial a}\frac{\partial\Phi_0}{\partial c}), \\
(S_1^0 G_2 - S_2^0 G_1) + \frac{\rho_0}{b_1 b_2}[b_1^{\,2}(\ddot\alpha_{11}\alpha_{21} - \ddot\alpha_{21}\alpha_{11}) + b_2^{\,2}(\ddot\alpha_{12}\alpha_{22} - \ddot\alpha_{22}\alpha_{12}) + \\
+ b_3^{\,2}(\ddot\alpha_{13}\alpha_{23} - \ddot\alpha_{23}\alpha_{13})] = (\frac{\partial\rho_0}{\partial a}\frac{\partial\Phi_0}{\partial b} - \frac{\partial\rho_0}{\partial b}\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}).
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Здесь обозначено

$$
\begin{gathered}
G_1 = (\ddot\alpha_{11}\alpha_{11} + \ddot\alpha_{12}\alpha_{12}\frac{b_2^{\,2}}{b_1^{\,2}} + \ddot\alpha_{13}\alpha_{13}\frac{b_3^{\,2}}{b_1^{\,2}})x_1^0 + \\
+ (\ddot\alpha_{21}\alpha_{11}\frac{b_1}{b_2} + \ddot\alpha_{22}\alpha_{12}\frac{b_2}{b_1} + \ddot\alpha_{23}\alpha_{13}\frac{b_3^{\,2}}{b_1 b_2})x_2^0 + \\
+ (\ddot\alpha_{31}\alpha_{11}\frac{b_1}{b_3} + \ddot\alpha_{32}\alpha_{12}\frac{b_2^{\,2}}{b_1 b_3} + \ddot\alpha_{33}\alpha_{13}\frac{b_3}{b_1})x_3^0, \\
G_2 = (\ddot\alpha_{11}\alpha_{21}\frac{b_1}{b_2} + \ddot\alpha_{12}\alpha_{22}\frac{b_2}{b_1} + \ddot\alpha_{13}\alpha_{23}\frac{b_3^{\,2}}{b_1 b_2})x_1^0 + \\
+ (\ddot\alpha_{21}\alpha_{21}\frac{b_1^{\,2}}{b_2^{\,2}} + \ddot\alpha_{22}\alpha_{22} + \ddot\alpha_{23}\alpha_{23}\frac{b_3^{\,2}}{b_2^{\,2}})x_2^0 + \\
+ (\ddot\alpha_{31}\alpha_{21}\frac{b_1^{\,2}}{b_2 b_3} + \ddot\alpha_{32}\alpha_{22}\frac{b_2}{b_3} + \ddot\alpha_{33}\alpha_{23}\frac{b_3}{b_2})x_3^0, \\
G_3 = (\ddot\alpha_{11}\alpha_{31}\frac{b_1}{b_3} + \ddot\alpha_{12}\alpha_{32}\frac{b_2^{\,2}}{b_1 b_3} + \ddot\alpha_{13}\alpha_{33}\frac{b_3}{b_1})x_1^0 + \\
+ (\ddot\alpha_{21}\alpha_{31}\frac{b_1^{\,2}}{b_2 b_3} + \ddot\alpha_{22}\alpha_{32}\frac{b_2}{b_3} + \ddot\alpha_{23}\alpha_{33}\frac{b_3}{b_2})x_2^0 + \\
+ (\ddot\alpha_{31}\alpha_{31}\frac{b_1^{\,2}}{b_3^{\,2}} + \ddot\alpha_{32}\alpha_{32}\frac{b_2^{\,2}}{b_3^{\,2}} + \ddot\alpha_{33}\alpha_{33})x_3^0.
\end{gathered}
$$

Преобразуем левую часть полученного уравнения, заменим вторые производные от направляющих косинусов через первые производные и воспользуемся тем, что каждый косинус равен своему алгебраическому дополнению.

Выразив направляющие косинусы через проекции угловой скорости на оси неподвижной системы координат, получим

$$
\begin{gathered}
\dot\alpha_{11} = \omega_2\alpha_{13} - \omega_3\alpha_{12}, \quad \dot\alpha_{12} = \omega_3\alpha_{11} - \omega_1\alpha_{13}, \quad \dot\alpha_{13} = \omega_1\alpha_{12} - \omega_2\alpha_{11}, \\
\dot\alpha_{21} = \omega_2\alpha_{23} - \omega_3\alpha_{22}, \quad \dot\alpha_{22} = \omega_3\alpha_{21} - \omega_1\alpha_{23}, \quad \dot\alpha_{23} = \omega_1\alpha_{22} - \omega_2\alpha_{21}, \\
\dot\alpha_{31} = \omega_2\alpha_{33} - \omega_3\alpha_{32}, \quad \dot\alpha_{32} = \omega_3\alpha_{31} - \omega_1\alpha_{33}, \quad \dot\alpha_{33} = \omega_1\alpha_{32} - \omega_2\alpha_{31}.
\end{gathered}
$$

После несложных, но громоздких преобразований система (14) запишется в виде

$$
\begin{gathered}
b_2b_3(S_2^0G_3 - S_3^0G_2) + \rho_0\frac{d}{dt}[(b_2{}^2 + b_3{}^3)\omega_1\alpha_{11} + (b_1{}^2 + b_3{}^2)\omega_2\alpha_{12} + \\
+ (b_1{}^2 + b_2{}^2)\omega_3\alpha_{13}] = b_2b_3g(S_2^0\gamma_3^0 - S_3^0\gamma_2^0), \\
b_1b_3(S_3^0G_1 - S_1^0G_3) + \rho_0\frac{d}{dt}[(b_2{}^2 + b_3{}^3)\omega_1\alpha_{21} + (b_1{}^2 + b_3{}^2)\omega_2\alpha_{22} + \\
+ (b_1{}^2 + b_2{}^2)\omega_3\alpha_{23}] = b_1b_3g(S_3^0\gamma_1^0 - S_1^0\gamma_3^0), \\
b_1b_2(S_1^0G_2 - S_2^0G_1) + \rho_0\frac{d}{dt}[(b_2{}^2 + b_3{}^3)\omega_1\alpha_{31} + (b_1{}^2 + b_3{}^2)\omega_2\alpha_{32} + \\
+ (b_1{}^2 + b_2{}^2)\omega_3\alpha_{33}] = b_1b_2g(S_1^0\gamma_2^0 - S_2^0\gamma_1^0).
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Далее полученные уравнения проинтегрируем по объему, занимаемому жидкостью. В результате интегрирования слагаемые, содержащие линейные функции x_1^0, x_2^0, x_3^0, обратятся в нуль, и после некоторых преобразований будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A_1\omega_1\alpha_{11} + A_2\omega_2\alpha_{12} + A_3\omega_3\alpha_{13}) = \frac{V_{\text{эл}}}{5}(S_2^0\gamma_3^0 - S_3^0\gamma_2^0)b_2b_3g\,, \\
&\frac{d}{dt}(A_1\omega_1\alpha_{21} + A_2\omega_2\alpha_{22} + A_3\omega_3\alpha_{23}) = \frac{V_{\text{эл}}}{5}(S_3^0\gamma_1^0 - S_1^0\gamma_3^0)b_1b_3g\,, \\
&\frac{d}{dt}(A_1\omega_1\alpha_{31} + A_2\omega_2\alpha_{32} + A_3\omega_3\alpha_{33}) = \frac{V_{\text{эл}}}{5}(S_1^0\gamma_2^0 - S_2^0\gamma_1^0)b_2b_1g,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где A_1, A_2, A_3 — моменты инерции «затвердевшей» жидкости относительно неподвижных осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно; m — масса «затвердевшей» жидкости; $V_{\text{эл}}$ — объем эллипсоида, $\gamma_i^0(t)$ — функции времени, которые определяют ориентацию подвижной (сопутствующей) системы координат жидкости в эллипсоидальной полости относительно направления однородного силового поля и удовлетворяют уравнениям:

$$
\begin{aligned}
\gamma_1^0(t) &= \gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{12}\frac{b_2}{b_1} + \gamma_3\alpha_{13}\frac{b_3}{b_1}, \\
\gamma_2^0(t) &= \gamma_1\alpha_{21}\frac{b_1}{b_2} + \gamma_2\alpha_{22} + \gamma_3\alpha_{23}\frac{b_3}{b_2}, \\
\gamma_3^0(t) &= \gamma_1\alpha_{31}\frac{b_1}{b_3} + \gamma_2\alpha_{32}\frac{b_2}{b_3} + \gamma_3\alpha_{33}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Для того чтобы сделать совпадение формально полным, заменим параметры S_i^0 через координаты центра тяжести c_i^0 неоднородной жидкости в начальный момент времени:

$$c_i^0 = \frac{S_i^0}{5\,S_0} b_i^2.$$

В результате уравнения (16) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A_1\omega_1\alpha_{11} + A_2\omega_2\alpha_{12} + A_3\omega_3\alpha_{13}) = mg\,(\overline{c}_2^0\overline{\gamma}_3^0 - \overline{c}_3^0\overline{\gamma}_2^0),\\
&\frac{d}{dt}(A_1\omega_1\alpha_{21} + A_2\omega_2\alpha_{22} + A_3\omega_3\alpha_{23}) = mg\,(\overline{c}_3^0\overline{\gamma}_1^0 - \overline{c}_1^0\overline{\gamma}_3^0),\\
&\frac{d}{dt}(A_1\omega_1\alpha_{31} + A_2\omega_2\alpha_{32} + A_3\omega_3\alpha_{33}) = mg\,(\overline{c}_1^0\overline{\gamma}_2^0 - \overline{c}_2^0\overline{\gamma}_1^0)
\end{aligned} \tag{18}$$

или в векторном виде

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = mg[\overrightarrow{\overline{c}^0} \times \overrightarrow{\overline{\gamma}^0}]. \tag{19}$$

Здесь $\overrightarrow{M}$ — кинетический момент жидкости при $t = t_0$, $\overline{c}_i^0 = \mathrm{const}$ — безразмерные координаты центра масс жидкости в системе K_0:

$$\overline{c}_i^0 = \frac{c_i^0}{b_i}, \qquad \overline{\gamma}_i^0 = \gamma_i^0 b_i,$$

где $\overline{\gamma}_i^0$ — компоненты вектора, имеющие размерность длины, определяющие ориентацию подвижной системы K_0 относительно направления ускорения однородного силового поля и удовлетворяющие уравнению Пуассона

$$\frac{d\overrightarrow{\overline{\gamma}^0}}{dt} = [\overrightarrow{\overline{\gamma}^0} \times \vec{\omega}]. \tag{20}$$

Вывод уравнения вихревого движения неоднородной жидкости в переменных Эйлера. Уравнения однородного вихревого движения неоднородной жидкости, записанные в виде (18), совпадают по форме записи с уравнениями движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, написанными в неподвижной системе координат при произвольной ориентации последней относительно направления однородного поля сил тяжести.

Теперь умножим каждое из уравнений (18) на $\frac{\partial x_1}{\partial a}, \frac{\partial x_1}{\partial b}, \frac{\partial x_1}{\partial c}$ соответственно и сложим. После небольших преобразований придем к уравнениям, описывающим движение неоднородной жидкости в переменных Эйлера в неподвижной системе K:

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 &= mg\,(\overline{c}_2\overline{\gamma}_3 - \overline{c}_3\overline{\gamma}_2), \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 &= mg\,(\overline{c}_3\overline{\gamma}_1 - \overline{c}_1\overline{\gamma}_3), \\ A_3\dot{\omega}_3 + (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 &= mg\,(\overline{c}_1\overline{\gamma}_2 - \overline{c}_2\overline{\gamma}_1), \end{aligned}$$

или в векторной форме

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} - [\vec{\omega}\times\overrightarrow{M}] = mg[\vec{\overline{c}}\times\vec{\overline{\gamma}}], \tag{21}$$

где $\overline{\gamma}_i = \gamma_i b_i$, $\overline{\gamma}_i = \text{const}$ в системе отсчета K, а безразмерные координаты центра масс определяются формулами:

$$\overline{c_i} = \frac{c_i}{b_i}, \quad c_i = \frac{S_i}{5\,S_0} b_i^2, \tag{22}$$

$$c_1 = c_1^0\alpha_{11} + c_2^0\alpha_{21}\frac{b_1}{b_2} + c_3^0\alpha_{31}\frac{b_1}{b_3} \quad (1, 2, 3). \tag{23}$$

Отметим, что уравнение (21) может быть также получено непосредственно из уравнения Фридмана в переменных Эйлера для несжимаемой жидкости:

$$\nabla\rho\times\nabla\vec{G} + \rho\frac{d\vec{\Omega}}{dt} - \vec{\Omega}\cdot\nabla\vec{V} = \nabla\rho\times\nabla\,\Phi,$$

где

$$\rho = S_0 + S_1\,x_1 + S_2 x_2 + S_3\,x_3, \qquad \vec{G} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \tag{24}$$

Найдем уравнения для коэффициентов c_i. Для этого запишем уравнение постоянства плотности жидкости в переменных Эйлера:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\nabla\rho\cdot\overline{U}) = 0. \tag{25}$$

Используя соотношения (18), (22)–(25), получим следующее уравнение для безразмерного вектора центра масс:

$$\frac{d\vec{\overline{c}}}{dt} = [\vec{\omega}\times\vec{\overline{c}}]. \tag{26}$$

Анализ уравнений движения. Вид уравнений (21), (26) формально совпадает с видом уравнений Эйлера — Пуассона движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Однако роль параметров $\vec{\bar{c}}, \vec{\bar{\gamma}}$ в уравнениях (21), (26) так же, как и при использовании переменных Лагранжа, разная. При рассмотрении движения неоднородной жидкости в неподвижной системе $\bar{\gamma} = \text{const},$ а вектор $\vec{\bar{c}}$ подчиняется уравнению (26), в то время как для тяжелого твердого тела в подвижной системе $\vec{\bar{c}} = \text{const},$ а $\bar{\gamma}$ подчиняется уравнению (20).

Для выяснения причины перестановки сомножителя $\vec{\omega}$ в векторном произведении левой части уравнения (21) воспользуемся результатами работ [9, 14], в которых введено понятие обобщенного твердого тела с конфигурационным пространством *G* на произвольной группе Ли. Согласно результатам [14], в качестве обобщенного твердого тела в рассматриваемом случае выступает неоднородная идеальная (несжимаемая и невязкая) жидкость, в качестве группы *G* — группа диффеоморфизмов ограниченной области *D*, сохраняющих элемент объема. Движение такой идеальной жидкости обладает кинетической энергией *T*, которая задает правоинвариантную риманову метрику на этой группе, в то время как кинетическая энергия эйлерова движения твердого тела задает левоинвариантную метрику по группе $S_0(3)$.

Если жидкость однородная, так что все $c_i = 0,$ то уравнение (21) приобретает вид векторного уравнения Гельмгольца для однородного вихревого движения однородной жидкости, а уравнения движения твердого тела при $\vec{c} = 0$ принимают вид уравнений движения твердого тела по инерции вокруг неподвижной точки. Но выполнение уравнения (21) при $c_i = 0,\ (i = 1, 2, 3)$ указывает на сохраняемость векторных линий и интенсивности векторных трубок вектора ω [13]. Другими словами, движение жидкости в этом случае будет безвихревым или вихревым с постоянной интенсивностью, если оно было таковым в начальный момент времени. Наличие же правой части при $c_i \neq 0$ в уравнении (21) означает, что однородное вихревое движение неоднородной жидкости может возникать и разрушаться. Это указывает на качественное различие между одинаковыми движениями однородной и неоднородной жидкостей.

Геометрическая интерпретация Пуансо. Геометрическая интерпретация Пуансо дает наглядное геометрическое представление о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Согласно теореме Якоби, любое движение симметричного весомого гироскопа всегда может быть разложено на два: на прямое движение Пуансо и на обращенное движение. Как известно, прямое движение Пуансо есть качение без скольжения эллипсоида инерции по неподвижной плоскости (рис. 3).

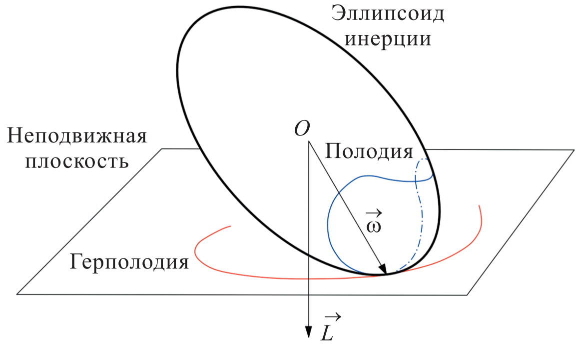

Рис. 3. Прямое движение Пуансо

Обращенное движение геометрически истолковывается как качение без скольжения касательной плоскости по неподвижной центральной поверхности второго порядка при неизменном расстоянии от центра поверхности до плоскости [10]. Следовательно, однородное вихревое движение неоднородной жидкости в неподвижной эллипсоидальной полости вращения можно представить как обращенное движение по Пуансо, при котором касательные плоскости совершают движения по неподвижной поверхности второго порядка (рис. 4). Движения касательных плоскостей могут быть заменены качением без скольжения герполодиальных конусов, неизменно связанных с этими плоскостями по одному и тому же полодиальному конусу.

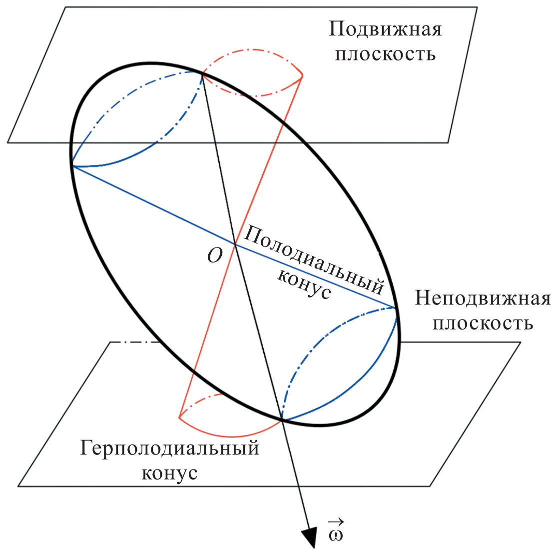

Рис. 4. Обращенное движение Пуансо

Заключение. Учитывая вышеизложенное, приходим к следующему выводу: различный смысл параметров при переходе от движения твердого тела к движению идеальной жидкости указывает на формальную замену подвижной системы координат неподвижной системой и формальную необходимость считать проекции угловой скорости твердого тела на подвижные оси проекциями угловой скорости жидкости на неподвижные оси, а правоинвариантность метрики, в свою очередь, приводит к формальной необходимости смены знака этих проекций или перестановки $\vec{\omega}$ в векторном произведении левой части уравнения (21).

Приведенная аналогия уравнений однородного вихревого движения неоднородной жидкости уравнениям движения твердого тела вокруг неподвижной точки позволяет определить параметры движения и траектории частиц жидкости в любой момент времени по имеющимся решениям уравнений движения твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колесников К.С. *Динамика ракет*. Москва, Машиностроение, 2003, 520 с.
[2] Poincare H. Sur la precession des corps deformables. *Bulletin astronomique,* 1910, vol. 27, pp. 321–356.
[3] Жуковский Н.Е. *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью*. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 137 с.
[4] Hough S.S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 1895, vol. 186, part 1, pp. 469–506.
[5] Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. *Динамика тела с полостями, содержащими жидкость*. Москва, Наука, 1965, 439 с.
[6] Ламб Г. *Гидродинамика*. Москва, Гостехиздат, 1947, 928 с.
[7] Савченко А.Я., Ковалев И.Н., Галло И.В., Болграбокая И.А., Нестеров О.Ю., Судаков С.Н., Чуденко А.Н. Динамика системы связанных твердых тел и тел с полостями, содержащими жидкость. *Препринт. АН УССР, Ин-т прикл. матем. и мех*. Донецк, 1990, 50 с.
[8] Савченко А.Я., Кононов Ю.Н., Бенькович Ю.Г., Позднякович Е.В., Мосияш Т.А., Судаков С.Н. Некоторые задачи устойчивости движения твердого тела с вихревым заполнением. *Препринт. АН УССР, Ин-т прикл. матем. и мех*. Донецк, 1990, 46 с.
[9] Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. *Системы гидродинамического типа и их применение*. Москва, Наука, 1981, 366 с.
[10] Суслов Г.К. *Теоретическая механика*. Москва, Гостехиздат, 1946, 655 р.
[11] Колесников К.С., Дубинин В.В. *Курс теоретической механики*. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 580 с.
[12] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*. Т. 1. Москва, Физматгиз, 1963, 584 с.
[13] Фридман А.А. *Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости*. Ленинград, Гос. техн.-теоретич. изд-во, 1934, 377 с.
[14] Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. Москва, Наука, 2017, 416 с.

Статья поступила в редакцию 19.05.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Темнов А.Н., Ян Наинг У. Механический аналог движений неоднородной жидкости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2022, вып. 7.

http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-7-2192

Темнов Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: antt45@mail.ru

Ян Наинг У — аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yannaingoo.5256@gmail.com

Mechanical analogue of the motions of an inhomogeneous fluid

© A.N. Temnov, Yan Naing Oo

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers the homogeneous vortex motion of an inhomogeneous fluid in a stationary ellipsoidal cavity arbitrarily oriented with respect to the direction of a uniform gravity field using the Lagrange variables. Uniform vortex motion of a fluid is a motion in which the rotor speed for all particles has the same value, and depends only on time. The article shows that the equations of homogeneous vortex motion of a heavy inhomogeneous fluid are possible in an ellipsoidal cavity with a linear density distribution and proposes a geometric interpretation of fluid motion.

Using the Lagrange variables, the equations of motion of an inhomogeneous fluid are obtained, coinciding with the equations of a heavy rigid body motion around a fixed point, written in a fixed coordinate system arbitrarily located relative to the direction of a homogeneous gravity field.

Keywords: *Lagrange variables, Friedmann equation, vortex motion, coordinate system*

REFERENCES

[1] Kolesnikov K.S. *Dinamika raket* [Dynamics of rockets]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003, 520 p.

[2] Poincare H. *Bulletin astronomique*, 1910, vol. 27, pp. 321–356.

[3] Zhukovsky N.E. *O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoy kapelnoy zhidkostyu* [Dynamics of a rigid body with cavities partially filled with liquid]. Moscow, BMSTU Publ., 2017, 137 p.

[4] Hough S.S. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, 1985, vol. 186, part 1, pp. 469–506.

[5] Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. *Dinamika tela s polostyami soderzhashhimi zhidkost* [Dynamics of a body with cavities containing liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 439 p.

[6] Lamb H. *Hydrodynamics.* Cambridge, University Press Publ., 1916 [In Russ.: Lamb H. Gidrodinamika. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1947, 928 p.].

[7] Savchenko A.Ya., Kovalev I.N, Gallo I.V., Bolgrabokaja I.A., Nesterov O.Yu., Sudakov S.N., Chudenko A.N. Dinamika sistemy svyazannykh tverdykh tel i tel s polostyami, soderzhashhimi zhidkost [Dynamics of a system of connected rigid bodies and bodies with cavities containing liquid.]. *Preprint*. Donetsk, AN USSR, Institut prikladnoy matematiki i mekhaniki Publ., 1990, 50 p.

[8] Savchenko A.Ya., Kononov Yu.N., Benkovich Yu.G., Pozdnyakovich E.V., Mosiyash T.A., Sudakov S.N. *Nekotorye zadachi ustoychivosti dvizheniya tverdogo tela s vikhrevym zapolneniem* [Some problems of stability of motion of a rigid body with vortex filling]. *Preprint*. Donetsk, AN USSR, Institut prikladnoy matematiki i mekhaniki Publ., 1990, 46 p.

[9] Gledzer E.B., Dolzhansky F.V., Obukhov A.M. *Sistemy gidrodinamicheskogo tipa i ikh primenenie* [Hydrodynamic type systems and their application]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 366 p.

[10] Suslov G.K. *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical mechanics]. Moscow, Gostekhizdat. Publ., 1946, 655 p.

[11] Kolesnikov K.S., Dubinin V.V. *Kurs Teoreticheskoy mekhaniki* [Course of Theoretical Mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2017, 580 c.

[12] Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical fluid mechanics]. Vol. 1. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 584 p.
[13] Fridman A.A. *Opyt gidromekhaniki szhimaemoy zhidkosti* [Experience in hydromechanics of a compressible fluid]. Leningrad, Gosudarstvennoe tekhniko-teoreticheskoe izdatelstvo Publ., 1934, 377 p.
[14] Arnold V.I. *Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki* [Mathematical methods of classical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 2017, 416 p.

Temnov A.N., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: antt45@mail.ru

Yan Naing Oo, post-graduate student, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yannaingoo.64528@gmail.com