УДК 517.947.44 DOI: 10.18698/2308-6033-2022-6-2185

Определение функций чувствительности вектора фазовых координат линейной динамической системы на основе интегро-степенного ряда по матрице вариаций параметров

© О.Н. Тушев, А.В. Беляев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен метод вычисления функций чувствительности первого и второго порядков фазовых координат, не требующих интегрирования громоздких цепочно-связанных систем дифференциальных уравнений. Общее и частное решения векторного дифференциального уравнения движения, записанного в форме Коши, выражаются через фундаментальную матрицу. С помощью формальных преобразований вектор фазовых координат представлен в виде сходящегося интегро-степенного ряда по матрице, определяющей вариации элементов матрицы коэффициентов уравнения системы, названной в работе матрицей вариаций. Затем полученные соотношения специальными операциями трансформируются к явному виду относительно этих вариаций до квадратического приближения включительно. В рамках матричного аппарата находятся аналогичные разложения по вариациям внешнего воздействия и начальных условий. Для исключения многочисленных «паразитных» операций умножения на нуль при вычислениях предложено использовать специальные операции матричной алгебры. Исходная и обратная фундаментальные матрицы трактуются как мультипликативные интегралы, что обеспечивает простое их вычисление во времени по рекуррентным формулам. Полученный в результате аппарат построен полностью на матричных операциях, что обеспечивает простую машинную реализацию и универсальность.

Ключевые слова: *функции чувствительности, вариация, интегро-степенной ряд, мультипликативный интеграл, линейное и квадратическое приближения*

Введение. Процесс проектирования конструкций летательных аппаратов (ЛА) связан с параметрическим анализом. Он дает возможность выявить влияние детерминированных и случайных вариаций параметров самой системы, внешних воздействий и начальных условий на перемещения, ускорения, внутренние силовые факторы, значения которых определяют функциональность проектируемого объекта. Важным элементом параметрического анализа является теория чувствительности. Обзорные материалы применения теории чувствительности в области прикладных задач механики приведены в [1]. Задачи анализа и параметрического синтеза, связанные с динамикой и прочностью конструкций, рассмотрены в [2–4]. В современных методиках расчета летательных аппаратов в основном используются многомерные конечно-элементные модели конструкций [5, 6]. Вектор вариаций параметров конструкции в таких случаях может иметь высокую размерность [7, 8].

Несколько обособленной от общей теории представляется задача нахождения функций чувствительности фазовых координат системы, динамика которой определяется системой линейных или нелинейных дифференциальных уравнений. Широко распространенным способом их вычисления является интегрирование цепочно-связанных систем дифференциальных уравнений, полученных последовательным дифференцированием исходной системы уравнений по варьируемым параметрам [1, 4]. Этот очевидный и зачастую единственно возможный путь решения все же слишком громоздкий, в каждом конкретном случае для его реализации требуется относительно большая подготовительная работа, и он недостаточно удобен для численной реализации. В данной работе для решения линейных и линеаризованных систем предлагается методика, в которой не требуется дифференцирование исходной системы уравнений по варьируемым параметрам.

Для того чтобы получить разложение вектора фазовых координат в ряд по вариациям параметров, обычно сначала находят функции чувствительности, которые и позволяют его сформировать. В предлагаемой методике используется интегро-степенной ряд по матрице вариаций. Путем формальных матричных операций он трансформируется в обычный ряд Тейлора по вариациям параметров в окрестности номинального решения (коэффициенты ряда — функции чувствительности).

Постановка задачи и метод решения. Считаем, что динамическое поведение системы описывается векторным дифференциальным уравнением в форме Коши

$$\begin{gathered}\dot{\mathrm{Y}}=\left[\mathrm{B}(t)+\Delta(t,\mathrm{A})\right]\mathrm{Y}+\mathrm{G}(t);\\ \mathrm{Y}(0)=\mathrm{Y}_0,\end{gathered}\tag{1}$$

где $\mathrm{Y}=\left(y_1, y_2,\ ...,\ y_n\right)^T$ — вектор фазовых координат, точкой обозначено дифференцирование по времени t; Y_0 — начальный вектор фазовых координат, заданный при $t=0$; $\mathrm{B}(t)$ — квадратная матрица номинальных значений коэффициентов уравнения; $\Delta(\mathrm{A},t)$ — матрица отклонений коэффициентов уравнения от номинальных значений $\Delta(\mathrm{A},t)=\left[a_{ij}\delta_{ij}(t)\right]_1^n$; $\mathrm{A}=\left[a_{ij}\right]_1^n$ — матрица варьируемых параметров $b_{ij}(t),\delta_{ij}(t)\ \forall i,j$ — заданные функции времени, интегрируемые по Риману (ограничены и имеют конечное число разрывов на участке интегрирования); $\mathrm{G}(t)$ — вектор внешних воздействий.

Запишем решение уравнения (1) в следующем виде:

$$\mathrm{Y} = \Omega_0^t(\mathrm{B}+\Delta)\,\mathrm{Y}_0 + \Omega_0^t(\mathrm{B}+\Delta)\int\limits_0^t \left[\Omega_0^w(\mathrm{B}+\Delta)\right]^{-1}\mathrm{G}(w)dw, \tag{2}$$

где $\Omega_0^t(\mathrm{B}+\Delta)$ — фундаментальная матрица (столбцами являются n линейно независимых решений системы), $\Omega_0^0 = \mathrm{E}$ при $t = 0$.

Преобразуем прямую и обратную фундаментальные матрицы по известным формулам [9]:

$$\begin{gathered}\Omega_0^t(\mathrm{B}+\Delta) = \Omega_0^t(\mathrm{B})\;\Omega_0^t(\mathrm{D}),\\ \left[\Omega_0^w(\mathrm{B}+\Delta)\right]^{-1} = \left[\Omega_0^w(\mathrm{D})\right]^{-1}\left[\Omega_0^w(\mathrm{B})\right]^{-1},\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\mathrm{D} = \left[\Omega_0^t(\mathrm{B})\right]^{-1}\Delta(t,\mathrm{A})\;\Omega_0^t(\mathrm{B}). \tag{4}$$

В дальнейшем назовем матрицу D матрицей вариаций. В [9, 10] показано, что прямая и обратная фундаментальные матрицы представимы в виде равномерно и абсолютно сходящихся интегро-степенных рядов. Разложим в такие ряды фундаментальные матрицы от D, входящие в соотношения (3),

$$\Omega_0^t(\mathrm{B}+\Delta) = \Omega_0^t(\mathrm{B})\left[\mathrm{E} + \int\limits_0^t \mathrm{D}(v)dv + \int\limits_0^t \mathrm{D}(s)\int\limits_0^s \mathrm{D}(v)dvds + \ldots\right], \tag{5}$$

$$\left[\Omega_0^w(\mathrm{B}+\Delta)\right]^{-1} = \left[\mathrm{E} - \int\limits_0^w \mathrm{D}(v)dv + \int\limits_0^w\int\limits_0^s \mathrm{D}(v)\,\mathrm{D}(s)dvds - \ldots\right]\left[\Omega_0^w(\mathrm{B})\right]^{-1}. \tag{6}$$

Выражение (5) определяет, по существу, разложение общего решения $\mathrm{Y}_1(t)$ однородного уравнения в ряд по матрице вариаций. Для того чтобы получить аналогичное разложение частного решения $\mathrm{Y}_2(t)$, подставим (5) и (6) во второй член равенства (2) и сгруппируем члены по степеням матрицы вариаций. Тогда при номинальных значениях параметров системы частное решение будет иметь вид

$$\mathrm{Y}_2^{(0)}(t) = \Omega_0^t(\mathrm{B})\int\limits_0^t \left[\Omega_0^w(\mathrm{B})\right]^{-1}\mathrm{G}(w)dw, \tag{7}$$

а линейное приближение частного решения —

$$\mathrm{Y}_2^{(1)}(t) = \Omega_0^t(\mathrm{B})\left[\int_0^t \mathrm{D}(v)dv\int_0^t \left[\Omega_0^w(\mathrm{B})\right]^{-1}\mathrm{G}(w)dw - \right.$$
$$\left. -\int_0^t\int_0^w \mathrm{D}(v)dv\left[\Omega_0^w(\mathrm{B})\right]^{-1}\mathrm{G}(w)dw\right]. \tag{8}$$

Возьмем второй интеграл в квадратных скобках соотношения (8) по частям. Обозначим:

$$u = \int_0^w \mathrm{D}(v)\,dv, \quad du = \mathrm{D}(v)dv,$$

$$dr = \left[\Omega_0^w(\mathrm{B})\right]^{-1}\mathrm{G}(w)dw,\ r = \int_0^v \left[\Omega_0^w(\mathrm{B})\right]^{-1}\mathrm{G}(w)dw.$$

В этом случае

$$\mathrm{Y}_2^{(1)}(t) = \Omega_0^t(\mathrm{B})\int_0^t \mathrm{D}(v)\int_0^v \left[\Omega_0^w(\mathrm{B})\right]^{-1}\mathrm{G}(w)dw\,dv. \tag{9}$$

С помощью преобразований, аналогичных для (9), получим квадратическое приближение

$$\mathrm{Y}_2^{(2)}(t) = \Omega_0^t(\mathrm{B})\int_0^t \mathrm{D}(s)\int_0^s \mathrm{D}(v)\int_0^v \left[\Omega_0^w(\mathrm{B})\right]^{-1}\mathrm{G}(w)dw\,dv\,ds. \tag{10}$$

С учетом (7), (9) и (10) запишем частное решение в следующем виде:

$$\mathrm{Y}_2(t) = \Omega_0^t(\mathrm{B})\left[\mathrm{N}(t) + \int_0^t \mathrm{D}(v)\,\mathrm{N}(v)dv + \int_0^t \mathrm{D}(s)\int_0^s \mathrm{D}(v)\,\mathrm{N}(v)dv\,ds\right], \tag{11}$$

где $\mathrm{N}(t) = \int_0^t \left[\Omega_0^w(\mathrm{B})\right]^{-1}\mathrm{G}(w)dw.$

Используя (5) и (11), окончательно получим разложение решения в ряд по матрице вариаций:

$$\mathrm{Y}(t) = \Omega_0^t(\mathrm{B})\left[\mathrm{M}(t) + \int_0^t \mathrm{D}(v)\,\mathrm{M}(v)dv + \int_0^t \mathrm{D}(s)\int_0^s \mathrm{D}(v)\,\mathrm{M}(v)dv\,ds\right], \tag{12}$$

где $\mathrm{M}(t) = \mathrm{Y}_0 + \mathrm{N}(t).$

Заметим, что каждый последующий член разложения в решении (12) строится путем умножения предыдущего члена слева на матрицу вариаций и интегрированием полученного произведения в заданном интервале времени. Учет в полученных разложениях трех членов ряда точно соответствует разложению любой фазовой координаты в ряд Тейлора по a_{ij} $\forall i, j$ до квадратических членов включительно. С практической точки зрения именно такие разложения представляют интерес.

Теперь необходимо получить явную зависимость вектора фазовых координат от вариаций параметров. Для дальнейших выкладок введем понятие матричной единицы J_{ij} и векторной J_i единицы, которые имеют все нулевые элементы за исключением элементов с номерами $i\,j$ и i, которые равны единице. Это позволяет представить любую матрицу или вектор в виде суммы по их элементам. Тогда можно записать

$$\Delta(t, \mathrm{A}) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \delta_{ij}(t)\, \mathrm{J}_{ij}. \tag{13}$$

Подставим (13) в (4), а затем полученное равенство — в (12). Получим окончательное соотношение в явном виде, удобное для численной реализации:

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}(t) = \Omega_0^t(\mathrm{B}) \Bigg[\mathrm{M}(t) + \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \int_0^t \delta_{ij}(v)\, \mathrm{R}_{ij}(v)\, \mathrm{M}(v) dv + \\ + \sum_{ijkh=1}^{n} a_{ij} a_{kh} \int_0^t \delta_{kh}(s)\, \mathrm{R}_{kh}(s) \int_0^s \delta_{ij}(v)\, \mathrm{R}_{ij}(v)\, \mathrm{M}(v) dv ds \Bigg], \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\mathrm{R}_{ij}(t) = \left[\Omega_0^t(\mathrm{B}) \right]^{-1} \mathrm{J}_{ij}\, \Omega_0^t(\mathrm{B}). \tag{15}$$

Коэффициенты при степенях и произведениях элементов матрицы A являются функциями чувствительности, но для полной формальной идентичности разложения (14) и ряда Тейлора требуется ввести в квадратичный член коэффициент $\frac{1}{2}$, что следует учитывать при их вычислении. В целях экономии машинных ресурсов следует воспользоваться свойством симметрии матрицы Гессе при вычислении квадратического члена. Тогда он преобразуется к виду

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}^2 \int_0^t \delta_{ij}(s)\, \mathrm{R}_{ij}(s) \int_0^s \delta_{ij}(v)\, \mathrm{R}_{ij}(v)\, \mathrm{M}(v) dv\, ds +$$

$$+2 \sum_{\substack{ijkh=1, \\ k>i, h>j}}^{n} a_{ij} a_{kh} \int_0^t \delta_{kh}(s)\, \mathrm{R}_{kh}(s) \int_0^s \delta_{ij}(v)\, \mathrm{R}_{ij}(v)\, \mathrm{M}(v) dv\, ds.$$

Умножение трех матриц при вычислении $\mathrm{R}_{ij}(t)$ следует проводить по специальному правилу, чтобы избежать многочисленных «паразитных» операций умножения на нуль. Допустим, что A, B — произвольные квадратные матрицы, тогда

$$\mathrm{AJ}_{ij}\, \mathrm{B} = \mathrm{A}_i\, \mathrm{B}_j,$$

где A_i — i-й столбец; B_j — j-я строка.

Умножение квадратной матрицы на векторную единицу:

$$\mathrm{AJ}_i = \mathrm{A}_i,$$

где A_i — вектор с элементами a_{ij} $\forall j$.

Полученные результаты несложно обобщить, если учесть вариации начальных условий и внешних воздействий, оставаясь при этом в рамках квадратического приближения.

Представим вектор начальных условий в виде

$$\mathrm{Y}_0 = \tilde{\mathrm{Y}}_0 + \tilde{\mathrm{A}}$$

или

$$\mathrm{Y}_0 = \tilde{\mathrm{Y}}_0 + \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i\, \mathrm{J}_i, \qquad (16)$$

где $\tilde{\mathrm{Y}}_0$ — номинальное значение вектора; $\tilde{\mathrm{A}} = \left(\tilde{a}_1,\ \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n\right)^T$ — вектор вариаций начальных условий.

Тогда после подстановки (16) в (14) получим решение для свободного движения системы при $\mathrm{M}(t) = \mathrm{Y}_0$:

$$\mathrm{Y}(t) = \Omega_0^t(\mathrm{B}) \Bigg[\tilde{\mathrm{Y}}_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathrm{J}_i + \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \int_0^t \delta_{ij}(v)\, \mathrm{R}_{ij}(v)\, \mathrm{M}\, dv\, \tilde{\mathrm{Y}}_0 +$$

$$+ \sum_{ijk=1}^{n} a_{ij} \tilde{a}_k \int_0^t \delta_{ij}(v)\, \mathrm{R}_{ij}(v)\, \mathrm{J}_k dv + \qquad (17)$$

$$+ \sum_{ijkh=1}^{n} a_{ij} a_{kh} \int_0^t \delta_{kh}(s)\, \mathrm{R}_{kh}(s) \int_0^s \delta_{ij}(v)\, \mathrm{R}_{ij}(v)\, dv\, ds\, \tilde{\mathrm{Y}}_0 \Bigg].$$

Теперь рассмотрим вынужденное движение с учетом того, что элементы вектора внешних воздействий также имеют вариации; тогда

$$\mathrm{G}(t) = \mathrm{G}^*(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i^* \,\mathrm{J}_{ii}\, \mathrm{G}^*(t), \tag{18}$$

где $\mathrm{G}^*(t)$ — номинальный вектор; $\mathrm{a}^* = \left(a_1^*,\ a_2^*, ..., a_n^*\right)$ — вектор вариаций. С учетом (18) получим

$$\mathrm{N}(t) = \mathrm{N}^*(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i^* \,\mathrm{J}_{ii}\, \mathrm{N}^*(t), \tag{19}$$

где $\mathrm{N}^*(t) = \int\limits_0^t \left[\Omega_0^w(\mathrm{B})\right]^{-1} \mathrm{G}^*(w)\,dw.$

После преобразований вынужденное движение запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}_2(t) = \Omega_0^t(\mathrm{B}) \Bigg[& \mathrm{N}^*(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i^* \,\mathrm{J}_{ii}\, \mathrm{N}^*(t) + \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} \int\limits_0^t \delta_{ij}(v)\,\mathrm{R}_{ij}(v)\,\mathrm{N}^*(v)dv + \\
& + \sum_{ijk=1}^{n} a_{ij} a_k^* \int\limits_0^t \delta_{ij}(v)\,\mathrm{R}_{ij}(v)\,\mathrm{J}_{kk}\,\mathrm{N}^*(v)dv + \\
& + \sum_{ijkh=1}^{n} a_{ij} a_{kh} \int\limits_0^t \delta_{kh}(s)\,\mathrm{R}_{kh}(s) \int\limits_0^s \delta_{ij}(v)\,\mathrm{R}_{ij}(v)\,\mathrm{N}^*(v)dv\,ds \Bigg].
\end{aligned} \tag{20}$$

Коротко остановимся на вычислении фундаментальных матриц. Подробно этот аппарат изложен в [9]. Для моментов времени t и $t + \Delta t$ они на основе известного свойства связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\Omega_0^{t+\Delta t}(\mathrm{B}) = \Omega_t^{t+\Delta t}(\mathrm{B})\Omega_0^t(\mathrm{B});\\
&\left[\Omega_0^{t+\Delta t}(\mathrm{B})\right]^{-1} = \left[\Omega_0^t(\mathrm{B})\right]^{-1}\left[\Omega_t^{t+\Delta t}(\mathrm{B})\right]^{-1};\\
&\Omega_0^0(\mathrm{B}) = \left[\Omega_0^0(\mathrm{B})\right]^{-1} = \mathrm{E},
\end{aligned} \tag{21}$$

где Δt — малый шаг по времени.

Приближенное вычисление на интервале $[t,\ t + \Delta t]$ осуществляется с применением таких же интегро-степенных рядов, как в соотношениях (5) и (6), но только для другой матрицы коэффициентов:

$$\Omega_t^{t+\Delta t}(\mathrm{B}) = \mathrm{E} + \int\limits_t^{t+\Delta t}(\mathrm{B})dv + \ldots,$$
$$\left[\Omega_t^{t+\Delta t}(\mathrm{B})\right]^{-1} = \mathrm{E} - \int\limits_t^{t+\Delta t}(\mathrm{B})dv + \ldots. \tag{22}$$

Вследствие малости интервала в (22) учитываем только линейные члены и считаем, что

$$\Omega_t^{t+\Delta t}(\mathrm{B}) \cong \mathrm{E} + \mathrm{B}(t)\Delta t,$$
$$\left[\Omega_t^{t+\Delta t}(\mathrm{B})\right]^{-1} \cong \mathrm{E} - \mathrm{B}(t)\Delta t. \tag{23}$$

Подстановка (23) в (21) образует рекуррентные формулы для пошагового вычисления фундаментальных матриц:

$$\Omega_0^{t+\Delta t}(\mathrm{B}) = (\mathrm{E} + \mathrm{B}(t)\Delta t)\Omega_0^t(\mathrm{B}),$$
$$\left[\Omega_0^{t+\Delta t}(\mathrm{B})\right]^{-1} = \left[\Omega_0^t(\mathrm{B})\right]^{-1}(\mathrm{E} - \mathrm{B}(t)\Delta t). \tag{24}$$

Представление фундаментальных матриц в виде (23) называется мультипликативным интегралом. Несложно показать, что, по существу, такой способ вычисления полностью аналогичен методу Эйлера численного интегрирования дифференциальных уравнений. Порядок метода можно повысить, если учесть в (22) квадратические члены или построить аналог метода Эйлера — Коши.

Коэффициенты в уравнении движения (1) могут быть функциями (в общем случае нелинейными) конструктивных параметров системы. Для того чтобы получить зависимости, аналогичные (13), но относительно вариаций этих параметров, необходимо разложить вышеупомянутые функции в степенной ряд по вариациям, подставить полученные разложения в (14) и перегруппировать члены.

В реальных задачах практически никогда не требуется получение разложения по вариациям всех параметров системы, оно бывает нужно только по относительно небольшой их части, которая может быть на порядки меньше. Структура всех результирующих формул такова, что позволяет ввести такое ограничение весьма просто, без лишних затрат машинных ресурсов; это относится и к учету симметрии матрицы Гессе.

Заключение. Построен алгоритм вычисления функций чувствительности линейной динамической системы на основе интегростепенного ряда по матрице вариаций параметров. Он исключает процедуру интегрирования громоздких цепочно-связанных дифференциальных уравнений относительно функций чувствительности.

Разложения фазовых координат представлены по группам параметров (системы, начальных условий, внешних воздействий), что удобно для параметрического анализа. Алгоритм имеет простую численную реализацию, построенную исключительно на матричных операциях. Предложен алгебраический способ исключения многочисленных операций умножения на нуль в матричных вычислениях.

Работа поддержана грантом РФФИ №20-08-01076А.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Вклад ленинградских ученых в развитие теории чувствительности систем управления. *Труды СПИИРАН*, 2013, № 2 (25), с. 13–41.

[2] Бушуев А.Ю., Яковлев Д.О. О подходе к оптимизации упругих конструкций по частотным характеристикам. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, № S3, с. 66–69.

[3] Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. *Чувствительность систем управления.* Москва, Наука, 1981, 464 с.

[4] Хог Э., Чой К., Комков В. *Анализ чувствительности при проектировании конструкций.* Москва, Мир, 1988, 428 с.

[5] Хуан Ш., Костин В.А., Лаптева Е.Ю. Применение метода анализа чувствительности для решения обратной задачи ползучести кессона конструкции на основе модели суперэлементов. *Вестник Московского авиационного института*, 2018, т. 25, № 3, с. 64–72.

[6] Тушев О.Н., Березовский А.В. Чувствительность собственных значений и векторов к вариациям параметров конечно-элементных моделей конструкции. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2007, № 1, с. 35–44.

[7] Хейлен В., Ламменс С., Сас П. *Модальный анализ: теория и испытания*. Москва, ООО «Новатест», 2010, 319 с.

[8] Бацева О.Д., Дмитриев С.Н. Учет высших тонов колебаний при вычислении чувствительности собственных форм колебаний к вариациям параметров механической системы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 7. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-7-1785

[9] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* Москва, Физматлит, 2010, 558 с.

[10] Белмман Р. *Введение в теорию матриц.* Москва, Наука, 1969, 367 с.

Статья поступила в редакцию 23.05.2022

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Тушев О.Н., Беляев А.В. Определение функций чувствительности вектора фазовых координат линейной динамической системы на основе интегро-степенного ряда по матрице вариаций параметров. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2022, вып. 6. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-6-2185

Тушев Олег Николаевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана, SPIN-код: 9732-1625, AuthorID: 7336. e-mail: kafsm2@bmstu.ru

Беляев Александр Владимирович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана, SPIN-код: 6628-6341, AuthorID: 801751. e-mail: beliaev@bmstu.ru

Linear dynamic system phase coordinates vector: sensitivity functions definition according to the integro-power series from the matrix of parameter variations

© O.N. Tushev, A.V. Belyaev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper introduces a method for calculating sensitivity functions of the first and second orders of phase coordinates that do not require the integration of cumbersome chain-related systems of differential equations. The general and particular solutions of the vector differential equation of motion, written in the Cauchy form, are expressed in terms of the fundamental matrix. With the help of formal transformations, the vector of phase coordinates is represented as a convergent integro-power series with respect to the matrix that determines the variations of the elements of the matrix of system equation coefficients. In this work, the system is called the variation matrix. Then the relations obtained are transformed by special operations to an explicit form with respect to these variations up to and including the quadratic approximation. Within the framework of the matrix apparatus, there are similar expansions in terms of variations of the external influence and initial conditions. To exclude numerous "parasitic" operations of multiplication by zero in calculations, it is proposed to use special operations of matrix algebra. The original and inverse fundamental matrices are treated as multiplicative integrals, which ensures their simple calculation in time using recurrent formulas. The resulting apparatus is built entirely on matrix operations, which ensures simple machine implementation and versatility.

Keywords: *sensitivity functions, variation, integro-power series, multiplicative integral, linear and quadratic approximations*

The article was supported by RFBR grant no. 20-08-01076A.

REFERENCES

[1] Rozenvasser E.N., Yusupov R.M. *Trudy SPIIRAN — SPIIRAS Proceedings*, 2013, no. 2 (25), pp. 13–41.

[2] Bushuev A.Yu., Yakovlev D.O. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2011, no. S3, pp. 66–69.

[3] Rozenvasser E.N., Yusupov R.M. *Chuvstvitelnost sistem upravleniya* [Sensitivity of control systems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 464 p.

[4] Hog E., Choi K., Komkov V. *Analiz chuvstvitelnosti pri proektirovanii konstruktsii* [Sensitivity analysis in structural design]. Moscow, Mir Publ., 1988, 428 p. (In Russ.).

[5] Huang Sh., Kostin V.A., Lapteva E.Yu. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta — Aerospace MAI Journal*, 2018, vol. 25, no. 3, pp. 64–72.

[6] Tushev O.N., Berezovskiy A.V. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2007, no. 1, pp. 35–44.

[7] Heylen W., Lammens S., Sas P. *Modal Analysis Theory and Testing*. K.U. Leuven, Belgium, 1997. [In Russ.: Heylen W., Lammens S., Sas P. Modalny analiz: teoriya i ispytaniiy. Moscow, JS Novatest Publ., 2010, 319 p.].

[8] Batseva O.D., Dmitriev S.N. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation,* 2018, iss. 7. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-7-1785.
[9] Gantmacher F.R. *Matrix Theory*. Chelsea, 1960. [In Russ.: Gantmacher F.R. Teoriya matrits. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 558 p.].
[10] Belmman R. *Introduction to Matrix Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2nd ed., 1987, 430 p. [In Russ.: Belmman R. Vvedenie v teoriyu matrits. Moscow, Nauka Publ., 1969, 367 p.].

Tushev O.N., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University. SPIN-code: 9732-1625, AuthorID: 7336.
e-mail: kafsm2@bmstu.ru

Belyaev A.V., Cand, Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University. SPIN-code: 6628-6341, AuthorID: 801751.
e-mail: beliaev@bmstu.ru