

Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», Москва, 7–10 декабря 2021 г. Материалы конференции. В двух частях. Часть 1. П.М. Шкапов, М.И. Дьяченко, сост. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2022, вып. 5. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-5-2182>

Международная научная конференция «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ»

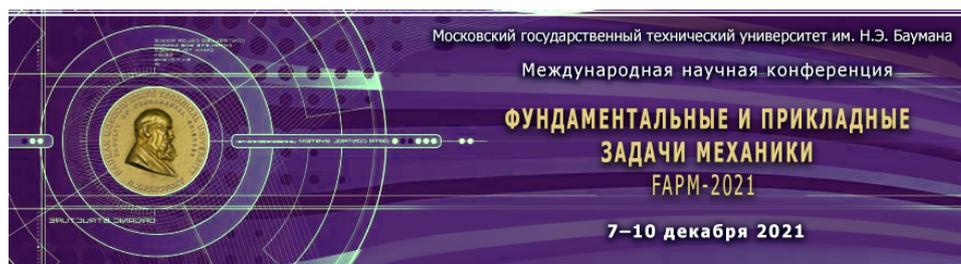
Москва, 7–10 декабря 2021 г.

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ

В двух частях

Часть 1

Составители: П.М. Шкапов, М.И. Дьяченко



International Scientific Conference FUNDAMENTAL AND APPLIED PROBLEMS OF MECHANICS (FARM-2021)

Moscow, 7–10 December, 2021

THE MATERIALS OF THE CONFERENCE

In two parts

Part 1

Compiled by P.M. Shkapov, M.I. Dyachenko



Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. Баумана

2022

Международные научные конференции «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ» (Fundamental and applied problems of mechanics — FARM) с 2012 г. проводятся регулярно в МГТУ им. Н.Э. Баумана на базе Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» и кафедры «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского с участием научных сотрудников из институтов РАН, университетов РФ, известных зарубежных ученых-механиков. Основной целью данной конференции является представление новых результатов исследований, проводимых в российских и зарубежных научных и образовательных учреждениях, по различным направлениям механики.

Очередная конференция FARM-2021 посвящена 175-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского — «отца русской авиации», основоположника прикладной аэро- и гидромеханики, разработчика теории воздухоплавания, создателя ЦАГИ, основателя кафедры теоретической механики, профессора МВТУ и МГУ.

В 2021 г. открытие конференции и первое пленарное заседание прошли в очно-дистанционном режиме в аудитории на кафедре «Теоретическая механика» имени профессора Николая Егоровича Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана с трансляцией для участников через платформу Zoom. Заседания секций проводились только в дистанционном формате.

Рабочие языки конференции: русский и английский.

Материалы докладов публикуются по рекомендации оргкомитета конференции. Издание выходит в двух частях в авторской редакции. В часть 1 вошли пленарные доклады и материалы секций 1 и 2. В части 2 представлены материалы секций 3–5.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие сведения о конференции

Пленарные доклады

Секция 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- 1.1. Математическое моделирование механических систем, управление движением
- 1.2. Математическое моделирование физических процессов
- 1.3. Математическое моделирование и анализ

Секция 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

- 2.1. Теоретическая механика
- 2.2. Небесная механика

Секция 3. АЭРО- И ГИДРОМЕХАНИКА

Секция 4. ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Секция 5. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ И ИСТОРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ

International scientific conferences “FUNDAMENTAL AND APPLIED PROBLEMS OF MECHANICS (FAPM)” (ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ) have been held regularly since 2012 in Bauman Moscow State Technical University on the basis of the Scientific and Educational Complex “Fundamental Sciences” and the Professor N.E. Zhukovsky Department of Theoretical Mechanics with participation of scientists from research institutions of RAS, RF universities, famous foreign scientists-mechanics. The main goal of the conference is to present new results of the investigations in different areas of mechanics, carried out at the Russian and foreign research and educational institutions.

The conference FAPM-2021 was dedicated to the 175th anniversary of the great Russian scientist Nikolai Zhukovsky, “the father of the Russian aviation,” founder of applied aero- and hydro-mechanics, developer of aeronautics theory, founder of TsAGI, founder of the department of theoretical mechanics, professor of the Moscow Higher Technical School and Moscow University.

In 2021 the opening of the conference and the first plenary session were held in the classroom of the Nikolay Zhukovsky Department of Theoretical Mechanics at the Bauman Moscow State Technical University with broadcasting for the participants through the Zoom platform. Sessions of the sections were held only in the remote format.

Working languages of the conference: Russian and English.

The proceedings of the conference are given in the author's edition.

Организаторы конференции:

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН
Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора
Н.Е. Жуковского
Научно-методический совет по теоретической механике при Минобрнауки
России

Международный организационный комитет:

Проф. А.А. Александров (председатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва,
Россия
Проф. В.О. Гладышев (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва,
Россия
Проф. П.М. Шкапов (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва,
Россия
Astronom C. Bizouard (Co-Chairman), Observatoire de Paris, France
Prof. K. Matsumoto, RISE Project, National Astronomical Observatory of Japan,
Japan
Проф. В.С. Асланов, Самарский университет, г. Самара, Россия
Проф. Б.С. Бардин, МАИ (НИУ), Москва, Россия
Проф. В.Д. Бертяев, ТулГУ, г. Тула, Россия
Проф. С.А. Берестова, УрФУ, г. Екатеринбург, Россия
Проф. И.Г. Благовещенский, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
Проф. Ю.И. Димитриенко, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
Проф. В.В. Ивашкин, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
Проф. В.Т. Калугин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
Проф. В.А. Калиниченко, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва,
Россия
Проф. Г.Н. Кувыркин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
Проф. М.Х. Магомедов, ООО НПФ «Сауно», г. Махачкала, Дагестан, Россия
Проф. В.И. Майорова, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
Проф. С.Н. Саяпин, ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
Проф. Н.И. Сидняев, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
Проф. Ю.П. Улыбышев, РКК «Энергия», г. Королёв, Россия
Проф. Ю.Д. Чашечкин, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
Проф. В.Н. Чубариков, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
Проф. А.О. Шимановский, БГУТ, г. Гомель, Республика Беларусь

Ученый секретарь — М.И. Дьяченко, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Академический программный комитет

- Проф. В.О. Гладышев (председатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. В.Н. Зимин (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. П.М. Шкапов (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Prof. H. Hanada (Co-Chairman), director of RISE Project, NAO of Japan, Japan
- Astronom C. Bizouard (Co-Chairman), Observatoire de Paris, France
- Professor Shuanggen Jin, Chinese Academy of Sciences, China
- Академик РАН Р.Ф. Ганиев, ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
- Академик РАН И.Г. Горячева, РНКТПИМ, Москва, Россия
- Академик РАН В.Ф. Журавлёв, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
- Академик РАН С.Т. Суржиков, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
- Академик РАН Д.В. Трещёв, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- Академик РАН С.Л. Чернышев, ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, Россия
- Чл.-корр. РАН А.П. Крищенко, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Чл.-корр. РАН И.И. Липатов, ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, Россия
- Чл.-корр. РАН А.Н. Морозов, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Чл.-корр. РАН О.С. Нарайкин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Чл.-корр. РАН В.А. Соловьёв, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. М.М. Благовещенская, МГУПП, Москва, Россия
- Проф. В.С. Зарубин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. Т.А. Исмаилов, ДГТУ, г. Махачкала, Дагестан, Россия
- Проф. В.В. Сазонов, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
- Проф. В.А. Самсонов, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- Проф. А.М. Цирлин, ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский, Россия
- Проф. В.И. Щербаков, ВКА им. А.Ф. Можайского, С.-Петербург, Россия
- Ученый секретарь — канд. физ.-мат. наук, доц. Е.В. Мелкумова, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА
3. АЭРО- и ГИДРОМЕХАНИКА
4. ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
5. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ И ИСТОРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ

Сайт конференции:

<http://fn.bmstu.ru/coferences-sec-fs/item/1105-fapm-2021>

e-mail: fapm2021@mail.ru

Пленарное заседание 7 декабря 2021 г.

Конференцию открыл сопредседатель оргкомитета конференции, д-р физ.-мат. наук, профессор Владимир Олегович Гладышев.

С приветственным словом к участникам конференции обратились:

Михаил Валерьевич Гордин — и.о. ректора МГТУ им. Н.Э. Баумана;

Владимир Тимофеевич Калугин — д-р техн. наук, профессор, декан факультета «Специальное машиностроение» МГТУ им. Н.Э. Баумана, лауреат премии имени Н.Е. Жуковского;

Игорь Иванович Липатов — чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, заслуженный профессор МФТИ, главный научный сотрудник ФГУП «ЦАГИ» имени профессора Н.Е. Жуковского, четырежды лауреат премии имени Н.Е. Жуковского.

Далее были заслушаны пленарные доклады.

Николай Егорович Жуковский — символ России К 175-летию со дня рождения

© П.М. Шкапов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: spm@bmstu.ru

Аннотация. Доклад посвящен 175-летию со дня рождения великого русского ученого, механика, основоположника прикладной аэро- и гидромеханики, «отца русской авиации», создателя и первого руководителя Центрального аэрогидродинамического института (ЦАГИ), председателя Московского математического общества, профессора Императорского Московского Технического Училища и Московского университета Николая Егоровича Жуковского.

Ключевые слова: *Николай Егорович Жуковский, механика, аэрогидромеханика, авиация, Императорское Московское Техническое Училище, Московский университет, ЦАГИ.*

Николай Егорович Жуковский родился в самой глубинке России, в сельце Орехово Владимирской губернии 17 января 1847 г., в родовом имении Жуковских в 140 км от Москвы. После первоначального домашнего обучения старший сын Жуковских Николай поступил в московскую гимназию, которую с отличием окончил в 1864 г.

После этого он был без экзаменов зачислен в Императорский Московский университет (ИМУ) на физико-математический факультет.

После окончания университета в 1868 г. молодой человек прошел недолгий период выбора направлений деятельности, из которых он предпочел заниматься тем, что у него получалось лучше всего — преподавательской и научной работой. С 1870 г. Николай Жуковский становится учителем физики во 2-й Московской женской гимназии из ведомства императрицы Марии Федоровны (этой работой он занимался до 1885 г., вплоть до избрания профессором ИМУ).

В этот период в 1870 г. завершалось реформирование Московского ремесленного заведения в Императорское Московское техническое училище (ИМТУ), что требовало привлечения квалифицированных кадров преподавателей высшей школы. В 1871 г. Педагогический совет ИМТУ пригласил на работу подающего большие надежды выпускника Московского университета Николая Егоровича Жуковского и не ошибся в своем выборе.

Николай Егорович начал работу в ИМТУ с января 1872 г., после сдачи магистерских экзаменов, преподавателем по кафедре математики и аналитической механики. С 1874 г., уже в качестве доцента, вел курс аналитической механики в рамках курса высшей математики. После защиты магистерской диссертации (1876 г.) Жуковский стал сверхштатным профессором ИМТУ и с 1878 г. начал читать выделенный для него Педагогическим советом самостоятельный курс теоретической механики, став основателем одноименной кафедры, которой он руководил в течение 43 лет (до 1921 г.). После защиты докторской диссертации в 1885 г., Николай Егорович становится ординарным профессором Московского университета и ИМТУ, считая за честь одновременно трудиться в лучших высших учебных заведениях России. При нем плодотворное сотрудничество между ИМУ и ИМТУ осуществлялось очень активно: лучшие профессора Московского университета по приглашению Николая Егоровича читали лекции для студентов ИМТУ, а преподаватели, студенты, выпускники ИМТУ активно работали по общей научной тематике, представляющей взаимный интерес.

Преподавательская деятельность Жуковского не ограничивалась общением со студентами в аудиториях. Он активно вовлекал молодежь в сферу своих научных изысканий, направлял и руководил научной работой, искал и находил поддерживающих его энтузиастов. Столь же активно он взаимодействовал с профессорско-преподавательским составом ИМТУ и Московского университета [1].

Основной заслугой Н.Е. Жуковского можно считать соединение в его работах строгой научной теории с практической направленностью применения науки в технике. Как сказал его ученик и последо-

ватель С.А. Чаплыгин: «...своей светлой и могучей личностью он объединял в себе высшие математические знания и инженерные науки. Он был лучшим соединением науки и техники, он был почти университетом».

Н.Е. Жуковским и его учениками из «воздухоплавательного» кружка (Туполевым, Ветчинкиным, Юрьевым, Архангельским и др.) в МВТУ создавались и развивались новейшие направления исследований в области аэродинамики и авиации, в том числе связанные с экспериментальными исследованиями на аэродинамических трубах, расчетами на прочность, управлением движением. Создатель и руководитель ЦАГИ в 1918 г. был назван «отцом русской авиации», признанным лидером ученых аэро- и гидродинамиков всего мира [2]. Он был механиком по призванию, реализовавшим весь свой научный потенциал на благо человечества.

Влияние наследия Н.Е. Жуковского прослеживается в развитии практически всех направлений научных исследований МВТУ им. Н.Э. Баумана, оставаясь актуальным и в настоящее время [3].

Вся жизнь Николая Егоровича — пример бескорыстного служения России и излюбленной им механике. Он всегда был на острие науки, всегда с учениками и единомышленниками. Созданный им учебный курс «Теоретическая механика» стал фундаментальной инженерной дисциплиной, вошедшей в учебные планы всех высших технических учебных заведений страны и определившей отличительную черту подготовки инженеров России [4].

Присвоение имени профессора Н.Е. Жуковского Центральному аэрогидродинамическому институту, Военно-воздушной инженерной академии, Харьковскому авиационному институту, кафедре теоретической механики в МВТУ является очевидным признанием заслуг великого ученого в развитии техники, науки, авиации, высшего технического образования России. В названии города Жуковский и многочисленных улиц в разных городах страны, названных в его честь, навсегда увековечилось имя этого замечательного человека.

Всей своей жизнью, бескорыстным служением науке и отечеству Николай Егорович завоевал полное право быть подлинным символом России. Не случайно, что на церемонии открытия Олимпийских игр 2014 г. в Сочи, когда демонстрировался импровизированный алфавит русского языка, где каждой букве соответствовал связанный с Россией и ее историей символ, при показе буквы «Ж» высветилось имя — **ЖУКОВСКИЙ!**

«Человек... полетит, опираясь не на силу своих мускулов, а на силу своего разума!» — пророческие слова великого Ученого, Учителя, Человека, актуальные для всех ученых на все времена.

Литература

1. Лейбензон Л.С. *Николай Егорович Жуковский (К 100-летию со дня рождения)*. Москва – Ленинград, Издательство Академии наук СССР, 1947.
2. Космодемьянский А.А. *Отец русской авиации Николай Егорович Жуковский*. Москва, Военное издательство Министерства Вооруженных сил Союза ССР, 1952.
3. *Научные школы Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана. История развития*. Федоров И.Б., Колесников К.С., ред. 2-е изд., доп. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
4. Шкапов П.М. О создании кафедры теоретической механики и одноименной научно-педагогической школы в Императорском Московском Техническом Училище (к 170-летию со дня рождения Николая Егоровича Жуковского). *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2016, № 12. <http://technomag.neicon.ru/doc/852649.html>

Nikolai Egorovich Zhukovsky is a symbol of Russia: to the 175th Anniversary of his Birth

© P.M. Shkapov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: spm@bmstu.ru

Abstract. This report is dedicated to the 175th anniversary of the great Russian scientist, mechanic, founder of applied aero- and hydro-mechanics, "father of Russian aviation", founder and first head of the Central Aero-Hydrodynamic Institute, chairman of the Moscow Mathematical Society, professor of the Imperial Moscow Technical College and Moscow University Nikolay Yegorovich Zhukovsky.

Keywords: *Nikolay Yegorovich Zhukovsky, mechanics, aerohydrodynamics, aviation, Imperial Moscow Technical School, Moscow University, Central Aero-Hydrodynamic Institute.*

Бафтинг

© И.И. Липатов¹, С.Л. Чернышев¹, В.Н. Бакулин²

¹ЦАГИ им. профессора Н.Е. Жуковского, Москва, Россия

²Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

E-mail: igor_lipatov@mail.ru, vbak@yandex.ru

Аннотация. Впервые построены физические и математические модели бафтинга элементов конструкций летательных аппаратов (ЛА), движущихся со сверхзвуковой скоростью. Проведено математическое моделирование обтекания высокоскоростным потоком вязкого газа и численное моделирование процессов возникновения бафтинга.

На численных примерах впервые получены и представлены зависимости и исследовано влияние вида и величин нагрузок, а также параметров конструкций ЛА на границы области неустойчивости. Показано, что использование упрощенных моделей может привести в расчетах области неустойчивости к большим, в том числе недопустимым погрешностям, что может повлечь разрушение ЛА. Разработанные модели значительно расширяют круг решаемых задач и позволяют провести расчет динамической устойчивости элементов конструкций ЛА различного назначения. Полученные результаты позволят обоснованно подойти к решению проблемы весового совершенства конструкций ЛА, что говорит об актуальности рассмотренных задач.

Появление самолетов с трансзвуковыми крейсерскими режимами привело к появлению нового физического вида автоколебательных режимов, связанного с процессами взаимодействия течения в пограничном слое со скачком уплотнения, возникающим в невязком потоке. В настоящей работе представлены результаты исследований этого режима бафтинга.

Ключевые слова: *бафтинг, летательные аппараты, элементы авиационных, аэрокосмических и ракетных конструкций.*

Инженерная математика течений жидкостей

© Ю.Д. Чашечкин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
E-mail: chakin@ipmnet.ru, yulidch@gmail.com

Аннотация. В рамках инженерной математики как аксиоматической науки о принципах выбора символов, правил операций и критериев контроля точности и технической физики как эмпирио-аксиоматической науки о критериях выбора физических величин, методов их измерений и оценки погрешности формулируют требования к описанию состояния среды, структуры и динамики течений. Теория развивается в рамках модели сплошной среды на основе фундаментальных законов сохранения вещества, импульса и энергии с учетом условий совместности и полноты результатов. Особое внимание уделяется процессам переноса энергии — атомно-молекулярным (диффузия и быстрая конверсия потенциальной энергии), с потоком, с групповой скоростью волн. Обсуждаются свойства пространств задачи и условия наблюдаемости величин. В качестве иллюстрации рассматриваются двумерная задача обтекания полосы и растекание свободно падающей капли в жидкости, включающее каскад атомно-молекулярных, физических и гидродинамических процессов.

Ключевые слова: жидкость, газ, течения, динамика, структура, энергия, эксперимент, теория.

Литература

1. Chashechkin Yu.D. Singularly perturbed components of flows — linear precursors of shock waves. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2018, vol. 13, no. 2, pp. 1–29.
2. Chashechkin Yu.D., Zagumennyi I.V. 2D hydrodynamics of a plate: from creeping flow to transient vortex regimes. *Fluids*, 2021, vol. 6, 310 p.

Engineering mathematics of fluid flows

© Yu.D. Chashechkin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics
RAS, Moscow, Russia
E-mail: chakin@ipmnet.ru, yulidch@gmail.com

Abstract. Within the framework of engineering mathematics, as an axiomatic science about the principles of choosing symbols, rules of operations and criteria for controlling accuracy, and technical physics as an empirio-axiomatic science about the criteria for choosing physical quantities, methods of their measuring and evaluating errors, formulate requirements for describing the state of the fluid, its structure and dynamics of flows. The theory is developed within the framework of a continuous medium model based on the fundamental laws of matter, momentum and energy conservation, taking into account the conditions of compatibility and completeness of the results. Particular attention is paid to energy transfer processes including- atomic-molecular processes (diffusion and fast conversion of potential energy), with flow, with the group velocity of waves. The properties of the problem spaces and the conditions for the observability of quantities are discussed. As an illustration, we consider a two-dimensional problem of flow around a plate and coalescing of a freely falling drop in a liquid, including a cascade of atomic-molecular, physical, and hydrodynamic processes.

Keywords: liquid, gas, flows, dynamics, structure, energy, experiment, theory.

References

1. Chashechkin Yu.D. Singularly perturbed components of flows — linear precursors of shock waves. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2018, vol. 13, no. 2, pp. 1–29.
2. Chashechkin Yu.D., Zagumennyi I.V. 2D hydrodynamics of a plate: from creeping flow to transient vortex regimes. *Fluids*, 2021, vol. 6, 310 p.

Trajectory behavior of high area-to-mass ratio objects in semi-synchronous GPS orbits

© L. Anselmo, C. Pardini

Space Flight Dynamics Laboratory, ISTI/CNR, Pisa, Italy

Abstract. Following the observational discovery of a significant number of objects characterized both by high eccentricity geosynchronous orbits and by extremely high values of their area-to-mass ratios (A/M), whose origin can probably be traced back to the degradation and detachment of the very light specific mass layers used to protect the surfaces of geostationary spacecraft, a thorough investigation was carried out since 2008 to explore the long-term dynamical evolution of fictitious high A/M objects released, with a negligible ΔV , in each of the six orbital planes used by Global Positioning System (GPS) satellites. As for the objects observed and studied in near synchronous trajectories, also in this case long lifetime orbits, with mean motions remaining close to two revolutions per day, but developing large eccentricities together with faster and wider pole precessions, were found possible even for bodies with extremely high A/M . For particularly high values of A/M and favorable initial conditions, the transition from prograde (inclination $< 90^\circ$) to retrograde (inclination $> 90^\circ$) motion, and vice versa, would also be possible.

Keywords: *semi-synchronous GPS orbits, high area-to-mass ratio objects, space debris, long-term orbit evolution, solar radiation pressure.*

Optical observations have led to the discovery of a population of faint objects, with mean motions of about 1 revolution per day and orbital eccentricities as high as 0.8 [1] [2] [3]. An obvious explanation for their origin was immediately proposed. In fact, direct solar radiation pressure may significantly affect the eccentricity with small effects on the total orbit energy and, therefore, on the semi-major axis or mean motion. However, this perturbation would be adequately effective only on objects with sufficiently high area-to-mass ratios (A/M).

In order to investigate the long-term dynamical behavior of these peculiar objects in synchronous and semi-synchronous orbits, numerical propagations were carried out since mid-2000s [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10]. This paper summarizes some results obtained by the authors since 2008 for high area-to-mass ratio objects released in semi-synchronous GPS orbits [7] [8]. These nearly circular orbits, with a half sidereal day period, semi-major axis close to 26,560 km and inclination of about 55° , are in a deep 2:1 resonance with the Earth's rotation. The ascending nodes of the six constellation planes are separated by 60° in right ascension and each plane is identified by a capital letter, from A to F, while the satellites in

each plane are identified by a number. The test objects were propagated for 100 years, taking into account the geopotential harmonics up to the 16th degree and order, luni-solar attraction and direct solar radiation pressure with eclipses. In case of induced high eccentricity orbits with perigee altitude below 1000 km, the perturbing effects of air drag were considered as well, using the 1976 United States Standard Atmosphere. Assuming a radiation pressure coefficient $C_R = 1.2$, area-to-mass ratios up to $100 \text{ m}^2/\text{kg}$ were simulated.

All the objects analyzed with A/M up to $45 \text{ m}^2/\text{kg}$ exhibited an orbital lifetime greater than 35 years (very often greater than 100 years), with semi-major axis and orbital period remaining close to the semi-synchronous values. For $45 \text{ m}^2/\text{kg} < A/M < 80 \text{ m}^2/\text{kg}$, the exact value depending on the initial conditions, the eccentricity became so large, and the perigee altitude so low, that an orbital decay occurred in a few months.

Regarding the long-term evolution of mean eccentricity and inclination, the results obtained for the objects with the initial orbits of the GPS satellites A3, D1 and F4 are shown, as examples, in Figures 1–6 for a subset of A/M values spanning the investigated range. In general, higher values of A/M resulted in larger amplitudes of the yearly eccentricity oscillation due to direct solar radiation pressure. However, certain initial conditions, coupled with luni-solar resonances, may change this simple behavior, adding to the yearly oscillation a term with a significantly longer period.

At low area-to-mass ratio, the evolution of the orbit plane is dominated by the interaction between J_2 and the third body attraction, with a nodal regression period of nearly 26 years and an inclination oscillation amplitude of about 2° , superimposed on a longer term trend driven by luni-solar perturbations. An increase of A/M induces a faster nodal regression and wider amplitude of the inclination excursion, depending on the initial conditions. For sufficiently high A/M values and specific initial conditions, the orbit can become periodically retrograde (i.e. with inclination $> 90^\circ$) for some time. For instance, this is shown in Figure 4 for the D1 initial conditions and $A/M = 60 \text{ m}^2/\text{kg}$.

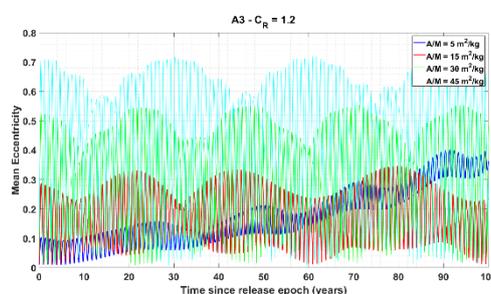


Fig. 1. Mean eccentricity evolution for initial conditions A3 (since 2007-04-17)

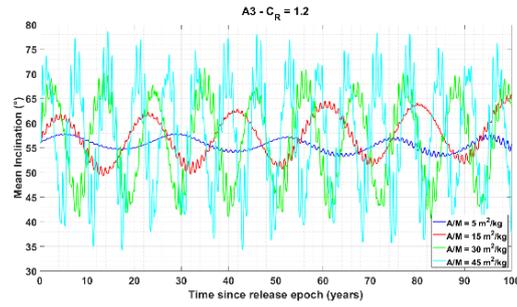


Fig. 2. Mean inclination evolution for initial conditions A3 (since 2007-04-17)

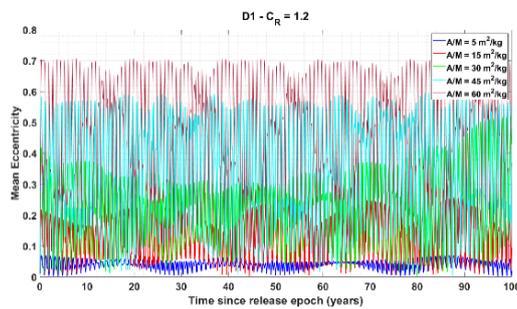


Fig. 3. Mean eccentricity evolution for initial conditions D1 (since 2007-04-17)

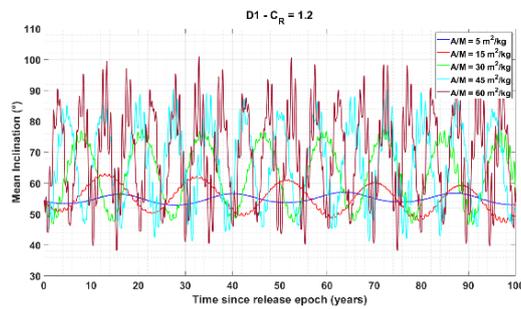


Fig. 4. Mean inclination evolution for initial conditions D1 (since 2007-04-17)

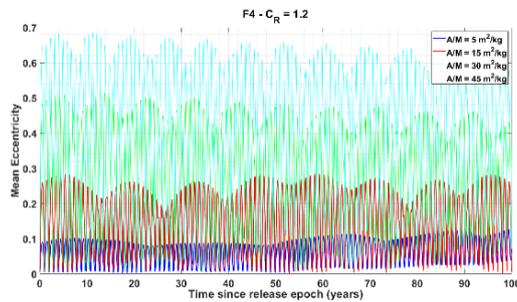


Fig. 5. Mean eccentricity evolution for initial conditions F4 (since 2007-04-17)

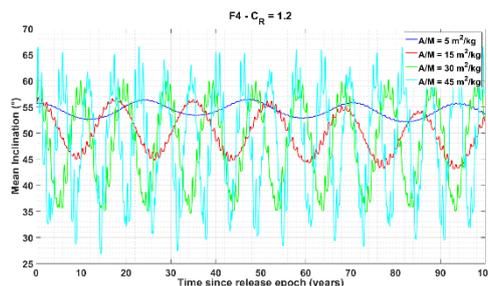


Fig. 6. Mean inclination evolution for initial conditions F4 (since 2007-04-17)

References

- Schildknecht T., Musci R., Ploner M., Beutler G., Flury W., Kuusela J., de Leon Cruz J., de Fatima Dominguez Palmero L. Optical observations of space debris in GEO and in highly eccentric orbits. *Adv. Space Res.*, 2004, vol. 34, pp. 901–911.
- Schildknecht T., Musci R., Flohrer T. Properties of the high area-to-mass ratio space debris population at high altitudes. *Adv. Space Res.*, 2008, vol. 41, pp. 1039–1045.
- Agapov V., Biryukov V., Kiladze R., Molotov I., Rumyantsev V., Sochilina A., Titenko V. Faint GEO objects search and orbital analysis. In: *Proceedings of the Fourth European Conference on Space Debris, ESA SP-587*. ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, 2005, pp. 119–124.
- Liou J.-C., Weaver J. K. Orbital evolution of GEO debris with very high area-to-mass ratios. *The Orbital Debris Quarterly News*, 2004, vol. 8, iss. 3, pp. 6–7.
- Anselmo L., Pardini C. Orbital evolution of geosynchronous objects with high area-to-mass ratios. In: *Proceedings of the Fourth European Conference on Space Debris, ESA SP-587*. ESA Publications Division, Noordwijk, The Netherlands, 2005, pp. 279–284.
- Pardini C., Anselmo L. Long-term evolution of geosynchronous orbital debris with high area-to-mass ratios. *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*, 2008, vol. 51, pp. 22–27.
- Anselmo L., Pardini C. Dynamical evolution of high area-to-mass ratio debris released into GPS orbits. *Adv. Space Res.*, 2009, vol. 43, pp. 1491–1508.
- Anselmo L., Pardini C. Long-term dynamical evolution of high area-to-mass ratio debris released into high earth orbits. *Acta Astronaut.*, 2010, vol. 67, pp. 204–216.
- Kuznetsov E.D., Avvakumova E.A. Dynamical evolution of space debris in the vicinity of GNSS regions. *Acta Astronaut.*, 2019, vol. 158, pp. 140–147.
- Belkin S.O., Kuznetsov E.D. Orbital flips due to solar radiation pressure for space debris in near-circular orbits. *Acta Astronaut.*, 2021, vol. 178, pp. 360–369.

Исследование усталостного разрушения с использованием мультирежимной модели повреждаемости

© И.С. НИКИТИН, А.Д. НИКИТИН

Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия
E-mail: i_nikitin@list.ru, nikitin_alex@bk.ru

Аннотация. На основе предложенной ранее мультирежимной модели усталостного разрушения разработан метод расчета зарождения и развития узких локализованных зон поврежденности в элементах конструкций для различных режимов циклического нагружения. Такие узкие зоны повреждаемости можно рассматривать как «квазитрещины» двух типов, соответствующих механизму нормального отрыва и сдвига.

Рассмотрен важный для приложений пример полетного цикла нагружения (многоцикловая усталость) и высокочастотного нагружения при крутильных колебаниях лопаток (сверхмногоцикловая усталость) диска компрессора авиационного газотурбинного двигателя. Дана оценка долговечности рассмотренного элемента авиационных конструкций. Также рассмотрен пример расчета усталостного разрушения при высокочастотных крутильных колебаниях экспериментального образца в форме «песочных часов». При этом удалось воспроизвести наблюдаемый эффект резкого изменения направления роста и типа квазитрещины в процессе циклического нагружения.

Ключевые слова: усталостное разрушение, многоцикловая усталость, сверхмногоцикловая усталость, мультирежимная модель, уравнение повреждаемости.

Литература

Никитин И.С., Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин А.Д. Мультирежимная модель развития усталостных повреждений. *Прикладная математика и механика*, 2020, т. 84, № 5, с. 687–698.

The Study of Fatigue Fracture using a Multimode Damage Model

© I.S. Nikitin, A.D. Nikitin

Institute for Computer Aided Design of RAS, Moscow, Russia
E-mail: i_nikitin@list.ru, nikitin_alex@bk.ru

Abstract. On the basis of the previously proposed multimode model of fatigue fracture, a method is developed for calculating the nucleation and development of narrow localized damage zones in structural elements for various modes of cyclic loading. Such narrow zones of damage can be considered as quasi-cracks of two types, corresponding to the mechanism of normal opening and shear.

An example of a flight loading cycle (high-cycle fatigue) and high-frequency cyclic loading during torsion vibrations of the blades (very-high-cycle fatigue) of an aircraft gas turbine engine compressor disk is

considered. An assessment of the durability of this aircraft structures element is given. An example of calculating fatigue fracture at high-frequency torsional vibrations of an experimental specimen of a certain shape is also considered. For this specimen it was possible to reproduce the observed effect of a sharp change in the growth direction and the type of quasi-crack during cyclic loading.

Keywords: *fatigue fracture, high-cycle fatigue, very-high-cycle fatigue, multi-mode model, damage equation.*

References

Nikitin I.S., Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin A.D. Multimode Model for Fatigue Damage Development. *Mechanics of Solids*, 2020, vol. 55, no. 8, pp. 298–306.

СЕКЦИЯ 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Математическое моделирование механических систем, управление движением

Руководители: чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук А.П. Крищенко,
д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Лапшин

Моделирование раскрытия трансформируемой космической конструкции с приводом, обладающим эффектом памяти формы

© В.Н. Зимин^{*}, А.В. Крылов, Г.Н. Кувыркин, А.О. Шахвердов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

^{*}E-mail: zimmin@bmstu.ru

Аннотация. Усложнение конструктивных схем перспективных крупногабаритных космических трансформируемых конструкций вследствие требуемого повышения их эксплуатационных функциональных возможностей приводит к необходимости разработки математических моделей, адекватно описывающих их механические свойства. При проектировании крупногабаритных трансформируемых космических конструкций необходимо учитывать возникающие при их раскрытии динамические нагрузки, которые носят, как правило, ударный характер. Предлагается использовать для трансформации конструкции силовой привод с активным элементом на базе материала никелида титана, обладающий эффектом памяти формы, который обеспечит управляемое безударное ее раскрытие. Проведен комплекс экспериментальных исследований активных элементов для силового привода, изучены его основные характеристики: рабочий ход, время и усилие срабатывания. Это позволит получить математическую модель функционирования активного элемента, обладающего эффектом памяти формы.

Ключевые слова: трансформируемая конструкция, математическая модель.

Литература

1. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др. *Механика больших космических конструкций*. Москва, Изд-во «Факториал», 1997, 302 с.
2. Zimin V.N., Krylov F.V., Shakhverdov A.O. Development of the mathematical model of the force actuator for deployment of large-sized space structures. *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1902 (1), art. no. ID 012115.

Modeling of the opening of a transformable space structure with an actuator with a shape memory effect

© V.N. Zimin*, A.V. Krylov, G.N. Kuvyrkin, A.O. Shakhverdov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*E-mail: zimin@bmstu.ru

Abstract. The increasing complexity of the design schemes of promising large-sized transformable space structures, due to the required increase in their operational functionality, leads to the necessity of developing mathematical models that adequately describe their mechanical properties. When designing large-sized transformable space structures, it is necessary to take into account the dynamic loads that occur during opening. These loads have a shock nature. It is proposed to use for the transformation of the structure a force actuator with an active element made of titanium nickelide material, which has a shape memory effect, which will provide a controlled shock-free opening. A set of experimental studies of active elements of a force actuator has been carried out. The following main characteristics have been studied: working stroke, actuation time and actuation force. This will allow us to develop a mathematical model of the functioning of an active element that has a shape memory effect.

Keywords: transformable structure, mathematical model.

References

1. Banichuk N.V., Karpov I.I., Klimov D.M. and others. *Mekhanika bol'shikh kosmicheskikh konstruktiv* [Mechanics of large space structures]. Moscow, Faktorial Publ., 1997, 302 p.
2. Zimin V.N., Krylov F.V., Shakhverdov A.O. Development of the mathematical model of the force actuator for deployment of large-sized space structures. *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1902 (1), art. no. ID 012115.

Моделирование динамики системы «конь — наездник»

© В.К. Бадяева, Р.Г. Мухарлямов

РУДН, Москва, Россия

E-mail: vlada_badyaeva@mail.ru

Аннотация. Исследуется динамика системы «конь — наездник». Формируется механическая модель системы, представленная движением центров масс. Динамика системы описывается уравнениями Лагранжа. Определяется изменение сил мышц всадника и коня, обеспечивающие заданное движение центра масс и его стабилизацию.

Приводятся результаты численного моделирования, полученные с использованием методов обратных задач динамики и стабилизации связей.

Ключевые слова: конь, наездник, динамика, система, численные методы.

Конный спорт — один из самых травмоопасных видов спорта. Целью данной работы является описание динамики системы «конь — наездник» и постановка задачи математического моделирования для разработки рекомендаций по проектированию тренажеров, предназначенных для тренировок спортсменов и любителей.

Система «конь — наездник» в общем случае представляет собой систему двух твердых тел, положения которых определяются положениями центров масс наездника и лошади и соответствующими ориентациями в пространстве. В настоящей работе рассматривается задача моделирования движения по вертикали всадника с лошадь. Для определения силы отталкивания лошади и мышечной силы всадника, действующей на корпус лошади, составляются уравнения динамики системы, на которые накладываются связи, определяющие движения центров масс коня и наездника.

В простейшем случае систему наездника и коня будем моделировать системой двух точек, соответствующих их центрам масс. Масса всадника m_1 , положение всадника относительно центра масс коня x^1 , скорость $v^1 = \frac{dx^1}{dt}$, на центр масс всадника действует сила отталкивания F_1 и сила тяжести $-m_1g$. Масса коня m_2 , его положение относительно неподвижной системы координат x^2 , скорость $v^2 = \frac{dx^2}{dt}$, сила отталкивания от земли F_2 и сила тяжести $-m_2g$, g — ускорение свободно падающего тела. Кинетическая энергия T системы определяется выражением

$$2T = m_1 (v^1 + v^2)^2 + m_2 v_2^2.$$

Элементарная работа сил:

$$\delta A = -m_1 g (\delta x^1 + \delta x^2) - m_2 g \delta x^2 + F_1 (\delta x^1 + \delta x^2) + F_2 \delta x^2$$

приводится к виду

$$\delta A = (-m_1 g + F_1) \delta x^1 + (-m_2 g + F_2) \delta x^2,$$

$$m = m_1 + m_2, \quad F = F_1 + F_2, \quad x = (x^1, x^2).$$

Уравнения движения всадника и коня относительно неподвижной системы координат получаются в следующем виде:

$$m_1 \frac{dv^1}{dt} + m_1 \frac{dv^2}{dt} = -m_1 g + F_1, \quad (1)$$

$$m_2 \frac{dv^2}{dt} = -m_2 g + F_2. \quad (2)$$

Обозначив $\frac{1}{m_1} F_1 = w_1$, $\frac{1}{m_2} F_2 = w_2$, уравнения движения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= v^1, \quad \frac{dx^2}{dt} = v^2, \\ \frac{dv^1}{dt} &= w_1 - w_2, \quad \frac{dv^2}{dt} = -g + w_2. \end{aligned} \quad (3)$$

В процессе движения силы F_1, F_2 должны изменяться так, чтобы выполнялись условия, накладываемые на положения центров масс наездника и лошади:

$$h_i(x, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Заменим уравнения связей (4) уравнениями программных связей

$$y_i = h_i(x, t), \quad h_i(x, t) = x^i - f_i(t), \quad (5)$$

$$z_i = g_i(x, v, t), \quad g_i(x, v, t) \equiv \frac{\partial h_i}{\partial x^j} v^j + \frac{\partial h_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial h_i}{\partial x^j} = \frac{\partial g_i}{\partial v^j}$$

и составим уравнения возмущений связей

$$\frac{dy_i}{dt} = z_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = Z_i(z, y, v, x, t), \quad Z_i(0, 0, v, x, t) = 0. \quad (6)$$

На основе анализа конных скачек в Дубае [1] известно, что

$$f_2(t) = A \sin(ut), \quad A = 0,06 \text{ м}, \quad u = (0,82 \cdot 2\pi) \text{ с}^{-1}. \quad (7)$$

Закон изменения положения центра масс всадника определим выражением

$$f_1(t) = 2A \sin\left(\frac{1}{2} ut\right). \quad (8)$$

Типовые значения масс человека и коня: $m_1 = 50$ кг, $m_2 = 500$ кг. Подстановка выражений (7), (8) в уравнения связей (5) и уравнения [2] возмущений связей (6) приводит к уравнениям для определения сил F_1, F_2 . Полагая

$$Z_i = -(\omega_i)^2 y_i - 2\mu_i z_i, \quad \omega_i, \mu_i = \text{const}, \quad \mu_i > 0$$

и подставив выражения величин F_1, F_2 в уравнения динамики, можно определить законы изменения положений центров масс:

$$w_1 = W_1 + W_2, \quad w_2 = W_2,$$

$$W_1 = -(\omega_1)^2 \left(x^1 - a - 2A \sin\left(\frac{1}{2}ut\right) \right) - 2\mu_1 \left(v^1 - Au \cos\left(\frac{1}{2}ut\right) \right) - \frac{1}{2} Au^2 \sin\left(\frac{1}{2}ut\right),$$

$$W_2 = -(\omega_2)^2 (x^2 - A \sin(ut)) - 2\mu_2 (v^2 - Au \cos(ut)) - Au^2 \sin(ut).$$

Заключение. Математическое моделирование динамики системы «конь — наездник» позволит решать задачи проектирования тренажеров, соответствующих различным видам движений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-08-00261.

Литература

1. YouTube. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=ovUuHNcIHD4&t=>
2. Мухарлямов Р.Г. Управление динамикой системы с дифференциальными связями. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2019, № 4, с. 16–28.

Simulation of the dynamics of the “Horse — rider” system

© V.K. Badyaeva, R.G. Mukharlyamov

RUDN University, Moscow, Russia

E-mail: vlada_badyaeva@mail.ru, robgar@mail.ru

Abstract. The dynamics of the “Horse — rider” system is investigated. A mechanical model of the system is formed, represented by the movement of the centers of mass. The dynamics of the system is described by Lagrange equations. The change in the strengths of the rider's and horse's muscles are determined, providing a given movement of the centers of mass and its stabilization. The results of numerical modeling

obtained using the methods of constraint stabilization and inverse problems of dynamics are presented.

Keywords: *dynamics, system, stability, equations, relations, stabilization.*

The research was funded by RFBR, project no. 19-08-00261.

References

1. YouTube. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=ovUuHNcIHD4&t=>
2. Mukharlyamov R.G. Control of the Dynamics of a System with Differential Constraints. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2019, vol. 58, no. 4, pp. 515–527.

Расчет автомобиля-самосвала на устойчивость при разгрузке на склоне

© Ю.Н. Барышников, И.Г. Благовещенский

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: mhts@list.ru, drbl@bk.ru

Аннотация. В статье рассматривается проблема потери устойчивости самосвала при разгрузке на склоне. Основной задачей исследования является определение предельного угла наклона площадки разгрузки. Разработана математическая модель самосвала при разгрузке. Получена аналитическая формула для расчета предельного угла наклона площадки в случае прилипания груза. При движении груза разработан алгоритм и программа расчета продольной устойчивости самосвала на основе пошагового изменения параметров. Представлены результаты расчета продольной устойчивости двух моделей самосвалов КАМАЗ.

Ключевые слова: *автомобили-самосвалы, устойчивость, несущая система, математические модели.*

Введение. Опрокидывание автомобиля (потеря устойчивости) может произойти как в продольной, так и в поперечной плоскости. В продольной плоскости: при резком торможении на крутом спуске, при движении на крутом подъеме, при движении задним ходом в овраг или в реку [1].

Указанные случаи встречаются и в процессе эксплуатации автомобилей-самосвалов [2]. Кроме того, для данного класса машин существует опасность опрокидывания автомобиля при разгрузке. Опрокидывание происходит во время разгрузки на наклонных площадках или при просадке задних колес в грунт. В этой связи основной задачей при оценке устойчивости самосвала является определе-

ние предельно допустимого (критического) угла наклона площадки разгрузки.

Современные методы оценки устойчивости. Традиционно критический угол наклона площадки определяют при испытаниях натуральных образцов автомобилей на специальных стендах. В нашей стране разработаны государственные стандарты, регламентирующие такие испытания [3]. Аналогичные испытания проводят за рубежом. Однако такой подход требует существенных затрат на проведение натуральных испытаний и увеличивает сроки доводки автомобилей. Другой подход основан на применении расчетных методов исследования, в частности, на проведение численных экспериментов на полной конечно-элементной модели автомобиля.

Вместе с тем существует необходимость разработки сравнительно простого инженерного метода оценки устойчивости самосвала при разгрузке.

Математическая модель разгрузки самосвала. Рассмотрим схему разгрузки самосвала на продольном уклоне (рис. 1).

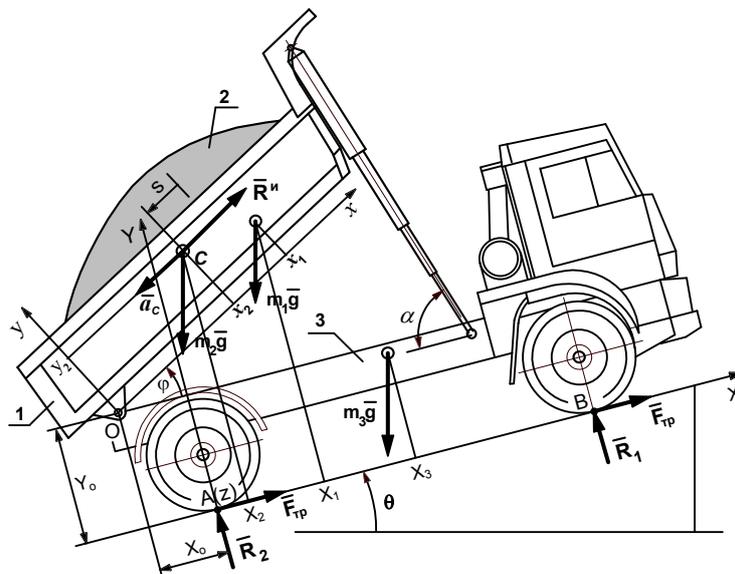


Рис. 1. Расчетная схема разгрузки самосвала

Здесь m_1 и m_2 — масса платформы 1 и груза 2; m_3 — масса шасси 3; φ — угол подъема платформы; θ — угол наклона площадки разгрузки; s — перемещение груза при разгрузке; R_1 и R_2 — суммарные реакции на колесах передней и задней осей автомобиля; $AB = L$ — колесная база.

Воспользуемся принципом Даламбера [4]:

$$\sum M_Z(m_k \bar{g}) + \sum M_Z(\bar{R}_k) + \sum M_Z(\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (1)$$

Пусть груз — монолитная глыба, симметричная относительно вертикальной плоскости симметрии Oxy автомобиля. Приведем все силы инерции груза ($\bar{\Phi}_k$) к его центру масс C в виде главного вектора $\bar{R}^{ин}$ и главного момента $\bar{L}_C^{ин}$. Главный момент сил инерции груза равен нулю, так как подъем платформы происходит с постоянной угловой скоростью. В свою очередь, главный вектор сил инерции $\bar{R}^{ин}$ направлен в противоположную сторону ускорения груза (см. рис. 1), а его модуль равен $R^{ин} = m_2 \ddot{s}$ [5].

Тогда уравнение (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} & -\sum_{\kappa=1}^3 m_{\kappa} g \cos \theta \cdot X_{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^3 m_{\kappa} g \sin \theta \cdot Y_{\kappa} + \\ & + R_1 \cdot L - R^{ин} (y_2 + Y_0 \cos \varphi + X_0 \sin \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь координаты центров масс платформы 1 и груза 2 в неподвижной $(X_{\kappa}; Y_{\kappa})$ и в подвижной $(x_{\kappa}; y_{\kappa})$ системе координат (см. рис. 1) связаны между собой следующими соотношениями:

$$X_{\kappa} = x_{\kappa} \cos \varphi - y_{\kappa} \sin \varphi - X_0; \quad (3)$$

$$Y_{\kappa} = x_{\kappa} \sin \varphi + y_{\kappa} \cos \varphi + Y_0 \quad (\kappa = 1, 2). \quad (4)$$

Из уравнения (2) получим суммарную реакцию на передних колесах:

$$\begin{aligned} R_1 = \frac{1}{L} & \left[\sum_{\kappa=1}^3 m_{\kappa} g \cos \theta \cdot X_{\kappa} - \sum_{\kappa=1}^3 m_{\kappa} g \sin \theta \cdot Y_{\kappa} + \right. \\ & \left. + m_2 \ddot{s} (y_2 + Y_0 \cos \varphi + X_0 \sin \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Если угол наклона площадки будет равен критическому углу θ^* , то суммарная реакция R_1 на передних колесах станет равной нулю и уравнение (5) примет вид

$$g \cos \theta^* \sum_{\kappa=1}^3 m_{\kappa} X_{\kappa} - g \sin \theta^* \sum_{\kappa=1}^3 m_{\kappa} Y_{\kappa} + m_2 \ddot{s} (y_2 + Y_0 \cos \varphi + X_0 \sin \varphi) = 0. \quad (6)$$

В случае прилипания груза к платформе ($s = 0$) из уравнения (6) найдем критический угол наклона площадки:

$$\theta^* = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sum_{\kappa=1}^3 m_{\kappa} X_{\kappa}}{\sum_{\kappa=1}^3 m_{\kappa} Y_{\kappa}} \right). \quad (7)$$

После подстановки соотношений (3) и (4) в формулу (7) получим:

$$\theta^* = \operatorname{arctg} \left(\frac{(m_1 x_1 + m_2 x_2) \cos \varphi - (m_1 y_1 + m_2 y_2) \sin \varphi - (m_1 + m_2) X_0 + m_3 X_3}{(m_1 x_1 + m_2 x_2) \sin \varphi + (m_1 y_1 + m_2 y_2) \cos \varphi + (m_1 + m_2) Y_0 + m_3 Y_3} \right). \quad (8)$$

Таким образом, по формуле (8) уже на этапе проектирования самосвала можно вычислить критический угол наклона площадки и дать оценку устойчивости автомобиля при разгрузке.

В случае движения груза ($s > 0$) для расчета критического угла наклона разработан следующий алгоритм решения задачи. Задаем начальные значения углов $\theta = 0^\circ$ и $\varphi = 0^\circ$, координаты $(x_{\kappa}, y_{\kappa}, \kappa = 1, 2)$ центров масс платформы и груза в исходном положении и другие параметры. Затем дискретно, с шагом 1° , увеличиваем угол подъема платформы. Когда суммарный угол $(\varphi + \theta)$ станет равным углу естественного откоса ($\approx 30^\circ$), моделируем движение груза. Для этого на каждом шаге изменения угла φ вычисляем все параметры, входящие в уравнение (5). В частности, ускорение $a_C = \ddot{s}$ центра масс груза находим из дифференциального уравнения его движения:

$$m_2 \ddot{s} = m_2 g (\sin(\varphi + \theta) - f \cos(\varphi + \theta)), \quad (9)$$

где f — коэффициент трения скольжения груза о платформу.

Интегрируя уравнение (9), находим скорость и перемещение s груза. Из соотношений (3) и (4) вычисляем новые координаты центра масс платформы и груза. Все найденные параметры подставляем в уравнение (5). Если суммарная реакция R_1 будет меньше или равна нулю, автомобиль опрокинется. На этом расчет заканчиваем и фиксируем значение критического угла наклона площадки. В противном случае угол θ увеличиваем на 1° и процесс разгрузки повторяется.

Таким образом, последовательно изменяя угол наклона площадки, определяем его критическое значение в случае движения груза.

Расчет на устойчивость самосвалов КАМАЗ. Для оценки продольной устойчивости на базе формулы (8) выбраны две модели самосвалов КАМАЗ. Результаты расчетов критических углов при изменении угла подъема груженой платформы представлены на рис. 2.

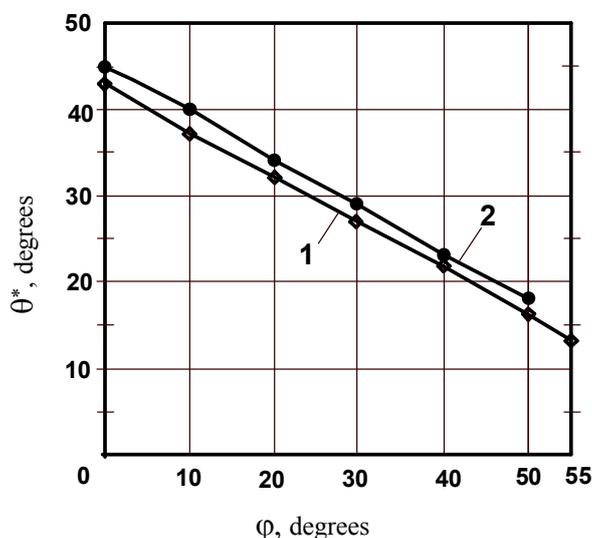


Рис. 2. График изменения критического угла наклона площадки:
1 — КАМАЗ-43255; 2 — КАМАЗ-53605

Анализ полученных результатов показал, что обе модели самосвалов КАМАЗ обладают высокой устойчивостью на опрокидывание. Так, при подъеме грузовой платформы на максимальный угол ($\varphi = 50^\circ$) КАМАЗ-53605 сохраняет устойчивость на площадке с углом наклона $\theta = 17^\circ$, а КАМАЗ-43255 — на площадке с углом наклона $\theta = 13^\circ$. Следует отметить, что реальный критический угол наклона площадки будет меньше полученных расчетных значений на $2\text{--}4^\circ$ за счет дополнительного прогиба рессор задней подвески и шин при разгрузке самосвала.

Кроме того, опрокидывание самосвалов при разгрузке может происходить не только на наклонной площадке, но и при просадке задних колес в грунт. Для указанных моделей при просадке на 0,8 м и 0,5 м соответственно.

В случае движения груза критический угол наклона площадки будет больше указанных значений. Это обусловлено силами инерции груза, которые стремятся удержать самосвал в устойчивом положении.

Заключение. Предложенный метод является эффективным инструментом для экспресс-анализа устойчивости самосвала. Используя аналитическую формулу для расчета критического угла наклона площадки, можно уже на ранней стадии проектирования автомобиля проводить многовариантные расчеты с целью выбора оптимального конструктивного решения.

Литература

1. Кравец В.Н. *Теория автомобиля*. Н. Новгород, НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2013, 413 с.
2. Белокуров В.Н., Гладков О.В., Захаров А.А., Мелик-Саркисянц А.С. *Автомобили-самосвалы*. Мелик-Саркисянц А.С., ред. Москва, Машиностроение, 1987, 216 с.
3. *ГОСТ 31507–2012. Автотранспортные средства. Управляемость и устойчивость. Технические требования. Методы испытаний*. Москва, Стандартинформ, 2013, 51 с.
4. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. *Курс теоретической механики*. Колесников К.С., Дубинин В.В., ред. 5-е изд., испр. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 584 с.
5. Барышников Ю.Н. Устойчивость автомобиля-самосвала при разгрузке. *Машины и установки: проектирование, разработка и эксплуатация*. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн., 2015, № 3, с. 51–61.
DOI: 10.7463/aplts.0315.0783168

Calculation of a dump truck for stability when unloading on a slope

© Yu.N. Baryshnikov, I.G. Blagoveschenskiy

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: mhhs@list.ru, drbl@bk.ru

Abstract. The article deals with the problem of loss of stability of a dump truck when unloading on a slope. The main objective of the study is to determine the maximum angle of inclination of the unloading platform. A mathematical model of a dump truck during unloading has been developed. An analytical formula has been obtained for calculating the maximum angle of inclination of the platform in the case of cargo sticking. During the movement of cargo, an algorithm and a program for calculating the longitudinal stability of a dump truck based on step-by-step changes in parameters have been developed. The results of calculating the longitudinal stability of two models of KAMAZ dump trucks are presented.

Keywords: *dump trucks, stability, load-bearing system, mathematical models.*

References

1. Kravets V.N. *Theory of the automobile*. N. Novgorod, NSTU named after R.E. Alekseev, 2013, 413 p.
2. Belokurov V.N., Gladkov O.V., Zakharov A.A., Melik-Sarkisyants A.S. *Autos-dump trucks*. Melik-Sarkisyants A.S., ed. Moscow, Mashinostroenie, 1987, 216 p.
3. *GOST 31507–2012. Motor vehicles. Controllability and stability. Technical requirements. Test methods*. Moscow, Standartinform, 2013, 51 p.
4. Drong V.I., Dubinin V.V., Ilyin M.M. et al. *Course of theoretical mechanics: textbook for universities*. Kolesnikov K.S., Dubinin V.V., ed. 5th ed., ispr. Moscow, Publishing House of the Bauman Moscow State Technical University, 2017, 584 p.

5. Baryshnikov Yu.N. Stability of a dump truck during unloading. *Machines and installations: design, development and operation*. Bauman Moscow State Technical University. Electron. Journal, 2015, no. 3, pp. 51–61.
DOI: 10.7463/aplts.0315.0783168

Моделирование и управление многозвенной моделью сноубордиста

© А.В. Борисов¹, И.Е. Каспирович², Р.Г. Мухарьямов²

¹Филиал ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ» в г. Смоленске, Смоленск, Россия

²Институт физических исследований и технологий ФГАОУ ВО Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Движение сноубордиста по заданной траектории моделируется с использованием многозвенных моделей. В рассматриваемой модели управляющие моменты соответствуют мышечным усилиям, удерживающим определенное положение тела. При численном интегрировании уравнений движения, чтобы избежать неустойчивости решения, применяется метод стабилизации связей Баумгарте. Следовательно, выражения для управляющих моментов содержат параметры стабилизации. Рассматривается механическая управляемая модель с тремя абсолютно твердыми звеньями, содержащая одну неголономную связь. На ее основе проводится моделирование управляемого движения сноубордиста на лыже. Приводится числовой пример моделирования динамики предложенной модели с применением метода стабилизации связей и параметрами, соответствующими реальной модели человека на сноуборде.

Ключевые слова: стабилизация связей, множители Лагранжа, управляющие моменты, многозвенная система, неголономная связь, сноубордист.

Введение. Существуют различные типы математических моделей, описывающих движения лыжника или сноубордиста. Например, в [1] предложено компьютерное моделирование последовательных лыжных поворотов. Движение сноуборда подробно исследовано в [2]. Модель взаимодействия доски со снежной поверхностью описана в [3]. Ряд статей посвящен предотвращению тяжелых травм при падении. Рассмотрим многозвенную модель для исследования движения сноубордиста. Исследование движения многозвенных механизмов с неголономными связями является важной фундаментальной проблемой, имеющей много практических приложений. Вауо, Pappadouroulos и его коллеги в [4] исследовали обратную задачу многозвенных роботов. Существует обширный обзор области управления

многозвенными роботами, представленный М. Benosman и G. Le Vey в статье [5].

Численное интегрирование уравнений движения многозвенной модели не всегда может дать желаемый результат. Накопление отклонений от ограничений приводит к неустойчивости численного решения. J. Baumgarte в [6] предложил метод стабилизации связей. В [7] определены значения параметров возмущения для достижения устойчивости численного решения. Проблема стабилизации связей для неголономных систем рассмотрена в [8].

Описание трехзвенной модели. Многозвенный механизм используется для моделирования движения сноубордиста. Модель рассматривается как каркас, состоящий из трех звеньев: одно звено для доски, второе — для ног и третье — для тела. Эти звенья представляют собой тонкие металлические стержни, которые шарнирно соединяются друг с другом.

Будем считать, что диаметр каждого стержня намного меньше его длины, и вращением вокруг продольной оси стержня можно пренебречь. Таким образом, положение каждого звена описывается пятью координатами $(x_i, y_i, z_i, \varphi_i, \psi_i)$, $i = 0, 1, 2$. Здесь звено 0 обозначает лыжу, звено 1 — ноги и звено 2 — тело. Координаты (x_i, y_i, z_i) , $i = 0, 1, 2$, описывают положение центра масс стержня, ψ_i — угол между стержнем и его проекцией на плоскость XU , а φ_i — угол между проекцией стержня на плоскость XU и осью X .

Модель сноубордиста движется по наклонной плоскости с углом наклона α . Во время движения лыжа (звено 0) всегда должна лежать на плоскости, поэтому можно считать, что $z_0 = 0$ и $\psi_0 = 0$. Стержни соединены между собой шарнирами. Звено 1 прикреплено к звену 0 в точке его центра масс, а звено 2 закреплено в верхней части звена 1.

Далее проведено численное моделирование движения сноубордиста, с тремя абсолютно твердыми звеньями, используя метод стабилизации связей.

Заключение. Разработана модель механической системы с тремя абсолютно твердыми звеньями, соединенными шарнирами. В системе учтена одна неголономная связь в зоне контакта лыжи с опорной поверхностью. Получена система дифференциальных уравнений, описывающая динамику рассматриваемой механической системы. Приведено описание метода стабилизации связей. Представлены результаты численного моделирования применительно к реальной биомеханической системе — лыжнику на сноуборде. Показана эффективность предложенного метода стабилизации связей для решения задачи устойчивого управления рассматриваемой механической системой с неголономной связью.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ,
проект № 19-08-00261 А.*

Литература

1. Mossner M., Heinrich D., Kaps P., Schretter H., Nachbauer W. Computer Simulation of Consecutive Ski Turns. *Journal of ASTM International*, 2008, vol. 5, pp. 126–136.
2. Jentschura U.D., Fahrbach F. Physics of skiing: The ideal-carving equation and its applications. *Canadian Journal of Physics*, 2004, vol. 82, iss. 4, pp. 249–261.
3. Yoshida T., Hojo A., Kuratani H. Simulation of snowboarding on snow surface modelled with particle elements. *6th International Congress on Sport Sciences Research and Technology Support*, 2018, pp. 23–26.
4. Bayo E., Papadopoulos P., Stubbe J., Serna M.A. Inverse Dynamics and Kinematics of Multi-Link Elastic Robots: An Iterative Frequency Domain Approach. *The International Journal of Robotics Research*, 2018, vol. 57, iss. 2, pp. 319–347.
5. Benosman M., Le Vey G. Control of exible manipulators: A survey. *Robotica*, 2004, vol. 22, iss. 5, pp. 533–545.
6. Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1972, vol. 1, iss. 1, pp. 1–16.
7. Mukharlyamov R.G. Differential-algebraic equations of programmed motions of Lagrangian dynamical systems. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, iss. 4, pp. 535–543.
8. Kaspirovich I.E. Application of constraint stabilization to nonholonomic mechanics. *2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing*, 2016, pp. 1–4.

Modeling and control of multi-link snowboarder model

© A.V. Borisov¹, I.E. Kaspirovich², R.G. Mukharlyamov²

¹Branch OF National Research University “Moscow Power Engineering Institute”
in Smolensk, Smolensk, Russia

²Institute of Physical Research and Technologies, Peoples’ Friendship
University of Russia, Moscow, Russia

Abstract. Snowboarder's motion on a given trajectory is modeled using of multi-link systems. In the considered model control torques correspond to the muscular efforts that keep a specific position of the body. During a numerical integration of the motion equations, a method of Baumgarte's constraint stabilization is applied to avoid a solution instability. So expressions of the control torques contain the parameters of stabilization. A mechanical controlled model with three absolutely rigid links, containing one nonholonomic constraint, is considered. It is used to simulate the movement of a snowboarder on a ski. A numerical example of modeling the dynamics of the proposed model using the method of constraint stabilization and parameters corresponding to a real model of a person on a snowboard is given.

Keywords: *constraint stabilization, lagrange multipliers, control torques, multi-link system, non-holonomic connection, snowboarder.*

There are various types of mathematical models describing a motion of a skier or a snowboarder. For example, in [1] a computer model was

developed to simulate consecutive ski turns. Snowboard's carving motion is scrutinized in [2]. Model of board's interaction with the snow surface is considered in [3]. Also lots of papers are devoted to prevent hard injuries after falling. In this paper multi-link model is considered to simulate a motion of a snowboarder.

Modeling a motion of multi-link machines with mechanical constraints is an important fundamental problem that has a lot of practical applications. Bayo, Papadopoulos and colleagues in [4] researched an inverse problem of multi-link exible robots. There is a huge survey of the field of control for exible multi-link robots which was presented by M. Benosman and G. Le Vey in their paper [5].

Numerical integration of multi-link model's motion equations can not always provide a desirable result. An accumulation of deviations from the constraints leads to the numerical solution instability. So, J. Baumgarte in [6] discovered a method of constraint stabilization, according to which the equation of constraint perturbation is considered to control these accumulations. In [7] the values of perturbation parameters are determined to achieve numerical solution stability. So the problem of constraint stabilization to nonholonomic systems is considered in [8].

Description of the three-link model. In this paper multi-link mechanism is used to simulate a motion of a snowboarder. The model is considered as a frame that consists of three links: one for board, second for legs and third for body. These links are metal thin rods that connect to each other with a hinge.

Let's consider that a diameter of each rod is much smaller than its length and the spin around rod internal axis can be neglected. So the position of each link is described by five coordinates $(x_i, y_i, z_i, \varphi_i, \psi_i)$, $i = 0, 1, 2$. Here link 0 stands for the board, link 1 for the legs and link 2 for the body. Coordinates (x_i, y_i, z_i) , $i = 0, 1, 2$ describe the position of rod's center of mass, ψ_i is an angle between the rod and its projection the plane XY and φ_i is an angle between rod's projection on the plane XY and an X axis.

The snowboarder's model is moving on an inclined plane with inclination angle α . During the motion the board or link 0 must always lie on the plane, thus we can consider that $z_0 = 0$ and $\psi_0 = 0$. Rods are connected to each other with hinges. Link 1 is fixed to the link 0 at the point of its center of mass and link 2 is fixed at the top of the link 1.

Further, a numerical simulation of the movement of a snowboarder with three absolutely rigid links was carried out using the method of stabilizing ties.

Conclusion. Thus, a model of a mechanical system has been developed with three absolutely rigid links connected by hinges. The system takes into account one nonholonomic connection in the contact zone of the ski with the supporting surface. A system of differential equations is ob-

tained that describes the dynamics of the considered mechanical system. The description of the bond stabilization method is given. The results of numerical modeling are presented in relation to a real biomechanical system — a skier on a snowboard. The efficiency of the proposed method of stabilization of constraints for solving the problem of stable control of the considered mechanical system with a nonholonomic constraint is shown.

This work was supported by the RFBR, project no. 19-08-00261 A.

References

1. Mossner M., Heinrich D., Kaps P., Schretter H., Nachbauer W. Computer Simulation of Consecutive Ski Turns. *Journal of ASTM International*, 2008, vol. 5 (8), pp. 126–136.
2. Jentschura U.D., Fahrbach F. Physics of skiing: The ideal-carving equation and its applications. *Canadian Journal of Physics*, 2004, vol. 82, iss. 4, pp. 249–261.
3. Yoshida T., Hojo A., Kuratani H. Simulation of snowboarding on snow surface modelled with particle elements. *6th International Congress on Sport Sciences Research and Technology Support*, 2018, pp. 23–26.
4. Bayo E., Papadopoulos P., Stubbe J., Serna M.A. Inverse Dynamics and Kinematics of Multi-Link Elastic Robots: An Iterative Frequency Domain Approach. *The International Journal of Robotics Research*, 2018, vol. 57, iss. 2, pp. 319–347.
5. Benosman M., Le Vey G. Control of exible manipulators. A survey. *Robotica*, 2004, vol. 22, iss. 5, pp. 533–545.
6. Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1972, vol. 1, iss. 1, pp. 1–16.
7. Mukharlyamov R.G. Differential-algebraic equations of programmed motions of Lagrangian dynamical systems. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, iss. 4, pp. 535–543.
8. Kaspirovich I.E. Application of constraint stabilization to nonholonomic mechanics. *2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing*, 2016, pp. 1–4.

Роботизированный участок холодной обработки металлов давлением

© В.В. Варенцов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: Varentzov.viatch@yandex.ru

Ключевые слова: обработка металлов давлением, роботизированный участок штамповки, захватное устройство, сокращение времени штамповки.

Приведено описание роботизированного участка, разработанного и изготовленного для работы в составе роботехнологического комплекса объемной штамповки деталей. Участок содержит смонтированные на основании между подводящим и отводящим транспортерами

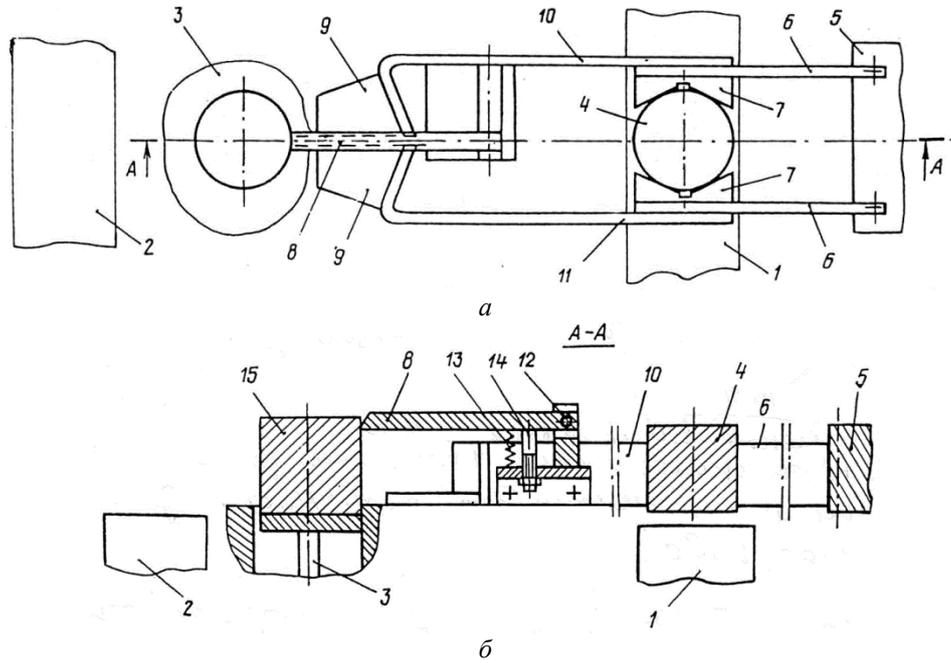


Рис. 1. Схема роботизированного участка:

a — вид сверху; *б* — разрез *A-A*; 1 — подводящий транспортер (лоток); 2 — отводящий транспортер; 3 — рабочая позиция штамповки; 4 — заготовка; 5 — рука робота; 6 — поворотные рычаги; 7 — губки руки (схвата); 8 — опрокидыватель; 9 — выталкиватель; 10, 11 — пластины; 12 — ось; 13 — пружина; 14 — регулировочный винт; 15 — готовая деталь

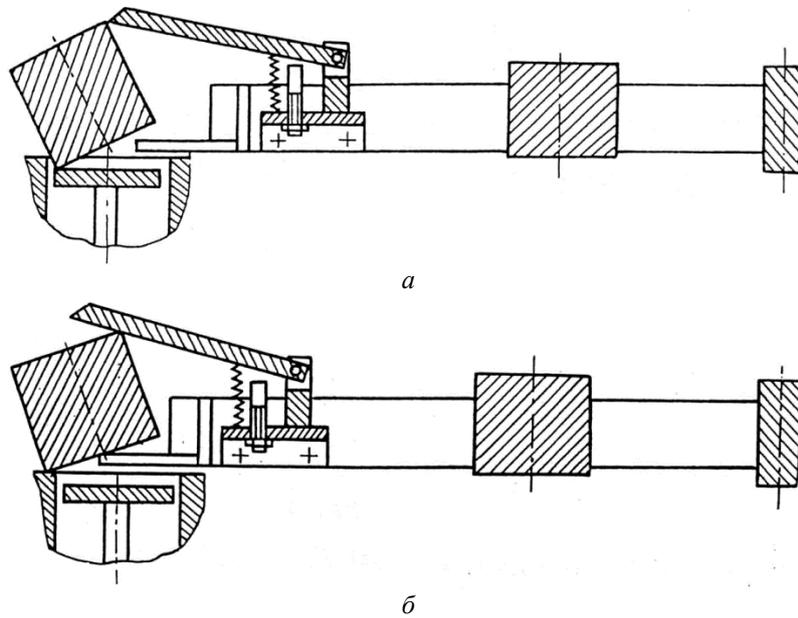


Рис. 2. Схема выгрузки детали в разных фазах:

a — деталь в наклонном положении на рабочей позиции; *б* — деталь в положении сброса на отводящий транспортер

рабочую позицию и перегружатель деталей с подводящего транспортера на рабочую позицию и с рабочей позиции на отводящий транспортер. Перегружатель выполнен в виде выдвижной руки робота с поворотными рычагами, снабженными губками для захвата деталей. Для выгрузки обработанной детали с рабочей позиции рука робота оснащена опрокидывателем и выталкивателем. Снятие детали и установка заготовки на позицию обработки, производимые за один ход руки робота, повышают производительность робототехнологического комплекса благодаря сокращению времени на штамповку.

При создании любого робототехнологического комплекса (РТК) возникает целый ряд задач, которые подлежат решению. На участках холодной обработки металлов давлением, связанных с высадкой, объемной штамповкой и т. п., вспомогательные операции, как правило, имеют повышенную опасность, являются грязными и утомительными. С разработкой различного рода автоматических манипуляторов (промышленных роботов) появляется возможность автоматизации таких операций путем создания роботизированных участков, один из которых изображен на рис. 1 и 2. Он работает следующим образом.

Заготовка 4 по транспортеру 1 попадает на исходную позицию, после чего зажимается губками 7 руки 5 робота и переносится на рабочую позицию 3. При этом опрокидыватель 8 упирается в обработанную деталь 15, находящуюся на рабочей позиции 3, в результате чего она наклоняется.

При дальнейшем движении руки 5 робота планки выталкивателя 9 попадают под нижний торец детали 15 и она сбрасывается на отводящий транспортер 2, а заготовка 4 оказывается над рабочей позицией 3, после чего губки 7 руки 5 робота раскрываются и заготовка 4 укладывается на рабочую позицию. Затем цикл работы участка повторяется.

На рис. 1 и 2 заготовка 4 и деталь 15 условно изображены в виде цилиндров и прямоугольных сечений.

Выводы. Использование роботизированного участка холодной штамповки повышает производительность благодаря сокращению времени на выгрузку готовой детали с рабочей позиции на отводящий транспортер (в лоток или тару) и установке заготовки в рабочую позицию за одно движение руки робота.

Литература

1. Варенцов В.В., Вернигор В.Н. *Роботизированный участок для обработки деталей*. А.с. № 141622 СССР, В 23К 37/04, 1988.
2. Бляхеров И.С., Прейс В.В., Усенко Н.А. и др. *Автоматизация загрузки прессов штучными заготовками*. Москва, Машиностроение, 1975, 216 с.
3. Наричин И.А., Власов В.И. *Автоматизация и механизация технологических процессовковки и штамповки*. Москва, Машиностроение, 1976, 388 с.

Зависимость быстродействия манипуляционной системы от параметров геометрии упругого элемента

© Д.К. Веретимус*, Н.К. Веретимус

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): dkvrgu@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматривается манипулятор с упругим звеном. Это звено является рекуператором энергии – накопителем потенциальной энергии. Быстродействие манипулятора определялось разностным методом. Показано, что быстродействие манипулятора с рекуперацией энергии зависит от формы его упругого звена, ширину которого до средней линии описывают линейные и параболические зависимости. При определении формы упругого манипулятора было предположено, что звено выполнено из однородного материала и имеет постоянную толщину; площадь звена – величина постоянная; звено симметрично относительно средней линии. Показано, что целесообразно использовать линейный закон изменения ширины до средней линии звена, так как при такой конфигурации упругого элемента выравниваются значения напряжений по длине звена при его изгибе, и надежность системы повышается.

Ключевые слова: быстродействие, упругое звено, манипулятор.

Введение. Рекуперационные системы позволяют уменьшить энергопотребление систем путем аккумуляции энергии на этапе торможения в накопитель потенциального или кинетического типа. На этапе разгона запасенная энергия поступает в систему.

Рассмотрим принцип действия таких систем на примере манипулятора с гибким звеном l (рис. 1) и захватным устройством (ЗУ) 2. На этапе разгона потенциальная энергия упругого звена переходит в кинетическую энергию движения [1–6]. На этапе торможения кинетическая энергия движения переходит в потенциальную энергию упругого звена. В системе всегда есть потеря энергии, которую необходимо компенсировать.

Определяя быстродействие, считаем, что упругое звено выполнено в виде заземленной пластинчатой пружины длиной l прямоугольного поперечного сечения с шириной b , значительно большей толщины h .

При определении быстродействия принимались следующие допущения: материал тела однороден, изотропен и подчиняется закону Гука; при отклонении упругого звена на малые углы имеют место только малые поперечные колебания; система консервативна; масса ЗУ учитывается как точечная масса.

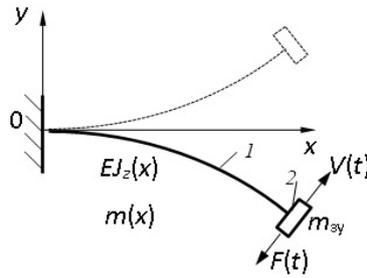


Рис. 1

Метод решения. Движение упругого звена с ЗУ на конце описывается дифференциальным уравнением поперечных колебаний [7]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ_z(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right) = -m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2},$$

где E — модуль Юнга; $J_z(x)$ — момент инерции относительно оси z ; $m(x)$ — погонная масса балки. Решение уравнения проведено методом прогонки.

Исследуя возможность повышения быстродействия путем изменения конфигурации упругого звена, предположим, что звено имеет постоянную толщину, симметричную относительно средней линии, а полуширина $b_1 = b/2$ описывается параболой $b_1 = A + Bx + Gx^2$; площадь звена — величина постоянная $S = 0,002 \text{ м}^2$. Из постоянства площади определяется параметр A

$$A = 0,5 \frac{S}{l} - 0,5Bl - G \frac{l^2}{3},$$

а B и G произвольны. Здесь $l = 0,1 \text{ м}$ — длина звена.

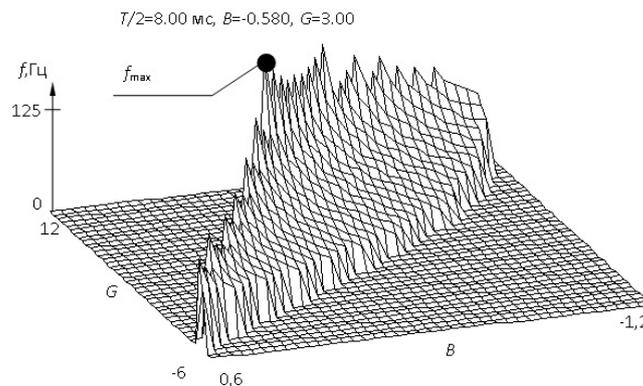


Рис. 2

Получена зависимость быстродействия от конфигурации упругого элемента (рис. 2) при заданной массе захватного устройства [8–10].

Заключение. Из рис. 3 видно, что можно повысить быстродействие в 1,5–3 раза путем изменения конфигурации упругого звена. При $m_{3y}/m < 0,25$ целесообразно делать упругий элемент с полушириной, изменяющийся по параболическому закону ($b_1 = Gx^2 + Bx + A$), а при $m_{3y}/m > 0,25$ выгоден линейный закон изменения ($b_1 = Bx + A$). Именно такая конфигурация упругого элемента позволяет выровнять значения напряжений по длине звена при его изгибе, что повышает надежность системы при действии знакопеременной нагрузки.

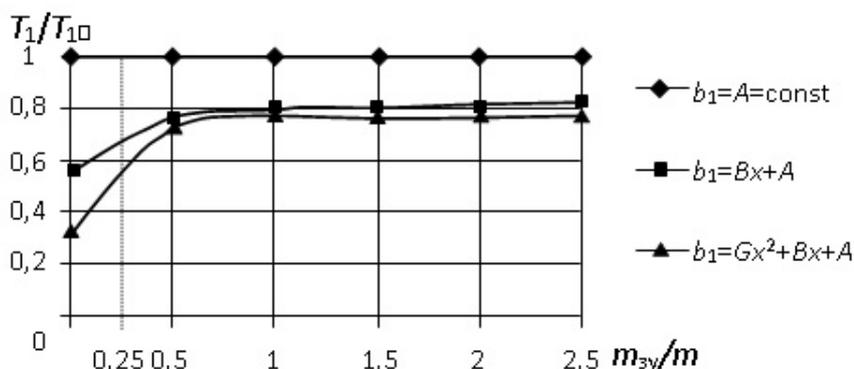


Рис. 3

Литература

1. Веретимус Д.К. *Исследование кинематических и динамических характеристик старт-стопных систем с рекуперацией энергии с целью повышения их быстродействия*. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Москва, 1999, 16 с.
2. Левин С.В. *Уменьшение массогабаритных параметров захватных устройств на основе принципа рекуперации энергии*. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Москва, 1992, 22 с.
3. Левин С.В., Гаврилина Л.В., Новикова Н.Н. Разработка механизмов параллельной структуры для работы в агрессивных средах (на земле, в космосе, под водой). *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2017, № 4, с. 14–18.
4. Левин С.В., Орлова Г.Н. *Манипулятор*. Пат. № 2402146 Российская Федерация, опубл. 10.11.2010.
5. Левин С.В., Шалюхин К.А. *Манипулятор с упругим звеном*. Пат. № RU 2 410 235 C2 Российская Федерация, опубл. 20.10.2010.
6. Левин С.В. (СССР). *Манипулятор*. А.с. 1821353 СССР, МКИ В25J9/00. 1993, № 22.
7. Корендясев А.И., Саламандра Б.Л., Тывес Л.И. и др. *Манипуляционные системы роботов*. Корендясев А.И., ред. Москва, Машиностроение, 1989, 471 с.
8. Корендясев А.И., Левин С.В., Веретимус Д.К. Варианты расчета на ЭВМ динамических характеристик консольно закрепленного упругого элемента. *Компьютерная хроника*, 1998, № 5, с. 63–76.

9. Корендясев А.И., Левин С.В., Веретимус Д.К. Варианты расчета на ЭВМ динамических характеристик консольно закрепленного упругого элемента (окончание). *Компьютерная хроника*, 1998, № 7, с. 75–94.
10. Корендясев А.И., Левин С.В., Веретимус Д.К. О повышении быстродействия упругих манипуляторов с рекуперацией энергии. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 1998, № 4, с. 92–95.

Dependence of the high-speed of the manipulation system on the parameters of the geometry of the elastic element

© D.K. Veretimus*, N.K. Veretimus

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): dkvrugu@yandex.ru

Abstract. The article discusses a manipulator with an elastic link. This link is an energy recuperator — a potential energy storage. The high-speed of the manipulator was determined by the difference method. It is shown that the high-speed of the manipulator with energy recovery depends on the shape of its elastic link, the width of which to the midline is described by linear and parabolic dependencies. When determining the shape of the elastic manipulator, it was assumed that the link is made of a homogeneous material and has a constant thickness; the area of the link is constant; the link is symmetrical with respect to the median line. It is shown that it is advisable to use a linear law of width variation to the midline of the link, since with such a configuration of the elastic element, the stress values are aligned along the length of the link when it bends, and the reliability of the system increases.

Keywords: *high-speed, the elastic link, the manipulator.*

References

1. Veretimus D.K. *Investigation of kinematic and dynamic characteristics of start-stop systems with energy recovery in order to increase their high-speed*. Author's abstract. of the Cand. tech. sciences. Dissertation. Moscow, 1999, p. 16.
2. Levin S.V. *Reduction of the mass and size parameters of gripping devices based on the principle of energy recovery*. Author's abstract. of the Cand. tech. sciences. Dissertation. Moscow, 1992, p. 22.
3. Levin S.V., Gavriliyva L.V., Novikova N.N. Development of parallel structure mechanisms for operation in aggressive environments (on earth, in space, under water). *Problems of mechanical engineering and machine reliability*, 2017, no. 4, pp. 14–18.
4. Levin S.V., Orlova G.N. *Manipulator*. Patent Russia 2402146, published 10.11.2010.
5. Levin S.V., Shalyxin K.A. *Manipulator with elastic link*. Patent RU 2 410 235 C2, published 20.10.2010.
6. Levin S.V. (USSR). *Manipulator*. С.с. 1821353 USSR, MKI B25J9/00. 1993, no. 22.
7. Korendyasev A.I., Salamandra B.L., Tives L.I. and other. *Robot manipulation systems*. Korendyasev A.I., ed. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 471 p.

8. Korendyasev A.I., Levin S.V., Veretimus D.K. Computer-based calculation options for dynamic characteristics of a con-solly fixed elastic element. *Computer chronicle*, 1998, no. 5, pp. 63–76.
9. Korendyasev A.I., Levin S.V., Veretimus D.K. Computer-based calculation options for dynamic characteristics of a con-solly fixed elastic element. *Computer chronicle* (ending), 1998, no. 7, pp. 75–94.
10. Korendyasev A.I., Levin S.V., Veretimus D.K. On increasing the speed of elastic manipulators with energy transfer. *Problems of mechanical engineering and machine reliability*, 1998, no. 4, pp. 92–95.

Бифуркация в задаче об управляемом вращении колеса

© Т.В. Глазков*, С.А. Решмин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: t.glazkov@bk.ru

Аннотация. Исследовано управляемое движение колесного диска и шины. Шина моделируется полым невесомым твердым цилиндром, который соединен с диском с помощью множества невесомых пружин. Ее состояние характеризуется переменными коэффициентами радиальной и крутильной жесткости. Проанализировано движение механической системы в частном случае.

Ключевые слова: нелинейная модель шины, бифуркация, колесный диск.

Нелинейная упругая модель шины. Рассмотрим механическую систему, которая состоит из колесного диска и шины. Колесный диск моделируется твердым диском a массы m_a и радиуса r_a . Шина моделируется полым невесомым твердым цилиндром b с внутренним радиусом $r_b > r_a$ и внешним радиусом $R > r_b$, который соединен с диском множеством невесомых упругих элементов, а именно пружин, находящихся в преднатяженном состоянии и равномерно распределенных между диском и цилиндром (см. схему колеса на рис. 1). Диссипация внутри пружин не учитывается. Угол поворота диска относительно цилиндра обозначен через φ . Смещение центра диска относительно центра цилиндра характеризуется вектором \vec{r} . Предполагается, что при малых $|\vec{r}|$ и $|\varphi|$ потенциальная энергия упругого взаимодействия между диском и цилиндром приближенно задается выражением

$$\Pi_{\text{tire}} = \frac{1}{2} \left(k_r^0 r^2 + k_\varphi^0 \varphi^2 \right) + \frac{1}{4} \left(k_r^r r^4 + 2k_r^\varphi r^2 \varphi^2 + k_\varphi^\varphi \varphi^4 \right) + \dots, \quad (r = |\vec{r}|), \quad (1)$$

где k_r^0 , k_φ^0 и k_r^r — заданные положительные постоянные, $k_r^r < 0$ и k_φ^r — также заданные постоянные.

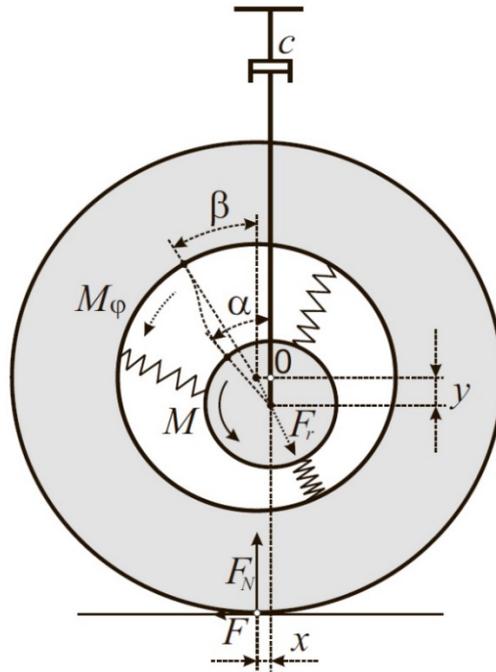


Рис. 1. Модель колеса с невесомой шиной и амортизатором

Формулу (1) можно получить в результате разложения потенциальной энергии, вычисленной в случае достаточно большого количества пружин, в ряд Тейлора — по переменным r и φ . Такая упругая энергия соответствует следующим переменным коэффициентам радиальной и крутильной жесткости:

$$k_r = k_r^0 + k_r^r r^2 + k_r^\varphi \varphi^2, \quad (2)$$

$$k_\varphi = k_\varphi^0 + k_\varphi^\varphi \varphi^2 + k_\varphi^r r^2, \quad (3)$$

которые позволяют получить силу и момент, действующие на цилиндр:

$$\vec{F}_r = k_r \vec{r}, \quad M_\varphi = k_\varphi \varphi.$$

Модель шины в составе механической системы. Рассмотрим динамику колеса с амортизатором, который ограничивает амплитуду его вертикальных колебаний (см. рис. 1). Углы поворота диска α и цилиндра β , отсчитанные от вертикали, обозначаются α и β соответственно. Горизонтальное смещение (в левом направлении) центра

цилиндра b относительно центра диска a характеризуется относительной координатой x . Вертикальное смещение (в направлении вниз) центра диска a относительно самого низкого возможного положения центра цилиндра b характеризуется относительной координатой y . Здесь и далее координата y уже не всегда характеризует деформацию шины, как это было в предыдущем разделе, а только во время ее контакта с основанием. Для удобства используем то же обозначение. В начальный момент времени $t = 0$ управляющего момента нет. Диск и полый цилиндр (шина) неподвижны и находятся в равновесии, так что выполнено:

$$\alpha(0) = \beta(0) = x(0) = \dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0, \quad y(0) = m_a g / (k_r^0 + k_r^r y(0)^2).$$

При $t > 0$ к диску прикладывается управляющий момент $M(t)$. Для простоты полагаем, что горизонтальные перемещения амортизатора и центра диска полностью отсутствуют.

Анализ управляемых движений в частном случае. Для моделирования вертикальных колебаний и вращения диска колеса составим уравнения Лагранжа, используя y и α в качестве обобщенных координат:

$$m_a \ddot{y} + c \dot{y} = m_a g - F_N, \quad J_a \ddot{\alpha} = M - M_\varphi, \quad (4)$$

где c — коэффициент демпфирования амортизатора; J_a — момент инерции диска; F_N — вертикальная проекция силы реакции, обусловленной радиальной деформацией шины; M_φ — момент силы реакции, обусловленный деформацией шины при кручении.

Используем предположение о квазистатическом равновесии невесомой шины. В этом случае F_N совпадает с силой нормальной реакции неподвижного основания, а M_φ совпадает с моментом RF силы сухого трения, где сила F задается законом трения

$$F = \begin{cases} f F_N \operatorname{sign} \dot{z} & \text{при } \dot{z} \neq 0, \\ \min(|k_r x|, f F_N) \operatorname{sign} k_r x & \text{при } \dot{z} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где f — коэффициент сухого трения в законе Амонтона — Кулона;

$$z = \beta R - x, \quad \dot{z} = \dot{\beta} R - \dot{x}. \quad (6)$$

Переменная β является вспомогательной; она связана с основными координатами α , x , y соотношением $\beta = \alpha - \varphi(x, y)$.

Поскольку горизонтальная проекция силы реакции, обусловленной радиальной деформацией шины, по модулю не превышает величины силы трения, то из (5) следует, что

$$|x| \leq f y. \quad (7)$$

Утверждение 1. Если $\dot{z} > 0$, то шина вращается против часовой стрелки со скольжением, причем $x = f y$. Если $\dot{z} < 0$, то шина вращается по часовой стрелке со скольжением, причем $x = -f y$. В противном случае происходит движение без скольжения, и значение x принадлежит множеству (7).

Если контакта колеса с основанием нет ($y \leq 0$), то $F_N = 0$, $M_\varphi = 0$ и, кроме того, $\beta = \alpha$, $x = 0$. В противном случае ($y > 0$) выполнено $F_N = k_r y$ и $M_\varphi = R k_r x$. Положим $r^2 = x^2 + y^2$ в выражениях (2) и (3). После подстановки их в равенство $M_\varphi = k_\varphi \varphi = R k_r x$ получим кубическое относительно φ уравнение:

$$k_\varphi^\varphi \varphi^3 - R k_r^\varphi x \varphi^2 + \left[k_\varphi^0 + k_r^\varphi (x^2 + y^2) \right] \varphi - R \left[k_r^0 + k_r^r (x^2 + y^2) \right] x = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим частный случай, когда $k_\varphi^\varphi = 0$, и следовательно, первое слагаемое уравнения (8) пропадает. Тогда решение $\varphi(x, y)$ уравнения (8) примет вид

$$\varphi(x, y) = \frac{k_\varphi^0 + k_r^\varphi (x^2 + y^2) \pm \sqrt{D}}{2 R k_r^\varphi x}, \quad (9)$$

$$D = \left[k_\varphi^0 + k_r^\varphi (x^2 + y^2) \right]^2 - 4 k_r^\varphi x^2 R^2 \left[k_r^0 + k_r^r (x^2 + y^2) \right]. \quad (10)$$

Отметим, что в случае $x = 0$ из уравнения (8) следует, что $\varphi(x, y) = 0$.

Проанализируем ситуацию, когда колесо на начальном этапе движения движется без проскальзывания. В этом случае движение сначала будет происходить в режиме квазистатики вдоль нижней ветви решения (9), соответствующей знаку «минус» перед квадратным корнем. При этом возможна ситуация, когда решение $\varphi(x, y)$

перейдет с нижней ветви на верхнюю. Настанет момент, когда в некоторой точке (x', y', φ') сила трения достигнет своего максимально возможного значения, так что $x' = f y'$. Данное положение равновесия, расположенное на верхней ветви решения (9), может быть неустойчивым. Поэтому в этом случае произойдет мгновенное прокручивание шины со скачкообразным изменением φ до значения φ'' . Система окажется на нижней ветви решения (9). Указанная остановка быстрых вращений происходит при условии $x'' = f y''$. Координата y при этом не изменяется: $y' = y''$, так как диск обладает инерцией. Поэтому координата x также не меняется: $x' = x''$. Нормальная реакция F_N изменяется скачкообразно от $k_r(x', y', \varphi') y'$ до $k_r(x', y', \varphi'') y'$, что может приводить к нарастанию вертикальных колебаний. Таким образом, показано, что неравновесные процессы в динамике системы могут присутствовать.

Метод построения зависимости $\varphi(x(t), y(t))$. В окрестности точки, где выполнено $D = 0$, целесообразно использовать следующий алгоритм для нахождения φ .

Подставим выражение $\beta = \alpha - \varphi(x, y)$ в уравнение (6) для переменной z и продифференцируем полученное равенство по времени. Из этого равенства с учетом соотношения

$$\dot{\varphi} = \varphi'_x \dot{x} + \varphi'_y \dot{y} \quad (11)$$

следует, что \dot{z} подсчитывается по формуле

$$\dot{z} = R\dot{\alpha} - (1 + R\varphi'_x)\dot{x} - R\varphi'_y\dot{y}. \quad (12)$$

Здесь частные производные φ'_x и φ'_y зависят от параметров системы и переменных x , y и φ . Выражения для них приведены в работе [1].

Предполагаем, что в окрестности точки, где $D = 0$, реализуется режим движения колеса без проскальзывания. Из Утверждения 1 следует, что в этом случае $\dot{z} = 0$. Приравнивая правую часть (12) к нулю, получаем дополнительное дифференциальное уравнение, которое разрешимо относительно \dot{x} при достаточно малых x :

$$\dot{x} = \frac{\dot{\alpha} - \varphi'_y \dot{y}}{1/R + \varphi'_x}. \quad (13)$$

Подставим (13) в (11).

В результате получим дифференциальное уравнение для определения φ :

$$\dot{\varphi} = \frac{R\varphi'_x \dot{\alpha} + \varphi'_y \dot{y}}{1 + R\varphi'_x}. \quad (14)$$

Уравнение (14) следует интегрировать совместно с (12).

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ № 18-11-00307.

Литература

1. Решмин С.А. Качественный анализ силы тяги при вращении ведущего колеса с невесомой шиной. *Труды МИАН*, 2021, т. 315, с. 211–221.
2. Решмин С.А. Качественный анализ силы тяги транспортного средства при несимметричных колебаниях ведущих колес. *Труды Института математики и механики УрО РАН*, 2021, т. 27, № 3, с. 172–179.

Bifurcation in the problem of controlled wheel rotation

© T.V. Glazkov*, S.A. Reshmin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

*E-mail: t.glazkov@bk.ru

Abstract. The controlled movement of the wheel disk and tire is investigated. The tire is modeled by a hollow weightless solid cylinder, which is connected to the disk by means of a set of weightless springs. Its condition is characterized by variable coefficients of radial and torsional stiffness. The analysis of the motion of a mechanical system in a particular case is carried out.

Keywords: *nonlinear tire model, bifurcation, wheel disk.*

The research was supported by the RSF grant no. 18-11-00307.

Оптимальное раскручивание колесного диска в составе двухмассовой модели

© Т.В. Глазков*, С.А. Решмин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: t.glazkov@bk.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос об интенсивной раскрутке колесного диска с помощью приложенного к нему ограниченного по модулю управляющего момента. Диск находится внутри полого цилиндра и соединен с ним с помощью невесомых упругих элементов. Ставится задача максимизации полной механической энергии этой двухмассовой системы на конечном интервале времени.

Ключевые слова: *колесный диск, принцип максимума, метод Ньютона.*

Постановка задачи. Рассмотрим задачу оптимального управления для механической системы, которая состоит из двух дисков a , b с заданными массами m_a , m_b и моментами инерции I_a , I_b относительно своих осей вращения. Углы поворотов дисков обозначены через α , β . Оси вращения дисков параллельны, причем ось вращения диска a и его центр масс зафиксированы в пространстве, а движение центра масс диска b происходит в плоскости, которая перпендикулярна к осям дисков. Положение центра масс диска b характеризуется относительными координатами x , y в прямоугольной системе координат в указанной плоскости. Таким образом, при $x = 0$, $y = 0$ оси вращения совпадают. Предполагается, что потенциальная энергия Π упругого взаимодействия двух дисков приближенно задается выражением

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[k_r (x^2 + y^2) + k_\varphi (\alpha - \beta)^2 \right],$$

где k_r, k_φ — заданные постоянные коэффициенты ($k_r > 0$, $k_\varphi > 0$). Управляющий момент $M(t)$ приложен к диску a и ограничен по модулю:

$$|M(t)| \leq M_0, \quad (1)$$

где M_0 — заданная постоянная. Задача управления рассматривается на конечном заданном интервале времени $t \in [0, T]$.

За счет выбора оптимального ограниченного управления (1) требуется максимизировать энергию системы в конце процесса:

$$E = \frac{1}{2} \left[I_a \dot{\alpha}^2 + I_b \dot{\beta}^2 + m_b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right] + \frac{1}{2} \left[k_r (x^2 + y^2) + k_\varphi (\alpha - \beta)^2 \right] \rightarrow \max \quad (\text{при } t = T). \quad (2)$$

Уравнения движения. Ради простоты наложим ограничения на движение диска b . Рассмотрим случай, когда $\alpha(t) \equiv \beta(t)$. Кроме того, считаем, что центр диска b может смещаться относительно центра диска a только вдоль выделенной на нем прямой. Тогда вместо двух координат x , y введем координату r центра диска b на указанной прямой, причем так, что при $r = 0$ центры дисков совпадают. Уравнения движения двухмассовой системы получены в работе [1] и имеют вид

$$\dot{\alpha} = \omega, \quad \dot{\omega} = \frac{M - 2m_b \omega r v}{I}, \quad \dot{r} = v, \quad \dot{v} = -Kr, \quad (3)$$

где ω — угловая скорость вращения дисков; v — скорость изменения координаты r ; $I(r) = I_a + I_b + m_b r^2$ — суммарный момент инерции относительно оси вращения системы; $K(\omega) = k_r/m_b - \omega^2$ — эффективная удельная жесткость упругой и центробежной сил.

Системе (3) отвечают начальные условия

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad r(0) = r_0, \quad v(0) = v_0. \quad (4)$$

В начальный момент времени оси дисков не совпадают, т. е. $r_0 \neq 0$.

Краевая задача принципа максимума. Максимизация энергии (2) эквивалентна минимизации функционала типа Лагранжа

$$J = \int_0^T f_0 dt = - \int_0^T M \omega dt \rightarrow \min.$$

Для решения задачи будем использовать принцип максимума. Введем соответствующие сопряженные переменные: $p_0 = -1$ и $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$. Гамильтониан и сопряженная система имеют вид

$$\begin{aligned} H &= (M + p_1)\omega + \frac{p_2(M - 2m_b\omega r v)}{I} + p_3 v - p_4 K r, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = -(M + p_1) + \frac{2p_2 m_b r v}{I} - 2p_4 \omega r, \\ \dot{p}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial r} = 2p_2 m_b \left[\frac{Mr + 2\omega v(I_a + I_b)}{I^2} - \frac{\omega v}{I} \right] + p_4 K, \\ \dot{p}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{2p_2 m_b \omega r}{I} - p_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия (условия трансверсальности) для полученной системы заданы на правом конце траектории:

$$p_1(T) = p_2(T) = p_3(T) = p_4(T) = 0. \quad (6)$$

Оптимальное управление должно максимизировать гамильтониан, поэтому полагаем

$$M_{\text{opt}}(t) = M_0 \text{sign}(p_2 + I\omega). \quad (7)$$

Подставляя (7) в дифференциальные уравнения (3), (5) и добавляя краевые условия (4), (6), получим краевую задачу принципа мак-

сумма. Первые уравнения в (3) и (5) отделяются. Из них и краевых условий (4), (6) следует

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad p_1(t) \equiv 0. \quad (8)$$

Аналитическое решение при отсутствии смещения. Выпишем аналитическое решение остальных уравнений системы (3), (5) в случае $r(0) = v(0) = 0$, которое далее будем использовать при численном расчете в общем случае в качестве начального приближения:

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega_0 + \frac{1}{I_a + I_b} \int_0^t M_{\text{opt}}(\tau) d\tau, \quad r(t) \equiv 0, \quad v(t) \equiv 0, \\ p_2(t) &= p_2(0) - \int_0^t M_{\text{opt}}(\tau) d\tau, \quad p_3(t) \equiv 0, \quad p_4(t) \equiv 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно, что энергия в конце процесса будет максимальна, если

$$M_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} M_0 \text{sign} \omega_0, & \omega_0 \neq 0; \\ \pm M_0, & \omega_0 = 0. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в (9), получаем соответственно

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \begin{cases} \omega_0 + M_0 t / (I_a + I_b) \text{sign} \omega_0, & \omega_0 \neq 0; \\ \pm M_0 t / (I_a + I_b), & \omega_0 = 0; \end{cases} \\ p_2(t) &= \begin{cases} M_0 (T - t) \text{sign} \omega_0, & \omega_0 \neq 0; \\ \pm M_0 (T - t), & \omega_0 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, получили оптимальное решение в тривиальном случае.

Алгоритм численного решения в общем случае. Введем параметризацию начальных значений

$$\omega(0) = \omega_0, \quad r(0) = \lambda r_0, \quad v(0) = \lambda v_0, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (11)$$

где λ — параметр, который будем постепенно увеличивать от нуля до единицы. К условиям (11) добавляются еще граничные условия на правом конце: $g_2 = p_2(T) = 0$, $g_3 = p_3(T) = 0$, $g_4 = p_4(T) = 0$. Входящие в них терминальные значения фазовых координат и сопряженных переменных являются функциями не известного пока вектора начальных параметров $z = (p_2(0), p_3(0), p_4(0))$. Поэтому функции g_2 , g_3 , g_4 можно рассматривать как сложные функции от z , после

чего указанные граничные условия представимы в виде: $g_2(z) = 0$, $g_3(z) = 0$, $g_4(z) = 0$.

Отметим, что условие $g_1 = p_1(T) = 0$ для первой сопряженной переменной выполняется автоматически в силу ее постоянства, если задать $p_1(0) = 0$. Угол α выражается через угловую скорость ω с помощью квадратуры (8). Без ограничения общности можно полагать, что $\alpha_0 = 0$. Дифференциальные уравнения для оставшихся переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{M - 2m_b \omega r v}{I}, \quad \dot{r} = v, \quad \dot{v} = -Kr, \quad \dot{p}_2 = -M + \frac{2p_2 m_b r v}{I} - 2p_4 \omega r, \\ \dot{p}_3 &= 2p_2 m_b \left[\frac{Mr + 2\omega v(I_a + I_b)}{I^2} - \frac{\omega v}{I} \right] + p_4 K, \quad \dot{p}_4 = \frac{2p_2 m_b \omega r}{I} - p_3, \end{aligned} \quad (12)$$

где функция M задана в (7).

Когда $\lambda = 0$ в начальных условиях (11), решение системы известно (см. предыдущий раздел). При этом согласно (9), (10) для начальных значений сопряженных переменных имеем следующие выражения:

$$p_2(0) = \begin{cases} M_0 T \operatorname{sign} \omega_0, & \omega_0 \neq 0; \\ \pm M_0 T, & \omega_0 = 0; \end{cases} \quad p_3(0) = 0, \quad p_4(0) = 0, \quad (\lambda = 0).$$

При $\lambda > 0$ систему (12) решаем методом пристрелки, а именно, перебираем значения вектора $z = (p_2(0), p_3(0), p_4(0))$ и добиваемся обращения в нуль невязок $g_2(z)$, $g_3(z)$, $g_4(z)$ на правом конце. Для нахождения z можно использовать метод Ньютона. В качестве начального приближения выбираем решение z , полученное при предыдущем (меньшем) значении λ .

Численное построение экстремалей. Расчет 1. Были использованы следующие параметры системы с нулевой начальной угловой скоростью и ненулевым начальным отклонением (без ограничения общности допускаем, что могут быть твердые тела больших размеров со сколь угодно малой плотностью и большой прочностью т. п.):

$$\begin{aligned} m_a &= 0,1 \text{ кг}, \quad m_b = 0,1 \text{ кг}, \quad r_a = 100 \text{ м}, \quad r_b = 0, \quad I_a = y_a m_a r_a^2 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ (y_a &= 0,001), \quad k_r = 0,1 \text{ Н/м}, \quad I_b = 0, \quad M_0 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad T = 3,5 \text{ с}, \quad \omega_0 = 0, \\ r_0 &= -0,03 \text{ м}, \quad v_0 = 0. \end{aligned}$$

Начальные значения сопряженных переменных (таблица) были найдены согласно предложенной методике, причем в соотноше-

ниях (11) параметр λ сразу полагался равным единице. Уравнения (12) были проинтегрированы на отрезке времени от 0 до T . Оказалось, что управление постоянно: $M(t) = M_0$.

Начальные значения сопряженных переменных и приращение энергии

Расчет	$p_2(0)$	$p_3(0)$	$p_4(0)$	$-J$, Дж
1	3,500027	0,002999	0,009594	6,124945
2	0,354877	0,283865	0,012659	10,523540

Расчет 2. Было изменено начальное значение угловой скорости: $\omega_0 = 24$ рад/с. В результате найдено оптимальное управление с двумя переключениями управления: в момент 1,0292 с — первое переключение (с M_0 на $-M_0$) и в момент 2,4980 с — второе переключение (с $-M_0$ на M_0). Результаты представлены на рис. 1.

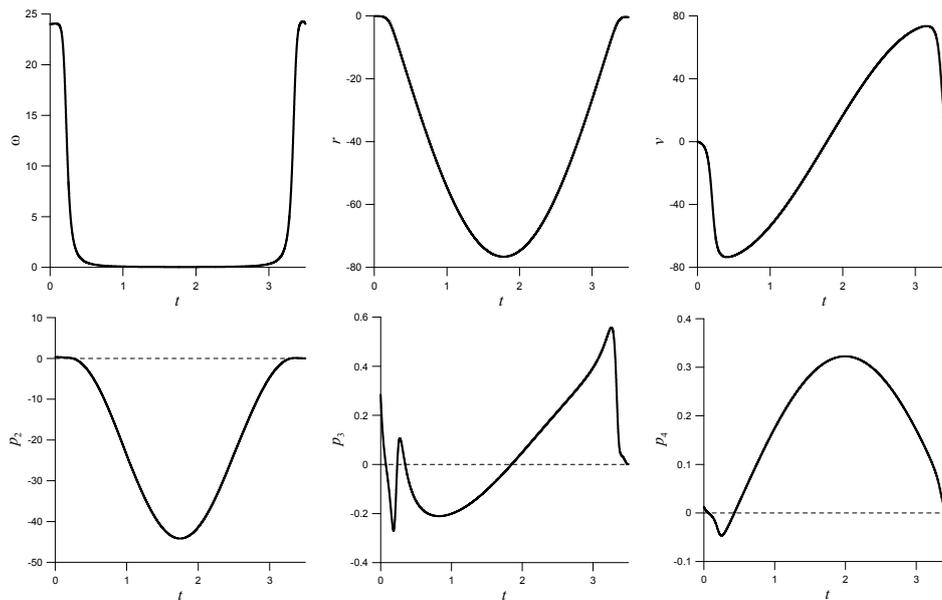


Рис. 1

Увеличение полной энергии $-J$ оказалось примерно на 6,7 % больше, чем аналогичное значение для траектории без переключений управления, при $M(t)=M_0$ и тех же начальных условиях.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ № 18-11-00307.

Литература

1. Решмин С.А. Применение метода Ньютона при решении краевых задач принципа максимума на примере задачи об оптимальном раскручивании двухмассовой системы. *Modern European Researches*, 2021, № 2 (т. 1), с. 114–122.
2. Галяев А.А., Лысенко П.В. Оптимальное по энергии управление гармоническим осциллятором. *Автоматика и телемеханика*, 2019, № 1, с. 21–37.

Optimal unwinding of the wheel as part of a two-mass model

© T.V. Glazkov*, S.A. Reshmin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

*E-mail: t.glazkov@bk.ru

Abstract. The question of intensive spinning up of a wheel disk with the help of a control torque limited in magnitude applied to it is considered. The disk is located inside the hollow cylinder and is connected to it by means of weightless elastic elements. The problem of maximizing the total mechanical energy of this two-mass system over a finite time interval is posed. It is shown that constant and maximum in modulus torque is not always the optimal solution.

Keywords: *wheel disc, maximum principle, Newton's method.*

The research was supported by the RSF grant no. 18-11-00307.

References

1. Reshmin S.A. Application of the Newton method to solving boundary value problems of the maximum principle on the example of the problem of optimal unwinding of a two-mass system. *Modern European Researches*, 2021, no. 2–1, pp. 114–122.
2. Galyaev A.A., Lysenko P.V. Energy-optimal control of harmonic oscillator. *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 1, pp. 16–29.

Моделирование механизма авторегулирования мозгового кровотока с использованием математической теории управления

© А.Е. Голубев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*E-mail: v-algolu@hotmail.com

Аннотация. Исследуется математическая модель мозгового кровообращения, имеющая вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача моделирования механизма авторегулирования

мозгового кровотока рассматривается как задача автоматического управления, заключающаяся в отслеживании заданного выходного сигнала. Для синтеза законов управления используется метод обхода интегратора (бэкстеппинга) с использованием барьерных функций Ляпунова.

Ключевые слова: *нелинейное управление, бэкстеппинг, стабилизация, математическое моделирование, биомеханическая система.*

Литература

1. Ursino M., Lodi C.A. A simple mathematical model of the interaction between intracranial pressure and cerebral hemodynamics. *Journal of applied physiology*, 1997, vol. 82, pp. 1256–1269.
2. Lampe R., Botkin N., Turova V., Blumenstein T., Alves-Pinto A. Mathematical modelling of cerebral blood circulation and cerebral autoregulation: towards preventing intracranial hemorrhages in preterm newborns. *Computational and mathematical methods in medicine*, 2014, vol. 2014, art. ID 965275, p. 9.

Cerebral blood flow autoregulation modeling using mathematical control theory

© A.E. Golubev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
E-mail: v-algolu@hotmail.com

Abstract. The mathematical model of cerebral blood flow in the form of a dynamical system is considered. The cerebral blood flow autoregulation modeling problem is treated as a control problem and potential and applicability of the nonlinear control theory techniques will be analyzed in that respect. The integrator backstepping approach combined with barrier Lyapunov functions will be applied to construct the relevant control laws which should help us understand the mathematics behind the cerebral blood flow autoregulation mechanism of a healthy human.

Keywords: *nonlinear control, integrator backstepping, output regulation, mathematical modeling, biomechanical systems.*

Моделирование распространения звука внутри помещения в задаче защиты от утечки речевой информации

© М.В. Мурашов, Е.С. Голубцова*

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
*E-mail (докладчика): golubeka@bmstu.ru

Аннотация. При защите помещений от утечки акустической речевой информации важным является анализ распределения звукового поля внутри помещения. В работе с использованием программы ANSYS разработана модель помещения, представляющая собой прямоугольную акустическую полость, ограниченную жесткими поглощающими стенками. Источник звука находится внутри полости. Выполненные численные расчеты позволили получить распределение величины звукового давления внутри модели помещения.

Ключевые слова: акустика, защита информации, помещение, численное моделирование.

Литература

1. Вахитов Ш.Я., Ковалгин Ю.А., Фадеев А.А., Щевьев Ю.П. *Акустика*, 2009.
2. Щевьев Ю.П. *Основы физической акустики*. 2-е изд., стер. Санкт-Петербург, Лань, 2021.

Simulation of sound propagation indoors in the problem of protection against leakage of speech information

© M.V. Murashov, E.S. Golubtsova*

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): golubeka@bmstu.ru

Abstract. When protecting rooms from leakage of acoustic speech information, it is important to analyze the distribution of the sound field inside the room. Using the ANSYS program, a model of a room has been developed, which is a rectangular acoustic cavity bounded by rigid absorbing walls. The sound source is located inside the cavity. The numerical calculations made it possible to obtain the distribution of the sound pressure inside the room model.

Keywords: acoustics, information protection, room, numerical simulation.

References

1. Vahitov S.Y., Kovalgin U.A., Fadeev A.A., Shchevyev Y.P. *Acoustics*, 2009.
2. Shchevyev Y.P. *Fundamentals of physical acoustics: a textbook for universities*. 2nd ed. St. Petersburg, Lan Publ., 2021.

Модельные оценки эффективности торможения шагающего аппарата

© В.В. Лапшин

МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва, Россия

E-mail: lapshin032@bmstu.ru

Аннотация. Рассмотрена задача торможения шагающего аппарата в модельной постановке. Исследовано плоское движение машины с невесомыми ногами, у которой вся масса корпуса сосредоточена в его центре масс (или момент инерции корпуса относительно центра масс равен нулю). Учитывается возможность скольжения ног по опорной поверхности в результате торможения. Проведено сравнение эффективности плавного и экстренного торможения.

Ключевые слова: *шагающий аппарат, управление движением, торможение.*

Model estimates of the efficiency of a walking vehicle stopping

© V.V. Lapshin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: lapshin032@bmstu.ru

Abstract. The problem of stopping a walking vehicle in a model setting is considered. The plane motion of a machine with weightless legs, in which the entire mass of the body is concentrated in its center of mass (or the moment of inertia of the body relative to the center of mass is equal to zero), is investigated. The possibility of feet sliding on the supporting surface as a result of braking is taken into account. Comparison of the efficiency of smooth and emergency stopping is investigated.

Keywords: *walking vehicle, motion control, stopping.*

Математическое моделирование процесса получения многокомпонентных соединений методом направленной кристаллизации

© А.О. Гусев*, О.В. Щерица, О.С. Мажорова

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
*E-mail: aogus@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена самосогласованная математическая модель процесса выращивания полупроводниковых соединений методом Бриджмена. Основой математической модели являются уравнения Навье–Стокса, уравнения тепломассопереноса в твердой и жидкой фазах и условия термодинамического равновесия на границе раздела фаз. Проведено численное моделирование процесса кристаллизации. В расчетах использовалась вычислительная схема, в которой на разностном уровне выполнены законы сохранения кинетиче-

ской и внутренней энергии, балансы масс для компонентов. Определены внешние температурные режимы, позволяющие выращивать кристаллы с выпуклой поверхностью и искомым распределением состава. Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: фазовый переход, теплоперенос в многокомпонентных системах, численное моделирование роста кристаллов.

Литература

Gusev A.O., Shcheritsa O.V., Mazhorova O.S. Conservative finite volume strategy for investigation of solution crystal growth techniques. *Computers & Fluids*, 2020, vol. 202, art. no. 104501.

Numerical simulation of single crystal growth by the Bridgman method

© A.O. Gusev^{*}, O.V. Shcheritsa, O.S. Mazhorova

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia

^{*}E-mail: aogus@mail.ru

Abstract. The self-consistent mathematical model of the Bridgman crystal growth technique is considered. The mathematical model is based on the time-dependent Navier-Stokes equations in stream function/vorticity form, energy and mass transfer equations in solid and liquid phases, and thermodynamics equilibrium conditions at the phase transition interface. Numerical simulations of the crystal growth process are performed. The employed computational procedure ensures global conservation of kinetic and thermal energy and conservation of the solute. The external thermal regime parameters promoting the growth of single crystals with desirable composition and convex interface shape are specified. The obtained numerical results are in good accordance with experimental data.

Keywords: phase transition, heat and mass transfer in the multicomponent system, numerical simulation of the crystal growth process.

References

Gusev A.O., Shcheritsa O.V., Mazhorova O.S. Conservative finite volume strategy for investigation of solution crystal growth techniques. *Computers & Fluids*, 2020, vol. 202, art. no. 104501.

Исследование устойчивости малых колебаний системы перераспределения топлива

© М.И. Дьяченко*, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): s_masyanya@mail.ru

Аннотация. Перераспределение топлива между баками ракеты-носителя пакетной схемы может быть осуществлено с помощью бустерного насоса, установленного в нише бака центральной ступени. Кроме бустерного насоса система перераспределения включает в себя трубопроводы с заборными устройствами, сильфоны, узлы разделения между ступенями. В работе представлены дифференциальные уравнения [1], описывающие отклонения скорости топлива на входе в бустерный насос, и приведены области устойчивости в плоскости параметров насоса.

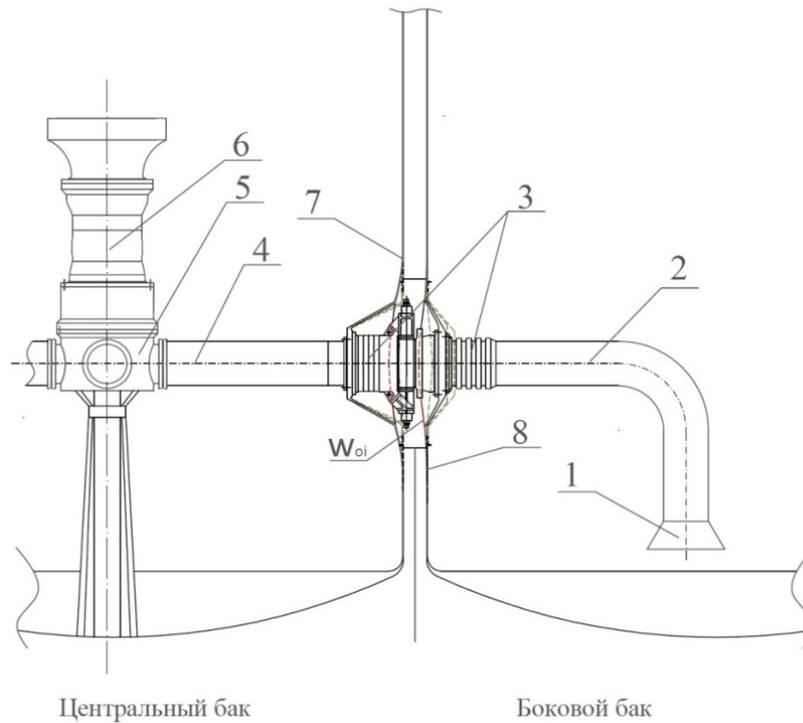
Ключевые слова: колебания жидкости, перераспределения топлива, бустерный насос.

Уравнения гидравлики магистрали перераспределения топлива в бак центрального блока. Практическая реализация перераспределения топлива может быть осуществлена посредством установки дополнительных бустерных насосов и заборных устройств в нижних частях баков. Рассмотрим перераспределение топлива из баков ББ непосредственно в топливный бак ЦБ с помощью бустерного насоса, установленного в нише центрального блока.

Магистраль перераспределения с бустерным насосом состоит из следующих основных участков (рисунок): заборного устройства 1, входного трубопровода 2, узла разделения трубопроводов, проходящих через стенки оболочек 7, 8 с компенсаторами 3; основного трубопровода 4, расположенного в центральном баке, входного устройства бустерного насоса 5, закрепленного в нише центрального бака, и где суммируются потоки перелива из боковых баков, бустерного насоса 6 с выходным устройством 9, формирующим струи топлива, расходящиеся в направлении обечаек вверх.

Рассмотрим механизм возникновения колебаний непосредственно в системе перераспределения топлива.

Пусть давление в нише бака i -го бокового блока, где расположены заборные устройства, изменится на величину $\Delta p_{\text{дБ}i} = \Delta p_{\text{НБ}i}$. Тогда на входе в заборное устройство i -й магистрали перераспределения давление изменится на величину $\Delta p_{\text{И}i}(0)$ и вызовет изменение расхода во входной и основной частях трубопровода, включая узел разделения трубопроводов с компенсаторами.



Магистраль перераспределения СПРТ с бустерным насосом

При продольных (или поперечных) колебаниях бокового или центрального блоков могут изменяться и поперечные размеры баков. Изменения радиусов баков, вызванных изменениями давления топлива на днище баков с жидкостью, изменяют гидродинамическое давление жидкости, воздействующее на тонкостенные обечайки баков. Вследствие взаимного влияния обечайки и жидкости узел разделения приобретет некоторые скорости \dot{w}_o и через компенсаторы (4) окажет воздействие на процесс перераспределения в виде возмущения скорости потока, определяемые через смещения торцов сильфонов, и будут выполняться уравнения

$$\begin{aligned} \Delta p_{НБi} &= \Delta p_{Пi}(0) + \rho V_{3Пi}^* \Delta V_{3Пi} + \zeta_3 \rho V_{3Пi}^* \Delta V_{3Пi}, \\ \Delta p_{Пi}(0) + \rho V_{3Пi}^* \Delta V_{3Пi} &= \Delta p_{Пi} + \rho(1 + \zeta_i) V_{Пi}^* \Delta V_{Пi} + l_{Пi} \rho \Delta \dot{V}_{Пi}, \\ \Delta p_{Пi} + \rho V_{Пi}^* \Delta V_{Пi} &= \Delta p_{Пi} + \rho V_{Пi}^* \Delta V_C. \end{aligned} \quad (1)$$

Из уравнений (1) получаем

$$\Delta p_{НБi} + \rho V_{\Sigma i}^* \Delta V_{\Sigma i} = l_{Пi} \rho \Delta \dot{V}_{Пi} + \Delta p_{Пi} + \rho \zeta_i V_{Пi}^* \Delta V_{Пi} + \zeta_3 \rho V_{3Пi}^* \Delta V_{3Пi} + \rho V_{Пi}^* \Delta V_C.$$

При слиянии i -х потоков в суммарный поток перераспределения, поступающий в насос, расположенный в нише бака ЦБ, изменения давления и скорости будут

$$\begin{aligned}\Delta p_{\Pi i} &= \Delta p_{1\Pi} + \zeta_{ci} \rho V_{1\Pi}^* \Delta V_{1\Pi}, \\ F_{\Pi} \Delta V_{1\Pi} &= \sum_{i=1}^N F_{\Pi i} \Delta V_{\Pi i}.\end{aligned}\quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) приняты обозначения:

$\Delta p_{1\Pi}, \Delta V_{1\Pi}, F_{\Pi}$ — отклонение давления, скорости и площадь трубы на входе в насос перераспределения;

$\Delta p_{НБi}$ — отклонение давления в нише i -го бокового блока;

$\Delta V_{з\Pi i}$ — отклонение скорости перераспределения в заборном устройстве i -й магистрали;

$\Delta p_{\Pi i}$ — отклонение давления в i -й магистрали перераспределения;

$l_{\Pi i}$ — длина i -й магистрали перераспределения от заборного устройства до места слияния магистралей;

$\Delta V_{\Pi i}$ — отклонение скорости перераспределения топлива от значения скорости $V_{\Pi i}^*$ в невозмущенном движении в i -й магистрали;

$\Delta V_{\Sigma i}$ — отклонение скорости поверхности слива топлива от значения скорости $V_{\Sigma i}^*$ в невозмущенном движении;

ζ_{ci} — коэффициент гидравлических потерь при слиянии отдельного потока топлива от i -го бака ББ в суммарный поток;

$\zeta_з$ — коэффициент гидравлических потерь в заборном устройстве;

ζ_i — коэффициент гидравлических местных потерь в i -й магистрали перераспределения до слияния потоков;

ζ_e — коэффициент гидравлических местных потерь при расширении потока на выходе из насоса перераспределения;

ΔV_C — скорость, приобретаемая узлом разделения при колебаниях обечайки i -го бака.

Для безмоментной обечайки, пренебрегая инерцией, значение прогиба обечайки определим формулой

$$\Delta V_c(t) = (1 + \lambda) \Delta V_{3c}(t) - \lambda \Delta V_{2c}(t) + r \Delta \dot{p}_c(t),$$

где ΔV_{2c} — изменение скорости перемещения торца сильфона, скрепленного с обечайкой бака центрального блока; ΔV_{3c} — изменение скорости перемещения торца сильфона, скрепленного с обечайкой бака бокового блока

$$\Delta V_{2c}(t) = \frac{dw_{\Pi}}{dt}, \quad \Delta V_{3c}(t) = \frac{dw_{oi}}{dt},$$

$$w_{oi} = \Delta l_{3c} = \frac{\Delta p_{\text{НБ}i} r_{oi}^2}{E h_i}, \quad w_{\Pi} = \Delta l_{2c} = \frac{\Delta p_{\text{НЦ}} r_o^2}{E h_{\Pi}},$$

где E, r_{oi}, h_i — модуль упругости, радиус и толщина стенки обечайки бака в месте крепления узла разделения. Изменение скорости в сильфонах запишем в виде

$$\Delta V_c(t) = \Delta \dot{w}_c(t) + r \Delta \dot{p}_c(t), \quad \Delta \dot{w}_c(t) = (1 + \lambda) \dot{w}_{oi}(t) - \lambda \dot{w}_{\Pi}(t).$$

Примем, что в насосе перераспределения при неизменной скорости вращения будет выполняться уравнение

$$\Delta p_{2\Pi} - \Delta p_{1\Pi} = -k_G \Delta G - k_{\dot{G}} \Delta \dot{G},$$

где $\Delta p_{2\Pi}$ — изменение давления на выходе насоса; $\Delta G = \rho F_{\Pi} \Delta V_{1\Pi}$ — изменение расхода перераспределяемого топлива; $\Delta \dot{G} = \rho F_{\Pi} \Delta \dot{V}_{1\Pi}$ — изменение скорости расхода перераспределяемого топлива, $k_G, k_{\dot{G}}$ — постоянные насоса перераспределения, зависящие от значений характеристик насоса в невозмущенном движении. Изменение давления в насосе перераспределения можно записать также в виде

$$\Delta p_{2\Pi} - \Delta p_{1\Pi} = -k_V \rho \Delta V - k_{\dot{V}} \rho \Delta \dot{V},$$

где $k_V = k_G F_{\Pi}, k_{\dot{V}} = k_{\dot{G}} F_{\Pi}$.

Тогда на выходе из насоса перераспределения потери давления составят

$$\Delta p_{2\Pi} - \Delta p_{\text{НЦ}} = \xi_e \rho V_{1\Pi}^* (\Delta V_{1\Pi} + \dot{w}_{He}), \quad (3)$$

где $\dot{w}_{He} = \dot{u}_{\text{дЦ}}(x_{\text{д}}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{\text{нд}}^q(0) \dot{q}_n(t)$ — переносная скорость насоса перераспределения, закрепленного на днище.

Исключив $\Delta p_{\Pi i}(0), \Delta p_{1\Pi i}, \Delta p_{1\Pi}, \Delta p_{2\Pi}$, получим уравнение динамики магистрали перераспределения топлива из бака i -го бокового блока в бак центрального

$$V_{\Pi i}^* r \rho k_{\dot{V}} \Delta \ddot{V}_{1\Pi} + (V_{\Pi i}^* r \rho \zeta_{cl} V_{1\Pi}^* + k_{\dot{V}} + V_{\Pi i}^* r \rho k_V + l_{\Pi i} \frac{F_{1\Pi}}{N F_{\Pi i}}) \Delta \dot{V}_{1\Pi} +$$

$$+ (\zeta_{\Sigma i} V_{\Pi i}^* \frac{F_{1\Pi}}{N F_{\Pi i}} + k_V + \zeta_{cl} V_{1\Pi}^*) \Delta V_{\Pi i} + \rho^{-1} \Delta p_{\text{НЦ}} + V_{\Pi i}^* r \rho \Delta \dot{p}_{\text{НЦ}} + \quad (4)$$

$$+ V_{\Pi i}^* \dot{w}_c + \zeta_l V_{1\Pi}^* \dot{w}_{He} + V_{\Pi i}^* r \rho \zeta_l V_{1\Pi}^* \ddot{w}_{He} = \rho^{-1} \Delta p_{\text{НБ}i},$$

где без учета вариаций скоростей опускания и слива отклонение давлений в нишах центрального и боковых блоков имеют вид

$$\Delta p_{HЦ} = \rho j \Delta H_{Ц} - \rho \ddot{u}_{\delta} H_{Ц} - \rho \psi_u \Delta \dot{H}_{Ц};$$

$$\Delta p_{HБi} = +\rho j \Delta H_{Бi} - \rho \ddot{u}_{\delta Bi}^i H_{Бi} - \rho \psi_i \Delta \dot{H}_{Бi}.$$

Подставив выражения $\Delta p_{HБi}$, $\Delta p_{HЦ}$ в уравнения (4), получим

$$\begin{aligned} & V_{\Pi i}^* \rho r k_{\dot{V}} \Delta \ddot{V}_{1\Pi} + (V_{\Pi i}^* \rho r \zeta_{cl} V_{1\Pi}^* + k_{\dot{V}} + V_{\Pi i}^* r \rho k_V + l_{\Pi i} \frac{F_{1\Pi}}{N F_{\Pi i}}) \Delta \dot{V}_{1\Pi} + (\zeta_{\Sigma i} V_{\Pi i}^* \frac{F_{1\Pi}}{N F_{\Pi i}} + \\ & + k_V + \zeta_{cl} V_{1\Pi}^*) \Delta V_{\Pi i} + j \Delta H_{Ц} - \ddot{u}_{\delta} H_{Ц} - \psi_u \Delta \dot{H}_{Ц} + V_{\Pi i}^* r (\rho j \Delta \dot{H}_{Ц} - \rho \ddot{u}_{\delta} H_{Ц} - \\ & - \rho \psi_u \Delta \ddot{H}_{Ц}) + V_{\Pi i}^* \dot{w}_c + \zeta_l V_{1\Pi}^* \dot{w}_{He} + V_{\Pi i}^* r \rho \zeta_l V_{1\Pi}^* \ddot{w}_{He} = j \Delta H_{Бi} - \ddot{u}_{\delta Bi}^i H_{Бi} - \psi_i \Delta \dot{H}_{Бi}, \end{aligned}$$

где

$$\frac{d \Delta H_{Ц}}{d t} = \left(\frac{F_{\Pi}}{F_O} \Delta V_{1\Pi} - \frac{F_M}{F_O} \Delta V_M \right);$$

$$\frac{d \Delta H_{Бi}}{d t} = \left(-\frac{F_{\Pi i}}{F_{oBi}} \Delta V_{\Pi i} - \frac{F_{Mi}}{F_{oBi}} \Delta V_{Mi} \right);$$

$$\psi_{Ц} = (F_O^2 / F_c^2) \zeta_{imp} V_o^*, \quad \psi_i = (F_O^2 / F_c^2) \zeta_{imp} V_{oBi}^*.$$

Заменяв $\Delta H_{Ц}$, $\Delta H_{Бi}$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & V_{\Pi i}^* r \rho k_{\dot{V}} \Delta \ddot{V}_{1\Pi} + (V_{\Pi i}^* r \rho \zeta_{cl} V_{1\Pi}^* + k_{\dot{V}} + V_{\Pi i}^* r \rho k_V + l_{\Pi i} \frac{F_{1\Pi}}{N F_{\Pi i}}) \Delta \dot{V}_{1\Pi} + \\ & + (\zeta_{\Sigma i} V_{\Pi i}^* \frac{F_{1\Pi}}{N F_{\Pi i}} + k_V + \zeta_{cl} V_{1\Pi}^*) \Delta V_{\Pi i} - \ddot{u}_{\delta} H_{Ц} + j \int \left(\frac{F_{\Pi}}{F_O} \Delta V_{1\Pi} - \frac{F_M}{F_O} \Delta V_M \right) dt - \\ & - \psi_u \left(\frac{F_{\Pi}}{F_O} \Delta V_{1\Pi} - \frac{F_M}{F_O} \Delta V_M \right) + V_{\Pi i}^* r \rho j \int \left(\frac{F_{\Pi}}{F_O} \Delta V_{1\Pi} - \frac{F_M}{F_O} \Delta V_M \right) dt - \\ & - \rho \ddot{u}_{\delta} H_{Ц} - \rho \psi_u \left(\frac{F_{\Pi}}{F_O} \Delta V_{1\Pi} - \frac{F_M}{F_O} \Delta V_M \right) + V_{\Pi i}^* \dot{w}_c + \zeta_l V_{1\Pi}^* \dot{w}_{He} = \\ & = j \int \left(-\frac{F_{\Pi i}}{F_{oBi}} \Delta V_{\Pi i} - \frac{F_{Mi}}{F_{oBi}} \Delta V_{Mi} \right) dt - \ddot{u}_{\delta Bi}^i H_{Бi} - \\ & - \psi_i \left(-\frac{F_{\Pi i}}{F_{oBi}} \Delta V_{\Pi i} - \frac{F_{Mi}}{F_{oBi}} \Delta V_{Mi} \right) - V_{\Pi i}^* r \rho \zeta_l V_{1\Pi}^* \ddot{w}_{He}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\zeta_{cl} = \zeta_e + \zeta_{cl}$, $\zeta_{\Sigma i} = \zeta_3 + \zeta_i$,

$$k_V = k_G F_{\Pi}, L_{\Pi i}^* = l_{\Pi i} + k_V \frac{\sum F_{\Pi i}}{F_{\Pi}}, k_{\dot{V}} = k_G F_{\Pi}, L_{\Pi} = L_{\Pi i}^* \frac{F_{\Pi}}{\sum F_{\Pi i}}.$$

Для того чтобы получить окончательное уравнение для $\Delta V_{1\Pi}$, остается заменить ΔV_{Mi} , ΔV_M

$$\Delta V_M = Y_{\text{о\textit{е}}}\Delta p_{1H} + K_{\text{упр}}\Delta \dot{p}_{1H} + \sum_{n=1}^{\infty} K_{Cn}\dot{q}_n;$$

$$\Delta V_{Mi} = Y_{\text{о\textit{е}}}\Delta p_{1Bi} + K_{\text{упр}}\Delta \dot{p}_{1Bi} + K_C \dot{\lambda}_n^i.$$

В результате при $r = 0$ получим:

$$(a_1 + k_{\dot{V}})\Delta \ddot{V}_{1\Pi} + (a_2 + k_V)\Delta \dot{V}_{1\Pi} + C_{\Pi}\Delta V_{1\Pi} = F(t). \quad (6)$$

Здесь

$$F(t) = C_{V_{pi}}\Delta \dot{p}_{1Bi} + C_{V_p}\Delta \dot{p}_{1H} + C_{V\lambda}\dot{\lambda} - \xi_e V_{1\Pi}^* \ddot{u}_{\text{о\textit{ц}}} + C_{V_p}\dot{q} + C_{V_p}\Delta \ddot{p}_{1H} + C_{V\lambda}\ddot{\lambda} + \\ + b_{V_{pi}}\Delta p_{1Bi} + b_{V_{p1}}\Delta p_{1H} + \zeta_i V_{\Pi i}^* \ddot{u}_{\text{о\textit{Б}i}} - \ddot{u}_{\text{о\textit{Б}i}} H_{\text{Б}i} + \ddot{u}_{\text{о\textit{Ц}}} H_{\text{Ц}} - V_{\Pi i}^* \ddot{w}_c - \zeta_l V_{1\Pi}^* \ddot{w}_{He},$$

где $F(t)$ — суммарное возмущение, действующее на систему перераспределения в результате колебаний упругого корпуса и колебаний давления в расходных магистралях перед входом в насосы подачи топлива.

Коэффициенты уравнения (6) определяются формулами:

$$C_{V\lambda} = -j \frac{F_{Mi}}{F_{\text{о\textit{Б}i}}} k_C, C_{V_p} = j \frac{F_{\Pi}}{F_{\text{о}}} k_{\text{упр}}, \quad a_1 + k_{\dot{V}} = l_{\Pi i} \frac{F_{\Pi}}{\sum F_{\Pi i}} + k_{\dot{V}}, \\ (a_2 + k_V) = \psi_i \frac{F_{\Pi}}{F_{\text{о\textit{Б}i}} N} + \psi_u \frac{F_{\Pi}}{F_{\text{о}}} + \zeta_{\Sigma i} V_{\Pi i}^* \frac{F_{1\Pi}}{NF_{\Pi i}} + \zeta_{cl} V_{1\Pi}^* \zeta_{\Sigma i} V_{\Pi i}^* F_{\Pi} / NF_{\Pi i} + k_V, \\ C_{\Pi} = \frac{j F_{\Pi} (NF_{\text{о\textit{Б}i}} + F_{\text{о}})}{F_{\text{о}} F_{\text{о\textit{Б}i}}}, C_{V_q} = j \frac{F_{\Pi}}{F_{\text{о}}} k_C, C_{V_{pi}} = -\psi^* \frac{F_{Mi}}{F_{\text{о\textit{Б}i}}} k_{\text{упр}}, \\ C_{V\lambda} = -\psi^* \frac{F_{Mi}}{F_{\text{о\textit{Б}i}}} k_C, b_{V_{pi}} = -j \frac{F_{Mi}}{F_{\text{о\textit{Б}i}}} Y_{\text{о\textit{е}}}, b_{V_{p1}} = j \frac{F_{\Pi}}{F_{\text{о}}} Y_{\text{о\textit{е}}}.$$

Положим $F(t) = 0$ и определим область значений коэффициентов $k_{\dot{V}}, k_V$ насоса, обеспечивающих устойчивое функционирование системы перераспределения. Положим $\Delta V_{1\Pi}(t) = V_{\text{о}} e^{pt}$ и подставим в (6), получим

$$(a_1 + k_{\dot{V}})p^2 + (a_2 + k_V)p + C_{\Pi} = 0.$$

Значения параметров $k_{\dot{V}}$, k_V , удовлетворяющие необходимым условиям устойчивого решения, удовлетворяют неравенствам

$$k_V > -a_2 = -\left(\Psi_i \frac{F_{II}}{F_{oBi}N} + \Psi_u \frac{F_{II}}{F_O} + \zeta_{\Sigma i} V_{IIi}^* \frac{F_{1II}}{NF_{IIi}} + \zeta_{cl} V_{1II}^* + \zeta_{\Sigma i} V_{IIi}^* F_{II} / NF_{IIi}\right),$$

$$k_{\dot{V}} > -a_1 = -l_{II} \frac{F_{II}}{\sum F_{IIi}}.$$

Границу, разделяющую колебательную устойчивость и экспоненциальную, определим из уравнения

$$k_V^2 + 2a_2 k_V - 4k_{\dot{V}} C_{II} + a_2^2 - 4a_1 C_{II} = 0.$$

Если $r \neq 0$ и учитывая вариации скоростей опускания и слива относительно ΔV_{1II} , получаем уравнение 3-го порядка

$$V_{IIi}^* r \rho k_{\dot{V}} \Delta \ddot{V}_{1II} + \left(V_{IIi}^* r \rho \zeta_{cl} V_{1II}^* + k_{\dot{V}} + V_{IIi}^* r \rho (k_V + \zeta_l V_{1II}^*) + a_1 + \Psi_{2u} \frac{F_{II}}{F_O} \right) \Delta \dot{V}_{1II} +$$

$$+ \left(a_2 + k_V + V_{IIi}^* r \rho g \frac{F_{II}}{F_O} \right) \Delta V_{1II} + C_{II} \Delta V_{1II} = +V_{IIi}^* r \rho \ddot{u}_{\delta} H_{II} - V_{IIi}^* r \rho \zeta_l V_{1II}^* \ddot{w}_{He} -$$

$$- V_{IIi}^* \ddot{w}_c - \zeta_l V_{1II}^* \ddot{w}_{He} - \ddot{u}_{\delta Bi} H_{Bi} + \ddot{u}_{\delta II} H_{II} - \xi_e V_{1II}^* \ddot{u}_{\delta II} + j \frac{F_M}{F_O} \Delta V_M -$$

$$- j \frac{F_{Mi}}{F_{oBi}} \Delta V_{Mi} + \Psi_u \frac{F_M}{F_O} \Delta \dot{V}_M - \Psi_i \frac{F_{Mi}}{F_{oBi}} \Delta \dot{V}_{Mi}.$$

Запишем полученное уравнение в виде

$$d_0 \Delta \ddot{V}_{1II} + d_1 \Delta \dot{V}_{1II} + d_2 \Delta V_{1II} + C_{II} \Delta V_{1II} = \Phi(t). \quad (7)$$

Здесь

$$d_0 = a_0 k_{\dot{V}}; \quad d_1 = b_1 + k_{\dot{V}} + a_0 k_V; \quad d_2 = b_2 + k_V (a_0 = V_{IIi}^* r \rho,$$

$$b_1 = l_{II} \frac{F_{II}}{NF_{IIi}} + a_0 \left[V_{1II}^* (\zeta_{cl} + \zeta_l) \right] + a_0 \Psi_{2u} \frac{F_{II}}{F_O},$$

$$b_2 = (\zeta_{zi} + \zeta_i) V_{IIi}^* \frac{F_{II}}{NF_{IIi}} + (\zeta_{cl} + \zeta_l) V_{1II}^* + V_{oII}^* \frac{F_{II}}{F_O} + V_{oBi}^* \frac{F_{II}}{NF_{oBi}} + a_0 j \frac{F_{II}}{F_O} + \Psi_{1II},$$

$$\Psi_{1II} = \left[1 - (\zeta_{IIp} + 1) \left(\frac{F_{oII}}{F_{cII}} \right)^2 \right] V_{oII}^* \frac{F_{II}}{F_{oII}},$$

$$\Psi_{2II} = \zeta_{IIp} \left[\left(\frac{F_{oII}}{F_{cII}} \right)^2 V_{oII}^* \frac{F_{II}}{F_{oII}} - \left(\frac{F_{oBi}}{F_{cBi}} \right)^2 V_{oBi}^* \frac{F_{II}}{NF_{oBi}} \right];$$

$C_{II} = \frac{jF_{II}(NF_{oBi} + F_O)}{F_O F_{oBi}}$; $\Phi(t)$ — суммарное возмущение, действующее на систему перераспределения в результате колебаний упругого корпуса и колебаний давления в расходных магистралях перед входом в насосы подачи топлива.

Положим $\Phi(t) = 0$ и определим область значений коэффициентов $k_{\dot{V}}, k_V$ насоса, обеспечивающих устойчивое функционирование системы перераспределения. Положим $\Delta V_{1II}(t) = V_O e^{pt}$ и подставим в (7), тогда

$$d_0 p^3 + d_1 p^2 + d_2 p + C_{II} = 0.$$

Для построения D-разбиения в плоскости двух параметров $k_{\dot{V}}, k_V$ положим в уравнении $p = j\omega$ и, приравняв отдельно мнимую и действительную часть, получим

$$-a_0 k_{\dot{V}} \omega^2 + b_2 + k_V = 0, \quad -(k_{\dot{V}} + a_0 k_V + b_1) \omega^2 + C_{II} = 0.$$

Разрешив систему относительно $k_{\dot{V}}, k_V$, имеем

$$k_V = \frac{-a_0 b_1 \omega^2 + C_{II} a_0 - b_2}{a_0 \omega^2 + 1}, \quad k_{\dot{V}} = \frac{(a_0 b_2 - b_1) \omega^2 + C_{II}}{\omega^2 (a_0 \omega^2 + 1)}.$$

Исключив из полученных выражений частоту, получим уравнение, определяющее область устойчивости работы насоса перераспределения

$$-a_0 k_V^2 + k_V k_{\dot{V}} + (b_1 + a_0 b_2) k_V + (b_2 + a_0 C_{II}) k_{\dot{V}} + b_1 b_2 = 0.$$

Если положить $k_V = 0$, то уравнение (7) не изменится

$$d_0 p^3 + d_1 p^2 + d_2 p + C_{II} = 0,$$

где $d_0 = a_0 k_{\dot{V}}$, $d_1 = b_1 + k_{\dot{V}}$, $d_2 = b_2$.

И можно построить D-разбиения в плоскости одного параметра

$$k_{\dot{V}} = \frac{b_1 p^2 + b_2 p + c_{II}}{a_0 p^3 + p^2}.$$

Положив $p = j\omega$, получим

$$k_{\dot{V}} = \frac{-b_1 \omega^2 + j b_2 \omega + c_{II} + j b_1 a_0 \omega^3 + b_2 a_0 \omega^2 - j c_{II} a_0 \omega}{-\omega^2 (a_0 \omega^2 + 1)},$$

$$k_V = \frac{+\omega^2 (b_1 - b_2 a_0) - c_{II}}{\omega^2 (a_0 \omega^2 + 1)} - j \frac{b_1 a_0 \omega^2 + b_2 - c_{II} a_0}{\omega (a_0 \omega^2 + 1)}.$$

Литература

1. Дьяченко М.И., Темнов А.Н. Динамика системы перераспределения жидкого топлива в ракетах-носителях пакетной схемы. *Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, 28–31 января 2020 года: сборник тезисов в 2 т.* РАН, Государственная корпорация по космической деятельности «Роскосмос», МГТУ им. Н. Э. Баумана (нац. исслед. ун-т). Москва, 2020, т. 1, с. 95–97.
2. Дьяченко М.И., Темнов А.Н. Исследование устойчивости системы перераспределения топлива в РН с однокомпонентным ЖРД. *Динамика и виброакустика*, 2015, № 2, с. 27–33.
3. Дьяченко М.И., Павлов А.М., Темнов А.Н. Продольные упругие колебания корпуса многоступенчатой жидкостной ракеты пакетной схемы. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2015, № 5, с. 14–24.
4. Колесников К.С. *Динамика ракет*. Москва, Машиностроение, 2003, 520 с.
5. Дьяченко М.И., Темнов А.Н. Проблемы динамики перераспределения топлива в крупногабаритных ракетно-космических объектах. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2012, вып. S2, с. 164–174.

Investigation of the Stability of Small Fluctuations of the Fuel Redistribution System

© M.I. Dyachenko*, A.N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): s_masyanya@mail.ru

Abstract. The redistribution of fuel between the tanks of the booster rocket of the batch scheme can be carried out using a booster pump installed in the niche of the tank of the central stage. The redistribution of fuel between the tanks of the booster rocket of the batch scheme can be carried out using a booster pump installed in the niche of the tank of the central stage. In addition to the booster pump, the redistribution system includes pipelines with intake devices, bellows, separation units between stages. The paper presents differential equations [1], which describe the deviations of the fuel velocity at the booster pump inlet, and shows the stability regions in the pump parameter plane.

Keywords: *fluctuating fluid, fuel redistribution, booster pump.*

Устойчивость программных движений платформы с рояльными колесами

© А.В. Жучков*, А.А. Зобова

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): art.oxbow@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена устойчивость программных движений платформы с рояльными колесами.

Ключевые слова: неголономная система, рояльное колесо, управление.

Тезисы. Рассматривается кинематика и динамика экипажа с тремя рояльными колесами,двигающегося по горизонтальной шероховатой плоскости. Показано, что если управляемым является лишь одно колесо, а два других заменены на скользкие подпорки, то при некотором соотношении на масс-инерционные характеристики возможна реализация любого наперед заданного движения центра масс системы с помощью двух моментов в оси вилки и в оси колеса. Для построения управлений необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в результате чего находится зависимость управляющих моментов и угла курса от времени. Рассмотрена устойчивость простейших решений этой системы, реализующих равномерные прямолинейные движения и вращения вокруг центра масс платформы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00140.

Reference Motions' Stability for the Vehicle with Castor Wheels

© A.V. Zhuchkov*, A.A. Zobova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): art.oxbow@gmail.com

Abstract. We consider the stability of the program motions of a vehicle with Castor wheels.

Keywords: non-holonomic system, Castor wheel, control, stability.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research no. 19-01-00140.

Моделирование нелинейного динамического поведения летательного аппарата корабельного базирования

© А.В. Киселев*, Е.В. Позняк

ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ», Москва, Россия

*E-mail (докладчика): KiselevAV1@mpei.ru

Аннотация. Исследуется нелинейное динамическое поведение модели летательного аппарата (ЛА) корабельного базирования в условиях качки на судне и с учетом возможности земного резонанса. Динамическая модель ЛА на подвижном основании предусматривает нелинейное поведение амортизационных стоек шасси (нелинейная жесткость и односторонняя работа на обжатие). Исследование проведено с использованием расчетного комплекса Siemens Motion, применен решатель «Динамика». Результаты исследования будут применены при анализе динамики летательного аппарата в режимах взлета и посадки. Актуальность настоящей работы определяется необходимостью уточнения инженерных методов расчета колебаний ЛА на палубе корабля.

Ключевые слова: динамическая модель, летательный аппарат корабельного базирования, нелинейная жесткость, земной резонанс.

Литература

1. Миль М.Л. и др. *Вертолеты. Расчет и проектирование. Т. 2: Колебания и динамическая прочность.* Москва, Машиностроение, 1967.
2. Соковиков Ю.Г. *Применение вертолетов с авианесущих кораблей.* Мин-во обороны СССР, Военно-морской флот. Москва, Воениздат, 1989.

Modeling of nonlinear dynamic behavior of a ship-based aircraft

© A.V. Kiselev*, E.V. Poznyak

National Research University Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): KiselevAV1@mpei.ru

Abstract. The nonlinear dynamic behavior of a ship-based model aircraft on the pitching ship and considering the ground resonance is investigated. The dynamic model of the aircraft on a movable base consider the nonlinear behavior of the chassis shock struts (nonlinear stiffness and one-way compression). The study was perform using the Siemens Motion software with the Dynamics solver. The results of the study will be useful to the dynamic analysis of the aircraft in the take-off and landing modes. The relevance of this work is proved by the need to clarify engineering methods for calculating aircraft vibrations on the ship's deck.

Keywords: *dynamic model, ship-based aircraft, nonlinear stiffness, ground resonance.*

References

1. Mil' M.L. i dr. *Vertolety. Raschet i proektirovanie. T. 2: Kolebaniya i dinamicheskaya prochnost'*. Moscow, Mashinostroenie, 1967.
2. Sokovikov Yu.G. *Primenenie vertoletov s avianesushchih korablej*. Min-vo oborony SSSR, Voenno-morskoj flot. Moscow, Voenizdat, 1989.

Моделирование движущей силы двухзвенной ноги робота

© С.А. Кумакшев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
E-mail: kumak@ipmnet.ru

Аннотация. Проведено моделирование движущей силы (силы трения) между стопой двухзвенной ноги шагающего робота и опорной поверхностью в направлении движения. Баланс сил выписан в рамках статической постановки. В данной работе выяснено, что при создании алгоритмов походки робота нужно учитывать обнаруженный эффект: при одних положениях стопы на опорной поверхности максимальная сила может возрастать с увеличением длины второго звена, а при других — уменьшаться.

Ключевые слова: *двухзвенник, нога шагающего аппарата.*

*Работа выполнена по теме государственного задания
№ АААА-А20-120011690138-6.*

Литература

Кумакшев С.А. Определение управляющих моментов, обеспечивающих равновесие восьминогого шагающего аппарата в цилиндрической трубе. *Известия АН. Теория и системы управления*, 2000, № 3, с. 469–482.

Modeling of the driving force of a two-link robot leg

© S.A. Kumakshev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia
E-mail: kumak@ipmnet.ru

Abstract. The modeling of the driving force (friction force) between the foot of the two-link leg of the walking robot and the support surface in the direction of movement is carried out. The balance of power obtained within the framework of a static statement. In this work, it was found out that when creating algorithms for the robot's gait, it is necessary to take

into account the discovered effect: with some positions of the foot on the support surface, the maximum force can increase with increasing length of the second link, and with others it can decrease.

Keywords: *two-link, a leg of a walking device.*

*The study was supported by the Government program
№ АААА-А20-120011690138-6.*

References

Kumakshev S.A. Finding the control torques providing an equilibrium of an eight-legged walking robot in a cylindrical pipe. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2000, vol. 39, no. 3, pp. 469–482.

Механика горнолыжного поворота с боковым проскальзыванием

© С.Д. Леготин^{1*}, А.А. Ривлин²

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

²Учебный центр Федерации горнолыжного спорта и сноуборда России,
Москва, Россия

*E-mail: legotin.msiu@bmstu.ru

Аннотация. Представленная работа посвящена созданию численной модели движения лыжника при выполнении им равновесного горнолыжного поворота с боковым проскальзыванием с учетом управляемой лыжником ангуляции. В качестве основного допущения модели принимается предположение, что движение в скользящем повороте можно разложить на ортогональные направления: боковое скольжение и движение вдоль лыж по алгоритму, соответствующему чистому резаному повороту (карвингу) [1]. Получена система интегральных уравнений, с помощью которой можно найти скорость, время и траекторию движения спортсмена, а также оценить углы, характеризующие положение тела лыжника и его лыж относительно склона при различных стилевых ангуляциях. Созданная модель проиллюстрирована решением задачи для случая, при котором возникающей при боковом поперечном проскальзывании силы трения достаточно для обеспечения поддержки занимаемого спортсменом бокового положения в скользящем повороте.

Ключевые слова: *спортивная биомеханика, горные лыжи, ангуляция, наклон лыжника, скользящий горнолыжный поворот, моделирование.*

Практика бокового косоного скольжения по горнолыжной трассе показывает, что такое движение часто оставляет на снегу специфический след, имеющий форму косых ступенек, вырисовываемых задни-

ками лыж (рис. 1), и сопровождается характерными звуковыми хлопками при автоколебательных смещениях лыж с одной ступеньки на другую. Такое специфическое движение лыж позволяет предположить, что при боковом косом скольжении наблюдаются участки, на которых перемещение лыж по снегу происходит исключительно вдоль самих лыж и без бокового проскальзывания, т. е. по законам чистого карвинга.

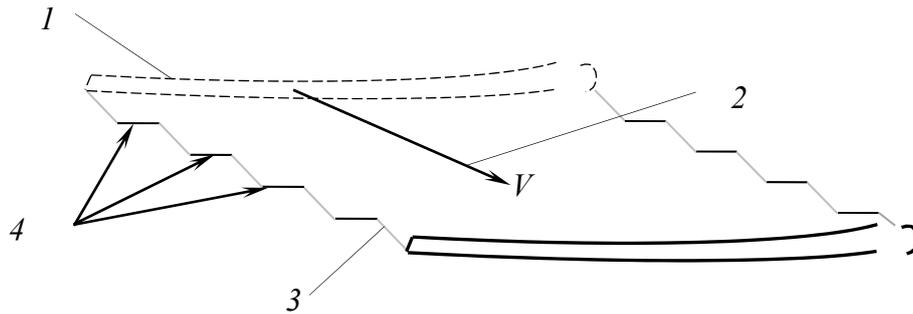


Рис. 1. След лыжи на снегу при косом боковом скольжении:
1 — ориентационное направление лыжи; 2 — направление средней скорости движения;
3 — ступенькообразный след лыжи; 4 — «полочки» ступенек

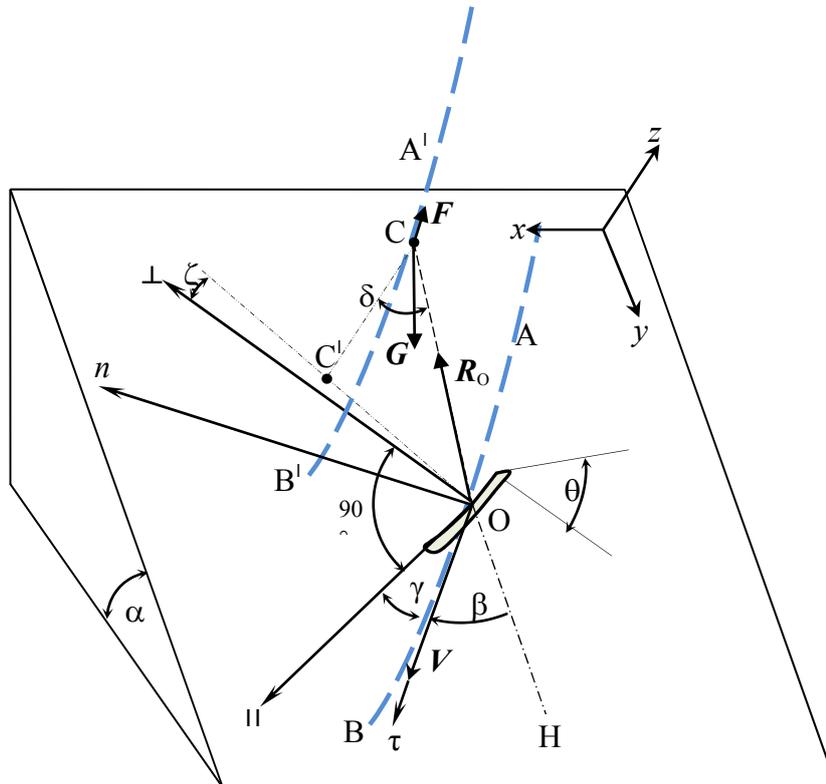


Рис. 2. Схема косого бокового скольжения

Кинематическая схема движения лыжи при косом боковом про- скальзывании представлена на рис. 2. На этом рисунке ось Oy направлена вдоль линии падения склона, ось Ox — в поперечном направлении, образуя вместе с осью Oy плоскость склона. Ось Oz ортогональна плоскости склона и направлена по его нормали.

Тогда β — угол между вектором скорости V опорной точки (т. O) и линией падения склона, или **угол движения**. Угол γ между ориентационным направлением лыжи и вектором скорости V назовем **углом скольжения**, или, как принято в зарубежной литературе, **углом атаки**. Соответственно их сумма $\beta + \gamma = \chi$ составляет **ориентационный угол** лыжи χ относительно линии падения склона.

При выполнении условий динамического равновесия линия действия равнодействующей опорных реакций R_O проходит через центр масс системы [1, 5]. Иными словами, линия действия вектора R_O направлена по отрезку OC , соединяющему точку приложения равнодействующей опорных реакций (т. O) и центр масс (т. C). Анализ действующих сил (тяжести, реакции склона, силы трения, силы аэродинамического сопротивления, силы инерции) и их направлений позволил сформулировать интегральные уравнения для безразмерных параметров движения центра масс в виде

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{V} \cos \gamma} \Gamma(\beta) d\beta; & \tilde{s} &= \int_{\beta_0}^{\beta} \cos^{-1} \gamma \tilde{\rho} \Gamma(\beta) d\beta; \\ \tilde{x} &= \int_{\beta_0}^{\beta} \cos^{-1} \gamma \tilde{\rho} \sin \beta \Gamma(\beta) d\beta; & \tilde{y} &= \int_{\beta_0}^{\beta} \cos^{-1} \gamma \tilde{\rho} \cos \beta \Gamma(\beta) d\beta; \\ \tilde{V} &= \left(\tilde{V}_0^2 + 2 \int_{\beta_0}^{\beta} \tilde{\rho} [\sin(\beta + \gamma) \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma + \cos(\beta + \gamma) \sin \alpha - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \delta \cos \alpha - f \cos \alpha - c \tilde{V}^2 R / m] \Gamma(\beta) d\beta \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

При численном интегрировании системы интегральных уравнений выбрана так называемая «прогрессивная» ангуляционная функция, описанная в работе [1]. На приведенных ниже графиках (рис. 3) показаны рассчитанные по представленной модели зависимости от угла движения изменения кинематических параметров движения центра масс для скользящих поворотов с постоянным углом скольжения (графики слева), с углом скольжения, линейно уменьшающемся до нуля к концу поворота (графики справа), и с углом скольжения, линейно уменьшающемся до половины своей начальной величины к концу поворота (графики в середине). Размерность приведенных

угловых параметров — радианы. Верхний ряд — это зависимости углов наклона опорной линии (синий цвет), ангуляции (зеленый), закатовки (черный) и угла скольжения, или атаки (красный цвет). Второй ряд сверху — время движения в повороте как функция от угла движения. Третий ряд — безразмерные скорости движения \tilde{V} центра масс (синий цвет), а также величины ее компонентов: скорости движения вдоль ориентационной оси $\tilde{V}_{||}$ (зеленая линия) и скорости движения вдоль поперечной оси \tilde{V}_{\perp} (черная линия). Последний ряд — траектории движения точки C в безразмерных координатах \tilde{x} и \tilde{y} при описываемых скользких поворотах. Во всех приведенных на графиках кривых начальная безразмерная скорость движения составляла $\tilde{V}_0 = 0,832$, величина которой явилась предельной для обеспечения равновесного поворота на склоне крутизной 20° с углом скольжения, линейно уменьшающемся до нуля к концу поворота.

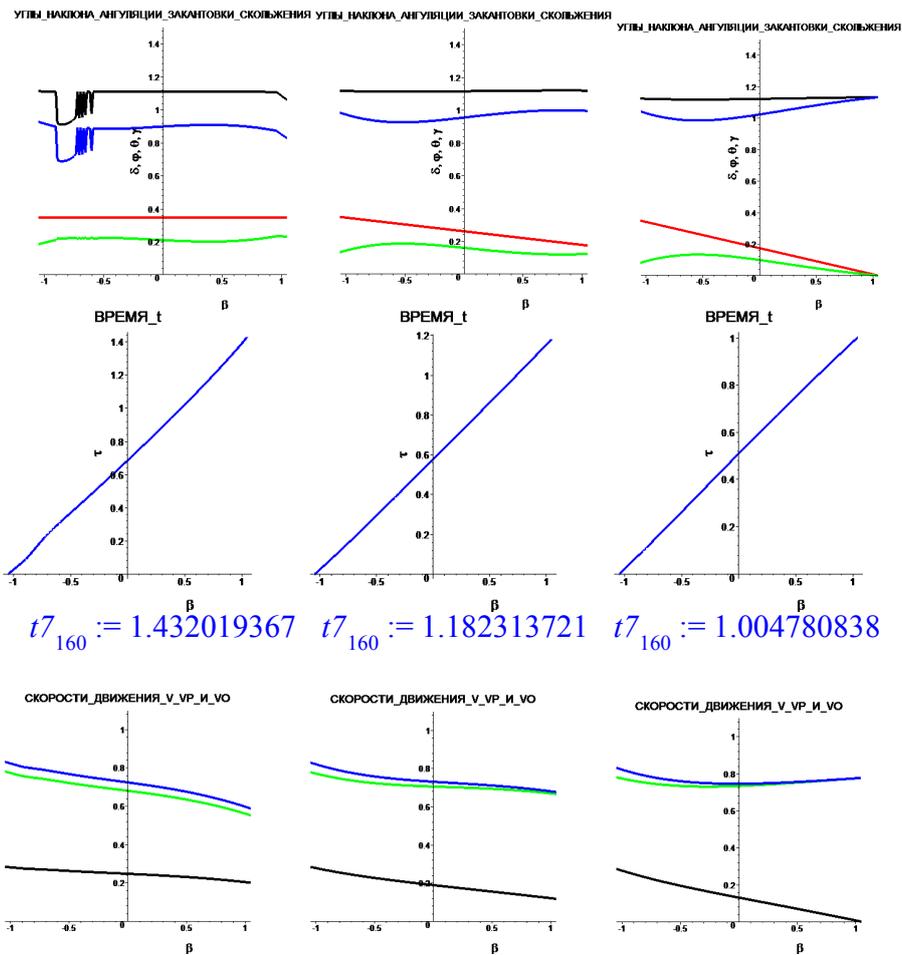


Рис. 3 (начало). Кинематические параметры движения центра масс (т. С)

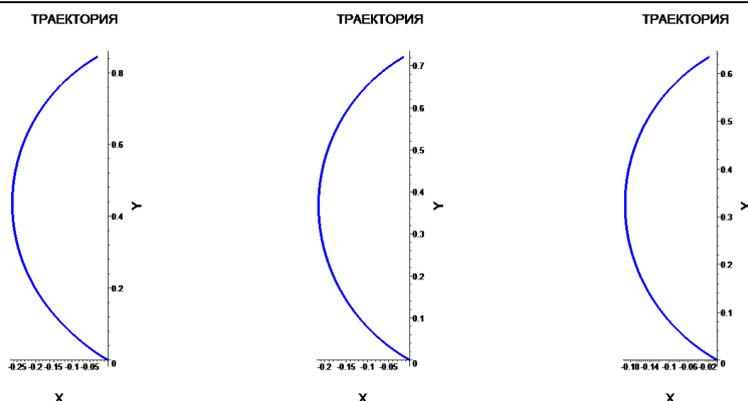


Рис. 3 (окончание). Кинематические параметры движения центра масс (г. С)

Поворот рассмотрен в общем виде, с ангуляцией, — способе увеличения угла закантовки лыж. Используя задаваемый лыжником закон изменения угла скольжения при численном интегрировании приведенных уравнений, оцениваются изменения скорости движения центра масс и ее продольные и поперечные составляющие, траектория движения центра масс и радиус ее кривизны, углы наклона опорной линии, ангуляции, закантовки, время движения в повороте. Предложенная аналитическая модель позволяет выполнять количественные оценки параметров скользящего поворота при различных стилях управления ангуляцией и законах изменения угла скольжения и может быть использована в работе тренеров по горнолыжной подготовке, а также при разработке новых моделей лыж и спортивных тренажеров.

Литература

1. Legotin S.D., Rivlin A.A., Obnosov K.B. Mechanics of alpine skiing: carve turn with angulation. *Journal of Physics: Conference Series (JPCS)*, 2020, vol. 1705, art. no. 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1705/1/012034
2. Komissarov S.S. Mechanics of side-slipping in alpine skiing: theory of machining snow and ice. *Sports Engineering*, 2021, vol. 24, no. 4. <https://doi.org/10.1007/s12283-021-00340-7>
3. Komissarov S.S. Mechanics of side-slipping in alpine skiing. Braking and skidded traversing. *Sports Engineering*, 2021, vol. 24, no. 20. <https://doi.org/10.1007/s12283-021-00357-y>
4. Legotin S.D., Rivlin A.A. Mechanics of stability's loss in the skiing turning. *Journal of Physics: Conference Series (JPCS)*, 2019, vol. 1301, art. no. 012020. DOI: 10.1088/1742-6596/1301/1/012020
5. Леготин С.Д., Ривлин А.А., Данилин В.И. Механика горных лыж: резаный поворот без ангуляции. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 7. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-7-1632>
6. Colbeck S. A review of the processes that control snow friction. *Tech. rep., Cold Regions Research and Engineering Laboratory (CRREL)*. Hanover, NH, 1992. <https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA252362>

7. Kietzig A.M., Hatzikiriakos S., Englezos P. Physics of ice friction. *Journal of Applied Physics*, 2010, vol. 107, art. no. 081101.
8. Леготин С.Д., Ривлин А.А. Оценка предельных углов ангуляции спортсмена-горнолыжника с использованием разработанного специализированного антропометрического стенда. *Экстремальная деятельность человека. Научно-методический журнал*, 2018, № 3 (49), с. 27–31.
9. Reid R. *A kinematic and kinetic study of alpine skiing technique in slalom*. Ph. D. dissertation. Norwegian School of Sport Sciences, 2010.
<http://hdl.handle.net/11250/171325>

The mechanics of a ski turn with side slip

© S.D. Legotin¹, A.A. Rivlin²

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

²Training Center of Russian Alpine Ski and Snowboard Federation, Moscow, Russia

Abstract. The presented work is devoted to the creation of a numerical model of a skier's movement when he performs an equilibrium ski turn with lateral slippage, taking into account the angulation controlled by the skier. As the main assumption of the model, it is assumed that the movement in a sliding turn can be decomposed into orthogonal directions: lateral sliding and movement along the skis according to the algorithm corresponding to a clean cut turn (carving). A system of integral equations is obtained, with the help of which it is possible to find the speed, time and trajectory of the athlete's movement, as well as to estimate the angles characterizing the position of the skier's body and his skis relative to the slope with various stylistic angulations. The created model is illustrated by solving the problem for the case in which the friction force arising from lateral lateral slippage is sufficient to provide support for the lateral position occupied by the athlete in a sliding turn.

Keywords: *biomechanics of sport, angulations, skier's inclination, skier's slope, sliding ski turn.*

References

- Mechanics of alpine skiing: carve turn with angulation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1705, art. no. 012034.
DOI:10.1088/1742-6596/1705/1/012034

Система автоматического управления позиционированием электропривода

© Т.И. Орлянская

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: tamara.orlyanskaya@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена система управления электроприводом с элементами адаптивного управления.

Ключевые слова: система автоматического управления, позиционирование, электропривод.

Тезисы. Рассматривается система управления электроприводом двигателя постоянного тока. Для повышения точности позиционирования заданное перемещение обрабатывается в два этапа. На первом этапе организуется перемещение в промежуточное положение с максимально допустимой скоростью при трапециидальной тахограмме, на втором этапе — точного позиционирования, на определенной пониженной скорости при треугольной тахограмме. Система управления содержит два замкнутых контура управления по току и скорости. В контур управления положением включен вычислительный блок. По сигналу с блока задания перемещения вычислительный блок автоматически определяет зону точного позиционирования, перемещение при разгоне до максимально допустимой скорости, перемещение при движении с постоянной скоростью, перемещение при торможении на первом этапе до остановки двигателя. Вычислительный блок формирует сигнал на отключение двигателя на первом этапе движения. Момент начала торможения определяется равенством расогласования по положению суммы пути торможения до полной остановки электродвигателя на первом этапе и перемещения в зоне точного позиционирования. После остановки электродвигателя формируются сигналы на размыкание контура положения и подключение контура скорости к датчику остановочной скорости. Сигнал задания по скорости обрабатывается системой и при достижении значения средней остановочной скорости электродвигатель отключается и переходит в режим равнозамедленного торможения.

Рассматриваемая система управления может найти применение в приводах роботов, предназначенных для выполнения технологических операций с высокой точностью позиционирования в заданных точках траектории движения рабочего органа, и в системах автоматического контроля перемещения измерительных приборов.

Литература

Орлянская Т.И. Адаптивная система управления приводом с анализатором момента сопротивления на валу двигателя. *Естественные и технические науки*, 2018, № 12 (126), с. 262–265.

Automatic control system for positioning the electric drive

© T.I. Orlyanskaya

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: tamara.orlyanskaya@gmail.com

Abstract. An electric drive control system with adaptive control elements is considered.

Keywords: *automatic control system, positioning, electric drive.*

References

Orlyanskaya T.I. Adaptive drive control with torque analyzer on the motor shaft. *Natural and technical sciences*, 2018, № 12 (126), pp. 262–265.

Математическое моделирование процесса резания грунта для определения влияющих факторов

© П.А. Григорьев, Л.А. Сладкова

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ), Москва, Россия
E-mail: grigorievpavel1996@yandex.ru, rich.cat2012@yandex.ru

Аннотация. Нагрузки, действующие на рабочие органы землеройных машин, носят случайный характер, которые определяются физикой взаимодействия с грунтом и характеризуются тремя зонами: сжатия, сдвига и диспергирования [1]. В связи с тем, что на рабочий орган землеройной машины помимо горизонтальной действует вертикальная составляющая резания грунта, то возможно его перемещение в вертикальной плоскости [2].

Ключевые слова: *резание грунта, землеройная машина, физика взаимодействия, осциллятор.*

Общее время цикла, затрачиваемое на разрушение грунта в период резания, различно и зависит от типа поверхности рабочего органа. Исследования по оценке времени цикла проводились в [2], где за основу модели был принят осциллятор, состоящий из жесткостей, расположенных по направлению перемещения рабочего органа в направлении усилий резания в вертикальном и горизонтальном направлениях. Основным недостатком данной модели является то, что она позволяет оценить процесс резания грунта качественно, но помимо этого она позволяет: описать процесс взаимодействия грунта с поверхностью рабочего органа, исследовать механику разрушения грунта, выявить природу взаимодействия частиц грунта с поверхностью рабочего органа.

Литература

1. Сладкова Л.А. *Создание самозатачивающихся наконечников рыхлителей повышенной долговечности для разработки многолетнемерзлых грунтов*. Дис. ... канд. техн. наук. Москва, 1990, 248 с.
2. Зеленин А.Н., Зеленин А.Н., Баловнев В.И., Керов И.П. *Машины для земляных работ*. Москва, Машиностроение, 1975, 422 с.

Mathematical modeling of the process digging to determine the influencing factors

© P.A. Grigorev, L.A. Sladkova

Russian University of Transport, Moscow, Russia
E-mail: grigorievpavel1996@yandex.ru, rich.cat2012@yandex.ru

Abstract. The loads acting on the excavating parts of earthmoving machines are random, which are determined by the physics of interaction with the soil and are characterized by three zones: compression, shear and dispersion [1]. Because the vertical component of digging the soil acts on the excavating part of the earthmoving machine in addition to the horizontal one, it is possible to move it in the vertical plane [2].

The overall cycle time spent on the soil failure during the digging period is different and depends on the type of surface of the excavating part. Research for estimated cycle time were carried out in [2], where an oscillator consisting of stiffnesses located in the direction of movement of the excavating part in the direction of digging forces was adopted as the basis of the model. The main disadvantage of this model is that it allows you to evaluate the process of digging the soil qualitatively, but in addition it allows you to: describe the process of interaction of the soil with the surface of the excavating parts; investigate the mechanics of soil failure; to reveal the nature of interaction of soil particles with the surface of the excavating part.

Keywords: *digging, earthmoving machine, physics of interaction, oscillator.*

References

1. Zelenin A.N., Balovnev V.I., Kerov I.P. *Mashiny dlya zemlyanykh rabot* [Machines for moving the earth]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 422 p. [In Russ.].
2. Sladkova L.A. *Sozdaniye samozatachivay-uschikhhsya nakonechnikov rykhliteley povyshennoy dolgovechnosti dlya razrabotki mnogoletnemerzlykh gruntov*. Diss. ... Cand. Sci. (Engineering). Moscow, 1990, 248 p. [In Russ.].

Алгоритм управления четырехосевым карданным подвесом

© В.И. Пеньков, Е.А. Сухов *

МАИ (НИУ), Москва, Россия
*E-mail: sukhov.george@gmail.com

Аннотация. Рассматривается кинематика движения четырехосевого карданного подвеса, состоящего из внутренней, средней, внешней и дополнительной рамок, оси вращения которых пересекаются в одной точке, а ось дополнительной рамки закреплена на неподвижном основании. При зафиксированной дополнительной рамке данный подвес эквивалентен трехосевому подвесу, внутренняя рамка которого имеет три степени свободы. Трехосевые подвесы широко применяются в технике, в частности, при решении задач навигации и управления движением. Однако при совпадении плоскостей внутренней и средней рамок трехосевого подвеса возникает сингулярная конфигурация, называемая «складыванием рамок», при которой внутренняя рамка теряет одну степень свободы. Для предотвращения складывания в подвес добавляют дополнительную внешнюю рамку, управление приводом которой позволяет вывести подвес из близких к сингулярным конфигураций [1, 2]. В данной работе получены кинематические уравнения движения четырехосевого карданного подвеса и предложен алгоритм управления приводом дополнительной рамки, основанный на релейном управлении с переменными уставками включения и выключения привода. Для апробации алгоритма разработано специализированное программное обеспечение на платформе .NET. Закон движения внутренней рамки можно задать аналитически в виде символьных выражений, таблично либо посредством органов управления в режиме реального времени.

Ключевые слова: карданный подвес, гироскоп, складывание рамок, управление движением.

Работа выполнена в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 19-11-00116.

Литература

1. Carter D.R., Duffery P., Bachorski S., Kagi M., Havlicsek H. Weighted least-squares based control for a four axis gimbal set. *Proc. Of SPIE*, 2010, vol. 7663, art. no. 766301-3.
2. Jie M.A. Quinbei X.U. Four-axis gimbal system application based on gimbal self-adaptation adjustment. *Proc. Of the 34th Chinese Control Conf. July 28–30, 2015.*

Control algorithm for a four-axis gimbal system

© V.I. Penkov, E.A. Sukhov*

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

*E-mail: sukhov.george@gmail.com

Abstract. We address the kinematic motion of a four-axis gimbal system consisting of an internal, intermediate, outer and redundant frames. The axes of the frames intersect in a common point with the redundant frame's axis fixed to a stationary rest. If the redundant frame does not rotate than the mechanism becomes equal to a three-axis gimbal system whose inner frame possesses three degrees of freedom. Such systems find major application in many areas of engineering and science including navigation and motion control. However, a three-axis system can assume a singular configuration known as 'gimbal lock' which occurs when two of the frames become aligned and the inner frame loses one degree of freedom. Gimbal lock can be avoided by introducing a redundant outer frame and using a control algorithm to steer the system clear of the singular configuration [1, 2]. In this work we obtained kinematic equations of motion for a four-axis gimbal system and propose a control algorithm for the redundant frame based on relay control with variable engage and disengage settings. To test the algorithm specialized software was also developed. The laws of motion of the internal frame can be set either by analytical expressions or by table functions, or via user input in real time.

Keywords: *gimbal system, gyroscope, gimbal lock, motion control.*

This work was carried out in Moscow Aviation Institute and funded by the Russian Science Foundation, project no. 19-11-00116.

References

1. Carter D.R., Duffery P., Bachorski S., Kagi M., Havlicsek H. Weighted least-squares based control for a four axis gimbal set. *Proc. Of SPIE*, 2010, vol. 7663, art. no. 766301-3.
2. Jie M.A., Quinbei X.U. Four-axis gimbal system application based on gimbal self-adaptation adjustment. *Proc. of the 34th Chinese Control Conf. July 28–30, 2015.*

Анализ движения манипулятора космического назначения с четырьмя степенями свободы

© Юе Чжан, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: zhangyue_hit-bmstu@qq.com, antt45@mail.ru

Аннотация. Проведены кинематический и динамический анализы движения манипулятора с четырьмя степенями свободы, предназначенного для выполнения целевых задач в космосе.

В связи с повышением сложности выполнения космонавтами задач диагностики и ремонта космических конструкций в открытом космосе все чаще возникает необходимость обращаться к применению манипуляторов. В докладе рассмотрен манипулятор с четырьмя степенями свободы с использованием концепций бионики. Моделирование движения манипулятора осуществлено в математической среде MATLAB.

Ключевые слова: *манипулятор, кинематический анализ, динамический анализ, стандартный D-H метод, скоростной якобиан, бионика в технических системах.*

Литература

Фролов К.В., Воробьев Е.И. *Механика промышленных роботов*. Москва, Высшая школа, 1988, 304 с.

Motion analysis of a four-DOF manipulator for cosmonautics purposes

© Yue Zhang, A.N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: zhangyue_hit-bmstu@qq.com, antt45@mail.ru

Abstract. Kinematic and dynamic analyses of the motion of a four-degrees of freedom manipulator, designed to perform target tasks in space, were conducted.

Keywords: *manipulator, kinematic analysis, dynamic analysis, standard D-H method, speed Jacobian, bionics in technical systems.*

References

Frolov K.V., Vorob'ev E.I. *Mekhanika promyshlennyh robotov*. Moscow, Vyssh. shk., 1988, 304 p.

Компьютерное моделирование динамики дельта-робота

© А.Я. Красинский^{1,2}, А.А. Юлдашев^{2*}

¹МГУПП, Москва, Россия

²Московский авиационный институт, Москва, Россия

*E-mail: izzvms@gmail.com

Аннотация. Методами аналитической механики систем с избыточными координатами получена нелинейная математическая модель динамики дельта-робота и проведено компьютерное моделирование в задаче стабилизации заданного положения исполнительного звена.

За счет перехода к продифференцированным уравнениям геометрических связей и применения, в отличие от [1], аналитической механики в избыточных координатах [2] проведено компьютерное моделирование в задаче стабилизации заданного положения исполнительного звена дельта-робота.

Ключевые слова: дельта-робот, избыточные координаты, стабилизация.

Литература

1. Kuo Yong-Lin. *Mathematical modeling and analysis of the Delta robot with flexible links Computers and Mathematics with Applications*, 2016, vol. 71, pp. 1973–1989.
2. Krasinskiy A.Ya. Nonlinear model of delta robot dynamics as a parallel manipulator with three geometric constraints. In: «*Dynamical Systems: Stability, Control, Optimization*», *Proceedings of the International Scientific Conference in memory of Professor R.F. Gabasov. Minsk, October 5–10, 2021*, pp. 23–24.

Computer simulation of the dynamics of a delta robot

© A.Ya. Krasinskiy^{1,2}, A.A. Yuldashev^{2*}

¹Moscow State University of Food Production, Moscow, Russia

²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

*E-mail: izzvms@gmail.com

Abstract. For the complete nonlinear mathematical model of the dynamics of a delta robot in redundant coordinates, taking into account the transient processes in the executive electric drives, computer modeling was carried out in the problem of stabilizing for the given position of the executive link.

Keywords: delta robot, redundant coordinates, dynamics, stabilization.

References

1. Kuo Yong-Lin. *Mathematical modeling and analysis of the Delta robot with flexible links Computers and Mathematics with Applications*, 2016, vol. 71, pp. 1973–1989.
2. Krasinskiy A.Ya. Nonlinear model of delta robot dynamics as a parallel manipulator with three geometric constraints. In: «*Dynamical Systems: Stability, Control, Optimization*», *Proceedings of the International Scientific Conference in memory of Professor R.F. Gabasov. Minsk, October 5–10, 2021*, pp. 23–24.

1.2. Математическое моделирование физических процессов

Руководители: чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф. А.Н. Морозов, д-р физ.-мат. наук, проф. В.О. Гладышев

Расчет планетарного электрического поля Земли, формируемого под действием космической радиации

© Д.М. Безверхняя

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: bezverkhnyayadm@student.bmstu.ru

Аннотация. Проанализировано влияние космических лучей на формирование планетарного электрического поля Земли. Установлено, что разделение протонной и электронной компонент космической радиации в атмосфере Земли приводит к формированию устойчивого планетарного электрического поля напряженностью $\sim 10^2$ В/м, локализованного в атмосфере (в шаровом слое от поверхности почвы до ионосферы). Рассчитана энергия атмосферного поля: по порядку величины она составляет десятки ТДж. В предположении термодинамического равновесия определен КПД атмосферной тепловой машины ($\eta \sim 0,1$) и найдена «полезная работа», затрачиваемая на меридиональную (от экватора к полюсу) циркуляцию атмосферных масс ($\sim 10^{12}$ Дж). Установлен вклад космических лучей в равновесную скорость ветра (~ 1 мм/с). Полученные результаты позволяют уточнить модель динамики атмосферы для более точного прогноза глобального изменения климата.

Литература

1. *The habitable exoplanets catalog*. URL: <http://phl.upr.edu/projects/habitable-exoplanets-catalog> (дата обращения: 22.09.2021).
2. *The official website of the Nobel prize*. URL: <https://www.nobelprize.org/> (дата обращения: 22.09.2021).
3. Парадокс Ферми. *Википедия*. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Ферми (дата обращения: 22.09.2021).
4. Космические лучи. *Физическая энциклопедия*. Москва, Советская энциклопедия, 1990, т. 2, с. 471–474.
5. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. *Фейнмановские лекции по физике*. Москва, Мир, 1965, 2704 с.
6. Эксперимент Миллера — Юри. *Википедия*. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Эксперимент_Миллера_—_Юри (дата обращения: 22.09.2021).
7. COROT. *Википедия*. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/COROT> (дата обращения: 22.09.2021).

8. Кеплер (телескоп). *Википедия*. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Кеплер_\(телескоп\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Кеплер_(телескоп)) (дата обращения: 22.09.2021).
9. Gaia. *Википедия*. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Gaia> (дата обращения: 22.09.2021).
10. TESS. *Википедия*. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/TESS> (дата обращения: 22.09.2021).

How do cosmic rays affect on the Earth climate

© D.M. Bezverkhnyaya

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: bezverkhnyayadm@student.bmstu.ru

Abstract. Cosmic rays are high-energy particles moving through the space. When cosmic rays impact with the Earth, it splits up lightweight electrons in the outer layer of atmosphere and heavyweight protons (and nuclei) in the surface of the soil. This results to the planetary (atmospheric) electric field of 10^2 V/m. Since this, the Earth is a giant capacitor with an energy of dozens TJ. The calculation shows the atmospheric heat engine transforms this energy to the extra wind of about mm/s. This allows to refine the model of atmospheric dynamics to simulate global climate changes with more accuracy.

References

1. <http://phl.upr.edu/projects/habitable-exoplanets-catalog>
2. <https://www.nobelprize.org/>
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Fermi_paradox
4. Cosmic Rays. In: *Encyclopaedia of Physics*. Moscow, Soviet encyclopedia, 1990.
5. *Feynman Lectures on Physics*. Available at: <https://www.feynmanlectures.caltech.edu/>
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Miller-Urey_experiment
7. <https://en.wikipedia.org/wiki/CoRoT>
8. https://en.wikipedia.org/wiki/Kepler_space_telescope
9. [https://en.wikipedia.org/wiki/Gaia_\(spacecraft\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Gaia_(spacecraft))
10. https://en.wikipedia.org/wiki/Transiting_Exoplanet_Survey_Satellite

Математическое моделирование теплового состояния частицы порошка из титанового сплава ВТ6 методом селективного лазерного сплавления при производстве элемента системы наддува топливных баков ракеты-носителя

© М.Г. Гиорбелидзе, Б.Л. Халитов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва (Самарский университет), Самара, Россия
E-mail: m.giorbelidze@ssau.ru

Аннотация. В настоящее время одной из актуальных проблем является создание новых образцов ракет-носителей тяжелого и сверхтяжелого классов для выведения на орбиту полезной нагрузки. Задача по разработке новых образцов космической техники, исправно выполняющих назначенные им функции, решается путем непрерывного совершенствования технологии изготовления деталей и сборочных единиц, оптимизацией конструкции, а также использованием новых материалов. На сегодняшний день все эти направления в той или иной степени реализуются путем внедрения аддитивных технологий, в частности селективного лазерного сплавления, которое активно применяется в современных производственных системах. Проведен анализ традиционной технологии изготовления сферическим элементов для системы наддува топливных баков ракеты-носителя, определены основные дефекты, возникающие при изготовлении и испытании деталей, а также математическое моделирование теплового состояния частицы порошкового материала из титанового сплава ВТ6 при селективном лазерном сплавлении. На основе результатов математического моделирования выбран оптимальный режим изготовления сферического элемента для системы наддува топливных баков ракеты-носителя методом селективного лазерного сплавления.

В настоящее время одной из актуальных проблем является создание новых образцов ракет-носителей тяжелого и сверхтяжелого классов для выведения на орбиту полезной нагрузки. Задача по разработке новых образцов космической техники, исправно выполняющих назначенные им функции, решается путем непрерывного совершенствования технологии изготовления деталей и сборочных единиц, оптимизацией конструкции, а также использованием новых материалов. На сегодняшний день все эти направления в той или иной степени реализуются путем внедрения аддитивных технологий, в частности селективного лазерного сплавления, которое активно применяется в современных производственных системах [1–10].

Проведен анализ традиционной технологии изготовления отдельных полушарий сферического элемента для системы наддува топливных баков ракеты-носителя методом объемной штамповки с последующей сваркой этих полушарий. Определены основные дефекты, возникающие при изготовлении и испытании таких деталей. В качестве комплексного решения по устранению дефектов, возникающих при объемной штамповке и сварке деталей, а также для снижения массы конструкции рассмотрен альтернативный вариант по замене традиционных технологий на технологию селективного лазерного сплавления.

Проведено численное моделирование в ANSYS теплового состояния при трех разных схемах нагрева тепловым потоком частицы по-

рошка ВТ6: сферически симметричном нагреве шара постоянным тепловым потоком, нагреве шара через его верхнюю половину со стороны подвода лазерного излучения и нагреве шара через его верхнюю половину со стороны подвода лазерного излучения при зависимости величины теплового потока от угла падения на поверхность шара [1, 3, 4].

На основе результатов численного моделирования были установлены корректный вариант задания граничных условий и оптимальный режим нагрева частицы тепловым потоком применительно к технологии селективного лазерного сплавления. Установлено, что основной технологический параметр режима селективного лазерного сплавления наряду с плотностью теплового потока — время полного проплавления частицы — существенно зависит от вида граничного условия и увеличивается в рассмотренных трех случаях в пропорции 1:2, 1:2,6. Изотермы температуры даже для несимметричных граничных условий отличаются по внешнему виду и в случае зависимости величины плотности теплового потока от угла падения на поверхность шара имеют вид близкий к горизонтальным плоскостям в верхней части шара. Следовательно, в процессе передачи энергии лазерного излучения шаровой частице необходимо учитывать несимметричность подвода энергии и зависимость величины плотности теплового потока от угла падения на поверхность шара, данная постановка не может быть заменена на более простую. На основе результатов численного моделирования в ANSYS теплового состояния частицы порошка из титанового сплава ВТ6 разработаны рекомендации по выбору оптимального режима изготовления сферического элемента для системы наддува топливных баков ракеты-носителя методом селективного лазерного сплавления.

Ключевые слова: *ракета-носитель, система наддува топливных баков, аддитивные технологии, селективное лазерное сплавление, математическое моделирование.*

Литература

1. Bogdanovich V.I., Giorbelidze M.G. Numerical investigation of the thermal transformation of composition powder particles in the technology of selective laser melting. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, vol. 510, iss. 1, art. no. 012005.
2. Сотов А.В., Проничев Н.Д., Смелов В.Г., Богданович В.И., Гиорбелидзе М.Г., Агаповичев А.В. Разработка методики проектирования технологических процессов изготовления деталей ГТД методом селективного лазерного сплавления порошка жаропрочного сплава ВВ751П. *Известия Самарского научного центра Российской Академии наук*, 2017, с. 96–104.
3. Богданович В.И., Гиорбелидзе М.Г., Сотов А.В., Проничев Н.Д., Смелов В.Г., Агаповичев А.В. Математическое моделирование процессов плавления по-

- рошка в технологии селективного лазерного сплавления. *Известия Самарского научного центра Российской Академии*, 2017, т. 19, № 4, с. 105–114.
4. Богданович В.И., Гиорбелидзе М.Г. Численное исследование тепловой трансформации частиц порошковой композиции в технологии селективного лазерного сплавления. *Сборник трудов Международной научно-технической конференции «Высокие технологии в современной науке и технике ВТЧНТ-2018»*. Яковлев А.Н., ред. Томск, Изд-во Томского политехнического университета, 2018, с. 179–180.
 5. Якупов Р.Р. Математические методы аддитивных технологий. *Наука без границ*, 2017, № 8 (13), с. 35–38.
 6. Гибсон Я., Розен Д., Стакер Б. *Технологии аддитивного производства*. Москва, Техносфера, 2016, 646 с.
 7. Шишковский И.В. *Основы аддитивных технологий высокого разрешения*. С.-Петербург, Изд-во «Питер», 2015, 348 с.
 8. Khairallah Saad A., Anderson A. Mesoscopic simulation model of selective laser melting of stainless-steel powder. *Journal of Materials Processing Technology*, 2014, vol. 214, iss. 11, pp. 2627–2636.
 9. Zeng K. *Optimization of support structures for selective laser melting*. Phd dissertation. Louisville, 2015, 201 p.
 10. Leitz K.-H., Singer P., Plankensteiner A., Tabernig B., Kestler H., Sigl L.S. Multi-physical simulation of selective laser melting. *Metal Powder Report*, 2017, vol. 72, iss. 5, pp. 331–338.

Mathematical modeling of titanium alloy powder particle thermal state by selective laser melting in the production of a launch vehicle booster fuel system element

© M.G. Giorbelidze*, B.L. Khalitov

Samara National Research University, Samara, Russia

*E-mail: m.giorbelidze@ssau.ru

Abstract. Currently, one of the urgent problems is the creation of new models of launch vehicles of heavy and superheavy classes for launching a payload into orbit. The task of developing new samples of space technology that properly perform their assigned functions is solved by continuously improving the manufacturing technology of parts and assembly units, optimizing the design, as well as using new materials. To date, all these areas are implemented to one degree or another through the introduction of additive technologies, in particular selective laser fusion, which is actively used in modern production systems. The analysis of the traditional technology of manufacturing spherical elements for the booster fuel tank pressurization system is carried out, the main defects arising during the manufacture and testing of parts are determined. Mathematical modeling of the thermal state of a particle of powdered material made of titanium alloy VT6 during selective laser fusion is carried out. Based on the results of mathematical modeling, the optimal mode of manufacturing a spherical

element for the booster fuel tank pressurization system by selective laser fusion was selected.

Keywords: *launch vehicle, fuel tank boost system, additive technologies, selective laser melting, mathematical modeling.*

References

1. Bogdanovich V.I., Giorbelidze M.G. Numerical investigation of the thermal transformation of composition powder particles in the technology of selective laser melting. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2019, vol. 510, iss. 1, art. no. 012005.
2. Sotov A.V., Pronichev N.D., Smelov V.G., Bogdanovich V.I., Giorbelidze M.G., Agapovichev A.V. Development of a methodology for designing technological processes for manufacturing GTE parts by selective laser fusion of heat-resistant alloy powder VV751P. *Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2017, vol. 19, no. 4, pp. 96–104.
3. Bogdanovich V.I., Giorbelidze M.G., Sotov A.V., Pronichev N.D., Smelov V.G., Agapovichev A.V. Mathematical modeling of powder melting processes in selective laser fusion technology. *Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2017, vol. 19, no. 4, pp. 105–114.
4. Bogdanovich V.I., Giorbelidze M.G. Numerical study of thermal transformation of powder composition particles in selective laser fusion technology. *Proceedings of the International Scientific and Technical Conference "High technologies in Modern Science and Technology VTSNT-2018"*. Yakovlev A.N., ed. Tomsk, Publishing House of Tomsk Polytechnic University, 2018, pp. 179–180.
5. Yakupov R.R. Mathematical methods of additive technologies. *Science without borders*, 2017, no. 8 (13), pp. 35–38.
6. Gibson Y., Rosen D., Stacker B. *Technologies of additive manufacturing*. Shishkovsky I.V., ed. Moscow, Technosphere, 2016, 646 p.
7. Shishkovsky I.V. *Fundamentals of high-resolution additive technologies*. St. Petersburg, Publishing house of St. Petersburg, 2015, 348 p.
8. Khairallah Saad A., Anderson A. Mesoscopic simulation model of selective laser melting of stainless-steel powder. *Journal of Materials Processing Technology*, 2014, vol. 214, iss. 11, pp. 2627–2636.
9. Zeng K. *Optimization of support structures for selective laser melting*. Phd dissertation. Louisville, 2015, 201 p.
10. Leitz K.-H., Singer P., Plankensteiner A., Tabernig B., Kestler H., Sigl L.S. Multi-physical simulation of selective laser melting. *Metal Powder Report*, 2017, vol. 72, iss. 5, pp. 331–338.

Оценка параметров высокочастотного прямооточного электронагревного двигателя

© Р.В. Клочков*, В.В. Онуфриев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): roma526789@yandex.ru

Аннотация. Одним из вечных вопросов космической отрасли является вопрос повышения массы полезной нагрузки космического

аппарата. Для низкоорбитальных космических аппаратов, на которые действует значительная сила лобового сопротивления, необходим большой запас рабочего тела. Авторы в данной работе показывают, что использование высокочастотного прямоточного двигателя позволяет значительно увеличить массу полезной нагрузки космического аппарата за счет использования в качестве рабочего тела газы остаточной атмосферы.

Ключевые слова: ракетный двигатель, прямоточный двигатель, низкоорбитальный космический аппарат, высокочастотный нагрев.

Литература

1. Канаев С.В., Петухов В.Г., Попов Г.А., Харитонов, С.А. Прямоточный электрореактивный двигатель для компенсации аэродинамического торможения низкоорбитальных космических аппаратов. *Известия вузов. Авиационная техника*, 2015, № 3, с. 35–40.
2. ГОСТ 4401–81. Атмосфера стандартная.

Evaluation of the parameters of a high-frequency direct-flow electric heating engine

© R.V. Klochkov*, V.V. Onufriev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): roma526789@yandex.ru

Abstract. One of the eternal questions of the space industry is the issue of increasing the payload mass of the spacecraft. For low-orbit spacecraft, which are affected by a significant drag force, a large supply of the working fluid is required. The authors in this work show that the use of a high-frequency ramjet engine can significantly increase the payload mass of a spacecraft, due to the use of residual atmospheric gases as a working fluid.

Keywords: rocket engine, direct-flow engine, low-orbit spacecraft, high-frequency heating.

References

1. Kanaev S.V., Petukhov V.G., Popov G.A., Kharitonov S.A. Direct-flow electric jet engine to compensate for aerodynamic deceleration of low-orbit spacecraft. *Izv. Universities. Aviation technology*, 2015, no. 3, pp. 35–40.
2. GOST 4401–81. Standard atmosphere.

Расчет напряженности электрического поля в сверхзвуковом потоке плазмы продуктов сгорания ракетных двигателей на твердом и жидком топливах

© Р.М. Крамаренко*, В.В. Онуфриев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): krm17ea247@student.bmstu.ru

Аннотация. Существует ряд проблем, связанных с электризацией стенок сопел вследствие наличия заряженных частиц в потоке рабочего тела. Изучение этих проблем и определение способов их устранения являются частью исследований, представленных авторами данной работы, которая посвящена расчету и оценке напряженности электрического поля в ракетных двигателях на твердом и жидком топливах.

Ключевые слова: напряженность, плазма, ракетный двигатель, сопло, жидкое и твердое топлива.

Литература

1. Ягодников Д.А., Воронетский А.В. Влияние внешнего электрического поля на особенности процессов воспламенения и горения. *Физика горения и взрыва*. 1994, т. 30, № 3, с. 3.
2. Трусов Б.Г. *TERRA — Моделирование фазовых и химических равновесий: методические указания*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 39 с.

Calculation of electric field strength in supersonic plasma flow of combustion products of rocket engines on solid and liquid fuels

© R.M. Kramarenko*, V.V. Onufriev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): krm17ea247@student.bmstu.ru

Abstract. There are a number of problems associated with the electrification of the nozzle walls due to the presence of charged particles in the working fluid flow. The study of these problems and the determination of ways to eliminate them is part of the research presented by the authors of this work, which is devoted to the calculation and evaluation of the electric field strength in rocket engines on solid and liquid fuels.

Keywords: electric field strength, plasma, rocket engine, nozzle, liquid and solid fuel.

References

1. Yagodnikov D.A., Voronetsky A.V. The influence of an external electric field on the features of ignition and combustion processes. *Physics of combustion and explosion*, 1994, vol. 30, no. 3, p. 3.

2. Trusov B.G. *TERRA — Modeling of phase and chemical equilibria: Guidelines*. Moscow, Bauman Moscow State Technical University, 2013, 39 p.

Использование 3D-сканера для определения координат объектов, обрабатываемых многоосевым роботом-манипулятором

© Я.Н. Лапа

Московский авиационный институт, Москва, Россия
E-mail: yan.lapa@gmail.com

Аннотация. Проведено сравнение различных подходов к отысканию координат объекта при взаимодействии «робот-манипулятор — объект»: механический; с применением оптических меток; сканированием с последующей обработкой облаков точек. Исследуются возможности сканеров низкого разрешения для определения пространственного расположения обрабатываемых объектов. Приводится анализ точности и производительности измерений на примере серии крупногабаритных объектов различной геометрии.

Ключевые слова: 3D-сканирование, позиционирование, облако точек, робот-манипулятор, машинное зрение.

3D-scanning for determining the coordinates of objects processed by a multi-axis robotic arm

© Y.N. Lapa

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia
E-mail: yan.lapa@gmail.com

Abstract. Comparison of different approaches to obtain the coordinates of an object in the interaction "robot-manipulator — object" was performed: mechanical; with the use of optical marks; scanning with subsequent point cloud processing. The capabilities of low-resolution scanners for determining the location of processed objects are being investigated. The analysis of accuracy and productivity is given on the example of a series of measurements of large-sized objects of various geometries.

Keywords: 3D-scanning, positioning, point cloud, robotic arm, machine vision.

От новых локальных задач оптимизации к новым ядерным технологиям

© В.С. Окунев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: okunevvs@bmstu.ru

Аннотация. Анализируются решения непрерывных многокритериальных задач оптимизации состава топлива ядерных реакторов. В состав вектора управления включены свойства материалов, в число ограничений — функционалы, характеризующие наиболее опасные аварийные режимы (ATWS). Наиболее перспективным с точки зрения максимизации мощности реактора и повышения безопасности можно считать таблеточное топливо на основе смеси микрозерен UN (в LWR) или UN-PuN (в быстрых реакторах) и нанопорошка металлического урана. Нанопорошок размещается в порах между микрозернами. В результате повышается средняя плотность и теплопроводность топлива, что важно для обеспечения безопасности. В реакторах типа БРЕСТ большой мощности удастся повысить тепловую мощность на 40 %, а при использовании теплоносителя на основе свинца ториевых руд детерминистически исключить тяжелые аварии. Предложенные новшества можно использовать в ядерных энергетических реакторах нового поколения любого типа.

Ключевые слова: безопасность, ядерное топливо, исключение аварий.

Тезисы. Развитие ядерной энергетики России идет по пути повышения электрической мощности энергоблоков до 1,2...1,3 ГВт и повышения безопасности (вплоть до исключения аварий с недопустимыми выбросами радиоактивных веществ за пределы АЭС). Это требует развития новых ядерных технологий, которые могут быть определены на основе расчетно-оптимизационных исследований. Актуально развитие математического обеспечения для решения таких задач. В качестве математического обеспечения автор использует многократно модернизированные программы Dragon-M, FRISS-2D [1, 2] и MSU [3].

Наибольшие успехи в повышении надежности и мощности достигнуты для реакторов типа ВВЭР [4], в возможности детерминистического исключения тяжелых аварий — в проекте реактора БРЕСТ-ОД-300 [5]. При повышении мощности реакторов типа БРЕСТ возникают трудности в обеспечении безопасности. На площадке Сибирского химического комбината (г. Северск Томской области) началось строительство энергоблока БРЕСТ-ОД-300 [6].

С целью повышения мощности реакторов ВВЭР предлагалось использовать оксидное ядерное топливо с добавками нанопорошка

металлического урана [7]. Технология изготовления такого топлива существует [7]. Основная проблема ВВЭР — невозможность детерминистического исключения тяжелых аварий, что принципиально достижимо в реакторах типа БРЕСТ. Технология изготовления топлива [7] легко адаптируема для быстрых реакторов (типа БН и БРЕСТ).

При использовании топлива на основе микрозерен керамики ($UO_{1,8}$, $UO_{1,8}-Pu_4O_7$ или UN, PuN, UN-PuN) и нанопорошка U (до 40 % по массе) повышается не только мощность реактора, но и средняя плотность и теплопроводность топлива, что важно для обеспечения безопасности в аварийных режимах, сопровождающихся отказом аварийной защиты (режимах типа ATWS) [1, 2]. Металлокерамика на основе оксидов может быть использована в реакторах с натриевым охлаждением. В перспективе целесообразен переход на смесь монокристалла и металлического урана. Топливо на основе UN или UN-PuN и нанопорошка U наиболее предпочтительно и оптимально для быстрых реакторов с любым теплоносителем.

Схема размещения нанопорошка урана в порах между микрозернами керамики представлена на рис. 1. Область допустимых значений (выделена триховкой) теплопроводности и плотности топлива для исключения всей совокупности тяжелых аварий, инициированных ATWS, показана на рис. 2. Внутри области (см. рис. 2) находится точка, соответствующая U-Pu-топливу, вне области — точка, соответствующая классическому монокристалльному топливу топливу UN-PuN, вблизи границ области расположено керметное топливо.

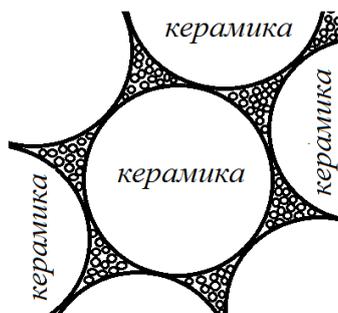


Рис. 1. Схема практически идеального размещения нанопорошка урана в порах между микрозернами керамики (сферическая форма частиц — идеализация, характерный размер зерен нанопорошка металлического урана — десятки нанометров)

Формулировка и решение новых (локальных) задач оптимизации актуальна после определения основных характеристик реактора на стадии концептуальной разработки. Это позволит скорректировать проектные решения в рамках разработанной (заданной) компоновки активной зоны. Такая корректировка в большинстве случаев не требует изменения основных параметров компоновки, т. е. не требует решения задач оптимизации геометрии и состава активной зоны. Результаты решения локальных корректирующих задач могут не иметь

возможности практической реализации. Однако если практическая реализация выполнима, можно ожидать не просто усовершенствования ядерных технологий, но и технологических прорывов, причем в рамках существующих технологий, разработанных ранее.

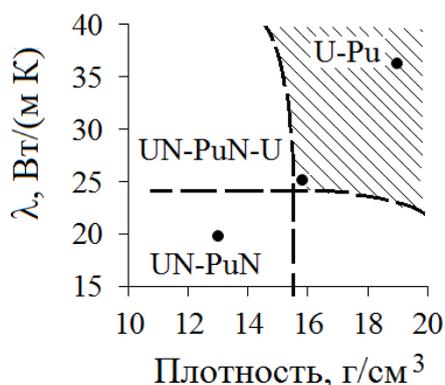


Рис. 2. Область допустимых значений плотности и теплопроводности λ -топлива

Оптимизация свойств топливных материалов привела к выбору в качестве предпочтительного топлива металлокерамику на основе микрозерен мононитрида и нанопорошка металлического урана. При использовании такого топлива задача повышения мощности, надежности и безопасности реактора не носит конфликтного характера. Возможно одновременное улучшение всех этих качеств. Наибольших успехов в развитии энергетических быстрых реакторов большой мощности следует ожидать при комплексном использовании такого топлива, свинцового теплоносителя с высокой концентрацией ^{208}Pb и вольфрамовых (или других, поглощающих нейтроны) покрытий конструкционных материалов [1, 2]. При использовании этих новшеств не существует ограничений мощности реактора, связанных с безопасностью.

Предложенный подход универсален. Он одинаково применим при разработке новой высокотемпературной техники, предназначенной для использования в особых условиях на Земле и в космосе, в том числе при высоких радиационных воздействиях (включая солнечный ветер, облучение нейтронами и γ -квантами). Это ракетные двигатели (ядерные и неядерные) и материалы ракетной техники, материалы ядерной и термоядерной техники (топливо, теплоноситель, конструкционные материалы).

Литература

1. Okunev V.S. ATWS Analysis for Innovative Lead-Cooled High-Power Fast Reactor with Accident Tolerant Materials of Core. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2021, vol. 808, art. no. 012002. DOI: 10.1088/1755-1315/808/1/012002

2. Okunev V.S. System Analysis Methodology for Decision Making in the Design Problems of New Generation Nuclear Reactors. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021, vol. 2001, art. no. 012005. DOI:10.1088/1742-6596/2001/1/012005
3. Гомин Е.А. Статус МСУ-4. *ВАЯТ, сер.: Физика ядерных реакторов*, 2006, № 1, с. 6–32.
4. Андрущечко С.А., Васильев Б.Ю., Косоуров К.Б., Семченков Ю.М., Кучумов А.Ю., Украинцев В.Ф., Фаворов Б.Ю. *ВВЭР-1200. Эволюция классики: физические основы эксплуатации, системы и элементы, ядерное топливо, безопасность*. Москва, Логос, 2019.
5. *IAEA-TECDOC-1531 Fast Reactor Database: 2006 Update*. Vienna, IAEA, 2006, 441 p.
6. Росатом начал строительство уникального энергоблока с реактором на быстрых нейтронах БРЕСТ-ОД-300. *Росатом*, 08 июня 2021.
7. Федоров Ю.С., Бураков Б.Е., Гарбузов В.М. и др. *Способ получения таблеток ядерного топлива на основе диоксида урана*. Патент № 2459289 Российская Федерация, 2011.

From new local optimization problems to new nuclear technologies

© V.S. Okunev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: okunevvs@bmsu.ru

Abstract. The solutions of continuous multicriteria problems of optimization of the composition of the fuel of nuclear reactors are analyzed. The composition of the control vector includes the properties of materials, among the restrictions are functionals characterizing the ATWS. The most promising from the point of view of maximizing power and increasing safety can be considered pellet fuel based on a mixture of UN micro grains or UN-PuN and uranium metal nanopowder. The nanopowder is placed in the pores between the micro grains. The result is an increase in the average density and thermal conductivity of the fuel, which is important for safety. In high-power BREST reactors, it is possible to increase the thermal power by 40%, and when using a coolant based on lead, thorium ores, it is possible to deterministically exclude severe accidents. The proposed innovations can be used in new generation nuclear power reactors of any type.

Keywords: *safety, nuclear fuel, elimination of accidents.*

Text of theses. The development of nuclear power in Russia is proceeding along the path of increasing the electrical capacity of power units to 1.2 ... 1.3 GW and improving safety (up to the elimination of accidents with unacceptable releases of radioactive substances outside the NPP). This requires the development of new nuclear technologies, which can be determined on the basis of computational and optimization studies. Development of software for solving such problems is urgent. As the software,

the author uses the repeatedly modernized programs "Dragon-M", "FRISS-2D" [1, 2] and "MCU" [3].

The greatest successes in increasing the reliability and power have been achieved for VVER reactors [4], in the possibility of deterministic elimination of severe accidents - in the BREST-OD-300 reactor design [5]. With an increase in the power of BREST reactors, difficulties arise in ensuring safety. The construction of the BREST-OD-300 power unit began at the site of the Siberian Chemical Combine (Seversk, Tomsk Region) [6].

In order to increase the power of VVER reactors, it was proposed to use oxide nuclear fuel with additives of uranium metal nanopowder [7]. The technology for the manufacture of such fuel exists [7]. The main problem of VVER is the impossibility of deterministic exclusion of severe accidents, which is in principle achievable in BREST reactors. The fuel fabrication technology [7] is easily adaptable for fast reactors (BN and BREST types).

When using fuel based on ceramic micrograins ($UO_{1.8}$, $UO_{1.8}-Pu_4O_7$ or UN, PuN, UN-PuN) and U nanopowder (up to 40% by mass), not only the reactor power increases, but also the average density and thermal conductivity of the fuel, which is important for ensuring safety in emergency modes accompanied by failure of emergency protection (modes of the ATWS type) [1, 2]. The oxide-based cermetes can be used in sodium cooled reactors. In the future, it is advisable to switch to a mixture of mononitride and metallic uranium. Fuel based on UN or UN-PuN and U nanopowder is most preferable and optimal for fast reactors with any coolant.

In fig. 1 shows a diagram of the placement of uranium nanopowder in the pores between ceramic micrograins. In fig. 2 shows the range of permissible values (highlighted by trichography) of fuel thermal conductivity and density to exclude the entire set of severe accidents initiated by ATWS. Inside the region (Fig. 2) there is a point corresponding to the U-Pu-fuel, outside the region – a point corresponding to the classical mononitride fuel UN-PuN, near the boundaries of the region there is a cermet fuel.

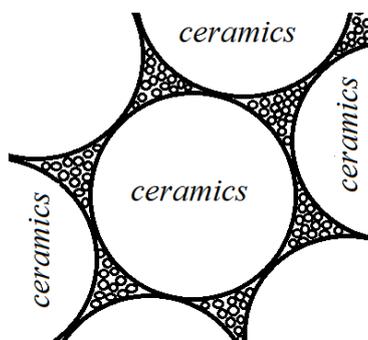


Fig. 1. Scheme of almost ideal placement of uranium nanopowder in pores between ceramic micrograins (the spherical shape of particles is idealization; the characteristic grain size of uranium metal nanopowder is tens of nanometers)

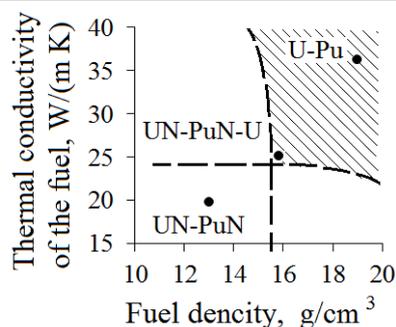


Fig. 2. Range of admissible values of density and thermal conductivity λ of fuel

The formulation and solution of new (local) optimization problems is relevant after the definition of the main characteristics of the reactor at the stage of conceptual development. This will make it possible to correct design solutions within the framework of the developed (specified) core layout. In most cases, such an adjustment does not require a change in the basic parameters of the layout, i.e., it does not require solving the problems of optimizing the geometry and composition of the core. The results of solving local corrective problems may not have the possibility of practical implementation. However, if the practical implementation is feasible, one can expect not only improvements in nuclear technologies, but also technological breakthroughs, and within the framework of existing technologies developed earlier.

Optimization of the properties of fuel materials led to the choice of cermet based on mononitride micro grains and uranium metal nanopowder as the preferred fuel. When using such fuel, the task of increasing the power, reliability and safety of the reactor is not of a conflicting nature. It is possible to simultaneously improve all these qualities. The greatest success in the development of high-power fast power reactors should be expected with the integrated use of such fuel, lead coolant with a high concentration of ^{208}Pb , and tungsten (or other neutron-absorbing) coatings of structural materials [1, 2]. With these innovations, there are no safety-related reactor power limitations.

The proposed approach is universal. It is equally applicable in the development of new high-temperature technology intended for use in special conditions on earth and in space, including high radiation effects (including solar wind, neutron and γ -ray irradiation). These are rocket engines (nuclear and non-nuclear) and materials for rocket technology, materials for nuclear and thermonuclear technology (fuel, coolant, structural materials).

References

1. Okunev V.S. ATWS Analysis for Innovative Lead-Cooled High-Power Fast Reactor with Accident Tolerant Materials of Core. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2021, vol. 808, art. no. 012002. DOI: 10.1088/1755-1315/808/1/012002

2. Okunev V.S. System Analysis Methodology for Decision Making in the Design Problems of New Generation Nuclear Reactors. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2001, art. no. 012005. DOI:10.1088/1742-6596/2001/1/012005
3. Gomin E.A. MCU-4 status. *VANT, ser. Physics of nuclear reactors*, 2006, no. 1, pp. 6–32.
4. Andrushechko S.A., Vasiliev B.Yu., Kosourov K.B., Semchenkov Yu.M., Kuchumov A.Yu., Ukraintsev V.F., Favorov B.Yu. *VVER-1200 Evolution of the classics: physical foundations of operation, systems and elements, nuclear fuel, safety*. Moscow, Logos, 2019. [in Russ.].
5. *IAEA-TECDOC-1531 Fast Reactor Database: 2006 Update*. Vienna, IAEA, 2006, 441 p.
6. *Rosatom has begun construction of a unique BREST-OD-300 fast reactor*. Rosatom, June 08, 2021. [in Russ.].
7. Fedorov Yu.S., Burakov B.E., Garbuzov V.M. et al. Method of obtaining pellets of nuclear fuel based on uranium dioxide. *Russian patent and invention*, 2011, no. 2459289. FSUE "NPO The V.G. Khlopin Radium Institute".

Влияние характера сопряжения элементов оптического волокна Panda при деформировании системы волокно – полупространство

© М.М. Пащенко*, А.А. Каменских

ПНИПУ, Пермь, Россия

*E-mail (докладчика): max_pashchenko@mail.ru

Аннотация. Рассматривается контактное взаимодействие алюминиевого пространства с оптическим волокном Panda с учетом первичного и вторичного полимерного защитного покрытия и всех конструктивных элементов. Моделируется три типа сопряжения элементов волокна: совместное деформирование, контактная склейка, контакт с учетом всех типов контактных состояний и заранее не известным характером их распределения.

Ключевые слова: *оптика, волокно, полимерные покрытия, контакт.*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ и Пермского края
(проект № 20-48-596009).*

Литература

Shardakov I.N., Trufanov A.N. Identification of the temperature dependence of the thermal expansion coefficient of polymers. *Polymers*, 2021, vol. 13 (18), art. no. 3035.

Influence of the pattern of the elements conjugation optical fiber Panda during the fiber-half-space system deformation

© M.M. Pashchenko*, A.A. Kamenskih

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

*E-mail (speaker): max_pashchenko@mail.ru

Abstract. The contact interaction of the aluminum space with the Panda optical fiber, taking into account the primary and secondary polymer protective coating and all structural elements, is considered. Three types of conjugation of the fiber elements are modeled: joint deformation, contact bonding, contact taking into account all types of contact states and previously unknown character of their distribution.

Keywords: *optics, fiber, polymer coatings, contact.*

This work was supported by the RFBR and the Perm Krai (project No. 20-48-596009).

References

Shardakov I.N., Trufanov A.N. Identification of the temperature dependence of the thermal expansion coefficient of polymers. *Polymers*, 2021, vol. 13(18), art. no. 3035.

Ударные и колебательные процессы в проводниках при обработке давлением с применением электропластического эффекта

© О.А. Троицкий*, О.Б. Скворцов, В.И. Стащенко

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (ИМАШ РАН),
Москва, Россия

*E-mail: oatroitsky@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены особенности механического отклика проводников на действие внешнего электрического импульса. Отмечена линейная зависимость от амплитуды электрического импульса. Экспериментально зафиксирована зависимость от полярности электрического импульса. Представлен анализ динамики развития механического отклика в виде последовательности ударного процесса в начальный момент воздействия с последующим переходом к затухающим вибрациям, не зависящим от последующего изменения тока через проводник.

Ключевые слова: *электрический импульс, металлический проводник, вибрация, удар, электропластический эффект.*

Дополнительное воздействие электрического тока на обрабатываемый металл позволяет снизить сопротивление металла при различных видах механической обработки и управлять изменением свойств металла [1, 2]. В большинстве примеров применения этого метода лежит использование электропластического эффекта, при котором на обрабатываемую заготовку действуют статические силы и импульсный электрический ток. Эти методы применяются при резке, прокатке, волочении, плющении и пресовании [3–8]. Электроимпульсное воздействие также может применяться при электроимпульсной полировке, электроимпульсной сварке и электроимпульсном разрушении (дезинтеграции). Некоторые примеры подключения источников электрических импульсов к оборудованию для прокатки представлены на рис. 1.

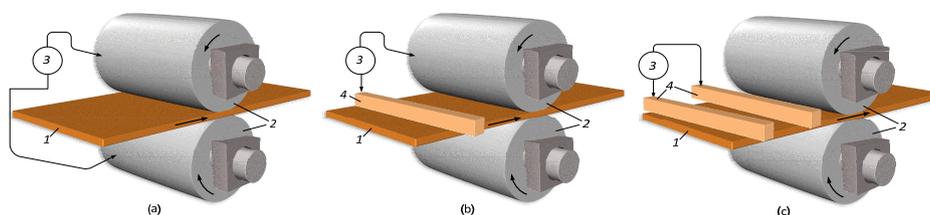


Рис. 1. Прокатка заготовки из металла 1 через вальцы 2 с применением электропластического эффекта. Подача электрических импульсов от генератора 3 на вальцы (а), между контактным электродом 4 и вальцами (б) и между контактными электродами (с)

Выбор режимов обработки при этом основан на эмпирических оценках, получаемых при экспериментах. При этом на каждый из участков заготовки должно быть обеспечено воздействие хотя бы одного электрического импульса. Данное требование может быть обеспечено относительно просто, если учесть особенности динамического воздействия электрических импульсов на механические деформации материала заготовки. При воздействии электрического импульса в начальные моменты переднего и заднего фронтов в материале заготовки возбуждаются противоположные по знаку ударные механические процессы. Эти ударные процессы создают вибрации в виде затухающих колебаний большой амплитуды. Такие колебания распространяются в материале заготовки в течение времени, существенно превышающего длительность электрического импульса. Это позволяет обеспечить воздействие на сравнительно большую область обрабатываемой заготовки. Пример записи вибрационных сигналов в заготовке представлен на рис. 2.

Возникающие гармонические механические колебания являются результатом интерференции затухающих колебаний от ударных процессов на переднем и заднем фронтах электрического импульса.

Результат такой интерференции представлен на рис. 3. Данные зависимости позволяют определить режим задания электрических импульсов, обеспечивающих максимальное механическое воздействие на материал заготовки [9, 10].

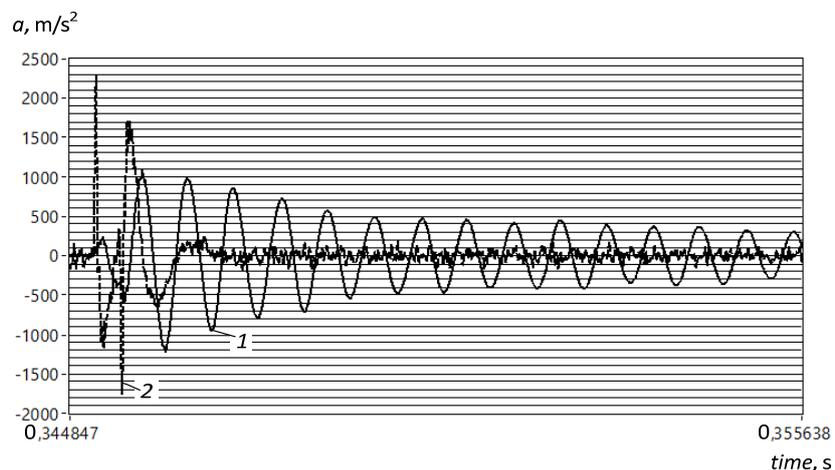


Рис. 2. Поперечное 1 и продольное 2 ускорения заготовки из титана диаметром 3 мм при действии импульсного тока плотностью 500 А/мм²

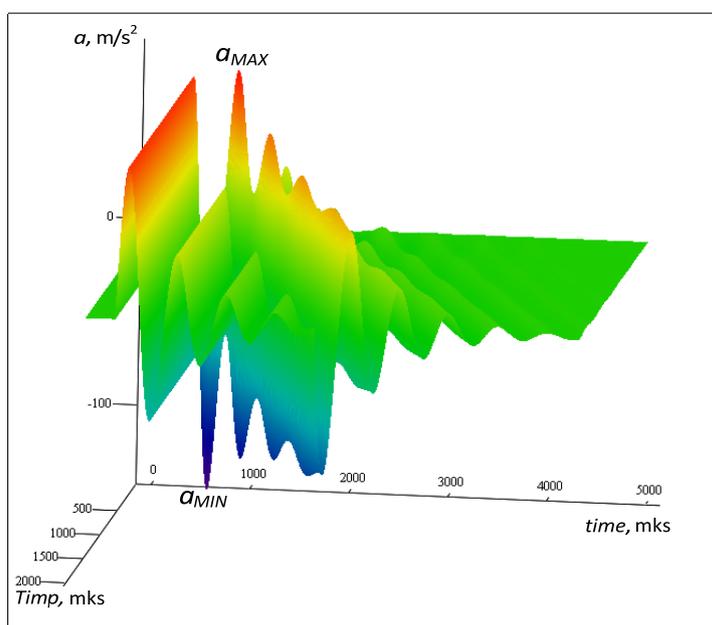


Рис. 3. Зависимость амплитуды вибрационного ускорения от длительности импульса для суперпозиции вибрационных откликов от переднего и заднего фронтов электрического импульса

Оптимизация электроимпульсного воздействия позволяет обеспечить максимальную эффективность и экономичность при обработке металлов с использованием электропластического эффекта.

Литература

1. Троицкий О.А., Сташенко В.И., Скворцов О.Б., Савенко В.С., Самуйлов С.Д., Терещук В.С., Зайцев С.В., Иванов А.М. *Интенсивная пластическая деформация металла при токовых и СВЧ-воздействиях. Новые данные и закономерности*. Москва, Издательство «Ким Л.А.», 2020, 342 с.
2. Троицкий О.А., Сташенко В.И., Савенко В.С., Скворцов О.Б., Самуйлов С.Д., Правоторова Е.А., Терещук В.С. *Воздействия импульсами тока и СВЧ-излучением на конструкционные материалы. Электродинамические и электрохимические эффекты в проводниках*. Москва, Издательство «Ким Л.А.», 2019, 278 с.
3. Патент РФ № 2426629, 2011.
4. Патент РФ № 2585920, 2016.
5. Патент РФ № 2544721, 2015.
6. Патент РФ № 2624877, 2017.
7. Патент РФ № 2321469, 2008.
8. Патент РФ № 2044781, 1995.
9. Скворцов О.Б., Сташенко В.И., Троицкий О.А. Упругие деформации проводников при действии импульсов тока. *Машиностроение и инженерное образование*, 2018, № 1 (54), с. 26–35.
10. Троицкий О.А., Правоторова Е.А., Сташенко В.И., Скворцов О.Б. Магнито-механическое действие импульсного тока в проводнике. В сб.: *Живучесть и конструкционное материаловедение (ЖивКом — 2016). Труды конференции*, 2016, с. 145–148.

Shock and oscillatory processes in conductors during pressure treatment using the electroplastic effect

© O.A. Troitsky*, O.B. Skvortsov, V.I. Stashenko

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

*E-mail: oatroitsky@mail.ru

Abstract. The features of the mechanical response of conductors to the action of an external electrical impulse are considered. A linear dependence on the amplitude of the electric pulse is noted. The dependence on the polarity of the electric pulse has been experimentally recorded. An analysis of the dynamics of the development of a mechanical response in the form of a sequence of a shock process at the initial moment of exposure with the subsequent transition to damped vibrations, which does not depend on the subsequent change in the current through the conductor, is presented.

Keywords: *electrical impulse, metal conductor, vibration, shock, electroplastic effect.*

The additional effect of electric current on the metal being processed makes it possible to reduce the resistance of the metal during various types of mechanical processing and to control the change in the properties of the metal [1, 2]. In most examples of the application of this method lies the use of the electroplastic effect, in which static forces and pulsed electric current act on the workpiece being processed. These methods are used for cutting, rolling, drawing, flattening and pressing [3-8]. Electric impulse action can also be used for electric-pulse polishing, electric pulse welding and electric impulse destruction (disintegration). Some examples of connecting sources of electrical impulses to rolling equipment are shown in Figure 1.

The choice of processing modes in this case is based on empirical estimates obtained in experiments. At the same time, at least one electrical impulse must be affected on each of the sections of the workpiece. This requirement can be met relatively simply if we take into account the peculiarities of the dynamic effect of electrical impulses on mechanical deformations of the workpiece material. Under the influence of an electric pulse, at the initial moments of the leading and trailing edges, opposite in sign shock mechanical processes are excited in the workpiece material. These shock processes create vibrations in the form of damped oscillations of large amplitude. Such vibrations propagate in the workpiece material for a time significantly exceeding the duration of the electric pulse. This allows the impact on a relatively large area of the workpiece to be machined. An example of recording vibration signals in a workpiece is shown in Figure 2.

The arising harmonic mechanical vibrations are the result of the interference of damped vibrations from shock processes at the front and back fronts of the electric pulse. The result of such an interference is shown in Figure 3. These dependences make it possible to determine the mode of setting electrical impulses that provide the maximum mechanical effect on the workpiece material [9, 10].

Optimization of the electrical impulse effect allows for maximum efficiency and economy in metal processing using the electroplastic effect.

References

1. Troitsky O.A., Stashenko V.I., Skvortsov O.B., Savenko V.S., Samuilov S.D., Tereshchuk V.S., Zaitsev S.V., Ivanov A.M. *Intense plastic deformation of metal under current and microwave impacts. New data and patterns*. Moscow, Publishing house «Kim L.A.» 2020, 342 p. [in Russ.].
2. Troitsky O.A., Stashenko V.I., Savenko V.S., Skvortsov O.B., Samuylov S.D., Pravotorova E.A., Tereshchuk V.S. *Impact of current pulses and microwave studies on structural materials. Electrodynamic and electrochemical effects in conductors*. Moscow, Publishing house «Kim L.A.», 2019, 278 p. [in Russ.].
3. Patent RF № 2426629, 2011.
4. Patent RF № 2585920, 2016.

5. Patent RF № 2544721, 2015.
6. Patent RF № 2624877, 2017.
7. Patent RF № 2321469, 2008.
8. Patent RF № 2044781, 1995.
9. Skvortsov O.B., Stashenko V.I., Troitsky O.A. Elastic deformations of conductors under the action of current pulses. *Mechanical Engineering and Engineering Education*, 2018, no. 1 (54), pp. 26–35.
10. Troitsky O.A., Pravotorova E.A., Stashenko V.I., Skvortsov O.B. Magneto-mechanical action of impulse current in a conductor. In the collection: *Vitality and structural materials science (ZhivKoM — 2016). Conference proceedings*, 2016, pp. 145–148.

Вибрация электропроводящих элементов мощного энергетического оборудования с импульсными системами питания

© О.А. Троицкий*, В.И. Сташенко, О.Б. Скворцов

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (ИМАШ РАН), Москва, Россия
*E-mail: oatroitsky@mail.ru

Аннотация. Рассмотрен эффект генерации вибрационного отклика в проводящих элементах мощного электрооборудования на прохождение электрических импульсов. Данное явление не связано с проявлением эффекта близости и наблюдается даже в одиночном удаленном от других проводнике. Практическое влияние данный эффект оказывает на процессы вибрационной усталости материалов. Он наблюдается в оборудовании с импульсной передачей электрической энергии, что типично для конверторов солнечной и ветровой энергетики, а также роторных агрегатов гидроэнергетики с переменной скоростью вращения.

Ключевые слова: генератор, мотор, конвертор, электрический импульс, металлический проводник, вибрация, удар, диагностика.

Работа ряда современных систем мощного энергетического оборудования связана с использованием импульсных преобразователей большой мощности. В таких преобразователях через соединительные проводящие элементы происходит передача электрической энергии с токами высокой плотности. Использование импульсных преобразователей позволяет получить высокий КПД преобразования и обеспечить удовлетворительные тепловые режимы. Работа с мощными электрическими импульсами сопровождается преобразованием части электрической энергии в механические эффекты в виде вибрационных и акустических процессов. Часть такого преобразования электрической энергии в механическую связана с взаимодействием маг-

нитных полей проводников, известного как эффект близости. Наиболее сильно данный эффект проявляется при работе систем типа рельсотрона [1]. При работе роторных генераторов и электродвигателей переменного тока этот эффект также проявляется и является основной причиной вибрации с частотой удвоенной частоты переменного электрического тока через проводники. Величина вибрации при этом пропорциональна произведению токов через взаимодействующие проводники.

Кроме эффекта близости значительный вибрационный отклик в проводнике при прохождении электрического импульса может наблюдаться и в одиночном проводнике [2]. Для этого случая был предложен ряд гипотез о механизмах влияния электрического тока на механические процессы в проводнике [1, 2]. Влияние вибрации на проводящие шины для передачи больших токов проявляется как процесс вибрационной усталости. Вибрационная устойчивость в этом случае зависит от качества закрепления шин с учетом изоляции. Такие шины расположены в пазах магнитопроводов ротора и статора, как показано на рис. 1. Вибрационная устойчивость такой конструкции оценивается по вибрационному отклику на ударное воздействие на шину. Вместо механического удара возбуждение вибрационного отклика может быть обеспечено подачей на шину одиночного электрического импульса.

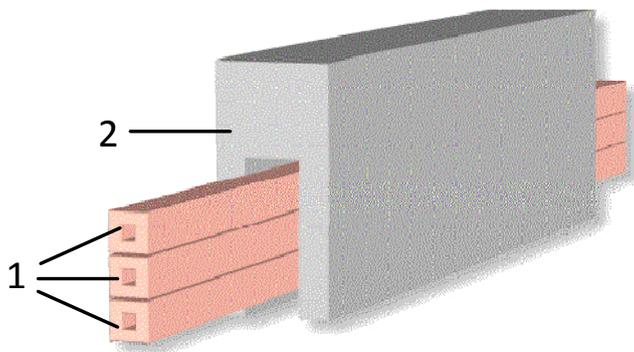


Рис. 1. Расположение шин передачи электрической энергии в канале изолятора или магнитопровода

Работа с электрическими импульсами большой мощности типична для современных систем энергоснабжения с возобновляемыми источниками энергии. Такие решения, как солнечные элементы, непосредственно генерируют постоянный электрический ток, для получения из которого стандартного переменного требуется использование импульсных конверторов. Сходные проблемы связаны и с использованием ветрогенераторов и роторных электрогенераторов с изменяющейся

скоростью вращения, например в гидроэнергетическом оборудовании. Переменное напряжение нестандартной переменной частоты на выходе таких генераторов необходимо преобразовать в переменное напряжение промышленной частоты с использованием импульсных преобразователей высокой мощности. Надежная и длительная работа таких преобразователей может быть обеспечена только при учете возникающих при этом вибрационных эффектов. Исследованию таких эффектов посвящена данная работа.

Процесс формирования вибрационного отклика на действие одиночного электрического импульса представлен на рис. 2. Электрический импульс начинается в момент времени t_0 . Активное преобразование электрической энергии в механическую энергию ударного импульса продолжается до момента $t_0 + \Delta t$. После этого до момента t_1 продолжается увеличение тока через проводник и соответствующего этому току магнитного поля. Магнитное поле показано на рис. 2 графиком магнитной индукции B . В момент t_2 внешний электрический импульс оканчивается и в проводнике формируется ударный импульс с полярностью противоположной полярности начального ударного импульса. Этот короткий ударный импульс оканчивается в момент $t_2 + \Delta t$. После этого наблюдается плавное снижение магнитной индукции и тока через проводник. Возникающие ударные механические импульсы вызывают появление продольных и поперечных затухающих вибраций в материале проводника.

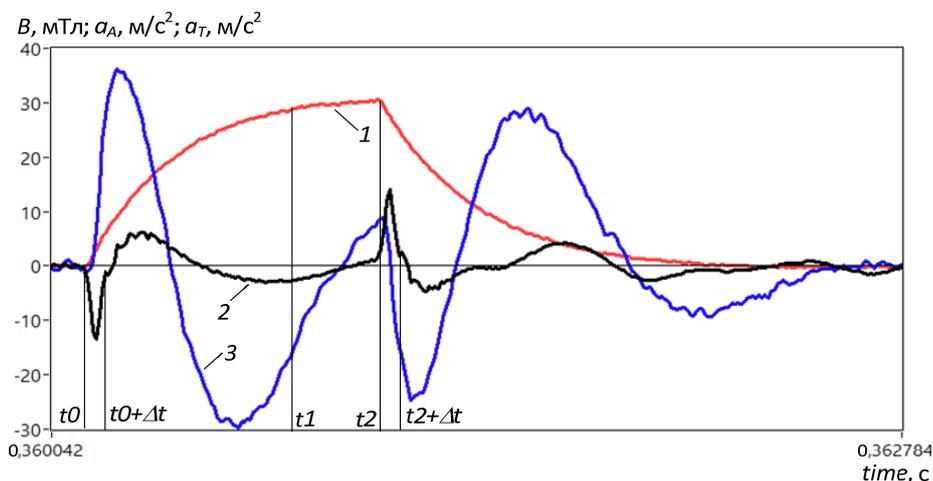


Рис. 2. Запись сигнала от датчика магнитной индукции 1, а также сигналов осевой 2 и поперечной 3 компонент вибрационного ускорения. Проводник из меди. Диаметр проводника 2 мм, длина проводника 150 мм

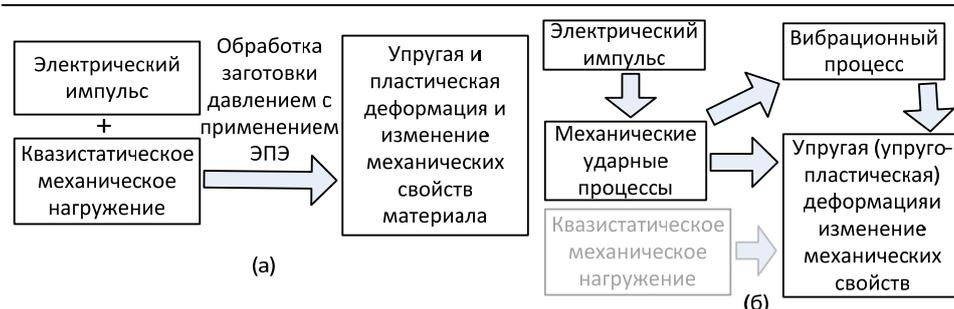


Рис. 3. Развитие вибрационного отклика в одиночном проводнике при действии на него одиночного электрического импульса

Таким образом, экспериментальные данные показывают, что электрические и механические процессы взаимосвязаны в моменты t_0 и t_2 , а на других интервалах времени практически независимы. Процесс развития вибрационного отклика при этом можно представить диаграммой на рис. 3.

Литература

1. Троицкий О.А., Сташенко В.И., Скворцов О.Б., Савенко В.С., Самуйлов С.Д., Терещук В.С., Зайцев С.В., Иванов А.М. *Интенсивная пластическая деформация металла при токовых и СВЧ-воздействиях. Новые данные и закономерности*. Москва, Издательство «Ким Л.А.», 2020, 342 с.
2. Троицкий О.А., Сташенко В.И., Савенко В.С., Скворцов О.Б., Самуйлов С.Д., Правоторова Е.А., Терещук В.С. *Воздействия импульсами тока и СВЧ-излучением на конструкционные материалы. Электродинамические и электрохимические эффекты в проводниках*. Москва, Издательство «Ким Л.А.», 2019, 278 с.

Vibration of electrically conductive elements of powerful power equipment with impulse power systems

© O.A. Troitsky*, V.I. Stashenko, O.B. Skvortsov

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

*E-mail: oatroitsky@mail.ru

Abstract. The effect of generating a vibration response in conductive elements of powerful electrical equipment to the passage of electrical impulses is considered. This phenomenon is not associated with the manifestation of the proximity effect and is observed even in a single conductor remote from others. This effect has a practical effect on the processes of vibration fatigue of materials. It is observed in equipment with pulsed transmission of electrical energy, which is typical for solar and wind power converters, as well as rotary hydropower units with variable rotation speed.

Keywords: *generator, motor, converter, electrical impulse, metal conductor, vibration, shock, diagnostics.*

The operation of a number of modern systems of powerful energy equipment is associated with the use of high-power pulse converters. In such converters, electrical energy is transmitted with high-density currents through the connecting conductive elements. The use of pulse converters allows you to obtain a high conversion efficiency and provide satisfactory thermal conditions. Working with powerful electrical impulses is accompanied by the transformation of some of the electrical energy into mechanical effects in the form of vibration and acoustic processes. Part of this conversion of electrical energy to mechanical energy is due to the interaction of the magnetic fields of the conductors, known as the proximity effect. This effect is most pronounced during the operation of railgun-type systems [1]. During the operation of rotary generators and AC electric motors, this effect is also manifested and is the main cause of vibration with a frequency of double the frequency of alternating electric current through the conductors. In this case, the magnitude of vibration is proportional to the product of currents through the interacting conductors.

In addition to the proximity effect, a significant vibrational response in a conductor during the passage of an electric pulse can be observed in a single conductor [2]. For this case, a number of hypotheses have been proposed about the mechanisms of the effect of electric current on mechanical processes in a conductor [1, 2]. The effect of vibration on conductive busbars for transmitting high currents manifests itself as a process of vibration fatigue. Vibration resistance in this case depends on the quality of the busbars fastening, taking into account the insulation. Frequently, such busbars are located in the grooves of the rotor and stator magnetic circuits, as shown in Figure 1. The vibration resistance of this design is assessed by the vibration response to shock to the tire. Instead of mechanical shock, a vibration response can be induced by applying a single electrical pulse to the tire.

Operation with high power electrical impulses is typical of modern renewable energy systems. Solutions such as solar cells directly generate direct current, which requires the use of pulsed converters to generate standard alternating current. Similar problems are associated with the use of wind generators and rotary power generators with variable rotation speed, for example, in hydro-power equipment. The alternating voltage of non-standard alternating frequency at the output of such generators must be converted into alternating voltage at industrial frequency using high-power pulse converters. Reliable and long-term operation of such transducers can only be ensured by taking into account the resulting vibration effects. This work is devoted to the study of such effects.

The process of forming a vibration response to the action of a single electrical impulse is shown in Figure 2. An electrical impulse starts at time t_0 . Active conversion of electrical energy into mechanical energy of the shock pulse continues until the moment $t_0 + \Delta t$. After that, until the moment t_1 , the current through the conductor and the corresponding magnetic field continue to increase. The magnetic field is shown in Figure 2 by the graph of the magnetic induction B . At the moment t_2 , the external electrical pulse ends and a shock pulse is formed in the conductor with the polarity of the opposite polarity of the initial shock pulse. This short shock pulse ends at time $t_2 + \Delta t$. After that, a smooth decrease in magnetic induction and current through the conductor is observed. The arising mechanical shock impulses cause the appearance of longitudinal and transverse damped vibrations in the conductor material.

Thus, the experimental data show that the electrical and mechanical processes are interrelated at times t_0 and t_2 , and at other time intervals are practically independent. The process of development of the vibrational response in this case can be represented by the diagram in Figure 3.

References

1. Troitsky O.A., Stashenko V.I., Skvortsov O.B., Savenko V.S., Samuilov S.D., Tereshchuk V.S., Zaitsev S.V., Ivanov A.M. *Intense plastic deformation of metal under current and microwave impacts. New data and patterns*. Moscow, Kim L.A. Publ., 2020, 342 p. [in Russ.].
2. Troitsky O.A., Stashenko V.I., Savenko V.S., Skvortsov O.B., Samuylov S.D., Pravotorova E.A., Tereshchuk V.S. *Impact of current pulses and microwave studies on structural materials. Electrodynamic and electrochemical effects in conductors*. Moscow, Kim L.A. Publ., 2019, 278 p. [in Russ.].

Механическое, тепловое и магнитное действие импульсных токов на проводники

© В.И. Сташенко, О.Б. Скворцов, О.А. Троицкий*

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (ИМАШ РАН), Москва, Россия

*E-mail: oatroitsky@mail.ru

Аннотация. Представлены результаты исследования теплового, магнитного и вибрационного отклика проводников на действие электрических импульсов тока высокой плотности. Тепловые эффекты связаны с выделением тепла в проводнике и не зависят от полярности тока. Магнитное поле импульсного тока характеризуется зависимостью от полярности и линейно связано с величиной тока, изменяющегося с учетом влияния скин-эффекта и самоиндукции. Для проводников также характерно наличие скачков величины магнитной

индукции в начальные моменты переднего и заднего фронтов внешнего электрического импульса. В эти моменты также наблюдаются механические ударные возмущения в материале проводника.

Ключевые слова: магнитное поле, импульсный ток, тепловой эффект, вибрация, удар, проводник.

Исследование физических процессов, происходящих при электропластическом эффекте, можно упростить, если исключить влияние как внешних воздействий, таких как изменение окружающей температуры или статического нагружения. Возможно также ограничиться только действием внешнего электрического импульса без дополнительного действия СВЧ-облучения, ультразвука и т. п. В этом случае исследуют проводник из металла, и отклик на действие электрического импульса контролируют датчиками вибрации (акселерометрами) для определения поперечной и продольной вибрации (рис. 1).

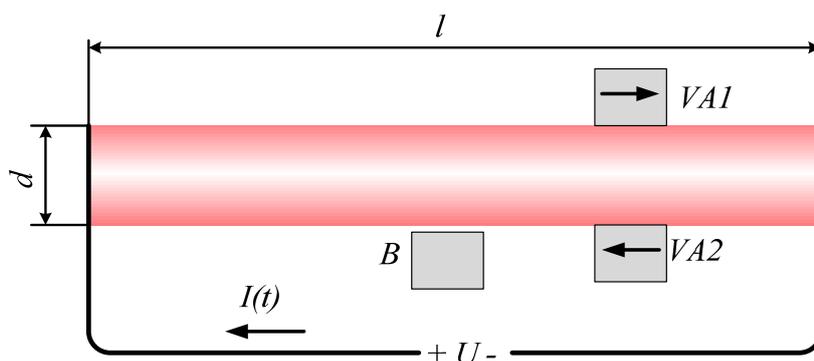


Рис. 1. Структура стенда для исследования отклика проводника на пропускание импульсного тока

Дополнительно контролируют величину тока через проводник по изменению магнитной индукции и температуры соответствующими бесконтактными датчиками.

На рис. 2, а показаны зависимости магнитной индукции последовательности для электрических импульсов чередующейся полярности и изменения температуры проводника.

Электрические импульсы создают в проводнике электрические токи, которые вызывают изменения температуры материала проводника. Такие изменения температуры приводят к выделению тепла и росту температуры T . Нагрев проводника приводит к поперечному и продольному расширению. На рис. 3 показаны зависимости изменения температуры T , плотности тока J , изменения длины δl и диаметра

δd для проводника из меди диаметром 4 мм и длиной 150 мм при различной амплитуде внешнего напряжения U электрического импульса.

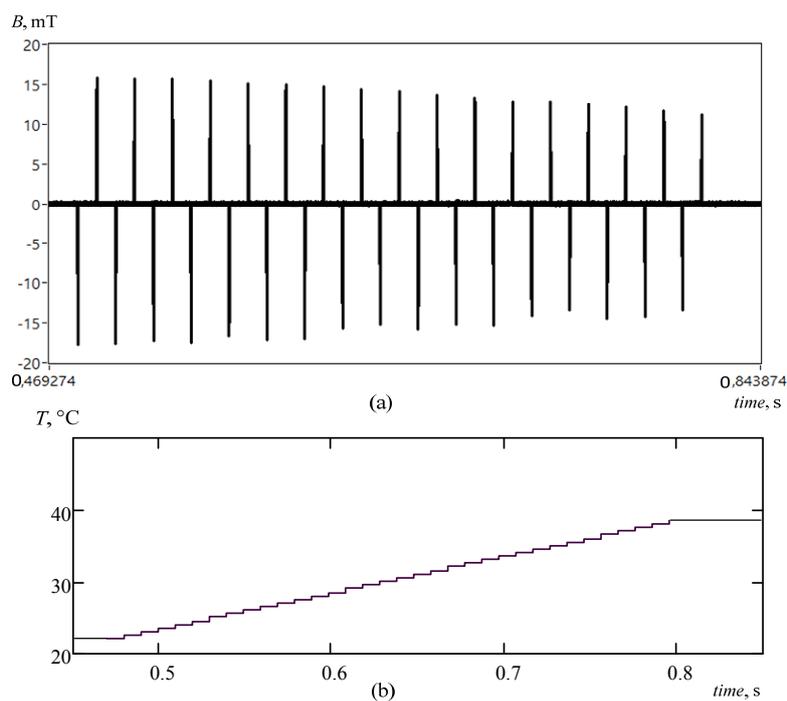


Рис. 2. Сигналы магнитной индукции B (a) и температуры (b) проводника при пропуске последовательности электрических импульсов чередующейся полярности

На рис. 4 приведены сигналы поперечного и осевого ускорения поверхности проводника во время действия одиночного электрического импульса.

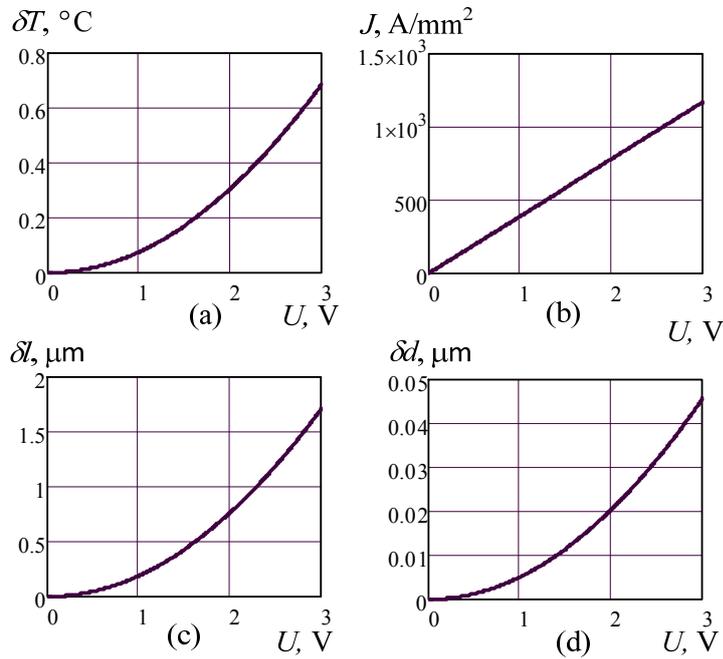


Рис. 3. Изменение температуры T (a), плотности тока J (b), длины δl (c) и диаметра δd (d) проводника при воздействии одиночных импульсов при изменении амплитуды его напряжения

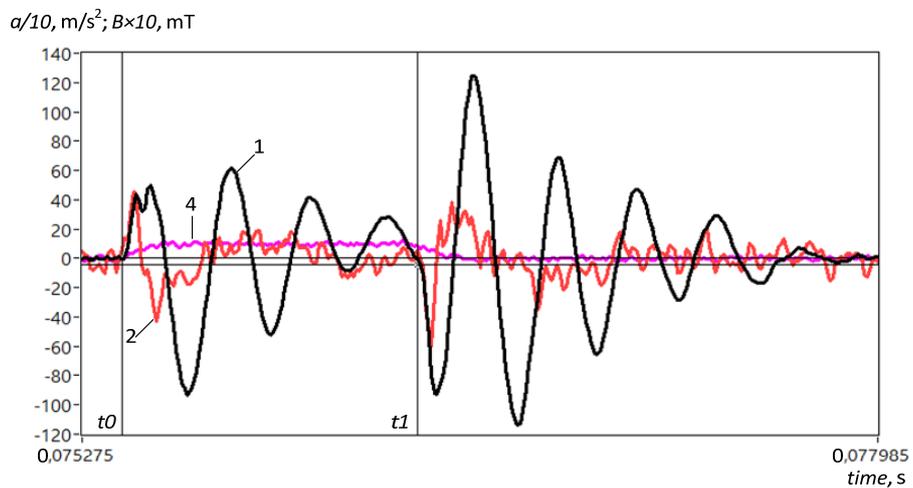


Рис. 4. Сигналы поперечного a_{\perp} 1 и осевого a_{\parallel} 2 ускорения, записанные синхронно с сигналом магнитной индукции B для проводника из никеля. Длительность импульса t_1-t_0 равна 1006 мкс

Литература

1. Троицкий О.А., Сташенко В.И., Скворцов О.Б., Савенко В.С., Самуйлов С.Д., Терещук В.С., Зайцев С.В., Иванов А.М. *Интенсивная пластическая деформация металла при токовых и СВЧ-воздействиях. Новые данные и закономерности*. Москва, Изд-во «Ким Л.А.», 2020, 342 с.
2. Троицкий О.А., Сташенко В.И., Савенко В.С., Скворцов О.Б., Самуйлов С.Д., Правоторова Е.А., Терещук В.С. *Воздействия импульсами тока и СВЧ-излучением на конструкционные материалы. Электродинамические и электрохимические эффекты в проводниках*. Москва, Изд-во «Ким Л.А.», 2019, 278 с.

Mechanical, thermal and magnetic effect of impulse currents on conductors

© V.I. Stashenko, O.B. Skvortsov, O.A. Troitsky*

Mechanical Engineering Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

*E-mail: oatroitsky@mail.ru

Abstract. The results of a study of the thermal, magnetic and vibration response of conductors to the action of high-density electric current pulses are presented. Thermal effects are associated with the generation of heat in the conductor and do not depend on the polarity of the current. The magnetic field of the pulsed current is characterized by a dependence on polarity and is linearly related to the magnitude of the current, which changes taking into account the influence of the skin effect and self-induction. Conductors are also characterized by the presence of jumps in the magnitude of the magnetic induction at the initial moments of the leading and trailing edges of an external electrical pulse. At these moments, mechanical shock disturbances are also observed in the material of the conductor.

Keywords: *magnetic field, pulse current, thermal effect, vibration, shock, conductor.*

The study of the physical processes occurring during the electroplastic effect can be simplified if the influence of both external influences, such as a change in the ambient temperature or static loading, is excluded. It is also possible to restrict ourselves to only the action of an external electric pulse without additional action of microwave radiation, ultrasound, etc. In this case, a metal conductor is examined and the response to the action of an electric pulse is monitored with vibration sensors (accelerometers) to determine lateral and longitudinal vibration.

Additionally, the amount of current through the conductor is monitored by the change in magnetic induction and temperature with appropriate contactless sensors.

Figure 2 shows the dependences of the magnetic induction of the sequence for electrical pulses of alternating polarity (a) and changes in the temperature of the conductor.

Electrical impulses create electrical currents in a conductor that cause changes in the temperature of the conductor material. Such changes in temperature lead to the release of heat and an increase in temperature T . Heating of the conductor leads to transverse and longitudinal expansion.

Figure 3 shows the dependences of the change in temperature T , current density J , change in length δl and diameter δd for a copper conductor with a diameter of 4 mm and a length of 150 mm at a different amplitude of the external voltage U of an electric pulse.

Figure 4 shows the signals of the transverse and axial acceleration of the conductor surface during the action of a single electric pulse.

References

1. Troitsky O.A., Stashenko V.I., Skvortsov O.B., Savenko V.S., Samuilov S.D., Tereshchuk V.S., Zaitsev S.V., Ivanov A.M. *Intense plastic deformation of metal under current and microwave impacts. New data and patterns*. Moscow, Publishing house «Kim L.A.», 2020, 342 p. [in Russ.].
2. Troitsky O.A., Stashenko V.I., Savenko V.S., Skvortsov O.B., Samuylov S.D., Pravotorova E.A., Tereshchuk V.S. *Impact of current pulses and microwave studies on structural materials. Electrodynamics and electrochemical effects in conductors*. Moscow, Publishing house «Kim L.A.», 2019, 278 p. [in Russ.].

Масштабная и конформная инвариантности в механике и теории поля

© А.О. Шишанин

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: shishandr@rambler.ru

Ключевые слова: масштабная инвариантность, конформная инвариантность, модель де Альфаро-Фубини-Фурлана, шварциан, шварцианная механика.

Хорошо известно, что конформная группа в пространстве-времени с сигнатурой (p, q) — это $SO(p+1, q+1)$. Алгебру Ли конформных преобразований составляют сдвиги, вращения, оператор дилатации и специальные конформные преобразования. В одномерном пространстве нет вращений, поэтому конформная алгебра Ли классической механики $so(2,1) \sim sp(1,1) \sim sl(2, \mathbb{R})$. Здесь конформные преобразования задаются дробно-линейными функциями

$$t' = \frac{at+b}{ct+d}, \quad ad-bc=1.$$

Стандартный пример $sl(2, R)$ -инвариантной механической системы — модель де Альфаро — Фубини — Фурлана (dAFF) с обычным кинетическим членом

$$L_{dAFF} = \frac{\dot{q}^2}{2} - \frac{g}{2q^2}.$$

Здесь g — параметр. Координата q преобразуется

$$q'(t') = \frac{q}{ct+d}.$$

Эта модель является простейшим вариантом модели Калоджеро — Мозера, которая тоже обладает конформной инвариантностью. Модель дАФФ можно получить из теории скалярного поля для одномерного пространства-времени. Заметим, что масштабно-инвариантные теории (без специального конформного преобразования) образуют более широкий класс теорий. Для них лагранжиан можно представить в виде ряда по инвариантному параметру w

$$L_{scale} = F \left(\frac{\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi}{\varphi^{\frac{2d}{d-1}}} \right) \varphi^{\frac{2d}{d-1}}.$$

Здесь $F(w)$ — произвольная функция. Конформная инвариантность наблюдается только для случая $F = \frac{1}{2}w - \lambda$.

Удивительно, что есть другая $sl(2, R)$ -инвариантная модель, построенная через шварциан (производную Шварца)

$$S_{Sch} = \frac{1}{2} \int dt \{x, t\}, \quad \{x, t\} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} \right)^2.$$

Шварцианная механика в последние годы интенсивно изучается из-за ее связей с двумерной гравитацией Джакива — Тайтельбойма и моделью Садчева — Йе — Китаева.

Моделирование упруговязкопластического поведения монокристаллических сплавов на никелевой основе с учетом эволюции микроструктуры

© А.И. Грищенко

Санкт-Петербургский политехнический университет им. Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия
© E-mail: gai-gr@yandex.ru

Аннотация. Высокая жаропрочность, трещиностойкость и показатели длительной прочности монокристаллических сплавов на никелевой основе обусловлены двухфазной микроструктурой, состоящей из γ -матрицы, формирующейся на основе Ni3Al, и квазипериодически расположенных дисперсных включений γ' фазы [1]. При высокотемпературной ползучести происходит изменение микроструктуры. Целью данного исследования является разработка микромеханически мотивированных моделей неупругого деформирования монокристаллических сплавов на никелевой основе с учетом эволюции фазового состава. При формулировании определяющих уравнений каждой из фаз учитывались особенности кубической сингонии, различные механизмы упрочнения, наличие вязких свойств как ниже, так и выше предела текучести [2]. Результаты моделирования показали хорошее соответствие с экспериментальными данными для сплавов ЖС-32 и CMSX-4.

Ключевые слова: монокристалл, ползучесть, пластичность, системы скольжения, конечно-элементная гомогенизация, реологические модели, рафтинг.

Литература

1. Шалин Р.Е., Светлов И.Л., Качанов Е.Б., Толораия В.Н., Гаврилин О.С. *Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов*. Москва, Машиностроение, 1997, 333 с.
2. Grishchenko A.I., Semenov A.S., Getsov L.B. Modeling inelastic deformation of single crystal superalloys with account of γ/γ' phases evolution. *Materials Physics and Mechanics*, 2015, vol. 24 (4), pp. 325–330.

Modeling of elastoviscoplastic behavior in Ni-based superalloys with into account of microstructure evolution

© A.I. Grishchenko

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia
E-mail: gai-gr@yandex.ru

Abstract. The high temperature strength, toughness and durability of single-crystal nickel-base superalloys is attributed to the two-phase composite microstructure consisting of a γ - matrix, formed on the basis of Ni3Al and quasi-periodically located dispersed inclusions of the γ' phase. With high-temperature creep, a change in the microstructure occurs. The aim of this study is to develop micromechanically motivated models of inelastic deformation of single-crystal nickel-based alloys, taking into account the evolution the phase composition. When formulating the constitutive equations for each of the phases, the features of the cubic system, various hardening mechanisms, and the presence of viscous properties both below and above the yield point were taken into account [2]. The simulation results showed good agreement with experimental data for ZhS-32 and CMSX-4 alloys.

Keywords: *single crystal, creep, plasticity, slip system, finite-element homogenization, rheological model, rafting.*

References

1. Shalin R.E., Svetlov I.L., Kachanov E.B., Toloraya V.N., Gavrilin O.S. *Single Crystals of Nickel Refractory Alloys*. Moscow, Mashinostroenie, 1997. [in Russ.].
2. Grishchenko A.I., Semenov A.S., Getsov L.B. Modeling inelastic deformation of single crystal superalloys with account of γ/γ' phases evolution. *Materials Physics and Mechanics*, 2015, vol. 24 (4), pp. 325–330.

1.3. Математическое моделирование и анализ

Руководители: д-р техн. наук, проф. Н.И. Сидняев,
д-р техн. наук, проф. С.Н. Саяпин

Определение динамических параметров спускаемых космических аппаратов с использованием ортогональных планов

© Н.И. Сидняев, И.В. Баранов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: sidnyaev@bmstu, baranov@student.bmstu.ru

Аннотация. В представленной работе подробно изложены основы планирования эксперимента и математической статистики. Рассмотрены полные и дробные факторные планы, а также композиционные ортогональные и ротатабельные планы эксперимента для квадратичных моделей. Приведены методики экспериментального

поиска значений факторов, при которых целевая функция достигает экстремума. Построены математические модели для различных комбинаций положения управляющих органов космического аппарата при движении в плотных слоях атмосферы и проведены расчеты баллистических параметров. Подробно рассмотрены вопросы оптимального планирования для построения математической модели в виде линейной комбинации линейных и квадратических функций от входных факторов с неизвестными параметрами. Выделены существенные факторы, которые необходимо учитывать при построении математических моделей управления баллистическими параметрами. Предложенные модели имеют практическое значение на этапе предварительного исследования, при котором из совокупности возможных факторов нужно выделить подмножество переменных, необходимых для построения модели спуска в плотных слоях атмосферы космического аппарата. Ряд методов специально раскрыт в работе для решения задач управления спускаемыми космическими аппаратами.

Ключевые слова: факторные планы, эксперимент, функция, космический аппарат, математическая модель, регрессия, адекватность.

В последние десятилетия происходит неуклонное расширение сферы приложения методов математического планирования эксперимента. Эти методы успешно используются для повышения эффективности экспериментальных исследований, поиска оптимальных технологических режимов производственных процессов, выбора конструктивных параметров изделий, состава многокомпонентных систем и т. д. В развитии отечественной школы по планированию эксперимента большую роль сыграли В.В. Налимов, В.В. Федоров, Г.К. Круг, Е.В. Маркова, Ю.П. Адлер и другие ученые.

Многие статистические зависимости в различных приложениях представляют собой линейные по неизвестным параметрам, но в общем случае нелинейные по независимым переменным функции регрессии. Изучение таких зависимостей сводится к построению и исследованию линейных моделей наблюдений типа Гаусса — Маркова.

Понятие линейной модели наблюдений является фундаментальным в математической статистике. В настоящее время эти модели широко используются в теории планирования эксперимента. К исследованию линейных моделей наблюдений сводятся и многие задачи регрессионного, дисперсионного, факторного анализов. В дальнейшем оценивание многомерных функций отклика, проверка гипотезы адекватности функции отклика, сравнение функций регрессии также выполняются на основе линейных моделей наблюдений. Особое место среди линейных моделей наблюдений занимают так называемые линейные модели наблюдений неполного ранга. К исследованию та-

ких моделей сводятся задачи оценивания линейных функций регрессии, функций отклика и их параметров, когда число параметров больше числа опытов, выполненных для оценивания этих параметров. Далее построение общей теории оценивания в дробном факторном эксперименте проводится на основе моделей наблюдений неполного ранга, что позволяет использовать более общие подходы для выбора и построения дробных реплик.

По различным разделам теории планирования эксперимента имеется большое число отечественных и зарубежных публикаций [1, 2]. Монографическая литература ориентирована преимущественно на экспериментаторов или математиков, специализирующихся в области теории планирования эксперимента. Особое значение придается детальному изучению моделей наблюдений неполного ранга, анализу многофакторных экспериментов и многомерных функций отклика, развитию теории проверки гипотезы адекватности моделей и решению ряда других задач, актуальных для теории и практики эксперимента [2]. Почти для всех утверждений, кроме вспомогательных, приводятся доказательства. Основные результаты иллюстрируются примерами. Значительное увеличение числа задач связано с созданием качественно новых программных комплексов в связи с переходом от библиотеки программ к использованию ЭВМ нового поколения в диалоговом режиме.

Отбор и адаптация методов ТПЭ для решения задач космической баллистики, разработки материалов и технологических процессов всегда производились с учетом особенностей предмета исследования, в числе которых можно отметить следующие, характерные для всех указанных выше классов задач:

- групповой способ изготовления устройств различного назначения, требующий специфической статистической обработки результатов эксперимента;
- наличие многих показателей качества, коррелированных между собой;
- наличие показателей качества, связанных с длительными испытаниями, затрудняющих использование процедур последовательного поиска оптимального решения;
- наличие переменных факторов различного типа, которые необходимо рассматривать совместно (качественные, количественные и коррелированные переменные);
- наличие ограничений на изменения концентраций компонент и пределов варьирования технологических факторов, задающих область исследования часто сложной формы;
- необходимость включения в эксперимент факторов с различным числом уровней варьирования и использования несимметричных (по степеням переменных) моделей.

В данной работе подробно изучаются баллистические параметры в полосе входа космического аппарата, которая является многофакторной задачей, используемая при анализе разнообразных аспектов спуска космических аппаратов в атмосферу планет. Пространственные размеры коридора входа и положение его границ зависят главным образом от начальных условий движения космического аппарата, его аэродинамических характеристик и ограничений на условия спуска (прежде всего по перегрузкам, но возможно использовать максимальную температуру и другие параметры). Границы коридора входа имеют тенденцию быстро сужаться при возрастании начальной скорости входа спускаемого аппарата в атмосферу. Траектория входа спускаемого аппарата в земную атмосферу описывается высотой условного перигея или, другими словами, — высотой перигея условного приближения, вычисленной в предположении отсутствия атмосферных слоев. Нижняя граница коридора входа определяется предельно малой высотой условного перигея, которая соответствует наиболее крутой траектории с максимально допустимой перегрузкой. Верхняя граница коридора входа определяется предельно большой высотой условного перигея, соответствующей наиболее пологой траектории, которая еще обеспечивает захват космического аппарата атмосферой. Разность между верхней и нижней границами носит название ширины коридора входа. Конкретные ее значения могут сильно варьироваться для одного и того же типа космических аппаратов, аэродинамической компоновки и вида спуска при смене ограничений и условий снижения. Отмечается, что фактический, или реализуемый, коридор входа всегда меньше теоретического из-за неизбежных атмосферных возмущений и влияния ряда факторов, которые невозможно строго предсказать, таких как отклонений проектно-баллистических характеристик управляющих органов спускаемого аппарата от расчетных данных, ошибок в функционировании системы управления спуском, инерционности и т. п.

При решении задач оптимизации баллистических и аэродинамических характеристик часто нельзя обратиться к последовательному поиску оптимума, необходимо принять решение на основе серии экспериментов, проведенных одновременно. Так как заранее неизвестно, в какой подобласти находится оптимальное решение, то необходимо получить равномерно точное описание свойств объекта во всей заданной области факторного пространства. Поэтому в том случае, когда известен вид регрессионной модели, в качестве главного критерия оптимальности плана выдвигается максимальная дисперсия оценки регрессионной функции в области планирования эксперимента G -критерий. Следует отметить, что в настоящее время не существует численных методов построения точных G -оптимальных планов. В то же время часто в практических задачах вид регрессионной

модели неизвестен. Поскольку и в этом случае нужно получить равномерно точное описание свойств объекта, серию экспериментов необходимо расположить в области равномерно.

В большинстве практических задач, например из космической баллистики, возникают ситуации с большим количеством откликов, причем нередко регрессионные зависимости для различных откликов не совпадают по виду. В таких случаях при планировании эксперимента необходимо найти компромиссное решение. Таким решениям и методам их получения в теории эксперимента уделяется недостаточно внимания.

В последнее время уделяется много внимания методам «отсева» переменных в обстановке большого пассивного эксперимента (число экспериментов намного больше числа рассматриваемых эффектов) [2]. Такие задачи возникают при выборе наилучшей регрессионной модели. Если число экспериментов ненамного превосходит число эффектов (что обычно и бывает при планировании эксперимента), критерии, рассматриваемые обычно в методах отсева, видимо, не годятся. Необходимо определить критерии выбора наилучшей модели в этом случае и соответственно переработать существующие методы отсева.

Так, решение задач с использованием ТПЭ ведется в обстановке неполного знания механизма явлений, вид модели неизвестен (случай «черного ящика»), однако имеются некоторые физические, интуитивные и полученные на основе предыдущего опыта представления о характере регрессионной зависимости, например монотонность относительно некоторых из рассматриваемых факторов, неотрицательность функции и т. п. Кроме проблем планирования эксперимента в такой ситуации существует и проблема обработки экспериментальных данных и регрессионного анализа при наличии ограничений на вид регрессионной функции.

На вопрос о том, как на основании экспериментальных исследований оптимизировать многомерные модели, нет достаточно определенного ответа. В связи с этим поиск оптимального решения на основе результатов эксперимента является одним из актуальнейших задач.

На практике существует такой подход к решению задачи управления космическими аппаратами: анализируется каждый отклик отдельно и строится оценка регрессионной функции для него. Затем в качестве целевых функций и функций, на которые наложены ограничения, рассматриваются полученные оценки регрессионных функций. Однако обычно при такой постановке задачи не учитывается тот факт, что дисперсии оценок регрессионных функций не являются постоянными в заданной области факторного пространства, а зависят от координат.

При оптимальном планировании лишь до некоторой степени можно сгладить картину изменения дисперсий. Традиционный под-

ход может быть абсолютно не пригоден при пассивном эксперименте. В связи с этим необходимо рассматривать постановки задач оптимизации, учитывающие величины дисперсий оценок регрессионных функций.

Наибольшее число задач управления космическими аппаратами ставились и решались как задачи оптимизации. При выборе критериев оптимизации в задачах поиска оптимальных режимов управления полетом приходилось, как правило, сталкиваться с необходимостью учета многих показателей качества, причем для некоторых изделий часто наблюдаются встречные тенденции в изменениях этих показателей: улучшение одного влечет ухудшение другого.

Для поиска компромиссных решений использовались в основном два подхода. Первый и наиболее распространенный в связи с наличием длительных испытаний состоит в выборе главного по степени важности показателя качества (критерия оптимизации) и введении остальных в качестве ограничений. Новые направления координатных осей определяются таким образом, чтобы одна из них соответствовала направлению наиболее быстрого убывания целевой функции, а остальные находятся из условия ортогональности. Решению задачи оптимизации предшествует математическое описание области оптимума — построение регрессионных моделей для каждого показателя качества.

Первоначально при исследовании и описании задач управления космическими аппаратами и процессов в качестве регрессионных моделей использовались полиномы второго (иногда третьего) порядка и выбирались подходящие готовые планы. По мере усложнения рассматриваемых областей исследования и появления гипотез о несимметричных по степеням факторов моделей стало необходимым применение планов, построенных численными методами и позволяющих более полно учесть априорную информацию о процессах и наложенных на область ограничения.

Наибольшее распространение для таких ситуаций в задачах получил метод построения близких к G-оптимальным точных планов на заданном допустимом множестве точек. Построение моделей по результатам эксперимента проводилось при этом с использованием методов «отсева», дополненных регрессионным анализом.

Использование естественных в таких ситуациях моделей, нелинейных по параметрам, обычно затруднялось наличием многих переменных, определяющих процесс, и отсутствием достаточно полных представлений о сложных механизмах явлений. На начальной стадии исследования процессов при наличии многих переменных и при неизвестной области оптимума на первом этапе обычно решались задачи выделения главных факторов с использованием дробных реплик

или планов Плакетта — Бермана, а затем осуществлялось шаговое движение к оптимуму с использованием обобщенного критерия.

При решении задач проектирования деталей наибольшее распространение получила функция желательности, предложенная в работе [1]. В основе построения этой обобщенной функции лежит идея преобразования натуральных значений частных откликов в безразмерную шкалу желательности или предпочтительности.

Таким образом, в заключение можно отметить, что в работе выделены существенные факторы, которые необходимо учитывать при построении математических моделей управления баллистическими параметрами. Предложенные модели имеют большое практическое значение на этапе предварительного исследования, при котором из совокупности возможных факторов потребовалось выделить подмножество переменных, необходимых для построения модели спуска в плотных слоях атмосферы космического аппарата. Сложный характер критериев требует специальных методов оптимизации. Ряд таких методов [3, 4] был специально раскрыт в работе для решения задач управления спускаемыми космическими аппаратами. В работе выбраны методы исследования в проблемном поле направления, модифицированы существующие и разработаны новые методы и приемы, исходя из задач управления спускаемыми космическими аппаратами.

Литература

1. Сидняев Н.И. *Статистический анализ и теория планирования эксперимента*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 195 с.
2. Сидняев Н.И., Вилисова Н.Т. *Руководство к решению задач по теории планирования эксперимента*. Сидняев Н.И., ред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002, 96 с.
3. Сидняев Н.И., Климова Н.С. Изменение поверхностных и объемных свойств космического аппарата при адсорбции и рекомбинация атомов кислорода и азота. *Космические исследования*, 2020, т. 58, № 3, с. 208–222.
4. Сидняев Н.И. Исследование теплообмена в пограничном слое при обтекании азотом каталитической графитовой стенки. *Теплофизика и аэромеханика*, 2020, т. 27, № 2 (122), с. 201–212.

Determination of dynamic parameters of descent spacecraft using orthogonal plans

© N.I. Sidnyaev, I.V. Baranov

Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia

E-mail: sidnyaev@bmstu.ru, baranov@student.bmstu.ru

Abstract. In the presented work, the basics of experimental planning and mathematical statistics are described in detail. Full and fractional factorial plans, as well as compositional orthogonal and rotatable experi-

mental plans for quadratic models are considered. The methods of experimental search for the values of factors at which the objective function reaches the extremum are given. Mathematical models have been constructed for various combinations of the position of the spacecraft control bodies when moving in dense layers of the atmosphere, and calculations of ballistic parameters have been carried out. The issues of optimal planning for constructing a mathematical model in the form of a linear combination of linear and quadratic functions from input factors with unknown parameters are considered in detail. The essential factors that need to be taken into account when constructing mathematical models for controlling ballistic parameters are highlighted. The proposed models are of practical importance at the stage of preliminary research, in which a subset of variables necessary for constructing a model of descent in the dense layers of the atmosphere of a spacecraft should be selected from a set of possible factors. A number of methods are specifically disclosed in the work to solve the problems of controlling descent spacecraft.

Keywords: *factor plans, experiment, function, spacecraft, mathematical model, regression, adequacy.*

Исследование коридора входа спускаемых космических аппаратов в условиях высоких температурных нагрузок в атмосфере планет

© Н.И. Сидняев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: sidnyaev@bmstu.ru

Аннотация. В докладе представлены исследования влияния аэродинамических характеристик космического летательного аппарата на его движение и нагрев в атмосфере. Показано, что увеличение аэродинамического качества при малых углах входа в атмосферу приводит к снижению перегрузок, улучшению характеристик маневренности и повышению интегральных суммарных тепловых потоков, тогда как увеличение подъемной силы и лобового сопротивления — к снижению плотности теплового потока. Теплозащита основана на принципе поглощения тепловых потоков (независимо от методов осуществления), весовые затраты на нее будут наименьшими при минимальном значении интегрального теплового потока, что приводит к выводу, что космический аппарат должен быть настолько мал, насколько позволят компоновочные условия размещения приборной базы и полезного груза. Постулируется, что такие летательные аппараты, вероятно, пригодны для входа в атмосферу с орбитальными и

со сверхорбитальными скоростями. Утверждается, что если тепловая защита основана на принципе излучения тепла с поверхности, то для ограничения температуры поверхности нужны сравнительно большие размеры летательного аппарата. Такие космические аппараты с высокой подъемной силой и (или) способные иметь большое лобовое сопротивление оказываются применимыми при орбитальных скоростях входа в атмосферу. Однако с увеличением скорости входа в атмосферу плотности тепловых потоков становятся особенно высокими, и охлаждение излучением может стать практически неосуществимым, что негативно сказывается на аппаратуре систем управления.

Ключевые слова: *космический аппарат, траектория, температура, атмосфера, аэродинамика, сопротивление.*

В настоящей работе основное внимание уделяется так называемым «секущим» траекториям, при которых летательный аппарат, войдя в атмосферу со сверх орбитальной скоростью, затем снова выходит из нее уже с орбитальной скоростью. Рассмотрены методы исследований и результаты, полученные этими методами; указаны основные стороны влияния аэродинамических характеристик космического летательного аппарата на его движение и нагрев в атмосфере. Так, например, отмечается, что увеличение аэродинамического качества при малых углах входа в атмосферу приводит к снижению перегрузок, улучшению характеристик маневренности и повышению интегральных суммарных тепловых потоков, тогда как увеличение подъемной силы и лобового сопротивления — к снижению плотности теплового потока. Отмечены основные направления в проектных разработках [1]. Например, если теплозащита основана на принципе поглощения тепловых потоков (независимо от методов осуществления), весовые затраты на нее будут наименьшими при минимальном значении интегрального теплового потока, а это приводит к выводу, что космический летательный аппарат должен быть настолько мал, насколько позволят компоновочные условия размещения полезного груза [2]. Такого типа летательные аппараты, вероятно, пригодны для входа в атмосферу с орбитальными и со сверхорбитальными скоростями.

Верхние слои атмосферы, особенно большая часть термосферы и экзосфера, находятся в области приземного космического пространства и ближнего космоса. Условия полетов в этой части космического пространства, кроме физических параметров состояния верхней атмосферы, в значительной степени определяются радиационной и метеорной обстановкой. Эти вопросы заслуживают специального рассмотрения. Физические характеристики верхней атмосферы существенно сказываются на изменении аэродинамических характеристик

спутников. Полеты космических аппаратов осуществляются в более высоких слоях верхней атмосферы. В нижних слоях ионосферы плотность воздуха еще настолько значительная, что, например, спутник не в состоянии совершить здесь даже один полный оборот вокруг Земли. Верхние слои ионосферы, по-видимому, являются нижней границей движения спутников почти по неизменным орбитам, поскольку плотность здесь чрезвычайно мала. Например, относительная плотность воздуха на высоте 80 км над экватором составляет $4,951 \cdot 10^{-5}$, а на высоте 800 км она равна $2,68 \cdot 10^{-12}$. Так как сила сопротивления воздуха телу, движущемуся в воздушной среде, прямо пропорциональна относительной плотности, сила аэродинамического сопротивления на высоте 80 км в $2 \cdot 10^7$ раз больше, чем на высоте 800 км. В потоке разреженного газа аэродинамические силы, действующие на тело, являются результатом сложения импульсов, передаваемых телу молекулами, которые ударяются об его поверхность и отражаются от нее. Эти силы можно вычислить, если известно, как движутся молекулы после удара, как они отражаются от поверхности тела.

Для всех космических аппаратов, время спуска которых менее 500 с, разрушающиеся теплозащитные материалы обладают абсолютными преимуществами перед другими возможными методами. Для очень продолжительных, а следовательно, и менее теплонапряженных спусков в атмосфере на первое место выходят массообменная система тепловой защиты. Необходимо отметить, что полная модель разрушения стеклообразных материалов достаточно сложна [3]. Сильная зависимость вязкости расплава от температуры приводит к необходимости совместного решения уравнения движения пленки и уравнения сохранения энергии. При этом последнее приходится интегрировать по всей глубине прогрева конденсированной фазы, ибо у стеклообразных материалов нет фиксированной температуры плавления. Температурный профиль в пленке расплава определяет такие чисто внутренние процессы в теплозащитном материале, как термическое разложение смолы, фильтрация газообразных продуктов коксования, гетерогенное взаимодействие наполнителя и связующего. Учет нестационарности прогрева для стеклообразных материалов имеет принципиальное значение прежде всего потому, что при равных с другими теплозащитными материалами скоростях уноса массы оплавливающиеся покрытия имеют большее время установления квазистационарного режима. Кроме того, внутри пленки расплава и в прогретом слое у стеклопластиков возможно резкое увеличение эффективного коэффициента теплопроводности за счет переноса тепла излучением затупления. Необходимо отметить что, экспериментальные исследования разрушающихся материалов в основном ограничены условиями обтекания с постоянными параметрами газовых

потоков. Стеклообразные материалы отличаются от других покрытий большим разнообразием физических свойств (вязкости, плотности, теплопроводности и т. д.), поэтому дополнительно изучен вопрос о влиянии этих свойств или их отклонения от заданных «эталонных» значений на основные параметры оплавления: суммарную скорость уноса массы и температуру разрушающейся поверхности. В расчетах предполагалось, что теплоемкость и плотность разных концентраций может отличаться в 2–3 раза.

Несколько сильнее отличается коэффициент теплопроводности. С ростом температуры он начинает резко увеличиваться, причем тем сильнее, чем прозрачнее материал для теплового излучения. У кварцевого стекла величина эффективного коэффициента теплопроводности может увеличиться в 5–7 раз по сравнению с табличным при температуре 273 К. Еще сильнее может изменяться вязкость расплава. Результаты расчетов оплавления стеклообразных материалов показали, что из всех физических параметров, входящих в дифференциальные уравнения и граничные условия, на ход зависимости скорости уноса массы от времени влияют лишь теплопроводность материала и его плотность. Изменение всех остальных параметров приводит лишь к отличиям в установившихся значениях скорости оплавления и температуре поверхности. Если летательный аппарат совершает полет со сверхорбитальной скоростью в области над верхней границей коридора возможных траекторий, он не в состоянии затормозиться в такой степени, чтобы избежать выхода из атмосферы, и может уйти опять на большие расстояния обратно в космическое пространство. Такой вариант нежелателен и может быть даже неприемлем при полете с человеком на борту.

С другой стороны, если при входе в атмосферу со сверхорбитальной скоростью полет совершается в области, которая ниже коридора, то скорости настолько велики, что, как и в случае суборбитальных скоростей, невозможно избежать превышения допустимых пределов по перегрузкам и (или) по интенсивности нагрева. Для более конкретного описания возможных траекторий полета при сверхорбитальных скоростях полезно рассмотреть случай, на которой показан подход к планете по двум граничным траекториям. Можно определить глубину коридора h , измеренную в километрах, как разность между эффективными перигеями граничных гиперболических траекторий [3]. Чем больше величина h , тем менее жесткие требования предъявляются к точности управления летательным аппаратом во время подхода к планете. Глубину коридора можно увеличить с помощью отрицательной подъемной силы на верхней граничной траектории (как средство избежать выхода из атмосферы со сверхорбитальной скоростью) и положительной подъемной силы на нижней граничной траектории (как средство избежать проникновения на

слишком малые высоты со слишком большими скоростями). Величина h , конечно, связана (см., например, работы [1, 2]) как с аэродинамическими и массовыми характеристиками космического летательного аппарата, совершающего полет в атмосфере, так и с ограничениями по нагреву и перегрузкам, которые допускаются для их конструкций и полезных грузов. Максимальные перегрузки будут у нижней границы коридора.

При определении глубин коридора качество бралось постоянным по величине и отрицательным на верхней граничной траектории до точки, в которой скорость становилась орбитальной, на нижней траектории — положительным; траектория рассчитывалась с этим отношением качества до точки, в которой угол наклона траектории к местному горизонту становился равным нулю. При этом предполагалось, что после достижения нулевого угла наклона нижней граничной траектории коэффициенты аэродинамических сил могут изменяться так, чтобы не произошло выхода из атмосферы со сверхорбитальной скоростью.

Отметим сначала, что при значении $G_{\max} = 10$, которое может быть приемлемым для летательных аппаратов с человеком на борту, с увеличением скорости входа в атмосферу величина h заметно снижается. С другой стороны, величина h возрастает с увеличением качества. Ясно, что путем увеличения качества независимо от величины можно заметно увеличить глубину коридора и даже при малых L/D можно иметь достаточно большие приемлемые размеры коридора входа в атмосферу, если G_{\max} не слишком мала. Так, например, если допустимая величина $G_{\max} = 10$, летательный аппарат с $L/D = 0,5$ может иметь глубину коридора для входа в атмосферу с параболической скоростью порядка 64 км, при умеренных возможностях управления эта глубина вполне достаточна для возврата с Луны и при других сравнительно близких к Земле полетах. В случае более дальних космических полетов, при которых скорости возврата на Землю будут гиперболическими, глубины коридоров входа в атмосферу летательного аппарата с $L/D = 0,5$ будут существенно уменьшаться, приближаясь к величине порядка 24 км при $G_{\max} = 10$ и $\bar{V}_E = 2$. Однако было приблизительно подсчитано, что такие коридоры приемлемы для тех точностей, которые будут обеспечены лучшими перспективными системами управления [1].

Общая картина движения и конвективного нагрева при входе в атмосферу с орбитальной скоростью кажется достаточно понятной и подтвержденной значительным объемом теоретических и экспериментальных сведений. Однако с увеличением скорости входа в атмосферу могут играть важную роль и оказывать заметное влияние на нагрев дополнительные явления, которые в настоящее время до конца неясны. К таким явлениям относятся химическая неравновесность

состояния воздуха в пристеночном пограничном слое, вследствие которой при химически не реагирующей поверхности может снижаться конвективный нагрев; существенное тепловое излучение разогретого сжатого слоя, которое под влиянием неравновесности состояния газа может сильно возрасти и значительная степень ионизации воздуха, которая ведет к увеличению количества тепла, передаваемого к поверхности летательного аппарата, а значит, и к усилению его нагрева.

С увеличением скорости входа в атмосферу наиболее заметно растет радиационный нагрев, который действительно может стать основным фактором в проблеме нагрева летательного аппарата, входящего в атмосферу с гиперболической скоростью. В этом случае могут понадобиться формы летательных аппаратов с меньшей степенью затупления носовой части и большего удлинения, чем те, которые получаются из рассмотрения одного только конвективного нагрева. Оказывается также, что предположение о ламинарности режима обтекания планирующих летательных аппаратов, которые входят в атмосферу по траекториям, близким к нижней границе коридора, находится на грани достоверности. Следовательно, нужны экспериментальные исследования переходного и турбулентного режимов обтекания в условиях входа в атмосферу со сверхорбитальной скоростью. Очевидно также, что должно быть больше уделено внимания изучению как движения, так и нагрева в условиях входа в атмосферу с переменными коэффициентами аэродинамических сил. Исследование нагрева и характерных режимов обтекания, реализующихся в процессе торможения космического летательного аппарата в атмосфере, приводит к выводу, что предположение о сплошности окружающей среды при изучении движения и нагрева в значительной степени обосновано при скоростях вплоть до параболических и, вероятно, разумно в гиперболической области.

С другой стороны, предположение о равновесности состояния разогретого газа может оказаться в некоторой степени ошибочным даже при суборбитальных скоростях, а при сверхорбитальных скоростях входа в атмосферу такие явления, как неравновесная диссоциация с сопутствующими ей явлениями, ионизация, излучение, обусловленные неидеальностью газа, могут существенно влиять на теплопередачу. В частности, равновесное и неравновесное излучение, вероятно, становится основным в процессе аэродинамического нагрева при гиперболических скоростях входа в атмосферу; в связи с этим указывается, что для снижения тепловых потоков может оказаться нужной форма летательного аппарата со сравнительно меньшей степенью затупления. Однако требуется значительно больше исследований, чтобы понимать полностью значение этих равновесных и неравновесных явлений при входе в атмосферу со сверхорбитальной скоростью.

В вопросе компоновочных форм космических летательных аппаратов, способных к возврату в атмосферу, имеет значение тот факт, что могут найти свое применение аппараты как с фиксированной, так и с переменной геометрией; однако основные трудности настоящего времени лежат, несомненно, в недостатке подобных аэродинамических данных и данных по нагреву типовых форм летательных аппаратов с соответствующими средствами управления.

Поскольку затрагивается проблема входа в атмосферы других планет, указывается, например, что проблемы движения и нагрева в атмосфере Марса будут существенно менее трудными, чем в атмосфере Земли, тогда как в атмосфере Венеры сложность этих проблем может быть того же порядка, что и в земной атмосфере. Вход в атмосферу Юпитера оказывается почти без исключения в значительной степени более трудным, чем вход в атмосферу Земли. Однако достоверному количественному изучению этих проблем должно предшествовать развитие более лучшего знания этих атмосфер.

Литература

1. Сидняев Н.И. Обзор методик исследования обтекания гиперзвуковым потоком газа тел с разрушающимся покрытием. *Теплофизика и аэромеханика*, 2004, т. 11, № 4, с. 501–522.
2. Сидняев Н.И. Экспериментальное исследование влияния массообмена на аэродинамические характеристики тела вращения сложной формы. *Известия вузов. Авиационная техника*, 2005, № 2, с. 25–30.
3. Сидняев Н.И. Исследование аэродинамических характеристик тел вращения с проницаемым наконечником при обтекании гиперзвуковым потоком. *Прикладная механика и техническая физика*, 2007, т. 48, № 2, с. 12–20.

Investigation of the entrance corridor of descent spacecraft under conditions of high temperature loads in the atmosphere of planets

© N.I. Sidnyaev

Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia
E-mail: sidnyaev@bmstu.ru

Abstract. The report presents studies of the influence of aerodynamic characteristics of a spacecraft on its movement and heating in the atmosphere. It is shown that an increase in aerodynamic quality at small angles of entry into the atmosphere leads to a decrease in overloads, an improvement in maneuverability characteristics and an increase in integral total heat fluxes, while an increase in lift and drag leads to a decrease in heat flux density. Thermal protection is based on the principle of heat flux absorption (regardless of the methods of implementation), the weight costs for it will be the lowest with a minimum value of the integral heat flux,

which leads to the conclusion that the spacecraft should be as small as the layout conditions for the placement of the instrument base and payload will allow. It is postulated that such aircraft are probably suitable for entering the atmosphere with orbital and superorbital speeds. It is argued that if thermal protection is based on the principle of radiating heat from the surface, then relatively large aircraft sizes are needed to limit the surface temperature. Such spacecraft with high lift and (or) capable of having a large drag are applicable at orbital entry speeds into the atmosphere. However, with an increase in the rate of entry into the atmosphere, the densities of heat flows become especially high and cooling by radiation can become practically impracticable, which negatively affects the equipment of control systems.

Keywords: *spacecraft, trajectory, temperature, atmosphere, aerodynamics, drag.*

Самонастраивающиеся системы для автоматического контроля оптимальных параметров

© Н.И. Сидняев, Ю.И. Бутенко, Е.С. Казанцева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: sidnyaev@bmstu.ru, iuliiabutenko2015@yandex.ru, kazan_ls@mail.ru

Ключевые слова: *система, самонастройка, ошибка, расстройство, управление, сигнал, регулирование, наблюдение, статистика.*

В статье излагаются вопросы самонастройки системы управления, способного обеспечить почти оптимальный режим работы даже при наличии изменений входных управляющих воздействий и характеристик помех. Раскрывается практическое и теоретическое значение динамики самонастраивающегося управляемого объекта и задач, поставленных перед системой. Для регулирования структуры системы в устройстве, осуществляющем настройку, постулируются принципы управления с обратной связью. Качество самоприспособления характеризуется величиной «расстройки», которая представлена как отношение среднего увеличения среднеквадратичной ошибки (соответствующего установкам, основанным на конечных статистических данных) к минимальному значению среднеквадратичной ошибки. Показано, что система управления может приспособиться к наиболее существенным изменениям в статистических параметрах процесса за время, превышающее длительность переходного процесса в самой системе при импульсном воздействии, причем величина расстройки незначительна. Трактуются, что быстрого самоприспособления можно достичь при использовании самонастраивающихся систем с распознаванием образа сигналов.

Самонастраивающиеся системы управления состоят в основном из настраиваемых регуляторов, средств настройки этих регуляторов и управляемых объектов. Самонастраивающиеся, или самооптимизирующиеся, системы автоматически видоизменяют свою структуру с целью достижения или поддержания оптимальных характеристик. Самонастраивающаяся система, осуществляющая непрерывный поиск оптимальной структуры методом проб и ошибок в пределах заданного класса возможных структур, во многих случаях дает лучшие характеристики процесса, чем оптимальная система с неизменяемой структурой. Идеальной самонастраивающейся системой была бы система, которая сохраняла бы неизменные динамические и статические характеристики при любых возможных условиях. Удобно оперировать просто с понятиями автоматической оптимизации разомкнутого и замкнутого типа. Процесс самоприспособления по разомкнутой схеме заключается в измерении характеристик входного сигнала или внешних условий, применении этой информации в расчетной формуле или алгоритме и в использовании результатов вычислений для настройки параметров системы. Самоприспособление по замкнутой схеме для оптимизации измеряемого показателя качества системы требует автоматического экспериментирования с настройкой параметров. Для того чтобы пояснить разницу между этими методами, рассмотрим пример статистического прогнозирования (экстраполяции). Выходной сигнал настраиваемого экстраполятора задерживается на время, равное желаемому времени удержания, а затем сравнивается с входным сигналом. Идеальное совпадение этих сигналов свидетельствует о точном прогнозировании, а их разность, разумеется, представляет собой ошибку ε упреждения. Среднеквадратичное значение этой ошибки можно автоматически минимизировать посредством самонастройки, использующей метод проб и ошибок.

При такой форме самоприспособления для прямого автоматического синтеза системы, т. е. выбора оптимальной системы из заранее заданного класса, применяется «обратная связь по качеству настройки». Входной сигнал r , как заданная величина, поступает на рабочее устройство — настраиваемую систему I , которая для получения выходного сигнала u использует истинные входные данные. С целью улучшения показаний измерителя качества настройки оператор осуществляет специальную регулировку с помощью органов управления. Эта регулировка по показаниям измерителя качества выполняется несмотря на то, что органы управления оказывают на качество взаимозависимое влияние и даже тогда, когда оператор (или «задатчик») не имеет сведений о том, что происходит внутри исполнительного устройства или какие функции несет каждый из органов управления. Здесь сигнал обратной связи используется для определения и регулирования структуры системы.

Самоприспособление замкнутого типа обладает тем преимуществом, что его можно применять в случаях, когда аналитический метод синтеза не известен или вообще не существует, например, если вместо среднеквадратичной ошибки используются иные критерии точности или если система является квазистатически нелинейной. В случае частичного отказа самонастраивающаяся система, которая непрерывно контролирует качество работы, будет оптимизировать это качество посредством настройки исправных элементов. Способность к самоприспособлению в значительной степени увеличивает надежность системы.

Линейная импульсная система предназначена для прогнозирования последующих дискрет из непрерывного ряда дискретных входных сигналов. Текущее значение выходной дискреты $g(n)$ представляет собой линейную комбинацию текущего и предшествующих значений входных дискрет. Постоянными в этой комбинации являются параметры h_0 , h_1 , h_2 и т. д., дискреты импульсной характеристики экстраполятора или коэффициенты усиления, соответствующие отводам линии задержки. Выбор этих параметров и составляет настройку экстраполятора, которую можно производить описанным ниже способом. Используем индикаторный измеритель среднеквадратичного значения величины $\varepsilon(n)$ — разности между текущим входным сигналом и задержанным упрежденным сигналом. Этот индикатор будет измерять среднеквадратичную ошибку экстраполяции. Регулировку параметров h_0 , h_1 , h_2 и т. д. следует производить до тех пор, пока показания измерителя не станут минимальными.

Предположим, что импульсная характеристика экстраполятора состоит только из двух импульсов h_1 и h_2 . Тогда можно легко получить выражение для среднеквадратичной ошибки:

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= f(n) - h_0 f(n-1) - h_1 f(n-2), \\ \langle \varepsilon^2 \rangle &= \varphi_{ff}(0)h_0^2 - \varphi_{ff}(0)h_1^2 - 2\varphi_{ff}(1)h_0 - \\ &\quad - 2\varphi_{ff}(1)h_1 - 2\varphi_{ff}(1)h_0h_1 + \varphi_{ff}(0). \end{aligned} \quad (1)$$

Оптимальный m -импульсный экстраполятор можно получить аналитически, приравняв нулю частные производные $\langle \varepsilon^2 \rangle$ по параметрам настройки; этот процесс является дискретным аналогом винеровской оптимизации непрерывных фильтров. Экспериментальное определение оптимальной системы представляет собой не что иное, как нахождение минимума m -мерного параболоида. Можно видеть, что работа обратной связи по качеству эквивалентна поиску экстремальной точки стохастической поверхности (которая в целом

ряде случаев является параболической) методом проб и ошибок. В случае нестационарных случайных входных сигналов эта поверхность непрерывно изменяется по форме, ориентации и положению. С помощью обратной связи по качеству можно осуществлять непрерывное слежение за «дном» этой многомерной поверхности.

Отличительным признаком стационарных цепочек, или максимумов и минимумов, является равенство нулю частных производных по независимым переменным. Обычно величина этих частных производных увеличивается по мере удаления стационарной точки, а для квадратической поверхности это возрастание происходит по линейному закону. Во многих градиентных методах [1] для получения последующих приближений (начиная с начального допущения) производятся пробные изменения независимых переменных, пропорциональные измеренным частным производным. В случае квадратических поверхностей (поверхностей второго порядка) эти методы приводят к затуханию независимой переменной по закону геометрической прогрессии (экспоненциальное затухание) при приближении к стационарной точке.

Поверхность, которую предлагают исследовать, задается уравнением, а первая и вторая производные определяются соотношениями:

$$y = a(x - b)^2 + c, \quad dy/dx = 2a(x - b), \quad d^2y/dx^2 = 2a. \quad (2)$$

Пусть коэффициент пропорциональности между изменением последующего значения и величиной производной будет равен константе k . Эту постоянную можно выбрать так, чтобы с каждым приближением ошибка x уменьшалась в 2 раза, модель процесса последовательных приближений в применении к импульсной системе с обратной связью. Числовое значение исходного приближения вводится только один раз в начале итеративного процесса, в то время как числовые значения опорной, или стационарной, величины b подаются в систему синхронно на каждом цикле. Последовательность числовых значений в точке $x(n)$ начинается с нулевого приближения и продолжается вместе с импульсным процессом, который сходится к стационарной точке по закону геометрической прогрессии точно так же, как и последовательность приближений при исследовании поверхности. Каждое последующее приближение равно сумме предшествующего приближения (которое отводится из точки $x(n)$ через единичную обратную связь) и произведения константы (k) на значение производной. По уравнению (3) производная равна произведению $2ax(n)$ минус константа $2ab$. Поскольку последующее приближение должно играть роль предшествующего приближения на следующем цикле итерации, оно сохраняется в единичном задерживающем элементе (ответвление передаточной функции z , действующее в прямом направлении), предназначенном для подачи сигнала

в узел $x(n)$ в соответствующий момент времени. Из схемы прохождения сигналов в модели следует, что если процесс последовательных приближений устойчив, то равновесие будет достигнуто, когда величина $x(n)$ примет значение b .

Можно преобразовать схему прохождения сигналов и определить передаточную функцию между любыми двумя точками. Полученное в результате характеристическое уравнение имеет вид

$$(2ak - 1)z + 1 = 0. \quad (3)$$

Процесс последовательных приближений устойчив, если выполняется неравенство $0 < k < 1/a$. Чтобы выбрать «коэффициент усиления контура» k , обеспечивающий заданную скорость затухания переходного процесса, в некоторой точке кривой необходимо измерить вторую производную, имеющую величину $2a$.

Всякий раз, когда нужно выбрать приближение для x , производится фактическое измерение производной, тогда как в модели она получается как величина, пропорциональная x . Если иметь дело с поверхностью степени выше второй, то производная была бы не просто пропорциональна x , а равнялась бы некоторому полиному от x . Модель процесса можно составить и для этого случая, но она не будет линейной, и переходные процессы будут затухать не по геометрической прогрессии. Тем не менее и в этом случае процесс последовательных приближений будет обеспечивать нахождение стационарной точки. В ее окрестности переходные процессы будут затухать по геометрической прогрессии, так как для любой непрерывной поверхности в этой области преобладающими становятся члены второго и более низких порядков разложения в ряд Тейлора относительно стационарной точки. По этой и по некоторым другим причинам особое внимание уделяется исследованию именно параболических поверхностей.

Первая и вторая производные являются точными для параболы и приближенными для кривых более высоких степеней:

$$\begin{aligned} dy / dx_{xB} &= (1 / 2\delta)(C - A), \\ d^2 y / dx^2_{xB} &= (1 / \delta^2)(C - 2B + A). \end{aligned} \quad (4)$$

Каждая из составляющих вектора приращения является линейной комбинацией локальных частных производных. Результирующие переходные процессы соответствуют многомерным геометрическим прогрессиям. Исследуемая поверхность задается уравнением с соответствующими частными производными:

$$y = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1 + dx_2 + ex_1x_2 + f, \quad (5)$$

$$\delta y / \delta x_1 = 2ax_1 + c + ex_2; \quad \delta y / \delta x_2 = 2bx_2 + d + ex_1;$$

$$\delta^2 y / \delta x_1^2 = 2a; \quad \delta^2 y / \delta x_1 \delta x_2 = e; \quad \delta^2 y / \delta x_2^2 = 2b.$$

Двухмерная схема совершенно аналогична соответствующей одномерной схеме. Ответвление прямого действия представляет просто задержку без какой-либо перекрестной связи между координатами, а ветвь единичной обратной связи является единичным передаточным звеном без запаздывания и перекрестных связей. Первые частные производные образуются, согласно уравнению (5), как линейная комбинация постоянных c и d с вектором x , предварительно умноженным на матрицу вторых частных производных. Для многомерных поверхностей существует столько собственных частот (скоростей затухания), сколько имеется независимых координат. В данном случае многомерный коэффициент усиления контура определяется выбором матрицы постоянных k . Среди наиболее эффективных методов поиска экстремума поверхности можно назвать метод быстрого спуска, метод Ньютона и релаксационный метод Саусвелла.

Эти методы можно изобразить в виде моделей с обратной связью. Они различаются главным образом выбором коэффициентов k в матрице обратной связи. Метод быстрого спуска требует, чтобы векторные изменения при регулировке производились последовательно в направлении локального градиента и чтобы их величины были пропорциональны величине градиента. В этом случае матрица коэффициентов k будет диагональной с равными элементами главной диагонали. При использовании этого метода переходные процессы настройки вносят перекрестную зависимость между координатами.

Метод Ньютона основан на одношаговом процессе, в котором матрица коэффициентов k равна обратной матрице вторых частных производных. Многомерные переходные процессы затухают полностью за один шаг. В модифицированном методе Ньютона используется та же матрица коэффициентов k , но приведенная к другому масштабу с помощью множителя, меньшего единицы. В этом случае переходные процессы затухают по геометрической прогрессии с одной постоянной времени. Процесс последовательных приближений направлен в многомерном пространстве по прямой линии, идущей от точки начального приближения к стационарной точке. При этом перекрестная зависимость между переходными процессами по различным координатам не наблюдается. В методе Саусвелла требуется производить изменения настройки таким образом, чтобы минимизировать y при каждом последовательном шаге. В двухмерной модели с обратной связью $k_{11} = 1/2a$ и $k_{22} = 1/2b$.

Для представления характеристик системы при изменении по времени каждой из составляющих в схеме необходимо предусмотреть выключатели, которые замыкаются попеременно. Несмотря на то, что переходные процессы имеют одну и ту же постоянную времени, они порождают перекрестную взаимосвязь между параметрами настройки. Главное ограничение скорости самонастройки происходит от статистических требований к количеству проб при измерении характеристик внешних условий. Измерение величины среднеквадратичной ошибки вообще осуществляется с помехами, и эти помехи при реализации процесса поиска экстремума поверхности распространяются на параметры настройки и приводят к потерям в показателе качества системы. Исследование процесс с обратной связью по качеству обнаруживает непосредственную зависимость между качеством системы и скоростью самоприспособления.

Вследствие того, что при каждом изменении входной процесс не может длиться бесконечно долго, в самонастраивающуюся систему с обратной связью будут вноситься шумы. Эти шумы оказывают на качество настройки следующее влияние: чем медленнее происходит самоприспособление, тем оно будет точнее, и чем быстрее осуществляется самоприспособление, тем больше помех будет накладываться на уставки. Положим, что самонастраивающаяся модель имеет только одну уставку. Для такой простейшей системы график зависимости среднеквадратичной ошибки от h_0 будет параболой. На каждом цикле настройки производная $y = \langle e^2 \rangle$ по $x = h_0$ должна измеряться в соответствии со схемой. Шумы, возникающие при регулировке системы, приводят к ухудшению установившегося значения качества.

Полезно определить безразмерный параметр M (расстройку) как отношение среднего увеличения среднеквадратичной ошибки к минимальной среднеквадратичной ошибке. Этот параметр является мерой того, как система выполнила настройку после затухания переходных процессов по сравнению с настройкой фиксированной оптимальной системы. Согласно, $M = (\langle y \rangle - c) / c$. Из рассмотрения уравнения (2) следует, что величина $(\langle y \rangle - c)$, т. е. среднее увеличение y , равна произведению дисперсии x на постоянную a . Дисперсия является результатом шумов, возникающих при измерении производной и распространяющихся в системе при реализации итеративного процесса поиска экстремума поверхности.

Если предположить, что для соседних циклов приближения шумы измерения производной являются статистически независимыми, дисперсия x будет равна дисперсии шумов производной, умноженной на коэффициент $1/4a^2\tau$, который равен завышенному приближенному значению суммы квадратов импульсов импульсной характеристики участка системы от точки ввода шума до точки регулировки x . Посто-

янная времени τ определена таким образом, что если $\tau=1$, то переходные процессы настройки на каждом цикле приближения затухают в $1/\varepsilon$ раз. Окончательный результат этого вывода можно записать так, что дисперсия измерений производной примет вид ac/NP . Число измерений на один цикл в прямом или обратном направлении обозначено через N , а возмущение — через P . Выражение дисперсии измерений производной получена при следующих допущениях: уставка x находится в окрестности минимума, сигнал ошибки упреждения имеет нормальный закон распределения, однако выражение для дисперсии измерений производной совершенно не зависит от вида функции плотности распределения и дискретные ошибки являются некоррелированными. Выражение для расстройки можно записать так:

$$M = 1 / 8N\tau P.$$

Если характер физического процесса допускает повторные измерения, т. е. если при измерениях в прямом и в обратном направлениях можно использовать одно и то же приращение входных данных (принимая меры, чтобы начальные условия оставались прежними), то оказывается, что дисперсия измерений производной не зависит от амплитуды возмущений. Можно показать, что при тех же допущениях, которые были сделаны ранее, выражение для дисперсии измерений производной будет равна $4ac/N$. В этом случае величина N равна общему числу дискретных значений ошибки на цикл.

В соответствии с этим выражение для расстройки запишется так: $M = 1 / 2N\tau$. Произведение $N\tau$ зависит от общего числа дискретных сигналов, проходящих через систему в процессе самонастройки при ступенчатом возмущении статистических характеристик входной функции. Отметим, что один и тот же эффект может быть достигнут при использовании на одном цикле большого числа дискретных сигналов (N велико) при небольшом числе циклов с большим шагом самонастройки (τ мало) и при использовании на одном цикле небольшого числа дискретных сигналов (N мало), когда приближение к оптимуму осуществляется небольшими шагами (τ велико). Оценим, при каких значениях итерационного параметра ошибка минимальна:

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n (1 + \tau f'(\xi)), \quad |\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| \max_{\xi} |1 + \tau f'(\xi)| \leq |\varepsilon^0| \left(\max_{\xi} |1 + \tau f'(\xi)| \right)^{k+1}.$$

Пусть $0 \leq m \leq |f'(\xi)| \leq M$, тогда

$$\max_{\xi} |1 + \tau f'(\xi)| \leq \max(|1 + \tau f'(\xi)|, |1 - \tau M|).$$

Необходимо одновременно требовать ограничение максимума модуля с двух сторон. Оно достигается в точке пересечения прямых: $1 + \tau m = -(1 - \tau M)$, $\tau_{opt} = 2 / (m + M)$.

Оптимальное значение итерационного параметра, при котором ошибка минимальна

$$|\varepsilon_{\min}^{n+1}| \leq \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^{n+1} |\varepsilon^0|.$$

Назовем «постоянной времени самонастройки» число дискрет, проходящих за интервал времени, равный постоянной времени переходного процесса самонастройки, и обозначим ее через Γ . Если не применяется повторение измерений, то $\Gamma = 2N\tau$; если же оно применяется, то $\Gamma = N\tau$.

Расстройка является мерой эффективности самоприспособления, но по ней нельзя судить и о величине минимальной среднеквадратичной ошибки, ни об эффективности выбора параметра настройки (т. е. достаточно ли выбранных параметров и являются ли они наилучшими). Эксперименты на моделирующих установках показали, что измеряемые значения расстройки редко отличаются от расчетных величин больше чем на 20...30 %.

Полученные аналитические выражения расстройки являются совершенно точными в применении к тем условиям, для которых они были выведены. Кроме того, эти формулы могут служить для приближенных оценок в тех случаях, когда используются критерии качества, отличные от минимальной среднеквадратичной ошибки, и когда исполнительное устройство является нелинейным.

Знаковым параметром является зависимость между скоростью и качеством самонастройки. Предположим, в экстраполяторе имеется пять регулируемых отводов линии задержки. Допустим, что возможны повторные измерения и что допускается 10%-ная расстройка. Необходимо ответить на вопрос: как быстро такая система выполнит самонастройку? Значение постоянной времени самонастройки можно получить по формуле, обобщенной на m измерений.

Если бы экстраполятор был «подключен» к реальному временному процессу, повторение измерений было бы невозможным. К тому же потери за счет смещения настройки при измерении составляющих градиента, в точности равные значению возмущения, будут добавляться к величине расстройки. Поэтому с учетом уравнения (5) расстройка выражается так:

$$M = m^2 / 4\Gamma = 5 / 2\Gamma P + P. \quad (6)$$

Для любого заданного значения M оптимальный выбор возмущения P (минимизирующего Γ) требует, чтобы выполнялись соотношения

$$m^2 / 4\Gamma P = P, \quad M = m / \Gamma^{0,5}. \quad (7)$$

При пяти регулируемых установках и допустимой 10%-ной расстройке имеем $0,1 = 5 / \Gamma^{0,5}$. Следовательно, $\Gamma = 2500$ дискрет. Схема с повторением измерений всегда более эффективна, чем схема без повторения; для рассмотренного примера ее эффективность выше в 100 раз. Чтобы воспользоваться преимуществами метода повторения измерений, во многих случаях к рабочим системам можно подключать нерабочие вспомогательные системы и производить измерения градиента путем повторения измерений во вспомогательных системах. Таким образом, поисковые смещения уставок в рабочей системе становятся необязательными. В системе, изображенной на рис. 9, можно получить увеличение скорости самонастройки за счет дополнительного оборудования. Одна из возникающих при этом проблем состоит в том, что вспомогательное устройство должно обладать достаточной гибкостью для сочетания с рабочей установкой. Большую пользу могут оказать сведения о структуре рабочей установки.

Система функционирует следующим образом. Весовые коэффициенты h_1, h_2, \dots управляющего устройства вспомогательной системы устанавливаются равными соответствующим коэффициентам основного регулятора. Затем весовые коэффициенты k_1, k_2, \dots модели управляемого объекта во вспомогательной системе настраиваются таким образом, чтобы минимизировалась среднеквадратичная величина разности между выходными сигналами основной и вспомогательной систем. После этого в течение некоторого времени выдерживаются фиксированные значения коэффициентов k_1, k_2, \dots , а уставки h_1, h_2, \dots вспомогательного регулятора варьируются с целью измерения градиента поверхности качества. Затем в процессе самонастройки принимается решение изменить уставки основного регулятора в соответствии с измерениями градиента во вспомогательной системе. Поскольку в реальных условиях управления происходит непрерывное изменение как характеристик объекта, так и характеристик внешнего входного воздействия, оба процесса самонастройки будут производиться непрерывно — сначала один, потом другой — на основе повторного использования одних и тех же данных измерений.

В заключение отметим, что в работе решены проблемы по разработке и исследованию адаптивных регуляторов, построенных на базе интеллектуальных технологий. Применение таких регуляторов представляется весьма перспективным в структуре интеллектуальных систем управления сложными динамическими объектами, работающими в условиях изменения их характеристик и параметров.

При существенных изменениях динамических свойств и параметров объектов управления адаптивные или самонастраивающиеся системы управления традиционной архитектуры не всегда могут

обеспечить системе желаемые характеристики. Возможность и эффективность использования предлагаемого принципа построения самонастраивающихся систем управления динамическими объектами представлены на примере системы с прямой обратной связью.

Литература

Сидняев Н.И., Бутенко Ю.И., Болотова Е.Е. Логическая модель требований информационно-системной надежности для баз знаний интеллектуальных систем. *Программная инженерия*, 2020, № 4, с. 195–204. DOI: 10.17587/prin.11.195-204

Self-adjusting systems for automatic control of optimal parameters

© N.I. Sidnyaev, Y.I. Butenko, E.S. Kazantseva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: sidnyaev@bmstu.ru, iuliiabutenko2015@yandex.ru, kasan_ls@mail.ru

Abstract. The paper presents the problems of self-tuning of control system capable of providing almost optimal mode of operation even in the presence of changes in the input control actions and characteristics of interference. The practical and theoretical importance of dynamics of self-adjusting controllable object and the tasks set before the system is revealed. The principles of feedback control are postulated to regulate the structure of the system in the tuning device. The quality of self-adjustment is characterized by the magnitude of "tuning", which is represented as the ratio of the average increase in the mean square error (corresponding to the setpoints based on finite statistical data) to the minimum value of the mean square error. It is shown that the control system can adjust to the most significant changes in the statistical parameters of the process for a time exceeding the duration of the transient process in the system itself under pulse action, and the magnitude of the adjustment is insignificant. It is argued that rapid self-adaptation can be achieved using self-adaptive systems with signal image recognition.

Keywords: *system, self-tuning, error, disorder, control, signal, regulation, observation, statistics.*

References

Sidnyaev N.I., Butenko Y.I., Bolotova E.E. Logical model of information- system reliability requirements for knowledge bases of intelligent systems. *Software Engineering*, 2020, no. 4, pp. 195–204. DOI: 10.17587/prin.11.195-204

О проблеме роботизации механической очистки проводов ЛЭП от снега и льда

© С.Н. Саяпин^{1,2}

¹Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: S.Sayarin@rambler.ru

Аннотация. Рассмотрена проблема механической очистки проводов ЛЭП от снега и льда. Проведен анализ известных механических методов очистки, на основе которого показана актуальность и перспективы развития роботизации подобных процессов. Представлена новая концепция адаптивного мобильного пространственного параллельного робота-манипулятора, позволяющая роботизировать процесс механической очистки проводов ЛЭП от снега и льда.

Ключевые слова: ЛЭП, провода, борьба с гололедом, роботизация, механическая очистка проводов ЛЭП от снега и льда.

В настоящее время для борьбы с обледенением проводов ЛЭП чаще всего применяют механические способы, при которых ледяное или снежное покрытие сбивают вручную с помощью шестов с земли или с использованием подъемных механизмов [1]. Однако такой способ малопроизводителен и трудоемкий из-за привлечения большого количества рабочих, а также не всегда реализуем в труднодоступных местах из-за естественных (гористая или заболоченная местность, реки и т. п.) или искусственных (городские или промышленные здания и сооружения) препятствий. В этой связи в настоящее время активно ведутся работы по созданию робототехнических систем, способных перемещаться по натянутым проводам ЛЭП и осуществлять их механическую очистку от ледяного или снежного покрытия. Однако подобные робототехнические системы не способны перемещаться по висящим оборванным проводам и удалять с них лед. Также проблемой является удаление ледяных покрытий с большими поперечными сечениями (300 мм и более) [2], а также невозможность адаптации роботизированных устройств к сильным изменениям их размеров по длине провода ЛЭП, которые могут варьировать от десятков до сотен миллиметров.

Для устранения указанных недостатков в ИМАШ РАН разработана новая концепция адаптивного мобильного пространственного робота-манипулятора (АМПРМ, руководитель — главный научный сотрудник ИМАШ РАН проф. Саяпин С.Н.) для обслуживания и ремонта ЛЭП [3, 4].

АМПРМ выполнен в виде октаэдрального модуля (ОМ) 1, с вершинами 2 (А, В, С, D, E, F) ОМ 1 (рис. 1, а). При этом тыльная грань

АВС ОМ 1 расположена с противоположной стороны от направления его движения, а параллельная ей фронтальная грань DEF расположена со стороны направления движения. Тыльная и фронтальная грани выполнены с возможностью соединения через них с подобными модулями. Каждый из стержней снабжен ЛП 3 с осевыми датчиками силы (ОДС) 4, относительного перемещения (ОДОП) 5 и относительной скорости (ОДОС) 6 и выполнен с возможностью изменения своей длины по управляющим командам на его ЛП 3 от СУ 7 (рис. 1, б). Концы ЛП 3 всех стержней боковых граней ОМ 1 соединены с помощью сферических или эквивалентных им шарниров в шести вершинах 2 ОМ 1 по два в каждой.

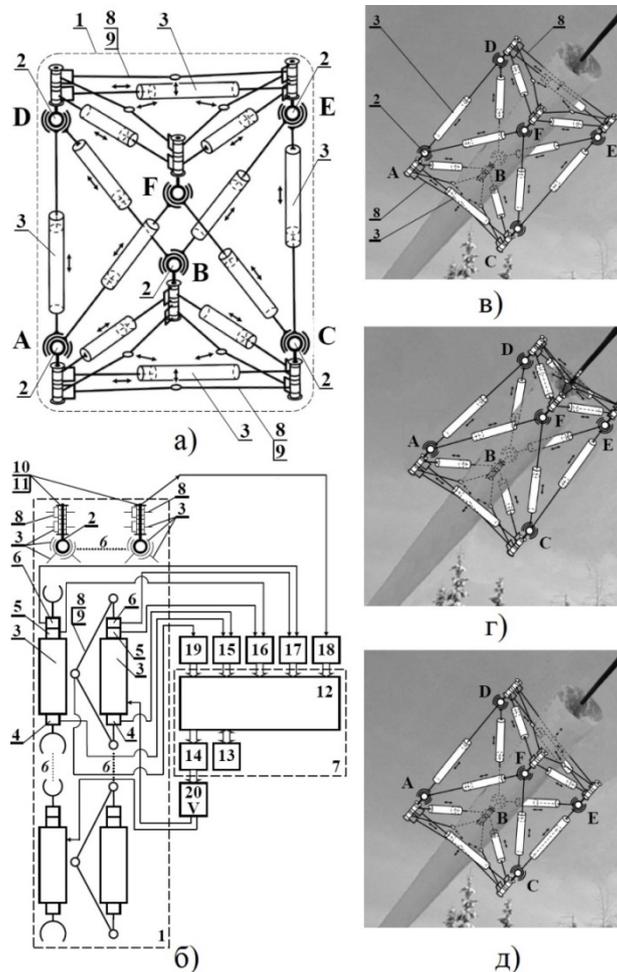


Рис. 1. Кинематическая (а) и структурная (б) схемы АМПРМ; схема удаления ледяного покрытия с провода ЛЭП фронтальной гранью DEF (в); схема установки фронтальной DEF и тыльной АВС граней перпендикулярно обледенелому проводу ЛЭП (г); схема установки фронтальной грани DEF под острым углом к обледенелому проводу ЛЭП (д)

Концы ЛП 3 тыльной и фронтальной граней ОМ 1 и внешние концы соответствующих радиальных упоров в виде двузвенных ударно-обжимных устройств (ДУОУ) 8 с датчиками температуры 9 и изолированными электрическим контактами, установленными на контактных поверхностях (на рис. 1 условно не показаны) соединены с помощью цилиндрических шарниров в вершинах 2. Внутренние концы ДУОУ 8 соединены цилиндрическими шарнирами с образованием адаптивных схватов тыльной и фронтальной граней (рис. 1). При необходимости каждая из вершин 2 может быть выполнена с возможностью установки на ней дополнительных мониторинговых и манипуляционных устройств (на рис. условно не показаны). Вершины 2 ОМ 1 снабжены совмещенными датчиками пространственного положения 10 и ускорений 11, которые выполнены в виде трехосных блоков гироскопов-акселерометров и служат для оперативного контроля пространственного положения каждой из вершин 2 и виброускорений вдоль каждой из осей стержней с ЛП 3. СУ 7 включает нейрокompьютер 12, ПАО 13 и ЦАП 14. Входы СУ 7 через шины данных АЦП подключены соответственно к выходам АЦП 15 ОДС 4, АЦП 16 ОДОП 5, АЦП 17 ОДОС 6; АЦП 18 совмещенных датчиков пространственного положения и ускорений 10 и 11; АЦП 19 датчиков температуры 9, а выходы СУ 7 через шины выходных данных подключены к соответствующим входам программно-алгоритмического обеспечения 13 и последовательно соединенных ЦАП 14, усилителей мощности 20 и исполнительных органов (ЛП 3). При этом СУ 7 и система энергопитания (на рис. 1 условно не показана) могут быть выполнены как автономного, так и дистанционного исполнения. Внутренние цилиндрические шарниры ДУОУ 8 с датчиками температуры 9 и электрически изолированными контактами (на рисунках не показаны) служат для передачи сжимающих усилий и вибрационных воздействий от вершин 2 к наружной охватываемой поверхности обледенелого или очищенного провода ЛЭП. Оперативный контроль передаваемых усилий от ЛП 3 через вершины 2 к контактируемым поверхностям осуществляют с помощью ОДС 4. Датчики температуры 9 позволяют осуществлять контроль температуры на поверхности обледенелого или очищенного провода ЛЭП, а изолированные друг от друга электрические контакты (на рис. 1 условно не показаны) — измерять электрическое сопротивление и разность потенциалов между точками контакта. Во избежание обрыва обледенелого провода ЛЭП от действия веса ОМ 1 и других нагрузок провод ЛЭП, перед установкой ОМ 1 в СУ 7 вводят его массу, парусность, скорость ветра, геометрические параметры провода и ледяного или снежного покрытия, межопорную длину провода и его допустимую нагрузку. После обработки введенных данных, СУ 7 определяет безопасное место установки ОМ 1. В случае предельных значений нагрузок осуществляют ча-

стичную очистку провода вручную и после выдачи разрешения от системы управления осуществляют установку ОМ 1 на обледенелый провод ЛЭП. При этом производят расстыковку одного из концов трех смежных стержней тыльной, фронтальной и боковой граней, а также связанных с ними ДУОУ 8 с последующим восстановлением соединений после установки ОМ 1 на обледенелом проводе. При установке ОМ 1 на оборванный конец обледенелого провода ЛЭП, проведение указанных выше операций не требуется. После установки ОМ 1 на обледенелый провод с помощью линейных приводов 3 и СУ 7 осуществляют уменьшение длин ребер тыльной и фронтальной граней. В результате происходят радиальные перемещения внутренних шарниров ДУОУ 8 к поверхности обледенелого или очищенного провода ЛЭП и последующее его обжатие и фиксация с требуемым усилием, определяемым по показаниям ОДС 4. По показаниям ОДОП 5 устанавливаются и запоминаются пространственные координаты вершин 2 относительно базовой системы координат. Управление исполнительными органами ОМ 1 (ЛП 3) осуществляется по управляющим командам от СУ 7, которые формируются по показаниям ОДС 4, ОДОП 5 и ОДОС 6, совмещенных датчиков пространственного положения и ускорений 10, 11. При этом сигналы от датчиков поступают на входы АЦП 15, 16, 17 и 18 соответственно и через шину данных в нейροкомпьютер 12 системы управления 7. После обработки в реальном масштабе времени данных с использованием соответствующего программно-алгоритмического обеспечения 13, формируют управляющие команды, которые через ЦАП 14 и усилители мощности 20 поступают на ЛП 3 и ОМ 1 изменяет свою геометрическую форму (трансформируется).

Предлагаемый АМПРМ позволит автоматизировать и механизировать процесс проведения монтажных, ремонтно-восстановительных, диагностических и профилактических комплексных работ, проводимых при строительстве и эксплуатации ЛЭП и сократить время, затрачиваемое на очистку проводов ЛЭП от ледяного и снежного покрытия. Также предлагаемое устройство может быть использовано для проведения автономных работ, а при подключении СУ 7 к сети Интернет может быть организована онлайн-связь устройства и оператора, находящегося на безопасном расстоянии от ЛЭП. Кроме того, при соответствующей электроизоляции, ОМ 1 способен предохранять от соударения очищаемого провода с соседними проводами, находящимися под напряжением, в случае ветрового воздействия или «пляски» провода после обрушения снежного или ледяного покрова.

Литература

1. Никитина И.Э., Абдурахманов Н.Х., Никитина С.А. Способы удаления льда с проводов линий электропередачи. *Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело»*, 2015, № 3, с. 794–823.

2. Каганов В.И. Борьба с гололедом в линиях электропередачи с помощью электромагнитной волны. *ЭЛЕКТРО*, 2010, № 5, с. 41–45.
3. Саяпин С.Н. *Адаптивный мобильный пространственный робот-манипулятор для обслуживания ЛЭП и способ обслуживания посредством адаптивного мобильного пространственного робота-манипулятора*. Патент № 2692147 Российская Федерация, опубл. 21.06.2019, бюл. № 18.
4. Саяпин С.Н. Анализ и перспективы развития роботизированной механической очистки проводов ЛЭП от снега и льда. *Электрические станции*, 2021, № 2, с. 21–35.

On the problem of robotization of mechanical cleaning of power line wires from snow and ice

© S.N. Sayapin^{1,2}

¹Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences (IMASH RAN), Moscow, Russia

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: S.Sayapin@rambler.ru

Abstract. The problem of mechanical cleaning of power line wires from snow and ice is considered. The analysis of known mechanical cleaning methods is carried out, on the basis of which the relevance and prospects for the development of robotization of such processes are shown. A new concept of an adaptive mobile spatial parallel robot manipulator is presented, which allows to robotize the process of mechanical cleaning of power line wires from snow and ice.

Keywords: *power lines, wires, fight against ice, robotization, mechanical cleaning of power line wires from snow and ice.*

References

1. Nikitina I.E., Abdrakhmanov N.Kh., Nikitina S.A. Ways of Removal of Ice from Wires of Power Lines [in Russ.]. *E-Science Journal "Neftegazovoe delo"*, 2015, no. 3, pp. 794–823.
2. Kaganov V.I. Borba s gololeodom v liniyakh elektroperedach s pomoschyu elektromagnitnoy volny [in Russ.]. *ELECTRO*, 2010, no. 5, pp. 41–45.
3. Sayapin S.N. *Adaptive mobile spatial robot manipulator for the maintenance of power lines and the method of maintenance by means of an adaptive mobile spatial robot manipulator*. RF Patent No. 2692147, published June 21, 2019; Byul. no. 18.
4. Sayapin S.N. Analysis and prospects for the development of robotic mechanical cleaning of power line wires from snow and ice [in Russ.]. *Elektricheskie stancii*, 2021, no. 2, pp. 21–35.

Численно-аналитический подход к «дизайну» волоконистых композитов

© С.А. Берестова*, Е.М. Романовская, Д.А. Мамылин

УрФУ им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

*E-mail (докладчика): s.a.berestova@urfu.ru

Аннотация. Рассмотрен «дизайн» материалов волоконистых композитов. Варьировались способы армирования, материал матрицы и волокон, относительное объемное содержание волокон для формирования наперед-заданного набора эффективных свойств. Анизотропия свойств проиллюстрирована пространственными векторными моделями упругих свойств композита.

В последние годы актуально стремление к разработке материалов, соответствующих конкретным целям [1, 2]. Достаточно сложная проблема проектирования таких материалов с точки зрения технологического процесса не ставится. Широкое применение пространственно-армированных композитов в различных областях техники требует разработки численно-аналитических методов «дизайна» и прогнозирования их свойств. Численно-аналитический подход к «дизайну» волоконистых композитов, предлагаемый в данной работе, позволяет исследовать анизотропию упругих свойств композита на стадии проектирования и выбирать подходящую схему армирования, материал матрицы и волокон, относительно объемное содержание волокон в матрице. Предложена математическая модель формального расчета эффективных свойств композита по свойствам матрицы, волокон и параметрам армирования, показывающим геометрическое распределение волокон в элементарном объеме. Подобраны структуры композита, ряд оптимальных параметров для формирования наперед заданного набора усредненных по объему материала упругих свойств. Для осуществления выбора физически реализуемых структур предлагается ряд материалов, обладающих одним и тем же набором эффективных свойств.

Ключевые слова: проектирование, композиционный материал, армирование волокнами, эффективные свойства.

Литература

1. Lobos M., Bohlke T. *Int. J. Mech. Mater Des.*, 2015, vol. 11, pp. 59–78.
2. Adams B.L., Kalidindi S.R., Fullwood D.T. *Microstructure Sensitive Design for Performance Optimization*. Butterworth-Heinemann, Waltham, MA, 2013, 86 p.

Numerical-analytical "design" of fiber composites

© S.A. Berestova*, E.M. Romanovskaya, D.A. Mamylin

Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia

*E-mail (speaker): s.a.berestova@urfu.ru

Abstract. The "design" of fibrous composites materials is considered. The methods of reinforcement, the material of the matrix and fibers, the relative volume content of fibers for the formation of a predetermined effective properties varied. The anisotropy of the properties is illustrated by spatial vector models of the elastic properties for the composite.

Keywords: *design, composite material, fiber reinforcement, effective properties.*

References

1. Lobos M., Bohlke T. *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 2015, vol. 11, pp. 59–78.
2. Adams B.L., Kalidindi S.R., Fullwood D.T. *Microstructure Sensitive Design for Performance Optimization*. Butterworth-Heinemann, Waltham, MA, 2013, 86 p.

Повышение эффективности технологических процессов на основе современных методов моделирования и оптимизации

© И.Г. Благовещенский, М.Ю. Музыка¹, В.Г. Благовещенский¹,
В.В. Головин², П.М. Шкапов³

¹Московский государственный университет пищевых производств (МГУПП),
Москва, Россия

²Управляющая компания «Объединенные кондитеры», Москва, Россия

³МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: mmb@mgupp.ru

Аннотация. В статье представлены общие подходы к моделированию технологических процессов смешивания вязких компонентов, рассмотрены этапы создания математических моделей и компьютерное моделирование этих технологических процессов. Приведены примеры работ, выполняемых Московским государственным университетом пищевых производств в данном направлении. Изложены результаты исследований в области моделирования технологических процессов смешивания вязких компонентов. Показано влияние особенностей реализации процессов на качественные показатели выходных параметров и приведен анализ технологических возможностей их улучшения. Особое внимание уделено моделированию условий ведения процессов смешивания с их последующей оптимизацией, а также принятию решений по управлению. Приведенный анализ

позволит не только максимально снизить потери на производстве, но и повысить эффективность ведения технологических процессов.

Ключевые слова: *информационные технологии, методы моделирования, оптимальное управление, процессы смешивания вязких компонентов.*

Введение. Основу современных производств составляют технологические системы, имеющие сложную структурно-функциональную организацию. Как правило, объектом управления в этих системах являются конкретные технологические процессы. Если абстрагироваться от конкретного типа и вида технологического процесса, то любой технологический процесс можно представить в виде множества действий, условий и связей. Любое производство состоит из стадий, на каждой из которых производится определенное воздействие на материальные потоки и превращение энергии. Последовательность стадий обычно описывается с помощью технологической схемы, каждый элемент которой соответствует определенному технологическому процессу. Соединения между элементами технологической схемы отражают материальные и энергетические потоки, протекающие на линии производства [1]. Любое производство характеризуется алгоритмом функционирования, направленным на достижение определенной цели.

С позиций системного подхода технологический процесс — это сложная динамическая система, в рамках которой взаимодействуют: оборудование, средства контроля и управления, вспомогательные и транспортные устройства, обрабатывающий инструмент или среды, находящиеся в постоянном движении и изменении, объекты производства, люди, осуществляющие процесс и управляющие им. С целью анализа сложный технологический процесс можно разделить на подсистемы различных уровней. Декомпозиция системы на подсистемы позволяет вскрыть иерархию структуры и рассматривать систему на разных уровнях ее детализации.

Работа не с самим процессом, а с его моделью во многих случаях дает возможность относительно быстро и без существенных материальных затрат исследовать его свойства и поведение в любых ситуациях. Математическое моделирование в данной области — это процесс создания абстрактной модели в виде формального описания объекта исследований на «математическом языке» и оперирование этой моделью с целью получения необходимых сведений о реальном или проектируемом технологическом объекте. В зависимости от уровня знаний об объекте исследований построение моделей может осуществляться на основе различных принципов и методик: фундаментальных законов природы, вариационных методов, аналогий, иерархических цепочек и др. Довольно часто построение модели,

позволяющей получить практически значимые результаты, требует комплексного использования различных методов моделирования. Обязательным этапом моделирования является оценка адекватности модели — соответствие сконструированного формального описания реальному объекту и сформулированным предположениям с учетом целей исследования. Модель изучается всеми доступными методами в интересах достижения поставленной цели.

В теории управления создаются и применяются математические модели двух основных типов. Первый тип моделей — аналитические модели. Эти модели не требуют, не используют и не отображают каких-либо гипотез о физических процессах, в которых эти данные получены. Второй тип — системные модели. Это математические модели, которые строятся в основном на базе физических законов и гипотез о том, как система структурирована и, возможно, о том, как она функционирует [2]. В классическом понимании к моделям данных относятся все модели математической статистики. Однако именно системные модели допускают возможность работы в разнообразных системах реального времени (операторские, инженерные, биомедицинские интерфейсы, разнообразные системы диагностики и т. д.). Поэтому можно ожидать, что именно системные модели составят ядро современного этапа в развитии математического моделирования, хотя в настоящее время во многих приложениях используются и типичные модели данных [3].

Каждый из двух отмеченных выше типов моделей имеет свои традиционные области применения. В практике управления отдельными технологическими процессами широко используются простые по структуре статистические модели, которые достаточно хорошо отражают истинное поведение объекта в окрестности отдельных режимов работы. В задачах управления, где цель управления часто состоит в компенсации возмущающих воздействий, уводящих процесс от желаемой рабочей точки, это вполне допустимо [4]. Во многих задачах принципиально применимы только системные модели.

Одной из основных целей математического моделирования технологических систем является прогнозирование на этапе их проектирования основных характеристик и особенностей их функционирования в реальных условиях промышленного производства. Отсюда вытекают требования к достоверности полученных результатов, поскольку ошибки чреваты серьезными убытками или аварийными ситуациями. Практически всем технологиям свойственны экстремальные режимы функционирования. Затраты на исправление выявленной ошибки возрастают на порядок, если эта ошибка выявлена не на этапе проектирования, а на этапе создания экспериментального образца, и еще на порядок — при серийном выпуске. Поэтому современные принципы обеспечения качества продукции предусматривают проведение основ-

ных действий по достижению качества — 75 % на начальных этапах жизненного цикла.

Современное понимание проблемы адекватности предполагает проверку выполнения следующих критериев:

- непротиворечивость — дает ли модель результаты, которые не противоречат логике при изменении величин важнейших параметров;
- чувствительность — соответствуют ли относительные изменения выходных параметров модели небольшим изменениям ее входных параметров;
- реалистичность — соответствует ли модель частным случаям, для которых имеются экспериментальные данные.

Именно критерий реалистичности рассматривается в большинстве случаев в качестве основного. На его основе построены современные процедуры идентификации параметров математических моделей, после чего только и выполняется собственно моделирование [5]. При определении параметров модели необходимо учитывать технологические характеристики оборудования и экспериментальные данные о работе объекта. Для обобщения результатов привлекаются методы теории планирования эксперимента. Таким образом, стадия анализа технологического процесса позволяет определить основные элементы математической модели и структуру процесса моделирования [6].

Вплоть до недавнего времени математические модели использовались в практике управления только как источник входных данных для систем управления. Однако развитие техники (прежде всего появление компьютерных технологий) во многих дисциплинарных областях сделало возможным непосредственное включение моделей в работающие системы. Информационные технологии позволяют автоматизировать технологический процесс. В результате автоматизации технологического процесса создается автоматизированная система управления технологическим процессом (АСУ ТП) со встроенной математической моделью, позволяющей получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности решения этой задачи.

В настоящее время компьютерная техника широко используется специалистами различных отраслей науки и техники для проведения многовариантных расчетов, анализа производства, математического моделирования и выбора оптимальных технологических решений [7]. Имитационные эксперименты с моделями объектов нередко позволяют изучать объекты в полноте, недоступной чисто теоретическим подходам. При этом выбор вычислительных алгоритмов — важный этап работы с моделью, а разработка программ завершает создание рабочего инструмента исследователя. Основой успешной методики

компьютерного моделирования должна быть тщательная проработка моделей. Целесообразно обеспечить взаимодействие между процессом модификации модели и процессом анализа данных, генерируемых реальным объектом.

Исследования. Отличительной особенностью математического моделирования как метода исследования является возможность изучения, прогнозирования и последующая оптимизация процессов и объектов, физический эксперимент с которыми весьма затруднителен, опасен или не выгоден [8]. Постановка оптимизационной задачи включает определение критерия оптимальности (или целевую функцию) — величину, зависящую от искомого решения и принимающую на нем экстремальное значение.

Основные этапы разработки математической модели процесса смешивания вязких компонентов включают в себя следующие стадии: формулировка проблемы; описание технологического процесса; постановка целей и задач моделирования; составление параметрической модели, включающей только значимые факторы; составление плана и проведение эксперимента; обработка экспериментальных данных и получение уравнений, описывающих этот процесс, т. е. разработка математической модели; проверка полученных уравнений на адекватность; отладка и корректировка модели.

Применив законы математической статистики, в частности, используя метод планирования и обработки многофакторного эксперимента (метод Протоdjeяконова), и проведя анализ базы данных экспериментальных значений основных параметров, характеризующих процесс смешивания вязких компонентов, были получены уравнения, описывающие этот процесс.

Оптимизация технологического процесса заключается в обеспечении его максимальной эффективности при заданных технологических условиях. С этой целью в самом начале проводился выбор критерия оптимальности, под которым понимают количественный или качественный показатель, выражающий предельную меру эффективности принимаемого решения для сравнительной оценки возможных альтернатив и выбора наилучшего.

На основании соответствующего выбора составлялась целевая функция, представляющая собой зависимость критерия оптимизации от параметров, влияющих на нее. Методы оптимизации выбирались в зависимости от вида целевой функции, структуры ограничений и используемой для описания выбранной технологии математической модели.

Рассмотрим описанную выше методику на примере процесса смешивания вязких компонентов.

Параметрическая модель объекта управления (процесс смешивания вязких компонентов) приведена на рис. 1.

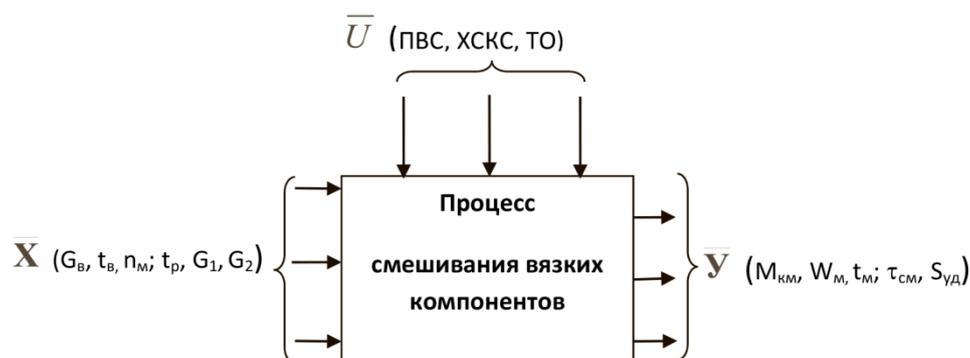


Рис. 1. Параметрическая модель процесса смешивания вязких компонентов

В качестве параметров модели были приняты:

- \bar{X} — вектор входных параметров модели: $\bar{X} (G_B, t_B, n_M; t_P, G_1, G_2)$, где G_B — масса воды, вносимой при смешивании компонентов, кг;
 t_B — температура воды, °С;
 n_M — частота вращения месильных органов, s^{-1} ;
 t_P — температура рубашки смесительной камеры, °С;
 G_1 — масса первого компонента, кг;
 G_2 — масса второго компонента, кг;
- \bar{Y} — вектор выходных параметров модели: $\bar{Y} (M_{KM}, W_M, t_M; \tau_{CM}, S_{Уд})$, где M_{KM} — показатель консистенции полученной при смешивании массы, Н·м;
 W_M — влажность полученной при смешивании массы, %;
 t_M — температура полученной при смешивании массы, °С;
 τ_{CM} — продолжительность смешивания компонентов до готовности, с;
 $S_{Уд}$ — количество удельной механической энергии, затраченной на формирование структуры полученной готовой массы, кДж/кг;
- \bar{U} — вектор управляющих параметров модели: \bar{U} (ПВС, ХСКС, ТО)
 где ПВС — параметры внешней среды (давление атмосферного воздуха, относительная влажность воздуха, температура воздуха и др.);
 ХСКС — химический состав и качество сырья, в том числе гранулометрический состав первого компонента;
 ТО — технологические отклонения (масса смешиваемых компонентов, температура компонентов, влажность компонентов, вязкость массы и т. д.).

Для удобства последующего математического анализа были введены следующие изменения в обозначении переменных:

$$\begin{array}{llll} X_1 = G_B & X_4 = t_p & X_7 = \text{ПВС} & Y_1 = M_{\text{км}} \\ X_2 = t_B & X_5 = G_1 & X_8 = \text{ХСКС} & Y_2 = W_M \\ X_3 = n_M & X_6 = G_2 & X_9 = \text{ТО} & Y_3 = t_M \\ & & & Y_4 = \tau_{\text{см}} \end{array}$$

В результате обработки экспериментальных данных по методу Протодяконова были получены уравнения, представляющие собой математическую модель статики технологического процесса смешивания вязких компонентов. В общем виде математическая модель запишется следующим образом:

$$Y_k = \frac{\prod_{i=1}^9 \left(\sum_{j=0}^2 (a_{k,i,j} \cdot X_i^j) \right)}{Y_{k \text{ ср.эксп.}}^8},$$

где $k \in 1, 5$.

Адекватность полученного уравнения была проверена по таким величинам, как относительная погрешность ($\delta = 1,0384$), коэффициент множественной корреляции ($R = 0,9641857$), критерий Стьюдента ($tr = 274,367 \gg 2$), критерий Фишера (значение критерия Фишера расчетное больше критерия Фишера теоретического примерно в 10 раз, т. е. $F_p \gg F_T$). С учетом вышеизложенного был сделан вывод об адекватности вышеприведенной математической модели.

Выберем следующие критерии:

$$\begin{array}{l} M_{\text{км}} \rightarrow \max; \\ |W_M - a1| \rightarrow \min \\ |t_M - a2| \rightarrow \min \\ |\tau_{\text{см}} - a3| \rightarrow \min \\ |S_{\text{уд}} - a4| \rightarrow \min. \end{array}$$

Используя один из методов перехода от множества критериев к одному обобщенному, был получен обобщенный критерий, зависящий от основных параметров процесса, и оценена их значимость.

В качестве критерия оптимальности для решения задачи оптимизации был получен обобщенный критерий, имеющий вид:

$$W = \frac{M_{\text{кр}}}{|W_{\text{т}} - a1| + |t_{\text{т}} - a2| + |\tau_{\text{зам}} - a3| + |S_{\text{уд}} - a4|} \rightarrow \max, \quad \bar{x} \in D$$

где \bar{x} — вектор управляющих переменных процесса; D — область ограничений, содержащая в преобразованном виде условия поиска экстремума целевой функции.

Прежде чем сформулировать и решать задачу многопараметрической оптимизации, необходимо провести исследования, которые позволили бы сделать вывод о наличии оптимума. Для этого построим график, отражающий зависимость выходной величины от двух входных при фиксированном значении остальных (рис. 2).

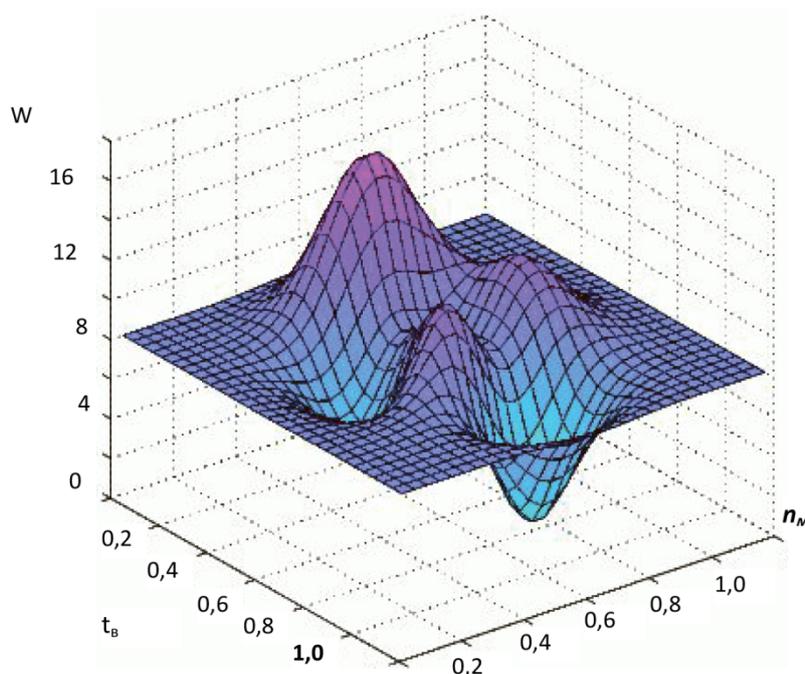


Рис. 2. Зависимость обобщенного критерия температуры воды и частоты вращения месильных органов при фиксированных значениях остальных факторов

Результат исследования. Выводы. Используя полученную модель, выдвинутый нами критерий и введенные обозначения, была поставлена задача оптимизации, которая формулируется следующим образом: найти такие значения параметров оптимизации, при которых обобщенный критерий достигает максимума, при выполнении ограничений, наложенных на область D .

Приведенная математическая постановка задачи оптимизации подпадает под класс задач нелинейного программирования и может быть решена одним из методов, применяемых для решения задач данного класса, в частности, методом неопределенных множителей Лагранжа.

Для решения этой задачи мы использовали пакет статистики и оптимизации (EUREKA).

В результате были получены значения исследуемых технологических параметров процесса смешивания вязких компонентов, при которых выбранный критерий достигает оптимума.

При изменении исходной технологической ситуации результаты решения задачи должны быть пересчитаны.

Данную систему можно рекомендовать технологам-операторам для эффективного управления технологическим процессом в режиме реального времени.

Литература

1. Blagoveshchenskaya M.M., Blagoveshchenskiy V.G., Rogelio S.C.M., Petryakov A.N. Development of a neural network model for controlling the process of dosing bulk food masses. *Journal of Physics: Conference Series. Series: "Fundamental and Applied Problems of Mechanics, FAPM 2019"*, 2020, art. no. 012027.
2. Blagoveshchenskiy I.G., Blagoveshchenskiy V.G., Besfamilnaya E.M., Sumerin V.A. Development of databases of intelligent expert systems for automatic control of product quality indicators. *Journal of Physics: Conference Series. Series: "Fundamental and Applied Problems of Mechanics, FAPM 2019"*, 2020, art. no. 012019.
3. Балыхин М.Г., Благовещенский И.Г., Благовещенский В.Г., Крылова Л.А. Разработка нейросетевой модели для управления процессом дозирования сыпучих масс. *Сборник материалов конференции «Интеллектуальные системы и технологии в отраслях пищевой промышленности»*. Москва, ИК МГУПП, 2019, с. 6–20.
4. Балыхин М.Г., Благовещенский И.Г., Назойкин Е.А., Благовещенский В.Г. Адаптивная система управления с идентификатором нестационарными технологическими процессами в отраслях пищевой промышленности. *Сборник материалов конференции «Интеллектуальные системы и технологии в отраслях пищевой промышленности»*. Москва, ИК МГУПП, 2019, с. 32–39.
5. Благовещенский И.Г., Благовещенская М.М., Носенко С.М. Автоматизация контроля показателей качества и выявления брака продукции с использованием системы компьютерного зрения. *Кондитерское производство*, 2016, № 3.
6. Шкапов П.М., Благовещенский И.Г., Носенко С.М. Методология расчета динамических характеристик гидродинамических систем пищевых производств при их моделировании. *Хранение и переработка сельхозсырья*, 2017, № 4.
7. Балыхин М.Г., Борзов А.Б., Благовещенский И.Г. *Методологические основы создания экспертных систем контроля и прогнозирования качества пищевой продукции с использованием интеллектуальных технологий*. Москва, Издательство «Франтера», 2017, 395 с.

Improving the efficiency of technological processes based on modern methods of modeling and optimization

© I.G. Blagoveshchensky¹, M.Yu. Music¹, V.G. Blagoveshchensky¹,
V.V. Golovin², P.M. Shkapov³

¹Moscow State University of Food Production (MGUPP), Moscow, Russia

²Management company "United Confectioners", Moscow, Russia

³Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Abstract. The article presents general approaches to modeling the technological processes of mixing viscous components, examines the stages of creating mathematical models and computer modeling of these technological processes. Examples of work performed by the Moscow State University of Food Production in this direction are given. The results of research in the field of modeling technological processes of mixing viscous components are presented. The influence of the features of the implementation of processes on the quality indicators of the output parameters is shown and an analysis of the technological possibilities for their improvement is given. Particular attention is paid to modeling the conditions for conducting mixing processes with their subsequent optimization, as well as making management decisions. The above analysis will allow not only to minimize production losses, but also to increase the efficiency of technological processes.

Keywords: *information technology, modeling methods, optimal control, mixing processes of viscous components.*

References

1. Blagoveshchenskaya M.M., Blagoveshchenskiy V.G., Rogelio S.C.M., Petryakov A.N. Development of a neural network model for controlling the process of dosing bulk food masses. *Journal of Physics: Conference Series. Series: "Fundamental and Applied Problems of Mechanics, FAPM 2019"*, 2020, art. no. 012027.
2. Blagoveshchenskiy I.G., Blagoveshchenskiy V.G., Besfamilnaya E.M., Sumerin V.A. Development of databases of intelligent expert systems for automatic control of product quality indicators. *Journal of Physics: Conference Series. Series: "Fundamental and Applied Problems of Mechanics, FAPM 2019"*, 2020, art. no. 012019.
3. Balykhin M.G., Blagoveshchenskiy I.G., Blagoveshchenskiy V.G., Krylova L.A. Development of a neural network model for controlling the dosing process of bulk masses. *Proceedings of the conference "Intelligent systems and technologies in the food industry"*. Moscow, IK MGUPP, 2019, pp. 6–20.
4. Balykhin M.G., Blagoveshchenskiy I.G., Nazoikin E.A., Blagoveshchenskiy V.G. An adaptive control system with an identifier for non-stationary technological processes in the food industry. *Proceedings of the conference "Intelligent systems and technologies in the food industry"*. Moscow, IK MGUPP, 2019, pp. 32–39.
5. Blagoveshchenskiy I.G., Blagoveshchenskaya M.M., Nosenko S.M. Automation of quality control and detection of product defects using a computer vision system. *Confectionery production*, 2016, no. 3.

6. Shkapov P.M., Blagoveshchensky I.G., Nosenko S.M. Methodology for calculating the dynamic characteristics of hydrodynamic systems of food production in their modeling. *Storage and processing of agricultural products*, 2017, no. 4.
7. Balykhin M.G., Borzov A.B., Blagoveshchensky I.G. *Methodological foundations for the creation of expert systems for monitoring and predicting the quality of food products using intelligent technologies*. Moscow, Publishing house of Frantera, 2017, 395 p.

Методы визуальной корреляции для анализа данных от различных источников

© В.Г. Благовещенский¹, И.Г. Благовещенский¹,
М.М. Благовещенская¹, А.С. Носенко², М.В. Веселов²

¹Московский государственный университет пищевых производств (МГУПП),
Москва, Россия

²Управляющая компания «Объединенные кондитеры», Москва, Россия
E-mail: mmb@mgupp.ru

Аннотация. В последние несколько лет наблюдается большой интерес к методам визуальной корреляции. В качестве методики формирования срезов данных из различных источников для их визуального соотнесения рассмотрены технологии построения графиков и работы с ними с использованием фреймворка настольных приложений. Это связано с тем, что при решении задачи определения интервалов времени, в течение которых характер данных из различных источников остается неизменным. Можно сделать вывод, что состояние системы в эти периоды времени является постоянным и необходимо учитывать различные потребности в каждом случае разработки интерфейса для отображения данных.

Ключевые слова: анализ данных, визуальная корреляция, технологии построения графиков, методика формирования срезов.

Введение. На практике часто возникает задача анализа данных от различных источников данных [1, 2]. Их графическое представление помогает повысить эффективность работы аналитика. Существует множество работ, в которых предлагаются подходы к построению универсального анализатора данных от одного или от нескольких источников [3]. Исследование больших потоков данных с высокой скоростью поступления связано с высокой когнитивной нагрузкой на аналитика [4]. Возможным решением к снижению объемов данных является динамическое определение интервалов времени, в течение которых состояние системы неизменно или незначительно, и формирование среза данных, в течение которых характер данных является

практически неизменным. В работе предлагается формировать срезы данных путем кластеризации потоков данных. При этом алгоритм может быть применен как ко всем атрибутам системы, так и к выбранным множествам.

Исследования. В основу предлагаемого алгоритма положен алгоритм пространственной кластеризации DBSCAN, основанный на плотности [5]. Суть этого алгоритма заключается в том, что для набора точек в некотором пространстве алгоритм группирует вместе точки, расположенные в непосредственной близости, отмечая шумом точки, которые находятся намного дальше от своих соседей, в областях с плотностью меньшей относительно плотности сгруппированных точек. DBSCAN является одним из самых популярных алгоритмов кластеризации, используемых для анализа данных, и наиболее часто встречается в научных работах.

Для работы алгоритма необходимо задать только два параметра:

- параметр ϵ — отвечает за окрестность, в которую будут входить точки будущего кластера;

- параметр minPts — отвечает за минимальное количество точек, которые будут образовывать плотную область.

Процесс работы с набором точек состоит из следующих шагов:

- определить точки в ϵ — окрестности каждой точки и выделить основные точки с более чем minPts -соседями;

- найти связные компоненты основных точек на графе соседей, не принимая во внимание неосновные точки;

- назначить каждую неосновную точку кластеру наиболее близкому, если кластер является соседним в пределах ϵ , в противном случае — определяем точку как шум.

Отличие предлагаемого алгоритма в том, что при получении новой точки, если множество основных точек не пусто, то выполняется оценка ее расстояния с множеством опорных точек и, если расстояние не превышает ϵ , то новая точка становится опорной. Если расстояние превышает ϵ , то формируется новое множество опорных точек, состоящее из данной точки.

Возможен также выбор или реализация собственной функции, отвечающей за измерение расстояния между точками. Выбор функции расстояния и параметра ϵ определяет качество работы алгоритма. Наиболее часто используется евклидова метрика, но для данных с высокой размерностью она создает определенные сложности, что делает трудным нахождение оптимального ϵ .

Для данных с высокой размерностью применяется математический анализ для выявления закономерностей и тенденций, существующих в данных. Обычно такие закономерности нельзя обнаружить при традиционном просмотре данных, поскольку связи слишком сложны, или из-за чрезмерного объема данных. Эти зако-

номерности и тренды можно собрать вместе и определить как *модель интеллектуального анализа данных*.

Модели интеллектуального анализа данных могут применяться к конкретным сценариям, а именно для: прогнозирования процессов производства; оценки риска и вероятности диагноза; рекомендации наиболее востребованной продукции; поиска и прогнозирования следующего возможного события; формирования кластеров связанных элементов, анализа и прогнозирования общих черт.

На рис. 1 описываются связи между каждым этапом процесса формирования кластеров и технологиями Microsoft SQL Server, которые можно использовать для выполнения каждого шага. Процесс, представленный на рис. 1, является циклическим, т. е. создание аналитической модели данных является динамическим и повторяющимся процессом.

Выполнив просмотр данных, пользователь может обнаружить, что данных недостаточно для создания требуемых моделей интеллектуального анализа данных, что ведет к необходимости поиска дополнительных данных.

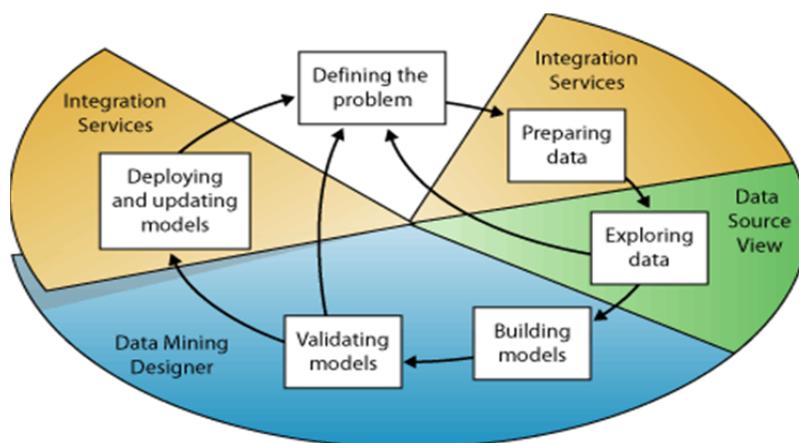


Рис. 1. Схема связи между каждым этапом процесса формирования кластеров и технологиями Microsoft SQL Server

Может также возникнуть ситуация, когда после построения нескольких моделей окажется, что они не дают адекватный ответ на поставленную задачу, и поэтому необходимо поставить задачу по-другому.

Может возникнуть необходимость в обновлении уже развернутых моделей за счет новых поступивших данных. Для создания хорошей модели может понадобиться многократно повторить каждый шаг процесса.

Интеллектуальный анализ данных Microsoft SQL Server предоставляет интегрированную среду для создания моделей интеллектуального анализа данных и работы с ними. Эта среда включает программу SQL Server Development Studio, которая содержит алгоритмы интеллектуального анализа данных и средства создания запросов, которые облегчают создание полноценного решения для нескольких проектов. Кроме того, эта среда включает компонент SQL Server Management Studio, который содержит средства для поиска моделей и управления объектами интеллектуального анализа данных.

Результаты и их обсуждение. В данной работе обсуждаются результаты экспериментов с определением оптимального ϵ при производстве продукции в теплице. Эксперименты выполнены с помощью данных от сенсоров, отслеживающих: температуру на входе, расход воды на водонагреватель, общее количество затраченной энергии, мощность насоса, установку температуры водонагревателя, включение вентиляции и пр. Каждому массиву показаний с сенсоров соответствует свой момент времени, представляемый в виде: [год, месяц, число и время] с шагом в 10 минут. Это позволит точно оценить состояние объекта по срезам данных.

Результаты кластеризации формируются в виде JSON массива. В массиве каждый элемент соответствует кластеру под назначаемым алгоритмом порядковым номером и набору данных, входящих в этот кластер. Другой набор данных, не вошедший в кластеры, определенный как шум, выброшенные точки.

Эксперимент выполнялся с помощью программного прототипа, реализованный функционал которого выполнен на языке JavaScript, и платформы NodeJS при поддержке фреймворка NW.js. Фреймворк предоставляет платформу для разработки настольных приложений с HTML в качестве представления и NodeJS для доступа к системному API. Точкой входа в приложение является веб-страница, что является главным окном приложения. NW.js использует высокоуровневый подход и полную интеграцию функционала веб-браузера Chromium [6].

В качестве эксперимента для апробации методики были предоставлены данные от различных сенсоров теплицы.

Для визуального отображения использована библиотека d3 [7]. Она позволяет гибко и универсально построить графики различного вида в многоцветном отображении. Для проведенного эксперимента прорисованы линейные графики по точкам времени. Каждый график в цвете отображает свой параметр. Цвет отображения определяет кластер, в который вошла эта точка. Для удобства цвета отображения чередуются, так как важен сам факт кластеризации. Уникальный цвет для каждого кластера признан избыточным и границы кластеров легко различимы в данной ситуации.

Выводы. Таким образом, методика для формирования среза данных от разных источников для их визуальной корреляции наглядно предоставляет информацию о полученных данных и их срезах. С помощью DBSCAN формируются кластеры, которые отображаются на веб-странице приложения в виде линейных графиков. Реализация поддерживается фреймворком NW.js, который позволяет разработать кроссплатформенное приложение с удобными инструментами.

Использование визуальной корреляции для анализа данных от различных источников позволит осуществлять прогнозирование процессов производства, проводить оценку риска нововведений, давать рекомендации по наиболее востребованной продукции, а также позволит повысить эффективность использования интеллектуальных технологий, снизить издержки производства, осуществлять непрерывный мониторинг качества выпускаемой продукции и повысить долю продукции надлежащего качества.

Литература

1. Балыхин М.Г., Борзов А.Б., Благовещенский И.Г. *Методологические основы создания экспертных систем контроля и прогнозирования качества пищевой продукции с использованием интеллектуальных технологий*. Москва, Издательство «Франтера», 2017, 395 с.
2. Благовещенский И.Г., Троицкий А.К. Использование метода Превитта при разработке алгоритмов обработки цифровых данных. *Материалы I Международной научно-практической конференции-выставки «Планирование и обеспечение подготовки и переподготовки кадров для отраслей пищевой промышленности и медицины»*. Москва, Издательский комплекс МГУПП, 2012, с. 153–157.
3. Крылова Л.А., Благовещенский В.Г., Татаринев А.В. Разработка интеллектуальных аппаратно-программных комплексов мониторинга процессов сепарирования дисперсных пищевых масс на основе интеллектуальных технологий. В кн.: *Развитие пищевой и перерабатывающей промышленности России: кадры и наука*, 2017, с. 199–201.
4. Петряков А.Н., Благовещенская М.М., Благовещенский В.Г., Крылова Л.А. Применение методы объектно-ориентированного программирования для контроля показателей качества кондитерской продукции. *Кондитерское и хлебопекарное производство*, 2018, № 5–6 (176), с. 21–23.
5. Гончаров К.А., Благовещенский И.Г., Назойкин Е.А., Благовещенский В.Г., Макаровская З.В. Использование библиотеки OPENCV для работы с техническим зрением. В сб.: *Интеллектуальные системы и технологии в отраслях пищевой промышленности. Сборник материалов конференции*, 2019, с. 53–60.
6. Петряков А.Н., Благовещенская М.М., Благовещенский В.Г., Митин В.В., Благовещенский И.Г. Повышение качества идентификации и позиционирования объекта на цифровых стереоизображениях при помощи алгоритмов построения карты глубины. В сб.: *Интеллектуальные системы и технологии в отраслях пищевой промышленности. Сборник материалов конференции*, 2019, с. 133–138.

7. Карелина Е.Б., Благовещенская М.М., Благовещенский В.Г., Клехо Д.Ю., Благовещенский И.Г. Интеграция адаптивного управления в технологические процессы пищевой отрасли. В сб.: *Интеллектуальные системы и технологии в отраслях пищевой промышленности. Сборник материалов конференции*, 2019, с. 81–89.

Visual correlation methods for data analysis from various sources

© V.G. Blagoveshchensky¹, I.G. Blagoveshchensky¹,
M.M. Blagoveshchenskaya¹, A.S. Nosenko², M.V. Veselov²

¹Moscow State University of Food Production (MGUPP), Moscow, Russia

²Management company "United Confectioners", Moscow, Russia

E-mail: mmb@mgupp.ru

Abstract. In the last few years, there has been a great interest in visual correlation methods. As a technique of forming data slices from various sources for their visual correlation, the technologies of plotting and working with them using the desktop application framework are considered. This is due to the fact that when solving the problem of determining the intervals of time during which the nature of data from various sources remains unchanged. It is possible to conclude that the state of the system in these periods of time is constant and it is necessary to take into account the different needs in each case of developing an interface for displaying data.

Keywords: *data analysis, visual correlation, charting technologies, slicing techniques.*

References

1. Balykhin M.G., Borzov A.B., Blagoveshchenskiy I.G. *Methodological foundations for creating expert systems for monitoring and predicting the quality of food products using intelligent technologies*. Moscow, Frantera Publ., 2017, 395 p.
2. Blagoveshchensky I.G., Troitsky A.K. Using the Prewitt method in the development of digital data processing algorithms. *Materials of the First international scientific and practical conference - exhibition "Planning and provision of training and re-training of personnel for the food industry and medicine"*. Moscow, Publishing complex MGUPP, 2012, pp. 153–157.
3. Krylova L.A., Blagoveshchensky V.G., Tatarinov A.V. Development of intelligent hardware and software systems for monitoring processes of separation of dispersed food masses based on intelligent technologies. In: *Development of the food and processing industry in Russia: personnel and science*, 2017, pp. 199–201.
4. Petryakov A.N., Blagoveshchenskaya M.M., Blagoveshchensky V.G., Krylova L.A. Application of object-oriented programming methods to control the quality indicators of confectionery products. *Confectionery and bakery production*, 2018, no. 5–6 (176), pp. 21–23.
5. Goncharov K.A., Blagoveshchensky I.G., Nazoikin E.A., Blagoveshchensky V.G., Makarovskaya Z.V. Using the OPENCV library for working with technical vision. In the collection: *Intelligent systems and technologies in the food industry. Collection of conference materials*, 2019, pp. 53–60.

6. Petryakov A.N., Blagoveshchenskaya M.M., Blagoveshchenskiy V.G., Mitin V.V., Blagoveshchenskiy I.G. Improving the quality of object identification and positioning in digital stereo images using depth mapping algorithms. In the collection: *Intelligent systems and technologies in the food industry. Collection of conference materials*, 2019, pp. 133–138.
7. Karelina E.B., Blagoveshchenskaya M.M., Blagoveshchenskiy V.G., Kleho D.Yu., Blagoveshchenskiy I.G. Integration of adaptive control into technological processes in the food industry. In the collection: *Intelligent systems and technologies in the food industry. Collection of conference materials*, 2019, pp. 81–89.

Адаптивная система управления с идентификатором нестационарными процессами производства

© И.Г. Благовещенский^{1*}, В.Г. Благовещенский¹, П.М. Шкапов²,
А.С. Носенко³, А.М. Аднодворцев³

¹Московский государственный университет пищевых производств (МГУПП),
Москва, Россия

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

³Управляющая компания «Объединенные кондитеры», Москва, Россия

*E-mail: igblagov@mgupp.ru

Аннотация. Статья посвящена адаптивной системе управления с идентификатором нестационарными процессами производства продукции. Рассмотрена двухконтурная адаптивная система управления с идентификатором в основном контуре и группой экспертов во внешнем контуре, отражающая специфику прикладной области исследований. Обобщается подход, предложенный для случая многомерного односвязного объекта управления, на многомерный многосвязный объект управления. Эта информация используется экспертами при анализе выходного продукта и управления его качеством в режиме реального времени. На основе полученной информации формируется база данных для анализа хода процессов и экспертных оценок выходного продукта в целом. Информация с этой базы данных позволяет связать нижний уровень управления производством (автоматизированная система управления технологическим процессом АСУТП) с верхним уровнем (автоматизированная система управления предприятием АСУП) и предоставить ERP-системе данные нижнего уровня. Это позволяет создать эффективную автоматизированную систему поддержки принятия решений. Приведенный анализ позволит не только максимально снизить потери на производстве, но и повысить эффективность ведения технологических процессов.

Ключевые слова: адаптивная система управления, идентификатор, нестационарные технологические процессы, производство продукции.

Введение. К настоящему времени разработано и в той или иной мере исследовано большое число рекуррентных алгоритмов идентификации. Предложено достаточно много методов идентификации. Большинство из них основано на методе наименьших квадратов и его модификациях [1]. В условиях неопределенности широкое применение получили итерационные методы, обладающие рядом преимуществ: простота реализации, большое быстродействие, возможность получения состоятельных оценок [2]. Некоторые конструктивные особенности в итерационные алгоритмы вносятся в процессе непосредственной реализации их в системах управления, что связано с особенностями и свойствами исследуемых процессов в отраслях пищевой промышленности [3].

К сожалению, никто из исследователей не собрал предложенные алгоритмы и методы идентификации в одной работе. Они разбросаны по большому числу монографий, специальных периодических изданий и технических отчетов. Алгоритмы можно использовать, по утверждению авторов разработок этих алгоритмов, в системах реального времени, в частности, в адаптивных системах управления с идентификатором [4].

Инженер-практик, взявшийся за реализацию адаптивной системы управления с идентификатором, оказывается перед проблемой выбора конкретного алгоритма идентификации. В таких системах управления именно идентификатор позволяет получать модели заданного качества для управления по модели, когда по поступающим данным, результатам измерений уточняются параметры модели.

Ряд методов рекуррентной идентификации реализовано в известном программном пакете MATLAB. В пакете MATLAB возможно получение оценок параметров модели объекта непосредственным программированием, т. е. обращением к функции расчета полинома коэффициентов ARMAX или использованием подсистем Simulink и System Identification Toolbox [5].

Однако ни в целом пакет, ни отдельные его части, даже алгоритмы нецелесообразно использовать на промышленных контроллерах в системах адаптивного управления. Причем размер и стоимость пакета отнюдь не главные причины отказа в использовании пакета в промышленных регуляторах. Все средства MATLAB работают с одномерными односвязными объектами и не ориентированы на получение текущих оценок параметров, т. е. можно получить оценки параметров в любой момент времени и характеристики качества слежения с остановкой процесса решения. Кроме того, используемые алгоритмы идентификации — фактор забывания и алгоритм Левенберга — Маркварда — показали для нестационарных объектов нелучшие результаты в сравнении с другими алгоритмами.

Исследования. В данном исследовании на основе имитационного моделирования проанализировано свыше 53 алгоритмов рекуррентной идентификации плюс основные модификации этих алгоритмов по 47 критериям для нестационарных многомерных односвязных динамических объектов.

Отсутствие ясных рекомендаций в использовании алгоритмов идентификации являются, по-видимому, одной из причин того, что ведущие фирмы — производители промышленных контроллеров и программного обеспечения к ним предпочитают использовать в своих системах классические PID-контроллеры или PID-контроллеры с самонастройкой. Однако для систем управления нестационарными объектами такие контроллеры проигрывают в точности настройки, а часто требуют эвристического подбора параметров настройки, т. е. присутствия оператора.

Достичь высокого качества возможно посредством создания адаптивных автоматизированных систем управления технологическими процессами. На сегодняшний день наиболее перспективным представляется использование нейросетевых регуляторов для управления параметрами процесса производства [6].

В данной статье рассматриваются методы машинного обучения. Существует множество моделей для машинного обучения, но они, как правило, относятся к одному из трех типов [7]:

- обучение с учителем (supervised learning);
- обучение без учителя, или самообучение (unsupervised learning);
- обучение с подкреплением (reinforcement learning).

В зависимости от выполняемой задачи одни модели могут быть более подходящими и более эффективными, чем другие. Для большинства технологических процессов производства продукции наиболее подходящим и удобным способом является обучение с учителем. Также применяются методы непрерывного мониторинга в Scada-системе Trace Mode и методы реализации НС-Р в среде MATLAB.

Практически все рассматриваемые алгоритмы идентификации представляют собой нелинейные функции, поэтому получение аналитических оценок для большинства алгоритмов вызывает значительные трудности. Кроме того, для практических приложений важными являются такие параметры модели объекта, как высокий порядок дифференциального или разностного уравнения и произвольное количество входов. Поэтому сравнение алгоритмов выполнялось численным моделированием. Для получения достоверных убедительных результатов на основе численного моделирования необходимо иметь возможность получать достаточно разнообразные входные сигналы и возможность рассматривать различные типы

параметрической не стационарности. С этой целью был создан программный пакет, позволяющий выполнить поставленную задачу.

В программном пакете предусмотрено моделирование входных сигналов по вероятностным распределениям: равномерное, нормальное, гамма, бета, экспоненциальное, Лапласа, Коши. Реализованы алгоритмы идентификации коэффициентов в авторегрессионном уравнении: алгоритмы на основе P- и SP-подходов, алгоритмы Айзермана, Качмаж, Нагумо — Нода, МНК, РМНК, Аведьян, Растригина, алгоритмы Цыпкина, фильтр Калмана, алгоритм фактор забывания, алгоритм Левенберга — Маркварда и др. Всего проанализировано 53 алгоритма идентификации плюс основные модификации этих алгоритмов.

Для оценки качества идентификации были использованы различные критерии адаптации: по выходным параметрам, точечные и интегральные, оценки скорости сходимости, отношения ошибки дисперсии, величины ошибки, среднеквадратические оценки — всего 47 критериев.

В общем случае для сравнения алгоритмов идентификации под объектом подразумевалась модель технологического процесса, которая описывается как многомерный односвязный объект, получаемый декомпозицией из многомерного многосвязного объекта с наблюдаемыми входами x_r , где $r = \overline{1, L}$, и выходом y :

$$y(n) = \sum_i C_j(n) X(n-i) + \sum_j A_j(n) y(n-j) + v(n),$$

где $X(n) = \sum_{r=1}^L x_r(n)$, $v(n)$.

В работе проведен анализ сходимости коэффициентов модели объекта по оценке качества идентификации в случае их стационарности или нестационарности при большом количестве идентифицируемых коэффициентов (для 10 входов) при использовании различных алгоритмов идентификации, которые были реализованы в программном пакете при устойчивом объекте. На выходе объекта добавлен аддитивный шум.

При проведении исследования в разных опытах для сравнения использовались разные алгоритмы идентификации с соответствующими им параметрами.

При идентификации стационарных коэффициентов в уравнении объекта наиболее эффективными оказались (рис. 1, 2): Айзерман — 1, Качмаж, Нагумо — Нода, Растринг, фильтр Калмана, фактор забывания, Цыпкин. При нестационарных коэффициентах объекта: Качмаж, Нагумо — Нода, фильтр Калмана. Но лучший результат показал алгоритм идентификации Нагумо — Нода.

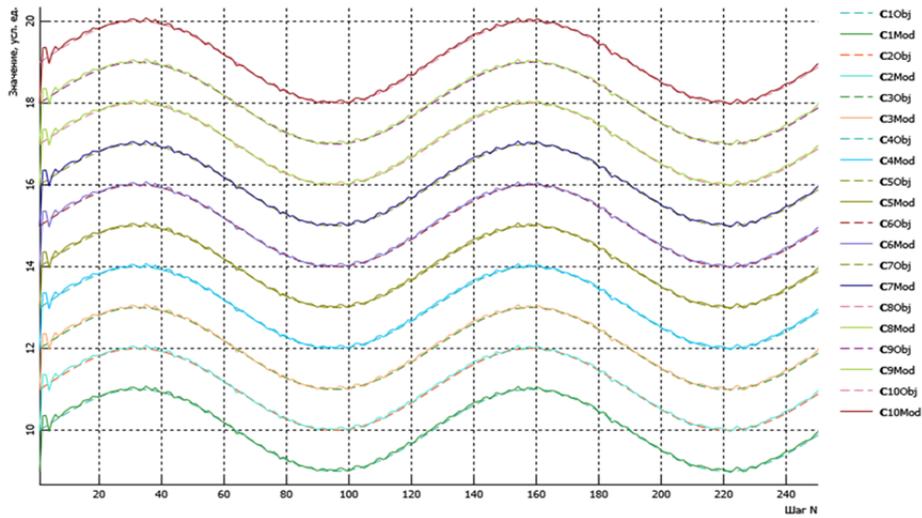


Рис. 1. Коэффициенты объекта $C(o_i)$ и модели $C_m(i)$. Алгоритм идентификации Нагумо — Нода

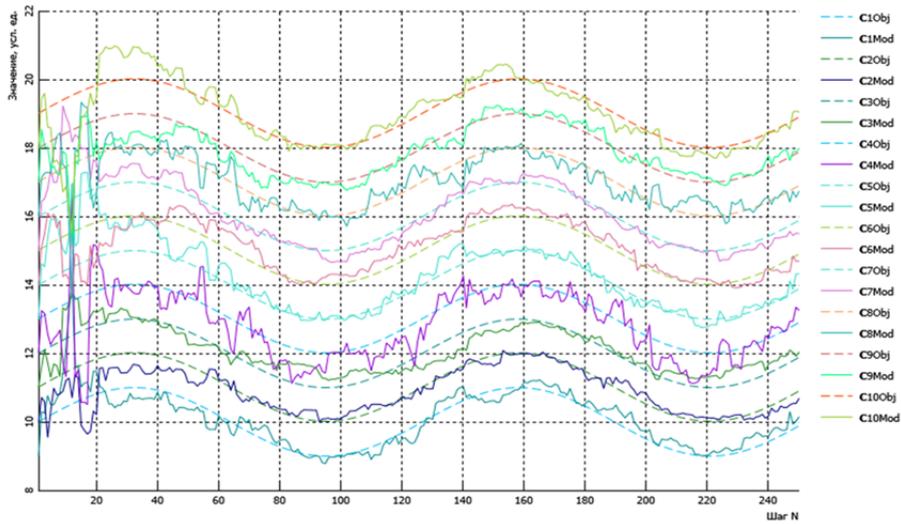


Рис. 2. Коэффициенты объекта $C_o(i)$ и модели $C_m(i)$. Идентификация на основе фильтра Калмана

Для реализации нейросетевых алгоритмов и большого объема вычислений производится все больше программных и аппаратных продуктов. Самым распространенным программным пакетом для

изучения и моделирования НС является Neural Network Toolbox в среде MATLAB фирмы Mathworks.

Данный пакет имеет большую базу примеров создания и обучения НС, позволяющую получить представление о топологиях, методах обучения и применении НС, что делает его подходящим для пользователей, не имеющих опыта работы с НС.

Созданные в Neural Network Toolbox нейронные сети могут быть использованы как для анализа накопленных данных (при прогнозировании, кластеризации), так и для обработки информации, поступающей в режиме реального времени с каких-либо измерительных устройств или из других программ. Также для обеспечения необходимой вычислительной мощности в случае с большими наборами данных имеется возможность распределить вычисления в случае наличия многоядерных процессоров или компьютерных кластеров средствами MATLAB.

Результат исследования. Выводы. В результате интеграции НС-Р со Scada-системой и Matlab мы получили данные с реального технологического объекта. Построив временные графики и сравнив их с заданием, пришли к выводу, что контролируемые параметры благодаря НС-Р находились в предельно допустимых значениях и адаптивно подстраивались под изменяющиеся внешние воздействия.

Таким образом, исследования в данной области достаточно перспективны и возможны к реализации в различных отраслях пищевой промышленности. Полученные результаты позволяют повысить адаптацию режимных параметров к внешним изменяющимся условиям при минимальном изменении существующей конфигурации АСУТП (автоматизированная система управления технологическим процессом).

Создание такой системы позволит: улучшить адаптационные способности регулятора за счет применения более гибкой технологии управления, повысить качество управления и, следовательно, качественные показатели технологического процесса, повысить экономическую эффективность производства в результате более точного поддержания основных технологических и, соответственно, снижения расхода материальных и энергетических средств, уменьшения процента порчи и т. п.

Литература

1. Благовещенский И.Г., Благовещенская М.М., Носенко С.М. Автоматизация контроля показателей качества и выявления брака продукции с использованием системы компьютерного зрения. *Кондитерское производство*, 2016, № 3.

2. Благовещенский И.Г., Назойкин Е.А., Татаринов А.В. Основы создания экспертных систем контроля качества пищевых продуктов с использованием интеллектуальных технологий. *Пищевая промышленность*, 2017, № 4.
3. Шкапов П.М., Благовещенский И.Г., Носенко С.М. Методология расчета динамических характеристик гидродинамических систем пищевых производств при их моделировании. *Хранение и переработка сельхозсырья*, 2017, № 4.
4. Балыхин М.Г., Борзов А.Б., Благовещенский И.Г. *Методологические основы создания экспертных систем контроля и прогнозирования качества пищевой продукции с использованием интеллектуальных технологий*. Москва, Издательство «Франтера», 2017, 395 с.
5. Карелина Е.Б., Благовещенская М.М., Благовещенский В.Г., Клехо Д.Ю., Благовещенский И.Г. *Интеграция адаптивного управления в технологические процессы пищевой отрасли. Интеллектуальные системы и технологии в отраслях пищевой промышленности. Сборник материалов конференции*. Москва, 2019, с. 81–89.
6. Балыхин М.Г., Борзов А.Б., Благовещенский И.Г. Архитектура и основная концепция создания интеллектуальной экспертной системы контроля качества пищевой продукции. *Пищевая промышленность*, 2017, № 11, с. 60–63.
7. Благовещенская М.М., Костин А.М., Благовещенский И.Г., Татаринов А.В. Распределенные автоматизированные системы интеллектуального мониторинга оборудования зерноперерабатывающих предприятий. В кн.: *Развитие пищевой и перерабатывающей промышленности России: кадры и наука*, ИК МГУПП, 2017, с. 171–175.

Adaptive control system with non-stationary production process identifier

© I.G. Blagoveshchensky^{1*}, V.G. Blagoveshchensky¹, P.M. Shkapov²,
A.S. Nosenko³, A.M. Adnodvortsev³

¹Moscow State University of Food Production (MGUPP), Moscow, Russia

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

³Management company "United Confectioners", Moscow, Russia

*E-mail: igblagov@mgupp.ru

Abstract. The article is devoted to an adaptive control system with an identifier for non-stationary production processes. A double-loop adaptive control system with an identifier in the main loop and a group of experts in the outer loop, reflecting the specifics of the applied research area, is considered. The approach proposed for the case of a multidimensional single-connected control object is generalized to a multidimensional multi-connected control object. This information is used by experts to analyze the output product and manage its quality in real time. Based on the information received, a database is formed to analyze the progress of processes and expert assessments of the output product as a whole. Information from this database makes it possible to link the lower level of production management (automated process control system of the automated process control system) with the upper level (automated enterprise management system) and provide the ERP system with the data of the

lower level. This allows you to create an effective automated decision support system. The above analysis will allow not only to minimize production losses, but also to increase the efficiency of technological processes.

Keywords: *adaptive control system, identifier, non-stationary technological processes, production of products.*

References

1. Blagoveshchensky I.G., Blagoveshchenskaya M.M., Nosenko S.M. Automation of quality control and detection of product defects using a computer vision system. *Confectionery production*, 2016, no. 3.
2. Blagoveshchensky I.G., Nazoikin E.A., Tatarinov A.V. Fundamentals of creating expert systems for food quality control using intelligent technologies. *Food industry*, 2017, no. 4.
3. Shkapov P.M., Blagoveshchensky I.G., Nosenko S.M. Methodology for calculating the dynamic characteristics of hydrodynamic systems of food production in their modeling. *Storage and processing of agricultural products*, 2017, no. 4.
4. Balykhin M.G., Borzov A.B., Blagoveshchensky I.G. *Methodological foundations for the creation of expert systems for monitoring and predicting the quality of food products using intelligent technologies*. Moscow, Publishing house of Frantera, 2017, 395 p.
5. Karelina E.B., Blagoveshchenskaya M.M., Blagoveshchensky V.G., Kleho D.Yu., Blagoveshchensky I.G. Integration of adaptive control into technological processes in the food industry. Intelligent systems and technologies in the food industry. *Collection of conference materials*. Moscow, 2019, pp. 81–89.
6. Balykhin M.G., Borzov A.B., Blagoveshchensky I.G. Architecture and the basic concept of creating an intellectual expert system for quality control of food products. *Food industry*, 2017, no. 11, pp. 60–63.
7. Blagoveshchenskaya M.M., Kostin A.M., Blagoveshchenskiy I.G., Tatarinov A.V. Distributed automated systems for intelligent monitoring of equipment of grain processing enterprises. In the book: *Development of the food and processing industry in Russia: personnel and science*. IC MGUPP, 2017, pp. 171–175.

Прогнозирование глубины проникания в грунтово-скальные преграды исследовательских модулей-пенетраторов с использованием эмпирических зависимостей

© А.В. Дюков*, Т.А. Гущина, С.В. Федоров

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail: alexdyukov.job@yandex.ru

Аннотация. Для зондирования поверхностного слоя космических тел могут применяться высокоскоростные модули-пенетраторы, оснащаемые датчиками и аппаратурой различного назначения. Рас-

смотрено определение глубины проникания модулей-пенетраторов в грунтово-скальные преграды, контрастные по прочностным свойствам, на основании различных эмпирических зависимостей. Наряду с используемыми отечественными специалистами Березанской формулой и формулой Забудского — Майевского проанализированы также зависимости, полученные и используемые зарубежными исследователями.

Ключевые слова: *модуль-пенетратор, ударник, грунтово-скальная преграда, глубина проникания, эмпирическая зависимость.*

Для зондирования поверхностного слоя Земли, а в ближайшей перспективе и других тел Солнечной системы могут применяться высокоскоростные проникающие модули [1–3], оснащаемые датчиками и аппаратурой различного назначения. Проникая за счет имеющегося у них запаса кинетической энергии в породы коры космического тела, такие исследовательские модули-пенетраторы должны передавать разнообразную информацию о свойствах коры. В процессе проникания деформации модуля-пенетратора под действием силы сопротивления породы должны быть незначительными для обеспечения сохранности его полезной нагрузки, т. е. модуль-пенетратор при проникании должен вести себя как недеформируемое твердое тело.

При разработке и применении исследовательских проникающих модулей важной является задача прогнозирования глубины их проникания в различные грунтово-скальные преграды. Для предварительных оценок глубины проникания могут быть использованы эмпирические зависимости, полученные различными исследователями на основании обработки экспериментальных данных по прониканию недеформируемых ударников.

Среди отечественных специалистов широкое распространение имеют Березанская формула (получена по результатам стрельб, проводившихся на острове Березань в Черном море недалеко от г. Очакова) и формула Забудского — Майевского [4]. Согласно модифицированной Березанской формуле (формуле АНИИ), глубина проникания h ударника массой m и диаметром миделя d в грунтово-скальную преграду по нормали к ее поверхности определяется как

$$h = \lambda k_B \frac{m}{d^2} v_0, \quad (1)$$

где v_0 — начальная скорость ударника; k_B — коэффициент, характеризующий свойства преграды; $\lambda = \left(0,5 + 0,4\sqrt{(l_h / d)^2}\right) \times \left(2,8\sqrt[3]{d} - 1,3\sqrt{d}\right)$ — коэффициент, учитывающий форму головной

части ударника (l_h — высота головной части). Формула Забудского–Майевского для случая проникания по нормали имеет вид

$$h = \frac{2m}{ab\pi d^2} \ln(1 + bv_0^2), \quad (2)$$

где a, b — коэффициенты, зависящие от свойств преграды.

Среди эмпирических зависимостей, полученных зарубежными исследователями, центральное место занимает формула Янга [5, 6], представляемая при $v_0 > 61$ м/с соотношением

$$h = 2,13 \cdot 10^{-5} \frac{k_S k_{shape} k_m}{d^{2,4}} (v_0 - 30,5), \quad (3)$$

где коэффициенты k_S, k_{shape} и k_m учитывают, соответственно, свойства грунтово-скальной преграды, форму головной части ударника и его массу. При оживальной форме головной части $k_{shape} = 0,18l_h/d + 0,56$, а при конической — $k_{shape} = 0,25l_h/d + 0,56$. При проникании в грунтовые преграды $k_m = 0,27m^{1,1}$ при $m < 27$ кг и $k_m = m^{0,7}$ при $m \geq 27$ кг, при проникании в скальные преграды $k_m = 0,46m^{0,85}$ при $m < 182$ кг и $k_m = m^{0,7}$ при $m \geq 182$ кг. Для грунтовых преград коэффициент k_S изменяется от нескольких единиц до нескольких десятков. Для скальных преград значение k_S вычисляется по формуле $k_S = 2,7/(f_c k_Q)^{0,3}$, в которой f_c — прочность материала преграды на сжатие (в мегапаскалях), k_Q — параметр, характеризующий качество скальной преграды и изменяющийся в диапазоне от 0,1 до 0,9.

Кроме того, при оценках глубины проникания использовались соотношения, полученные Кэром для грунтовых преград [7]

$$h = \begin{cases} 2d\sqrt{\gamma}(0,001v_0)^{0,625}; & v_0 \leq 1000/\gamma^{0,8}, \\ (\gamma(0,001v_0)^{1,25} + 1)d; & v_0 \leq 1000/\gamma^{0,8}, \end{cases} \quad (4)$$

где параметр γ в зависимости от прочности грунта на сжатие f_c (в паскалях), коэффициента

$$k'_{shape} = \min[0,72 + 10^{-3}(0,25 + (l_h/d)^2)^{2,72}; 1,45],$$

характеризующего форму головной части ударника, массы и диаметра миделя ударника определяется как

$$\gamma = 20,5 \frac{k'_{shape} m}{d^{2,31} \sqrt{f_c}}.$$

Для оценок глубины проникания в скальные преграды привлекалась также эмпирическая зависимость Бернарда — Крейтона [5]

$$h = \frac{4m}{\pi d^2} \left[\frac{v_0}{k_1} + \frac{k_0}{k_1^2} \ln \left(1 + \frac{k_1}{k_0} v_0 \right) \right], \quad (5)$$

где $k_0 = 4f_c k_Q^{0,2} / k_{shape}''$, $k_1 = \sqrt[3]{f_c \rho_{imp} k_Q^{0,1} / k_{shape}''}$ (ρ_{imp} — плотность материала ударника) и значение f_c задается в паскалях, а коэффициент формы головной части k_{shape}'' равен $0,863\sqrt{l_h/d + 0,25/(l_h/d)}$ при оживальной форме и $0,805\sqrt[4]{4/(l_h/d)^2 + 1}$ при конической.

При задании массы, диаметра миделя и начальной скорости ударника во всех приведенных зависимостях используются физические размерности СИ. Оценки потенциальной глубины проникания были проведены применительно к исследовательскому модулю-пенетратору диаметром 0,15 м и массой 50 кг с оживальной головной частью высотой $l_h = 1,5d$. Начальная скорость модуля-пенетратора варьировалась в диапазоне от 100 до 1000 м/с (при более высоких скоростях невозможно обеспечить сохранность пенетратора и размещенной в нем аппаратуры при действии перегрузки в процессе проникания). Оценки проводились для грунтово-скальных преград с контрастными прочностными свойствами — типа рыхлого грунта и скальной породы средней твердости. Характеризующие их параметры в использовавшихся эмпирических зависимостях задавались на основании данных [4, 5].

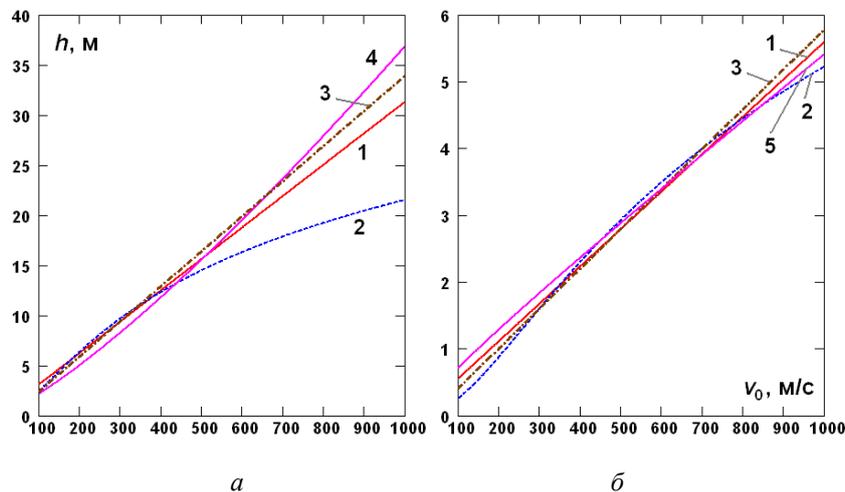


Рис. 1. Влияние скорости модуля-пенетратора на глубину проникания в рыхлый грунт (а) и скальную породу средней твердости (б) согласно различным эмпирическим зависимостям:

- 1 — Березанская; 2 — Забудского — Майевского; 3 — Янга;
4 — Кэра; 5 — Бернарда — Крейтона

Как видно из рис. 1, а, при проникании в рыхлый грунт в диапазоне начальных скоростей модуля-пенетратора от 100 до 500 м/с расчеты по всем использованным зависимостям дают очень близкие результаты, и при $v_0 = 500$ м/с глубина проникания составляет примерно 15 м. При более высоких скоростях хорошая согласованность в результатах сохраняется для модифицированной Березанской формулы (1) и формул Янга (3) и Кэра (4). Расчеты же по формуле Забудского — Майевского (2) при $v_0 > 500$ м/с дают в сравнении с ними заметно меньшую глубину проникания. При скорости модуля-пенетратора 1000 м/с она составляет чуть более 20 м, в то время как остальные эмпирические зависимости прогнозируют для данной скорости примерно в полтора раза большую глубину проникания. Именно этот прогноз представляется более достоверным с учетом того, что в [5] для формулы Янга (3) указывается верхняя граница диапазона скоростей, в котором она может применяться, свыше 1200 м/с. По данным же [4] на результаты, предсказываемые формулой Забудского — Майевского (2), можно полагаться только при скоростях взаимодействия в пределах 400 м/с.

Для случая проникания в скальную породу средней твердости во всем рассмотренном диапазоне скоростей модуля-пенетратора все использованные эмпирические зависимости дают близкий прогноз глубины проникания, которая линейно возрастает примерно от 0,5 м при $v_0 = 100$ м/с до 5,5 м при $v_0 = 1000$ м/с (рис. 1, б).

Таким образом, использование для прогнозирования глубины проникания в грунтово-скальные преграды не одной, а нескольких эмпирических зависимостей, полученных независимыми исследователями, позволяет повысить надежность ее предварительного определения на этапе выбора конструктивных параметров исследовательского модуля-пенетратора.

Литература

1. Велданов В.А., Смирнов В.Е., Хаврошкин О.Б. Лунный пенетратор: снижение перегрузок, управление прониканием. *Астрономический вестник*, 1999, т. 33, № 5, с. 490–494.
2. Сурков Ю.А. На пути к освоению Луны. *Земля и Вселенная*, 2003, № 4, с. 18–28.
3. Федоров С.В., Федорова Н.А., Велданов В.А. Использование импульса реактивной тяги для увеличения глубины проникания исследовательских модулей в малопрочные грунтовые преграды. *Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук*, 2014, № 4(84), с. 53–63.
4. Балаганский И.А., Мержиевский Л.А. *Действие средств поражения и боеприпасов*. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2004, 408 с.
5. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Central European Journal of Engineering*, 2014, vol. 4, no. 1, pp. 1–19.

6. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering approach to penetration modeling. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, vol. 75, no. 14, pp. 4279–4282.
7. Kar A.K. Residual velocity for projectiles. *Nuclear Engineering and Design*, 1979, vol. 53, no. 1, pp. 87–95.

Prediction of the penetration depth into soil-rock targets of research modules-penetrators using empirical dependencies

© A.V. Dyukov*, T.A. Gushchina, S.V. Fedorov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*E-mail: alexdyukov.job@yandex.ru

Abstract. High-speed modules-penetrators equipped with sensors and equipment for various purposes can be used to probe the surface layer of cosmic bodies. Determination of the penetration depth of the modules-penetrators into the soil-rock targets contrasting in strength properties is considered on the basis of various empirical dependencies. Along with the Berezhanskaya formula and the Zabudsky–Mayevsky formula used by domestic specialists, the dependencies obtained and used by foreign researchers are also analyzed.

Keywords: *module-penetrator, impactor, soil-rock target, penetration depth, empirical dependence.*

References

1. Veldanov V.A., Smirnov V.E., Khavroshkin O.B. Lunar penetrator: reducing overload and penetration control. *Solar System Research*, 1999, vol. 33, no. 5, pp. 432–436.
2. Surkov Yu.A. On the way of the Moon exploration. *Earth and Universe*, 2003, no. 4, pp. 18–28. [in Russ.].
3. Fedorov S.V., Fedorova N.A., Veldanov V.A. Jet thrust impulse using for increase in research modules penetration depth into low-strength soil targets. *Bulletin of the Russian Academy of Missile and Artillery Sciences*, 2014, no. 4(84), pp. 53–63. [in Russ.].
4. Balagansky I.A., Merzhievsky L.A. *Destructive effects of ammunition*. Novosibirsk, NSTU Press, 2004. 408 p. [in Russ.].
5. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Central European Journal of Engineering*, 2014, vol. 4, no. 1, pp. 1–19.
6. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering approach to penetration modeling. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, vol. 75, no. 14, pp. 4279–4282.
7. Kar A.K. Residual velocity for projectiles. *Nuclear Engineering and Design*, 1979, vol. 53, no. 1, pp. 87–95.

Применение K_α -метода суммирования функциональных рядов

© С.Н. Лелявин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: lel@internets.ru

Аннотация. В работе рассматривается суммирование функциональных рядов K_α -методом. Получена рекуррентная формула для вычисления логарифмов.

Ключевые слова: суммирование рядов, метод Кулиева, дзета-функции Римана, интегральная показательная функция, интеграл Лежандра, гамма-функция Эйлера.

Введение. Существует много способов суммирования функциональных рядов, но важную роль при суммировании функциональных рядов частного вида имеет K_α -метод Кулиева [1], который весьма эффективен в приложениях: в задаче разрушения многослойных материалов, в теории дзета-функции Римана и в теории теплопроводности стержней конечной длины [2].

$$1. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mr^m} = \ln r - \ln(r-1), (r > 1) \text{ — рекуррентная формула для}$$

вычисления логарифмов.

$$2. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[1+(1-x^2)^\alpha]^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+m)x^{2m}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1)} = \frac{1}{(1-x^2)^\alpha}.$$

$$3. \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m-1}{[1+(1+p)^\alpha]^m} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(2\alpha+m)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(m+1)} p^m = \frac{1}{(1+p)^{2\alpha}}.$$

4. Дзета-функция Римана:

$$\xi(2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{(1+\eta^2)(e^{2\eta\pi} - 1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2} \right).$$

При суммировании этих функциональных рядов использовалась одна из теорем K_α -метода [1].

Литература

1. Кулиев В.Д. Новая формула суммирования функциональных рядов и некоторые ее приложения (ч. 1). *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*, 2013, № 1 (15), с. 107–120.
2. Кулиев В. Д. *Сингулярные краевые задачи*. Москва, Физматлит, 2005, с. 720.

Application of K_α method of summation of functional series

© S.N. Lelyavin

Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: lel@internets.ru

Abstract. The work deals with the summation of functional rows of K_α by the method. A recurring formula for calculating logarithms was obtained.

Keywords: Summation of series, Kuliev method, Riemann zeta function, integral indicative function, Legendre integral, Euler gamma function.

Introduction. There are many methods for summing functional series, but the K_α method of Kuliev [1] has an important role in summing functional series of a partial form, which is very effective in applications: in the problem of breaking down multilayer materials, in the theory of the Riemann zeta function and in the theory of thermal conductivity of rods of finite length [2].

1. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mr^m} = \ln r - \ln(r-1)$, ($r > 1$) — is a recurring formula for calculating logarithms.

$$2. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{[1+(1-x^2)^\alpha]^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+m)x^{2m}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1)} = \frac{1}{(1-x^2)^\alpha}.$$

$$3. \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m-1}{[1+(1+p)^\alpha]^m} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(2\alpha+m)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(m+1)} p^m = \frac{1}{(1+p)^{2\alpha}}.$$

4. Riemann zeta function:

$$\xi(2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\eta d\eta}{(1+\eta^2)(e^{2\eta\pi}-1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2} \right).$$

When summing these functional series, one of the theorems of the K_α method [1] was used.

References

1. Kuliev V.D. New formula for summation of functional series and some ee annexes (part 1). *Bulletin of ChGPU named after I.Ya. Yakovlev. Ser. Limit State Mechanics*, 2013, no. 1 (15), pp. 107–120.
2. Kuliev V.D. *Singular regional problems*. Moscow, Fizmatlit, 2005, pp. 720.

A-орбитальная линеаризация трехмерных аффинных систем с распределением переменного ранга

© Д.А. Фетисов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: dfetisov@yandex.ru

Аннотация. Для аффинных систем со скалярным управлением рассматривается проблема A -орбитальной эквивалентности линейным управляемым системам по обратной связи и состоянию. Предполагается, что распределение, соответствующее системе, имеет переменный ранг в окрестности рассматриваемой точки. Указанная проблема возникает, в частности, в случае, если нелинейную систему необходимо преобразовать в линейную управляемую систему в окрестности положения равновесия. Для трехмерных аффинных систем получено локальное необходимое и достаточное условие A -орбитальной эквивалентности линейной управляемой системе по обратной связи и состоянию.

Ключевые слова: орбитальная линеаризация, аффинная система.

Введение. Преобразование нелинейных систем с управлением в линейные системы, удовлетворяющие условию управляемости Р. Калмана (далее — линейные управляемые системы), играет важную роль в современной теории управления, так как позволяет находить точные решения задач управления для нелинейных систем. Преобразование нелинейной системы в линейную на основе гладких невырожденных замен состояний и управлений, получило название линеаризации обратной связью. Первые условия линеаризуемости обратной связью были получены в работе [1]. Эти условия были в дальнейшем обобщены [2, 3] и в результате приняли тот вид, в котором они известны и в наши дни. Локальное необходимое и достаточное условие линеаризуемости обратной связью [2, 3] нетрудно проверить, но для многих нелинейных систем это условие не выполняется. В работе [4] для преобразования нелинейных систем в линейные управляемые системы были впервые применены так называемые масштабирования времени — замены независимой переменной. Чуть позже в работе [5] было предложено называть аффинную систему орбитальной линеаризуемой, если она может быть преобразована в линейную управляемую систему с помощью гладких невырожденных замен состояния и управления, а также масштабирования времени, зависящего от состояния и не зависящего от управления. В работах [5, 6] были получены локальные необходимые и достаточные условия орбитальной линеаризуемости для систем со скалярным управлением.

Недавно было показано [7], что использование масштабирований времени, зависящих от управления, позволяет расширить класс систем, преобразуемых в линейные управляемые системы. Аффинную систему было предложено называть A -орбитально линеаризуемой [8, 9], если она может быть преобразована в линейную управляемую систему с помощью гладких невырожденных замен состояния и управления,

а также масштабирования времени, зависящего как от состояния, так и от управления. В работах [8, 9] были доказаны локальные необходимые и достаточные условия A -орбитальной линейизуемости. Однако эти условия неприменимы к точкам, в окрестности которых распределение, соответствующее системе, имеет переменный ранг. В настоящей работе рассматривается проблема A -орбитальной линейизуемости аффинной системы третьего порядка с распределением переменного ранга.

Основной результат. Рассмотрим аффинную систему

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u \quad (1)$$

с состоянием $x = (x_1, \dots, x_n)$, принадлежащим открытому множеству $M \subset R^n$, управлением $u \in R$ и независимой переменной t ; системе (1) взаимно однозначно соответствуют векторные поля

$$f_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad f_{ij} \in C^\infty(M), \quad i = 0, 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Напомним понятие A -орбитальной эквивалентности аффинных систем по обратной связи и состоянию [10]. Для этого рассмотрим, наряду с системой (1), систему

$$y' = h_0(y) + h_1(y)v, \quad (2)$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$ — состояние, принадлежащее открытому множеству $P \subset R^n$, $v \in R$ — управление, τ — независимая переменная; системе (2) взаимно однозначно соответствуют векторные поля

$$h_i = \sum_{j=1}^n h_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad h_{ij} \in C^\infty(P), \quad i = 0, 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть $x_0 \in M$, $y_0 \in P$. Системы (1) и (2) называют A -орбитально эквивалентными по обратной связи и состоянию в паре точек (x_0, y_0) , если существуют окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , окрестность $V(y_0)$ точки y_0 , матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij} \in C^\infty(M), \quad i, j = 0, 1,$$

и диффеоморфизм $\Phi : U(x_0) \rightarrow V(y_0)$, такие что

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \Phi_* \left((A^{-1})^T \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \right),$$

где Φ_* — касательное отображение.

Как известно [10], A -орбитальная эквивалентность систем (1) и (2) по обратной связи и состоянию в паре точек (x_0, y_0) означает, что система (1) заменой независимой переменной

$$\dot{t} = \alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u,$$

заменой управления

$$v = \frac{\alpha_{10}(x) + \alpha_{11}(x)u}{\alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u}$$

и заменой состояния $y = \Phi(x)$ преобразуется на множестве

$$M_{xu} = \{(x, u) : x \in U(x_0), \alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u \neq 0\}$$

в аффинную систему (2), ограниченную на множество

$$M_{yv} = \{(y, v) : y \in V(y_0), \alpha_{11}(\Phi^{-1}(y)) - \alpha_{01}(\Phi^{-1}(y))v \neq 0\}.$$

Обозначим $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей, заданных на множестве M , через $T(M)$. Пусть $[\xi, \eta]$ — коммутатор векторных полей $\xi, \eta \in T(M)$. Если $\xi_1, \dots, \xi_k \in T(M)$, то запись $G = \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ будет означать, что

$$G = \underset{C^\infty}{\text{span}}\{\xi_1, \dots, \xi_k\},$$

т. е. G — подмодуль модуля $T(M)$, порожденный векторными полями ξ_1, \dots, ξ_k .

Сопоставим системе (1) модуль $F = \text{span}\{f_0, f_1\}$ и его производный флаг, т.е. последовательность модулей, определенную по правилу

$$F_0 = F, \quad F_{k+1} = F_k + [F_k, F_k].$$

Будем далее полагать, что $n = 3$ и рассматривается проблема A -орбитальной эквивалентности системы (1) по обратной связи и состоянию в паре точек $(x_0, 0)$ линейной управляемой системе

$$y'_1 = y_2, \quad y'_2 = y_3, \quad y'_3 = v. \quad (3)$$

Отметим, что модуль

$$\text{span} \left\{ y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right\},$$

соответствующий системе (3), имеет переменный ранг в окрестности точки $y = 0$. Следовательно, системы (1) и (3) могут быть A -орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек $(x_0, 0)$ только в случае, если модуль F имеет переменный ранг в окрестности точки x_0 . Таким образом, рассматриваемая задача не может быть решена методами, предложенными в работах [8, 9].

Введем обозначения $d_k = \dim F_k(x_0)$, $k = 0, 1, 2$; $S = \{x \in R^3 : \dim F_1(x) < 3\}$. Как известно [5], из равенства $(d_0, d_1, d_2) = (1, 2, 3)$ вытекает, что S – гладкая двумерная поверхность в окрестности точки x_0 . Основным результатом работы – следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы системы (1) и (3) были A -орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек $(x_0, 0)$ необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) $(d_0, d_1, d_2) = (1, 2, 3)$,
- 2) существовало векторное поле $f \in F$, касательное к S и отличное от нуля в точке x_0 .

Заключение. Отметим, что условия теоремы 1 легко проверяемы с помощью алгебраических операций и операции дифференцирования. Отметим также, что теорема 1 позволяет проверить, можно ли в окрестности положения равновесия преобразовать трехмерную аффинную систему в линейную управляемую систему с помощью замен состояния, управления и независимой переменной. Дальнейшее направление исследований в данной области может быть связано с обобщением полученных результатов на системы с большей размерностью состояния и управления.

*Работа выполнена при поддержке Грантов РФФИ
№ 20-07-00279, № 19-07-00817.*

Литература

1. Brockett R.W. *Feedback invariants for nonlinear systems. Proceedings of IFAC Congress. Helsinki, 1978, pp. 1115–1120.*
2. Jakubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math*, 1980, vol. 28, pp. 517–522.
3. Hunt L.R., Su R. Linear equivalents of nonlinear time-varying systems. *Proceedings of the MTNS.*, 1981, pp. 119–123.

4. Sampei M., Furuta K. On time scaling for nonlinear systems: Application to linearization. *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, vol. 31, pp. 459–462.
5. Respondek W. Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control systems. *Proceedings of the IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*. Enschede, 1998, pp. 499–504.
6. Guay M. An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems. *Systems and Control Letters*, 1999, vol. 38, iss. 4–5, pp. 271–281.
7. Фетисов Д.А. Линеаризация аффинных систем на основе замен независимой переменной, зависящих от управления. *Дифференциальные уравнения*, 2017, т. 53, № 11, с. 1514–1525.
8. Фетисов Д.А. A-орбитальная линеаризация аффинных систем. *Дифференциальные уравнения*, 2018, т. 54, № 11, с. 1518–1532.
9. Fetisov D.A. On Some Approaches to Linearization of Affine Systems. *IFAC-PapersOnline*, 2019, vol. 52, iss. 16, pp. 700–705.
10. Fetisov D.A. A-Orbital feedback linearization of multiinput control affine systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, vol. 30, iss. 14, pp. 5602–5627.

A-orbital linearization of three-dimensional affine systems with a distribution of variable rank

© D.A. Fetisov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Abstract. For single-input affine control systems, we consider a problem of A-orbital feedback equivalence to linear controllable systems. We assume that the module associated to the system is of variable rank in a neighborhood of the point in question. This assumption arises, in particular, if we want to transform a nonlinear system into a linear controllable system in a neighborhood of an equilibrium point. For three-dimensional affine control systems, we establish a necessary and sufficient condition for local A-orbital feedback equivalence to a linear controllable system.

Keywords: orbital linearization, affine control system.

References

1. Brockett R.W. Feedback invariants for nonlinear systems. *Proceedings of IFAC Congress*. Helsinki, 1978, pp. 1115–1120.
2. Jakubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math.*, 1980, vol. 28, pp. 517–522.
3. Hunt L.R., Su R. Linear equivalents of nonlinear time-varying systems. *Proceedings of the MTNS*, 1981, pp. 119–123.
4. Sampei M., Furuta K. On time scaling for nonlinear systems: Application to linearization. *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, vol. 31, pp. 459–462.
5. Respondek W. Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control systems. *Proceedings of the IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*. Enschede, 1998, pp. 499–504.

6. Guay M. An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems. *Systems and Control Letters*, 1999, vol. 38, iss. 4–5, pp. 271–281.
7. Fetisov D.A. Linearization of Affine Systems Based on Control-dependent Changes of Independent Variable. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, iss. 11, pp. 1483–1494.
8. Fetisov D.A. A-Orbital Linearization of Affine Systems. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, iss. 11, pp. 1494–1508.
9. Fetisov D.A. On Some Approaches to Linearization of Affine Systems. *IFAC-PapersOnline*, 2019, vol. 52, iss. 16, pp. 700–705.
10. Fetisov D.A. A-Orbital feedback linearization of multiinput control affine systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, vol. 30, iss. 14, pp. 5602–5627.

Исследования полировщика реальными законами механики

© А.И. Смелягин

КубГТУ, Краснодар, Россия
E-mail: asmelyagin@yandex.ru

Аннотация. При разработке машин обязательно проводят их динамический анализ методами классической механики. Фундамент классической механики построен на законах-аксиомах Ньютона. Анализ законов-аксиом И. Ньютона показывает, что они не являются ни законами, ни аксиомами. Это обусловлено тем, что они описывают движение только не существующих в природе объектов, а именно материальных точек. Так как современные машины имеют обычно сложные кинематические цепи, то непосредственное применение законов и теорем классической и аналитической механики для исследования их динамики является сложной и трудоемкой задачей. Поэтому, опираясь на современные знания, понятия и реальные законы механики, в работе проводятся теоретические исследования робота-полировщика.

Ключевые слова: *робот, динамика, масса, момент инерции, закон движения, скорость, ускорение.*

Введение. Наука, исследующая взаимодействия и механические движения материальных тел, называется классической механикой. Основой классической механики являются труды Галилея, Ньютона, Эйлера, а также выведенные из них общие теоремы и принципы. Анализ классических законов-аксиом И. Ньютона и современных их формулировок показывает, что они не являются ни законами, ни аксиомами. Это обусловлено тем, что так называемые законы Ньютона относятся только к не существующим материальным точкам. Поэтому в [1, 2] были сформулированы новые реальные законы

взаимодействия и движения механических объектов и систем. Эти законы имеют вид.

Законы-аксиомы взаимодействий и движения материальных тел.

1. *Взаимодействия материальных тел парны, равновелики и противоположно направлены*

$$I_1 = I_2. \quad (1)$$

2. *Работы внешних и инерционных взаимодействий материальных тел на любом перемещении равны между собой*

$$\sum A_{ij} = \sum A_{\phi ij}. \quad (2)$$

2*. *Суммарная работа внешних и инерционных взаимодействий материальных тел в любое мгновение равна нулю*

$$\sum A_{\Sigma ij} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\sum A_{ij}$ — работа на исследуемом перемещении объекта, совершаемая всеми внешними (активными) взаимодействиями; $\sum A_{\phi ij}$ — работа инерционных взаимодействий при перемещении исследуемого объекта; $\sum A_{\Sigma ij}$ — суммарная работа внешних и инерционных взаимодействий на исследуемом перемещении объекта: i — число взаимодействий; j — число степеней свободы (подвижность).

Видно, что законы движения 2 и 2* полностью эквивалентны друг другу. Это следует из формул (2) и (3)

$$\sum A_{ij} + \sum A_{\phi ij} = \sum A_{\Sigma ij} = 0. \quad (4)$$

Целесообразность практического применения законов движения 2 и 2* определяется конфигурацией исследуемой механической системы.

Следствие из законов 2 и 2*.

1. *Если на исследуемое тело действует уравновешенная система взаимодействий, то оно находится в покое или движется с постоянной скоростью.*

$$\sum A_{ij} = 0. \quad (5)$$

Из уравнений (2)–(5) следует, что если исследуемый механический объект имеет несколько степеней свободы, то для его исследования необходимо записывать столько уравнений, сколько у него подвижностей.

Приведем на конкретных примерах практическое применение полученных законов движения и докажем их достоверность для механических систем с многими степенями свободы.

При исследовании движения исследуемого объекта примем, что на него действуют постоянные внешние силы и моменты сил. Движение объекта происходит при нулевых начальных условиях.

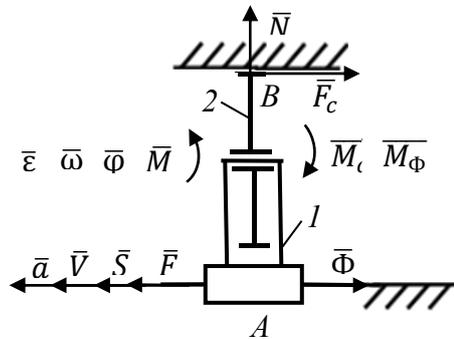


Рис. 1. Робот-полировщик

Исследование робота-полировщика.

Исследуемый робот (рис. 1) предназначен для полировки плоских деталей, плит, стен и других подобных изделий.

Робот имеет шлифовальный круг 2, который жестко закреплен в подвижной каретке 1.

Каретка массой m_1 перемещается в направляющих под действием силы F и силы инерции Φ .

Шлифовальный круг радиусом R , массой m_2 и с моментом инерции $I = m_2R^2$ совершает вращательное движение под действием момента сил M . Также на круг действуют: момент сил трения качения M_C , момент сил инерции M_ϕ , сила сопротивления движению колеса F_C .

Необходимо найти законы движения каретки и шлифовального круга.

Для исследования движения тела воспользуемся законом движения материальных тел, например, 2*.

В соответствии с этим законом суммарная работа внешних и инерционных взаимодействий материальных тел в любое мгновение равна нулю:

$$\sum A_{\Sigma ij} = 0. \tag{6}$$

Для того чтобы установить, сколько уравнений (6) надо записать для исследуемого объекта, определим его число степеней свободы (подвижность W).

В соответствии с [3–5] подвижность исследуемого тела рассчитывается по формуле

$$W = \Pi n - \sum_{i=1}^{\Pi-1} (\Pi - i) p_i, \tag{7}$$

где Π — подвижность пространства, в котором существует исследуемый объект; n — число тел, из которых состоит объект; $i = 1, 2, 3, \dots$ — целочисленный индекс; p_i — число кинематических пар i -й подвижности.

Согласно рис. 1, исследуемый объект существует в одномерном ($M = 1$) и двухподвижном ($\Pi = 2$) пространстве [3–5].

Подставив начальные условия в (7), найдем формулу для определения подвижности исследуемого устройства

$$W = 2n - p_1. \quad (8)$$

Следовательно, робот-полировщик имеет два материальных тела: звено ($n = 2$) и две одноподвижные кинематические пары A и B ($p_1 = 2$). Кинематическая пара A является поступательной, а пара B — вращательной.

После подстановки исходных данных в (8) найдем, что подвижность исследуемого объекта будет равна двум ($W = 2$).

Одна подвижность роботу нужна, чтобы перемещаться вдоль обрабатываемой детали, а вторая — для реализации процесса шлифования.

С учетом того, что исследуемый объект имеет две степени свободы, уравнение (6) для исследуемого робота примет вид

$$\begin{cases} \sum A_{\Sigma i1} = 0, \\ \sum A_{\Sigma i2} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где индекс 1 относится к каретке, а индекс 2 — к шлифовальному кругу.

Раскроем в соответствии с (4) уравнение (9) для поступательно движущейся каретки (см. рис. 1)

$$FS - F_c S - \Phi S = 0. \quad (10)$$

Известно, что силы, действующие на исследуемый объект, соответственно определяются:

- трением скольжения

$$F_c = fm_1g; \quad (11)$$

- инерцией

$$\Phi = m_1a, \quad (12)$$

где f — коэффициент трения скольжения.

С учетом (11) и (12) уравнение (10) примет вид

$$m_1a = F - fm_1g. \quad (13)$$

Преобразовав (13), получим

$$\frac{dV}{dt} = \frac{F - fm_1g}{m_1}. \quad (14)$$

После двукратного интегрирования (14) и учитывая принятые начальные условия, найдем скорость и закон движения каретки

$$V = \frac{F - fm_1g}{m_1}t, \quad (15)$$

$$S = \frac{F - fm_1g}{m_1} \frac{t^2}{2}. \quad (16)$$

Теперь рассмотрим вращательное движение шлифовального колеса, для чего, в соответствии с (4), раскроем второе уравнение системы (9) (см. рис. 1)

$$M\varphi - M_c\varphi - M_\Phi\ddot{\varphi} = 0. \quad (17)$$

Примем, что моменты сил трения и сил инерции соответственно определяются

$$M_c = \mu N, \quad (18)$$

$$M_\Phi = I\ddot{\varphi}, \quad (19)$$

где μ — коэффициент трения качения; N — сила прижатия колеса к обрабатываемой детали; φ — угол поворота колеса.

С учетом (18) и (19) уравнение (17) примет вид

$$M - \mu N - m_2R^2\ddot{\varphi} = 0. \quad (20)$$

Решив (20) относительно углового ускорения колеса, получим

$$\ddot{\varphi} = \frac{M - \mu N}{m_2R^2}. \quad (21)$$

После двукратного интегрирования (21) найдем угловую скорость и закон движения колеса при его вращении

$$\dot{\varphi} = \frac{M - \mu N}{m_2R^2}t + C_1, \quad (22)$$

$$\varphi = \frac{M - \mu N}{2m_2R^2}t^2 + C_1t + C_2, \quad (23)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

С учетом принятых начальных условий, что при $t = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$ и $\varphi_0 = 0$, уравнения (22) и (23) примут вид

$$\dot{\varphi} = \frac{M - \mu N}{m_2 R^2} t, \quad (24)$$

$$\varphi = \frac{M - \mu N}{2m_2 R^2} t^2. \quad (25)$$

Анализ поворотного колеса (см. рис. 1) показывает, что его движение является сложным. Следовательно, для определения кинематических характеристик любых точек колеса необходимо воспользоваться теоремой о сложении скоростей и ускорений при сложном движении.

Выводы. По результатам работы можно заключить следующее:

- с помощью новых законов движения материальных тел исследовано сложное движение двухподвижного робота-шлифовальщика;
- полученные результаты позволяют рекомендовать новые законы механики к исследованию механических систем с многими степенями свободы.

Литература

1. Смелягин А.И. Об основных понятиях и законах классической механики. *Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал*, 2020, № 2, с. 25–38.
2. Смелягин А.И. О реальных законах движения. *Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал*, 2020, № 3, с. 11–16.
3. Смелягин А.И. *Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование*. Москва, ИНФРА-М, 2019, 263 с.
4. Смелягин А.И. *Структура механизмов и машин*. Москва, Высшая школа, 2014, 304 с.
5. Смелягин А.И. *Структура машин, механизмов и конструкций*. Москва, ИНФРА-М, 2019, 387 с.

Polisher research real laws of mechanics

© A. I. Smelyagin

KubSTU, Krasnodar, Russia
E-mail: asmelyagin@yandex.ru

Abstract. When developing machines, their dynamic analysis is necessarily carried out by methods of classical mechanics. The foundation of classical mechanics is built on Newton's laws-axioms. The analysis of Newton's axiom laws shows that they are neither laws nor axioms. This is due to the fact that they describe the movement of objects that do not exist in nature, namely material points. Since modern machines usually have complex kinematic circuits, the direct application of the laws and theorems of classical and analytical mechanics to study their dynamics is a

complex and time-consuming task. Therefore, based on modern knowledge, concepts and real laws of mechanics, theoretical studies of the robot polisher are carried out in the work.

Keywords: *work, dynamics, mass, moment of inertia, law of motion, velocity, acceleration.*

References

1. Smelyagin A.I. On the basic concepts and laws of classical mechanics. *The science. Technic. Technologies (Polytechnic Bulletin). Scientific journal*, 2020, no. 2, pp. 25–38.
2. Smelyagin A.I. On the real laws of motion. *The science. Technic. Technologies (Polytechnic Bulletin). Scientific journal*, 2020, no. 3, pp. 11–16.
3. Smelyagin A.I. *Theory of mechanisms and machines. Course design*. Moscow, INFRA-M, 2019, 263 p.
4. Smelyagin A.I. *Structure of mechanisms and machines*. Moscow, Higher School, 2014, 304 p.
5. Smelyagin A.I. *Structure of machines, mechanisms and structures*. Moscow, INFRA-M, 2019, 387 p.

Об ортогональной сети криволинейных пространственных линий, обладающих кручением

© В.Г. Выскребцов

МАМИ, Москва, Россия

Наблюдения за течением воды в реках, движением воды и воздуха в торнадо и другими движениями (в частности, самоподдерживающимся вращением плоской двухлопастной фигуры в набегающем потоке воздуха, описанное в магистерской диссертации Н.Е. Жуковского) позволяют считать, что движение частиц сплошной среды с кручением траекторий могут представлять интерес. Поэтому в статье рассматриваются свойства пространственных ортогональных сетей линий, которые образуют грани дифференциально малого ортогонального шестигранника, используемого при выводе в гидродинамике уравнений Навье — Стокса.

При этом используется задание кривых в естественных координатах через длину кривой, радиус кривизны и их кручение. При этом S , n и l — длины дуг кривых, а R , r , ρ — радиусы кривизны семейств линий вдоль соответствующих осей локальной системы координат. При этом $\chi \neq 0$ — кручение линии тока. Линия тока задается параметрами S , R , χ . В статье используется аппарат дифференциальной геометрии. В результате исследования свойств криволинейной ортогональной сети установлено, что если угол пересечения кривых (ребер дифференциально малого шестигранника) отличается от прямого

не более чем на малые первого порядка малости (на значение порядка dS/R), то кручение всех линий ортогональной сети может быть только равным нулю, но если второго порядка — отличие от прямого угла допустить до малых второго порядка, т. е. до малых порядка $(dS/R)^2$, то величины кручений кривых должны удовлетворять ряду соотношений, например:

$$\chi = -\sigma \quad \sigma + \sigma_{\text{доп}} = -(\xi + \theta_l^I) \quad -\chi = +(\xi + \theta_l^I).$$

Здесь σ и ξ — соответственно кручение семейства линий, ортогональных к линиям тока в соприкасающейся плоскости, и кручение семейства линий, ортогональных к соприкасающейся плоскости; $\sigma_{\text{доп}}$ и θ — соответственно дополнительное кручение второго семейства линий, обусловленное принадлежностью к ортогональной криволинейной сети, и угол между касательной плоскостью линий третьего семейства и плоскостью OYZ локальной системы декартовых координат.

Как основной вывод из проведенного анализа криволинейной ортогональной сети сделан тот, что если дифференциально малый шестигранник имеет ребра с нулевыми кручениями, то при применении закона Ньютона при составлении уравнения движения этого шестигранника учесть влияния момента кручения внешних сил не удастся. Поэтому уравнения Навье — Стокса, а также уравнения электродинамики Максвелла не могут описывать спиралеобразные движения соответственно сплошной среды и электромагнитного поля.

On an orthogonal network of curved spatial lines with torsion. Observations of the flow of water in rivers, the movement of water and air in tornadoes and other movements (in particular, the self-sustaining rotation of a flat two-bladed figure in an incoming air stream, described in the master's thesis of N.E. Zhukovsky) suggest that the movement of particles of a continuous medium with torsion trajectories may be of interest. Therefore, the article discusses the properties of spatial orthogonal networks of lines that form the faces of a differentially small orthogonal hexagon used in the derivation of the Navier–Stokes equations in hydrodynamics. In this case, the curves are set in natural coordinates through the length of the curve, the radius of curvature and their torsion, while S , n and l are the lengths of the arcs of the curves, and R , r , are the radii of curvature of families of lines along the corresponding axes of the local coordinate system. At the same time, $\chi \neq 0$ is the torsion of the current line. The current line is set by the parameters S , R , χ . The article uses the apparatus of differential geometry. As a result of studying the properties of a curved orthogonal network, it was found that if the angle of intersection of curves (edges of a differentially small hexagon) differs from a straight one by no more than small of the first order of smallness (by a value of the order dS/R), then the torsion

of all lines of the orthogonal network can only be zero. But if, of the second order, the difference from the right angle is allowed to be small of the second order, i.e. to small of the order $(dS/R)^2$, then the torsion values of the curves must satisfy a number of relations, for example, the following:

$$\chi = -\sigma \quad \sigma + \sigma_{\text{доп}} = -(\xi + \theta_l^1) \quad -\chi = +(\xi + \theta_l^1).$$

Here and, respectively, the torsion of a family of lines orthogonal to the current lines in the touching plane and the torsion of a family of lines orthogonal to the touching plane; additional and, respectively, additional torsion of the second family of lines due to belonging to an orthogonal curved network, and the angle between the tangent plane of the lines of the third family and the plane OYZ of the local Cartesian coordinate system. As the main conclusion from the analysis of a curved orthogonal network, it is made that if a differentially small hexagon has edges with zero torsion, then when applying Newton's law when composing the equation of motion of this hexagon, it will not be possible to take into account the effects of the torsion moment of external forces. Therefore, the Navier–Stokes equations, as well as Maxwell's electrodynamics equations, cannot describe spiral-like motions of a continuous medium and an electromagnetic field, respectively.

СЕКЦИЯ 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

2.1. Теоретическая механика

Руководители: д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Самсонов,
д-р физ.-мат. наук, проф. Р.Г. Мухарлямов

«Игра» сухого трения и аэродинамических сил при спуске твердого тела по наклонной поверхности

© Б.Я. Локшин, В.А. Самсонов*

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: samson@imec.msu.ru

Аннотация. Рассматривается взаимное влияние силы трения и аэродинамических сил в процессе спуска твердого тела по наклонной поверхности. В случае неизменяемой ориентации в процессе спуска тела найдена такая ориентация тела, при которой достигается максимальное значение скорости спуска в любой момент времени. Получены условия отрыва тела от поверхности и дальнейшего движения без возвращения на поверхность.

Ключевые слова: наклонная шероховатая плоскость, аэродинамические силы, максимизация скорости, отрыв от поверхности.

Тезисы. Рассматривается вопрос о взаимном влиянии сил трения и аэродинамических сил в процессе спуска твердого тела сложной формы по наклонной плоскости. В случае, когда угол наклона корпуса не изменяется, установлена ориентация тела, при которой достигается максимальное значение скорости спуска. Эта ориентация определяется «игрой» силы трения и подъемной силы, причем она сохраняется в любой момент в процессе спуска. Показано, что при достаточно большом значении подъемной силы произойдет отрыв тела от поверхности.

"Play" of dry friction and aerodynamic forces during the descent of a rigid body along an inclined surface

© B.Ya. Lokshin, V.A. Samsonov*

Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

*E-mail: samson@imec.msu.ru

Abstract. The mutual influence of the friction force and aerodynamic forces during the descent of a rigid body along an inclined surface is considered. For an unchanged orientation, such an orientation of the body was found at which the maximum value of the descent velocity is reached at any moment of time. The conditions for detachment of the body from the surface and further movement without returning to the surface are obtained.

Keywords: *inclined rough surface, aerodynamic forces, speed maximization, separation from the surface.*

Исследование устойчивости равновесий твердого тела с центром масс в главной плоскости инерции с вибрирующим вдоль наклонной прямой подвесом

© М.В. Беличенко

Московский авиационный институт, Москва, Россия
E-mail: tuzemec1@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматривается движение твердого тела, точка подвеса которого совершает быстрые вибрации малой амплитуды вдоль наклонной прямой. Изучается случай тела с центром масс в главной плоскости инерции. Получена автономная система дифференциальных уравнений движения тела. В рамках этой системы решен вопрос о существовании и устойчивости положений относительного равновесия тела. Показано, что в зависимости от интенсивности вибраций, система имеет четыре, шесть или восемь положений равновесия. В случае слабых вибраций устойчиво одно из четырех равновесий. При более интенсивных вибрациях в системе появляются два неустойчивых положения равновесия. При сильных вибрациях в системе появляются еще два равновесия, одно из которых устойчиво.

Ключевые слова: *вибрации, твердое тело, положения равновесия, устойчивость.*

Investigation of equilibrium stability of a rigid body with the mass center in the principal plane of inertia with a suspension vibrating along an inclined straight line

© M.V. Belichenko

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia
E-mail: tuzemec1@rambler.ru

Abstract. We consider the motion of a rigid body with a suspension point performing fast vibrations of small amplitude along an inclined straight line. The case of a body with a mass center in the principal plane of inertia is studied. The autonomous system of differential equations of the body motion is obtained. In the framework of this system, the question of existence and stability of the body's relative equilibrium positions has been solved. It is shown that, depending on the vibration intensity, the system has four, six or eight equilibrium positions. It is shown that at weak vibrations, one of the four equilibrium positions is stable. At more intense vibrations, two unstable equilibrium positions appear in the system. At strong vibrations, two more equilibrium positions appear in the system, one of which is stable.

Keywords: vibrations, rigid body, equilibrium positions, stability.

Моделирование движения космического аппарата в атмосфере Венеры

© А.Е. Богачева

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: bogachyova.anastasi@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается орбитальное движение КА в атмосфере Венеры, для расчета возмущающих ускорений физические характеристики атмосферы берутся из моделей VIRA и Global Empirical Model of Venus Thermosphere. Для построения зависимости плотности атмосферы от высоты используется интерполяция кубическими сплайнами, которые позволяют в зависимости от высоты над поверхностью планеты и широты места полета КА вычислять плотность атмосферы.

Ключевые слова: движение в атмосфере, возмущенное движение, орбитальное движение КА.

Тезисы. Одним из возмущающих факторов, оказывающих влияние на движение космического аппарата (КА) на низких орбитах, является атмосфера планеты. Эти возмущения учитываются в виде ускорений в правых частях уравнений движения КА. Для моделирования движения КА требуется построение модели зависимости плотности атмосферы от высоты и положения КА над поверхностью планеты. В работе рассматривается движение КА в атмосфере Венеры.

Для построения модели плотности атмосферы физические характеристики берутся из моделей VIRA [1] (статическая модель) и

Global Empirical Model of Venus Thermosphere [2] (динамическая модель). Для построения зависимости плотности атмосферы от высоты и широты местоположения КА используется интерполяция кубическими сплайнами. Для высот от 0 км до 100 км берутся данные плотности из модели VIRА. Для высот от 33 км до 100 км атмосфера разбивается на пять секторов по широтам:

$$\varphi = 0^\circ - 30^\circ, \varphi = 30^\circ - 45^\circ, \varphi = 45^\circ - 60^\circ, \varphi = 60^\circ - 75^\circ, \varphi = 75^\circ - 90^\circ,$$

из-за разбиения атмосферы по широтам в итоге получается пять кубических сплайнов.

При расчете плотности атмосферы от 100 км до 250 км используется модель Global Empirical Model of Venus Thermosphere, в которой данные для полуденной и полуночной стороны усредняются.

Таким образом, атмосфера Венеры разбивается на слои от 0 км до 250 км. Нижняя и верхняя границы слоя соединяются между собой полиномом 3-й степени:

$$\rho_i(h) = a_i + b_i(h - h_i) + \frac{c_i}{2}(h - h_i)^2 + \frac{d_i}{6}(h - h_i)^3,$$

где i — номер слоя; h_i — высота нижней точки слоя; $\rho_i(h)$ — плотность в слое на высоте h ; a_i, b_i, c_i, d_i — коэффициенты данного слоя, вычисленные из условий непрерывности и гладкости функции, составляющей гладкий кубический сплайн. Для доопределения условий нахождения коэффициентов полиномов используется «Естественный сплайн»:

$$\ddot{\rho}(h_0) = \ddot{\rho}(h_n) = 0,$$

где $h_0 = 0$ км; $h_n = 250$ км.

Приведем найденные параметры полиномов для первых 10 слоев атмосферы, которые использовались при вычислении лобового сопротивления на широтах $\varphi = 0^\circ - 30^\circ$ (таблица).

С использованием полученной модели плотности реализована программа на языке С++, в которой моделируется движение КА шарообразной формы. Дифференциальные уравнения движения КА с учётом силы лобового сопротивления записываются в виде

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{D}}{m}, \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор КА; \mathbf{v} — вектор скорости КА; \mathbf{D} — лобовое сопротивление.

Для лобового сопротивления \mathbf{D} используется следующая модель:

$$\mathbf{D} = \frac{|v| v c_x S \rho(h, \varphi)}{2},$$

где $\rho(h, \varphi)$ — плотность атмосферы на высоте h и широте φ ; $h = |r| - R_B$, R_B — радиус Венеры; c_x — безразмерный коэффициент лобового сопротивления.

Параметры полиномов для первых 10 слоев атмосферы $\varphi = 0^\circ - 30^\circ$

$a, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$b \cdot 10^3, \frac{\text{кг}}{\text{м}^4}$	$c \cdot 10^6, \frac{\text{кг}}{\text{м}^5}$	$d \cdot 10^9, \frac{\text{кг}}{\text{м}^6}$	Номер слоя i
64,79	-3,18012	0	0	0
61,56	-3,04457	0,12146	-0,0281747	1
58,45	-2,91158	0,144524	0,023064	2
55,47	-2,7991	0,0804428	-0,0640814	3
52,62	-2,69202	0,133705	0,0532617	4
49,87	-2,5728	0,104739	-0,0289655	5
47,24	-2,49676	0,0473392	-0,0573999	6
44,71	-2,38014	0,185904	0,138565	7
42,26	-2,26267	0,0490444	-0,13686	8
39,95	-2,18919	0,0979183	0,0488739	9

Широта местоположения КА рассчитывается с помощью перехода от прямоугольной системы координат к сферической. По радиус-вектору КА рассчитывается широта и высота его полета. В зависимости от широты и высоты выбирается набор коэффициентов и вычисляется плотность. Для получения численного решения уравнения используется метод Рунге — Кутты четвертого порядка.

В результате получена статическая модель плотности атмосферы Венеры, которая является простой в программной реализации и требует малого количества шагов для вычисления плотности на заданной высоте (так как требуется посчитать значение полинома третьей степени). Полученные формулы для вычисления плотности могут использоваться для моделирования поступательного движения КА в атмосфере Венеры.

Литература

1. Kliore A., Moroz V.I., Keating G. The Venus International Reference Atmosphere. *Adv. Space Res.*, 1985.
2. Hedin A.E. Global Empirical Model of the Venus Thermosphere. *J. Geophys. Res.*, 1983, vol. 88, p. 73.

Spacecraft Motion Mathematical Modeling in Venus Atmosphere

© A.E. Bogacheva

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: bogachyova.anastasi@yandex.ru

Abstract. The paper considers the orbital motion of the spacecraft in the atmosphere of Venus for calculating the perturbing accelerations, the physical characteristics of the atmosphere are taken from the “VIRA” and “Global Empirical Model of Venus Thermosphere”. To plot the dependence of the atmospheric density on altitude, interpolation by cubic splines is used, which allow, depending on the altitude above the planet's surface and the latitude of the spacecraft's flight location to calculate the atmospheric density.

Keywords: *motion in the atmosphere, disturbed motion, orbital motion of a spacecraft.*

References

1. Kliore A., Moroz V.I., Keating G. The Venus International Reference Atmosphere. *Adv. Space Res.*, 1985.
2. Hedin A.E. Global Empirical Model of the Venus Thermosphere. *J. Geophys. Res.*, 1983, vol. 88, p. 73.

О движении шагающего аппарата против потока

© М.А.Гарбуз^{1,2*}, Л.А. Климина¹, В.А. Самсонов¹

¹НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

*E-mail: misha-garbuz@yandex.ru

Аннотация. Исследуется возможность прямолинейного движения шагающего аппарата против потока среды за счет преобразования энергии, отбираемой у этой среды. Прообразом аппарата является стопоходящая машина Чебышева [1]. Составлена математическая модель системы, описаны режимы движения, при которых корпус устройства перемещается против потока, проанализирована зависимость средней скорости корпуса на таких режимах от параметров модели, а также исследована возможность разгона аппарата из состояния покоя. В ходе доклада будут продемонстрированы разрабатываемые прототипы устройства и их трехмерные модели.

Ключевые слова: *шагающий аппарат, воздушный пропеллер, движение против ветра, устойчивость.*

Литература

Чебышев П.Л. *Избранные труды*. Москва, Изд-во Академии Наук СССР, 1955, 929 с.

On the motion of a walking apparatus against the flow

© Garbuz M.A.^{1,2*}, Klimina L.A.¹, Samsonov V.A.¹

¹Institute of Mechanics LMSU, Moscow, Russia

²Chair of mechanics and mathematics LMSU, Moscow, Russia

*E-mail: misha-garbuz@yandex.ru

Abstract. We study the possibility of a straight motion against the flow due to the energy of this flow for a walking apparatus. The Chebyshev's plantigrade machine became the prototype of apparatus. We constructed a mathematical model of the system, described regimes of motion against the wind flow, analyzed the dependence of body average speed on the model parameters, and explored the possibility of acceleration from the rest against the wind. During the report, we will show plastic prototypes and their 3D models.

Keywords: *walking apparatus, wind propeller, motion against the wind, stability.*

References

Chebyshev P.L. *Selected works*. Moscow, Publishing House of the Academy of Science, USSR, 1955, 929 p.

Влияние внешней нагрузки в задаче о двухзвенном аэродинамическом маятнике

© А.П. Голуб*, Ю.Д. Селюцкий

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): holub.imech@gmail.com

Аннотация. Исследуется влияние внешней нагрузки, на движение двухзвенного аэродинамического маятника. Изучаемая система подробно описана в работе [1]. Было показано, что при определенных параметрах, данный объект можно использовать как ветроэнергетическую установку. Есть различные способы преобразования механической энергии в электрическую. В отличие от работы [2], внешняя нагрузка моделируется, как генератор подключенный к внешней цепи. Это позволяет исследовать динамику системы с влиянием внешней нагрузки на нее.

Ключевые слова: *аэроупругость, ветроэнергетика, электромеханика.*

Литература

1. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. О влиянии жесткости крепления на динамику двухзвенного аэродинамического маятника. *Доклады Академии наук*, 2018, т. 481, № 3, с. 254–257.
2. Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Lin C.H. Piezoaeroelastic system on the basis of a double aerodynamic pendulum. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2021, vol. 101, art. no. 202000092-1-202000092-12.

Influence of external load in the problem of a double-link aerodynamic pendulum

© A.P. Holub*, Yu.D. Seliutskiy

Institute of Mechanics Lomonosov MSU, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): holub.imech@gmail.com

Abstract. The influence of external load on the movement of a double-link aerodynamic pendulum is investigated. The system under study is described in detail in [1]. It was shown that with certain parameters, this object can be used as a wind power station. There are various ways to convert mechanical energy into electrical energy. Unlike work [2], the external load is modeled as a generator connected to an external circuit. This allows you to study the dynamics of the system with the influence of external load on it.

Keywords: *aeroelastic, wind power engineering, electromechanics.*

References

1. Selyutskiy Yu.D., Holub A.P. On the influence of mounting stiffness on the dynamics of the a double-link aerodynamic pendulum. *Doklady Physics*, 2018, vol. 481, no. 3, pp. 276–278.
2. Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Lin C.H. Piezoaeroelastic system on the basis of a double aerodynamic pendulum. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2021, vol. 101, art. no. 202000092-1-202000092-12.

Динамика движения наземных средств по воде

© А.П. Голуб*, А.В. Бойко, В.А. Ерошин, В.А. Самсонов

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): holub.imech@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается движение объекта по поверхности воды за счет тяги и подъемной силы создаваемой гусеницей. В отличие от колесной машинки, гусеница создает большую тягу. Изучается плоскопараллельное движение и во все время объект

наклонен к горизонтальной поверхности под некоторым постоянным углом (в данной задаче рассматривались малые углы наклона). Таким образом, имеется две степени свободы — это координаты центра масс. Дана оценка начальной скорости и угловой скорости вращения гусеницы, при которой машинка не будет тонуть. Приведены результаты моделирования и получен диапазон значений, при которых возможно движение по поверхности воды.

Ключевые слова: гидродинамика, глиссирование.

Литература

Boyko A.V., Golub A.P., Yeroshin V.A., Samsonov V.A. Hydrodynamics of new high-speed surface systems. *Journal of Physics: Conference Series*.

Dynamics of movement of ground vehicles on water

© A.P. Holub*, A.V. Boyko, V.A. Yeroshin, V.A. Samsonov

Institute of Mechanics Lomonosov MSU, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): holub.imech@gmail.com

Abstract. Consider the movement of an object on the surface of the water due to the thrust and the lifting force created by the track. Unlike a wheeled vehicle, the track creates more traction. A plane-parallel motion is studied and at all times the object is inclined to the horizontal surface at a certain constant angle (in this topic, small angles of inclination were considered). Thus, there are two degrees of freedom - these are the coordinates of the center of mass. An estimate is given of the initial speed and angular speed of rotation of the track, at which the machine will not sink. The simulation results are given and the range of values for which movement on the water surface is possible is obtained.

Keywords: hydrodynamics, hydroplaning.

References

Boyko A.V., Golub A.P., Yeroshin V.A., Samsonov V.A. Hydrodynamics of new high-speed surface systems. *Journal of Physics: Conference Series*.

Влияние дополнительных условий на спектр частот в задачах механики

© А.А. Илюхин*, А.Г. Клово, Г.В. Куповых

Южный федеральный университет, Таганрог, Россия

*E-mail: aleilyukhin@yandex.ru

Аннотация. В работе рассмотрены задачи определения влияния дополнительных условий на спектр частот в задачах механики, в которых помимо стандартных граничных условий налагаются дополнительные условия во внутренних точках. Задача ставится таким образом, что соответствующий оператор является положительно определенным и самосопряженным. Для решения поставленных задач используются дифференциальные и матричные свойства функций обобщенных тригонометрических систем. Исследуются вопросы разрешимости подобных задач и строятся их решения.

Ключевые слова: спектр, дифференциальный оператор, обобщенные тригонометрические системы, внутренняя граница, собственные значения.

Введение. В различных задачах (видимо, впервые в [1]), связанных с исследованием прочности конструкций, используются функции, четвертые производные которых пропорциональны этим функциям.

В 1980 г. было введено понятие ОТС — обобщенной тригонометрической системы [2]. Это наборы функций, содержащие произвольное число функций, равное порядку системы. При этом функции, удовлетворяющие определенным начальным условиям, при дифференцировании последовательно переходят друг в друга. Последняя функции при взятии производной переходит в первую со знаком «плюс» (системы первого типа) или со знаком «минус» (системы второго типа).

Подобные наборы функций были в 2013 г. введены в работе [3] для исследования на прочность пластин и оболочек. Дальнейшее развитие теория ОТС получило в исследованиях [4, 5] и других работах. Построенная теория была использована в работе [6] для решения одной спектральной задачи, в которой помимо стандартных условий на границе области рассматривалось дополнительное условия во внутренней точке. В данной работе исследуется влияние дополнительных условий на спектр частот и влияние смещения точек приложения этих условий на спектральные свойства системы.

1. Постановка спектральных задач.

Пусть задан оператор $L = \frac{d^4}{dx^4}$ в области $D_{l,0,h} = (-l+h; 0) \cup \cup(0;l+h)$, $0 \leq h < l$ с внешней границей $\Gamma = \pm l$ и внутренней границей $\gamma = 0$, на которой может быть наложено дополнительное условие. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$X^{IV}(x) = \lambda X(x), \quad (1)$$

$$X''(x)|_{x \in \Gamma} = X'''(x)|_{x \in \Gamma} = 0, \quad (2)$$

$$X(x)|_{x \in \gamma} = 0 \quad (3)$$

для оператора L с дополнительными условиями на границе и во внутренней точке.

Определение 1. Решением задачи (1)–(3) мы будем называть функцию $X(x)$, для которой во внутренних точках области $D_{l,0,h}$ выполнено условие (1), условия непрерывности $X(x)$, $\frac{dX(x)}{dx}$, $\frac{d^2X(x)}{dx^2}$.

При этом на внешней границе Γ выполнено условие (2), при $x \in \gamma$ выполнено условие (3).

Для скалярного произведения функций $u(x)$ и $v(x)$, определяемого формулой

$$(u(x), v(x)) = \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx \quad (4)$$

справедливо утверждение, проверяемое непосредственно интегрированием.

Теорема 1. При условиях (2)–(3) с введенным скалярным произведением оператор $L = \frac{d^4}{dx^4}$ будет положительно определенным и самосопряженным.

2. Некоторые свойства функций ОТС и их квадратичных форм.

Введем обобщенные тригонометрические системы функций.

Определение 2. Функции $K_{n,1}(x)$, $K_{n,2}(x)$, ..., $K_{n,n}(x)$ образуют обобщенную тригонометрическую систему порядка n , $n \in N$ первого типа ($o.m.c.[n;1]$), если выполнены свойства: $(K_{n,i}(x))' = K_{n,i+1}(x)$, $K_{n,i}(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $(K_{n,n}(x))' = K_{n,1}(x)$, $K_{n,n}(0) = 1$.

Определение 3. Функции $\Phi_{n,1}(x)$, $\Phi_{n,2}(x)$, ..., $\Phi_{n,n}(x)$ образуют обобщенную тригонометрическую систему порядка n , $n \in N$ второго типа ($o.m.c.[n;2]$), если выполнены свойства: $(\Phi_{n,i}(x))' = \Phi_{n,i+1}(x)$, $\Phi_{n,i}(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, $(\Phi_{n,n}(x))' = -\Phi_{n,1}(x)$, $\Phi_{n,n}(0) = 1$.

Важную роль в изучении свойств функций ОТС играют свойства их квадратичных форм. Для функций $o.m.c.[n;1]$ построим квадратичную форму

$$A(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} K_{n,i}(x) K_{n,j}(x). \quad (5)$$

Квадратичной форме (5) соответствует матрица

$$A^0 = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n. \quad (6)$$

При взятии производной от квадратичной формы (5) в силу дифференциальных свойств ОТС соответствующая матрица A^1 примет вид

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2a_{1,2n} & a_{11} + a_{2,2n} & \dots & a_{1,2n-2} + a_{2n-1,2n} & a_{1,2n-1} + a_{2n,2n} \\ a_{11} + a_{2,2n} & 2a_{12} & \dots & a_{1,2n-1} + a_{2,2n-2} & a_{1,2n} + a_{2,2n-1} \\ a_{12} + a_{3,2n} & a_{13} + a_{22} & \dots & a_{2,2n-1} + a_{3,2n-2} & a_{2,2n} + a_{3,2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,2n-2} + a_{2n-1,2n} & a_{1,2n-1} + a_{2,2n-2} & \dots & 2a_{2n-2,2n-1} & a_{2n-2,2n} + a_{2n-1,2n-1} \\ a_{1,2n-1} + a_{2n,2n} & a_{1,2n} + a_{2,2n-1} & \dots & a_{2n-2,2n} + a_{2n-1,2n-1} & 2a_{2n-1,2n} \end{pmatrix}.$$

При изучении матриц, соответствующих квадратичной форме (5) и ее производных, обратим внимание на следующие вопросы. Во-первых, может ли быть такая ситуация, что ненулевой матрице (6) соответствует нулевая матрица A^1 ? В работах [4, 5] было доказано, что такое произойдет тогда и только тогда, когда ОТС является системой четного порядка. Во-вторых, когда матрице (6) будет пропорциональна матрица $A^{(n)}$, порождаемая n -й производной квадратичной формы (5)? В ряде случаев получены соответствующие формулы. Например, для систем третьего порядка

$$\Phi_{3,1}(x) = K_{3,2}^2(x) - K_{3,1}(x)K_{3,3}(x)$$

и для систем четвертого порядка используемая далее формула

$$\Phi_{4,1}(x) = \sqrt{2} \left(K_{4,2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) K_{4,3} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) - K_{4,1} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) K_{4,4} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right). \quad (7)$$

3. Решение спектральной задачи (1)–(3).

Ненулевое решение задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$X(x) = \begin{cases} C_1^- K_{4,1}(\sqrt[4]{\lambda}x) + C_2 K_{4,2}(\sqrt[4]{\lambda}x) + C_3 K_{4,3}(\sqrt[4]{\lambda}x), & -l + h \leq x < 0, \\ C_1^+ K_{4,1}(\sqrt[4]{\lambda}x) + C_2 K_{4,2}(\sqrt[4]{\lambda}x) + C_3 K_{4,3}(\sqrt[4]{\lambda}x), & 0 \leq x \leq l + h. \end{cases}$$

Заметим, что при этом автоматически выполнены условия (1) и (3). Что касается условий (2), то они равносильны выполнению соотношений

$$\left\{ \begin{array}{l} -C_1^- K_{4,3}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) + C_2 K_{4,4}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) - C_3 K_{4,1}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) = 0, \\ C_1^- K_{4,4}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) - C_2 K_{4,1}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) + C_3 K_{4,2}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) = 0, \\ C_3^+ K_{4,3}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) + C_2 K_{4,4}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) + C_3 K_{4,1}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) = 0, \\ C_4^+ K_{4,4}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) + C_2 K_{4,1}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) + C_3 K_{4,2}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

Определитель СЛАУ (7) при поиске ненулевого решения должен быть равен 0. Это приводит нас к характеристическому уравнению

$$\begin{aligned} & \left(K_{4,1}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) K_{4,4}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) - K_{4,2}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) K_{4,3}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) \right) \times \\ & \quad \times \left(K_{4,4}^2(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) - K_{4,1}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) K_{4,3}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) \right) + \\ & + \left(K_{4,1}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) K_{4,4}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) - K_{4,2}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) K_{4,3}(\sqrt[4]{\lambda}(l+h)) \right) \times \\ & \quad \times \left(K_{4,4}^2(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) - K_{4,1}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) K_{4,3}(\sqrt[4]{\lambda}(l-h)) \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Воспользовавшись соотношениями, вытекающими из (7), уравнение (9) можно записать в более простом виде

$$\begin{aligned} & \left(\Phi_{4,4}(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\lambda}(l+h)) + 1 \right) \cdot \Phi_{4,1}(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\lambda}(l-h)) + \\ & + \left(\Phi_{4,4}(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\lambda}(l-h)) + 1 \right) \cdot \Phi_{4,1}(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\lambda}(l+h)) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

4. Влияние смещения точки крепления на спектр оператора.

Заметим, что при $h = 0$ уравнение (10) примет вид

$$\Phi_{4,1}(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\lambda}l) \cdot \left(\Phi_{4,4}(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\lambda}l) + 1 \right) = 0. \quad (11)$$

При этом корнями первого и второго множителей являются соответственно корни уравнений $th\sqrt[4]{\lambda}l = \operatorname{tg}\sqrt[4]{\lambda}l$, $ch\sqrt[4]{\lambda}l \cdot \cos\sqrt[4]{\lambda}l = -1$.

Представим себе следующую ситуацию. Имеется стержень $[-l; l]$, который надо закрепить в центральной точке. Но можно предположить, что крепление расположено на расстоянии $h > 0$ от центра пластины, что приводит нас к рассматриваемой задаче. Рассмотрим функцию

$$g(t, \xi) = \Phi_{4,1}(t+\xi) \left(\Phi_{4,4}(t-\xi) + 1 \right) + \Phi_{4,1}(t-\xi) \left(\Phi_{4,4}(t+\xi) + 1 \right) \equiv 0. \quad (12)$$

Нашей задачей является исследование неявной зависимости t от ξ в тождестве (12). Для нахождения производной неявной функции вычислим

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t} &= \Phi_{4,2}(t+\xi)(\Phi_{4,4}(t-\xi)+1) + \\ &+ \Phi_{4,2}(t-\xi)(\Phi_{4,4}(t+\xi)+1) - 2\Phi_{4,1}(t+\xi)\Phi_{4,1}(t-\xi), \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} &= \Phi_{4,2}(t+\xi)(\Phi_{4,4}(t-\xi)+1) - \Phi_{4,2}(t-\xi)(\Phi_{4,4}(t+\xi)+1).\end{aligned}$$

Заключение. Полученные соотношения позволяют исследовать зависимость спектра частот поставленной задачи в зависимости от отклонения точки фиксации объекта от центра симметрии.

Литература

1. Крылов А.Н. *О расчете балок, лежащих на упругом основании*. Ленинград, Издательство АН СССР, 1931.
2. Клово А.Г. *Задачи на собственные значения для одного линейного параметризованного оператора*. Деп. ВИНТИ № 5428-80. Москва, 1980, 34 с.
3. Виноградов Ю.И. *Функции Коши–Крылова в расчетах на прочность пластин и оболочек*. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2013, № 8, с. 15–19.
4. Клово А.Г. *Некоторые свойства обобщенных тригонометрических систем*. «Донецкие чтения 2018: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности». *Материалы III Международной научной конференции. ДНР. Донецк. Том 1. Физико-математические и технические науки*, 2018, с. 349–350.
5. Клово А.Г., Куповых Г.В., Ляпунова И.А., Чистякова Т.А., Кузнецов А.Е., Кузнецов Р.Е. *Свойства ОТС произвольного порядка*. *Материалы V Международной научной конференции «Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности». Физико-математические и технические науки. Часть I*. ДНР. Донецк, 2020, с. 155–157.
6. Клово А.Г., Илюхин А.А., Куповых Г.В. *Применение обобщенных тригонометрических систем в спектральных задачах*. *Материалы XII Международной научно-технической конференции «Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование» (ИУСМКМ-2021) в рамках VII Международного научного форума Донецкой народной республики к 100-летию ДонНТУ*. Донецк, ДОННТУ-2021, с. 105–109.

Influence of additional conditions on the frequency spectrum in tasks of mechanics

© А.А. Илюхин*, А.Г. Клово, Г.В. Куповых

Southern Federal University, Taganrog, Russia

*E-mail: aleilyukhin@yandex.ru

Abstract. The problems of determining the effect of additional conditions on the frequency spectrum in problems of mechanics in which, in addition to standard boundary conditions, additional conditions are imposed at internal points are considered. The task is posed in such a way

that the corresponding operator is positive definite and self-adjoint. Differential and matrix properties of functions of generalized trigonometric systems are used to solve the tasks. The issues of solvability of such problems are investigated and their solutions are constructed.

Keywords: *spectrum, differential operator, generalized trigonometric systems, internal boundary, eigenvalues.*

References

1. Krylov A.N. *On the calculation of beams lying on an elastic base*. L., ed. USSR Academy of Sciences, 1931.
2. Klovo A.G. *Eigenvalue problems for one linear parametrized operator*. Dep. VINITI no. 5428-80. Moscow, 1980, 34 p.
3. Vinogradov Yu.I. Cauchy–Krylov functions in calculations for the strength of plates and shells. *News of higher educational institutions. Mechanical Engineering*, 2013, no. 8, pp. 15–19.
4. Klovo A.G. Some properties of generalized trigonometric systems. *Donetsk Readings 2018: education, science, innovation, culture and Modern Challenges. Materials of the III International Scientific Conference*. DNR, Donetsk, vol. 1, Physical, Mathematical and Technical Sciences, 2018, pp. 349–350.
5. Klovo A.G., Kupov G.V., Lyapunova I.A., Chistyakova T.A., Kuznetsov A.E., Kuznetsov R.E. Properties of GTS of arbitrary order. *Materials of the V International Scientific Conference "Donetsk Readings 2020: education, science, innovation, culture and Modern challenges". Physical, mathematical and technical sciences. Part I*. DNR. Donetsk, 2020, pp. 155–157.
6. Klovo A.G., Ilyukhin A.A. Kupovykh G.V. Application of generalized trigonometric systems in spectral problems. *Materials of the XII International Scientific and Technical Conference Informatics, Control Systems, Mathematical and Computer Modeling (IUSMCM-2021) within the framework of the VII International Scientific Forum of the Donetsk People's Republic for the 100th anniversary of DonNTU*. Donetsk, DONNTU-2021, pp. 105–109.

Применение метода стабилизации неголономных связей к задачам Воронца

© И.Е. Каспирович

Российский университет дружбы народов (РУДН), Москва, Россия
E-mail: kaspirovich.ivan@mail.ru

Аннотация. Накопление ошибок при численном интегрировании систем уравнений движения с механическими связями приводит к неустойчивости численного решения относительно уравнений связей. Как было показано Й. Баумгарте применение метода стабилизации позволяет ограничить величину данного накопления. В работе представлено обобщение метода стабилизации связи для задач динамики неголономных систем. В данной работе приводится обобщение

метода стабилизации для задачи неголономной динамики, уравнения движения которых записаны в виде уравнений Воронца.

Ключевые слова: неголономные связи, стабилизация связей, уравнения Воронца.

Application of the method of stabilization of nonholonomic constraints to Voronets' problems

© I.E. Kaspirovich

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: kaspirovich.ivan@mail.ru

Abstract. The accumulation of errors in the numerical integration of systems of equations of motion with mechanical constraints leads to instability of the numerical solution with respect to the constraint equations. As shown by J. Baumgarte, the application of the stabilization method allows limiting the amount of this accumulation. The paper presents a generalization of the constraint stabilization method for problems of dynamics of nonholonomic systems. This paper presents a generalization of the stabilization method for the problem of nonholonomic dynamics, the equations of motion of which are written in the form of Voronets equations.

Уточнение параметра модели Ходжкина — Хаксли второго порядка

© В.В. Александров, Д.И. Бугров, А.С. Клюев*

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
*E-mail (докладчика): fm_klyuev@mail.ru

Аннотация. Рассматривается модель Ходжкина — Хаксли с модификациями Сото — Александрова — система нелинейных дифференциальных уравнений 3-го порядка. В окрестности положения равновесия, соответствующего бифуркации Андронова — Хопфа, проводится редукция системы ко 2-му порядку и алгебраическому уравнению. Этот результат позволяет обосновать переход к модели 2-го порядка с уточнением значения параметра.

Ключевые слова: модель Ходжкина — Хаксли, бифуркация Андронова — Хопфа, инвариантное многообразие.

Литература

Александров В.В., Михалева Е.Ю. и др. О модификации математической модели Ходжкина–Хаксли для первичных нейронов вестибулярного аппарата. *Вестник МГУ Сер. 1. Матем. Мех.*, 2006, № 5, с. 65–68.

Parameter value refinement of the Hodgkin – Huxley model of the second order

© V.V. Alexandrov, D.I. Bugrov, A.S. Kliuev*

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): fm_klyuev@mail.ru

Abstract. Consider a nonlinear ordinary differential system of the third order — the Hodgkin – Huxley model with modifications of Soto – Alexandrov. System is reduced to the second order and algebraic equation in the vicinity of the equilibrium point which corresponds to the Andronov – Hopf bifurcation. This resulted in the transition to the second order model with the value refinement.

Keywords: *the Hodgkin – Huxley model, Andronov – Hopf bifurcation, invariant manifold.*

References

Alexandrov V.V., Mikhaleva E.Y., etc. On the modification of the Hodgkin–Huxley mathematical model for primary neurons of the vestibular apparatus. *MSU Vestnik. Ser. 1*, 2006, no. 5, pp. 65–68.

Применение теорем Каменкова и Малкина к задачам устойчивости систем с геометрическими связями

© А.Я. Красинский^{1,2}

¹Московский государственный университет пищевых производств, Москва, Россия

²Московский авиационный институт, Москва, Россия

E-mail: krasinsk@mail.ru

Аннотация. С использованием продифференцированных уравнений геометрических связей применением теоремы Каменкова об устойчивости в (существенно) особенном случае нескольких нулевых корней и теоремы Малкина об устойчивости при постоянно действующих возмущениях установлены достаточные условия (условной) асимптотической устойчивости положений равновесия и неасимптотической устойчивости стационарных движений.

Ключевые слова: *критический случай, условная устойчивость.*

За счет специальной структуры полученных в переменных Рауса уравнений возмущенного движения достигнуто существенное упрощение применения теоремы Каменкова [1] об устойчивости в (существенно) особенном случае нескольких нулевых корней и теоремы

Малкина [2] об устойчивости при постоянно действующих возмущениях для получения достаточных условий (условно) асимптотической устойчивости положений равновесия и неасимптотической устойчивости стационарных движений.

Литература

1. Каменков Г.В. *Устойчивость и колебания нелинейных систем*. Собр. соч., т. 2. Москва, Наука, 1972.
2. Малкин И.Г. *Теория устойчивости движения*. Москва, Наука, 1966.

Application of the theorems of Kamenkov and Malkin to problems of stability of motions of systems with geometric constraints

© А.Ya. Krasinskiy^{1,2}

¹Moscow State University of Food Production, Moscow, Russia

²Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

E-mail: krasinsk@mail.ru

Abstract. Using the differentiated equations of geometric constraints, applying the Kamenkov theorem on stability in the (essentially) special case of several zero roots and Malkin's theorem on stability under constantly acting perturbations, sufficient conditions for (conditional) asymptotic stability of equilibrium positions and non-asymptotic stability of stationary motions are established.

Keywords: *critical case, conditional stability.*

References

1. Kamenkov G.V. *Stability and Oscillations of Nonlinear Systems*. Collected Works, vol. 2, Moscow, Nauka, 1972.
2. Malkin I.G. *Stability Theory of Motion*. Moscow, Nauka, 1966.

О стабилизации перевернутого маятника, установленного на вязкоупругом основании

© П.А. Кручинин, А.В. Павлов, А.Е. Халиев

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается задача стабилизации перевернутого маятника, шарнирно соединенного с площадкой, установленной на вязкоупругом основании. Такая система призвана моделировать пробу с удержанием равновесия человеком, стоящим на пластине вспе-

ненного полиуретана, используемую при биомеханических исследованиях. Управлением в системе является ограниченный по абсолютной величине момент в межзвенном шарнире маятника. Описанная модель соответствует «голеностопной» стратегии, рассматриваемой в биомеханических исследованиях процесса удержания позы человеком. Численно показано, что линеаризованная система является вполне управляемой. Найдена область управляемости системы при ограниченном по абсолютной величине управляющем моменте. Построено управление, стабилизирующее неустойчивое положение равновесия с максимальной областью притяжения. Это управление таково, что все его ресурсы используются для подавления единственной неустойчивой моды. Найдены границы области притяжения состояния равновесия при этом управлении.

Ключевые слова: удержание позы, перевернутый маятник, неустойчивая опора, область управляемости, стабилизация.

Для решения ряда задач современной нейрофизиологии требуется сравнительный анализ изменения постурологических характеристик людей, удерживающих равновесие на неустойчивом основании. Для планирования эксперимента и анализа его результатов полезно использование математических моделей движения человека. Эти модели должны учитывать, что поддержание человеком вертикальной позы осуществляется приложением управляющих воздействий (моментов) в суставах его конечностей. Они могут использоваться при решении задач синтеза управления, минимизирующего тот или иной функционал. Результаты решения задачи оптимизации можно сопоставлять с результатами экспериментов.

Одним из движений, требующих подобного анализа, является удержание человеком равновесия на подвижной опоре в виде пластины вспененного полиуретана, используемое при биомеханических и медицинских исследованиях [1–4]. В качестве модели такого движения предлагается использовать задачу стабилизации перевернутого маятника, шарнирно соединенного с опорой. Эта опора установлена на вязкоупругом основании, как показано на рис. 1. Управлением в системе является ограниченный по абсолютной величине момент в межзвенном шарнире маятника. Описанная модель соответствует «голеностопной» стратегии, рассматриваемой в биомеханических исследованиях процесса удержания позы человеком, стоящим на неустойчивой опоре. Поставленная задача аналогична рассмотренной ранее в работах [5–6] задачам об удержании вертикального положения равновесия маятника, установленного на качелях seesaw. Будем рассматривать задачу о плоском движении такой системы. Для ана-

лиза малых движений такой системы в окрестности положения равновесия записаны уравнения ее движения под действием сил тяжести и ограниченного по величине управляющего момента L в шарнире S .

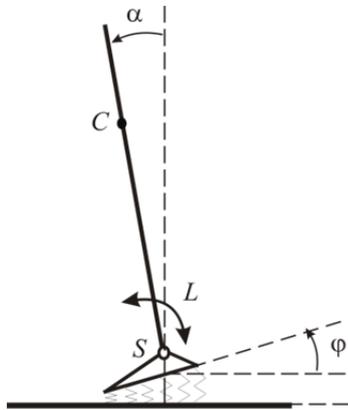


Рис. 1. Модель маятника на вязкоупругом основании

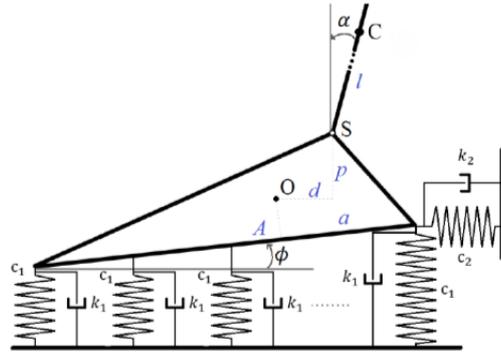


Рис. 2. Модель основания

Рассмотрим перевернутый маятник массой M с центром масс в точке C . Маятник соединен со стопой шарнирным соединением в точке S . Центр масс стопы находится в точке O , как показано на рис. 2. Введем два угла: φ — угол между «подошвой» стопы и горизонталью, α — угол между маятником и вертикалью; y_0, z_0 — координаты точки O .

Пластину вспененного полиуретана будем моделировать бесконечным количеством вязкоупругих соединений, обладающих удельной жесткостью c_1 и удельной вязкостью k_1 в вертикальном направлении, а c_2 и k_2 соответственно в горизонтальном.

Обозначим длину стопы A , а расстояние от правого края стопы до проекции точки O за a . Параметры l — расстояние от шарнира до центра масс стержня, p, d — смещения точки O от точки S . В качестве обобщенных координат выберем величины $\varphi, \alpha, y_0, z_0$.

Уравнения Лагранжа для описанной системы в матричном виде имеют вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{K}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) + \mathbf{D}L. \quad (1)$$

Здесь приняты обозначения $\mathbf{q} = (\varphi, \alpha, y_0, z_0)^T$, $\dot{\mathbf{q}}^2 = (\dot{\varphi}^2, \dot{\alpha}^2, 0, 0)^T$, $\mathbf{S}(\mathbf{q}) = (\sin\varphi, \sin\alpha, y_0, z_0)^T$. Положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}_p$ системы (1) при отсутствии управления $L = 0$ определяется соотношениями

$$C(\mathbf{q}_p)S(\mathbf{q}_p) = Q(\mathbf{q}_p). \quad (2)$$

Выведенная нелинейная система уравнений линеаризуется в окрестности найденного положения равновесия(2) и имеет вид

$$A\ddot{\mathbf{x}} + K\dot{\mathbf{x}} + C\mathbf{x} = DL. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{x} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_p$ — вектор отклонений обобщенных координат от их значений в положении равновесия, а A , K , C и D — постоянные матрицы, компоненты которых зависят от масс-геометрических параметров системы и величин углов α_p и φ_p .

Для такой модели движения строится оптимальное управление, максимизирующее область притяжения вертикального положения равновесия маятника с использованием подхода, использованного в [5].

При построении алгоритма стабилизации считаем, что момент ограничен по абсолютной величине:

$$|L| \leq L_o, \quad (4)$$

где $L_o = \text{const}$.

Рассмотрим случай, когда система (1) при $L = 0$ имеет одно положительное собственное значение μ , одно отрицательное и три пары комплексно сопряженных корней в левой полуплоскости. Для такой системы по методике, описанной в [5], построим управление, стабилизирующее неустойчивое нулевое положение системы (2). Преобразуем систему (3) к жордановым переменным и выделим из нее отвечающее положительному собственному значению μ уравнение, которое описывает поведение «неустойчивой» жордановой координаты y

$$\dot{y} = \mu y + pL. \quad (5)$$

В этом уравнении для стабилизируемой системы $p \neq 0$. Управление зададим в виде $L = -\gamma y$, где постоянный коэффициент γ удовлетворяет неравенству $\mu - p\gamma < 0$. Это управление обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения уравнения (5) и всей системы (3). При ограничении (4) построенное управление становится нелинейным. Оно обеспечивает максимально возможную область притяжения тривиального решения уравнения (5) и линеаризованной системы (3). Эта область описывается неравенством:

$$|y| < L_o |p| / \mu. \quad (6)$$

Неравенство (6) ограничивает только одну жорданову переменную y . Однако эта переменная является линейной комбинацией всех восьми фазовых переменных системы (3). Поэтому неравенство (6) накладывает условие на все эти фазовые переменные.

Проведем **сравнение аналитических оценок с результатами тестирования**. Рассмотрим полученную систему численно. Для простоты дальнейшего сравнения будем использовать параметры тела, как в работе [5]. Массы примем равными $M = 70$ кг, $m = 2$ кг, длина стопы $A = 0,26$ м, высота центра масс $l = 0,87$ м, $a = 0,11$ м, $d = 0,05$ м, $h = 0,03$ м, $p = 0,07$ м. Момент инерции маятника $J_p = 100,5$ кг · м². Момент инерции стопы $J_c = 0,039$ кг · м². Выберем значение удельного коэффициента вязкого трения $k_1 = k_2 = 3,8$ нс/м², а удельные коэффициенты жесткости: $c_1 = c_2 = 78$ кн/м². Используя эти параметры, получим координаты положения равновесия: $\varphi_{st} = -0,3$, $\alpha_{st} = 0$, $y_{st} = 0,007$ м, $z_{st} = -0,04$ м. Отметим, что для использованных значений все предположения об управляемости системы и о структуре ее корней выполняются. Положительный корень системы принимает значение $\mu = 3,02$ с⁻¹.

Сравним найденные теоретически границы области притяжения для построенного управления с амплитудами колебаний здорового человека, стоящего на пластине вспененного полиуретана. Соотношение (6) задает в восьмимерном фазовом пространстве системы (3) множество, ограниченное двумя гиперплоскостями. Эти гиперплоскости пересекают координатную ось α при $\alpha = \pm\alpha_{sup}$. Оценка значения α_{sup} для приведенных масс-инерционных и геометрических параметров, приближенно соответствующих человеку, проходившему тестирование, составляет $\alpha_{sup} = 0,07$. В качестве величины максимального момента L_0 выбиралось значение момента в голеностопном суставе, необходимое для удержания равновесия тела (маятника) при его отклонении от вертикали на 2°. Амплитуды изменения углов у человека, стоящего на пластине пенополиуретана с открытыми глазами, составляют $\alpha_A \approx 0,03$, а с закрытыми — $\alpha_A \approx 0,045$. Эти величины сопоставимы с размерами построенной области притяжения.

Таким образом, есть основания предполагать, что построенное управление можно использовать для моделирования отдельных аспектов движения человека при удержании им равновесия на подвижной опоре.

Публикация подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (Распоряжение Правительства РФ от 24 октября 2020 г. № 2744-р).

Литература

1. Patela M., Fransson P.A., Lushb D., Gomez S. The effect of foam surface properties on postural stability assessment while standing. *Gait & Posture*, 2008, vol. 28, pp. 649–656.
2. Талис В.Л., Капитонов М.А., Максимова Е.В. Мышечные постэффекты и поддержание равновесия у здоровых и больных с нарушениями сенсомоторной интеграции. *Журнал высшей нервной деятельности*, 2011, т. 61, № 4, с. 413–422.
3. Амирова Л.Е., Шишкин Н.В., Китов В.В. и др. Роль зрительной обратной связи в контроле вертикальной устойчивости человека до и после 5-суточной «сухой» иммерсии. *Материалы XXIII съезда Физиологического общества им. И.П. Павлова с международным участием, Воронеж, 18–22 сентября 2017 года*. Воронеж, Издательство «Истоки», 2017, с. 282–284.
4. Mademli L., Mavridi D., Bohm S., et al. Standing on unstable surface challenges postural control of tracking tasks and modulates neuromuscular adjustments specific to task complexity. *Scientific Reports*, 2021, vol. 11, art. no. 6122. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-84899-y>
5. Гугаев К.В., Кручинин П.А., Формальский А.М. Модель удержания человеком равновесия на подвижной опоре в виде пресс-папье. *Прикладная математика и механика*, 2016, т. 80, № 4, с. 450–460.
6. Кручинин П.А., Сакаев Р.М. Об учете расположения голеностопного сустава в модели удержания человеком равновесия на подвижной опоре в виде пресс-папье. *XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 т. Т. 4: Материалы симпозиумов*. Уфа, РИЦ БашГУ, 2019, с. 160–161.

On stabilization of an inverted pendulum mounted on viscoelastic base

© P.A. Kruchinin, A.V. Pavlov, A.E. Khaliev

Moscow Lomonosov State University, Moscow, Russia

Abstract. The problem of stabilizing an inverted pendulum pivotally connected to a platform mounted on a viscoelastic base. This system is designed to simulate a test with maintaining equilibrium by a person standing on a foamed polyurethane plate used in biomechanical studies. The control in the system is the torque in the cylindrical hinge of the pendulum. This torque is limited in absolute value. The described model corresponds to the “ankle” strategy considered in biomechanical studies of the posture control by a person standing on an unstable support. It shows numerically that the linearized system, although it has a deficit in the number of control inputs, is controllable. The region of controllability of the system is found with a control torque limited in absolute value. A control is constructed that stabilizes an unstable equilibrium position with a maximum region of attraction. This control is such that all of its resources are used to suppress the only unstable mode. The boundaries of the region of attraction of the equilibrium state under this control are found. The behavior of the stabilized system has been studied. The results of the analysis

allow us to compare the solution of the problem under consideration and the solution of the problem of maintaining equilibrium by a person standing on seesaw.

Оптимальный выход робота из аварийного положения

© Ю.Ф. Голубев^{1,2}, В.Д. Куликова^{1*}, Е.В. Мелкумова¹

¹МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): kulikovavictoriadm@gmail.com

Ключевые слова: управление, оптимизация, аварийная ситуация, переворот корпуса, раскачивание.

Введение. При движении робота по бездорожью могут возникать разные аварийные ситуации. При отсутствии поломок наиболее катастрофичным представляется случай, когда из-за падения робот оказывается в перевернутой позиции с ногами, ориентированными вверх, и корпусом, лежащим на опорной плоскости. В работе проводится исследование оптимального переворота робота за счет движения ног. Данная работа развивает результаты, полученные в препринте [1, 3], в части построения алгоритмов управления поведением робота в экстремальных ситуациях. В отличие от [1, 3], где переворот робота осуществляется с помощью кусочно-постоянного управления, искомая функция положения ног робота в данной работе относится к классу кусочно-непрерывных функций.

Постановка задачи. Рассматривается плоская модельная задача, в которой корпус робота представляет собой сегмент круга, лежащий на горизонтальной прямой. Сегмент может перекатываться без проскальзывания по опорной прямой, поворачиваясь относительно центра круга на угол φ , отсчитываемый от вертикального радиуса, направленного в точку касания сегмента с прямой. К правому концу хорды сегмента прикреплен стержень (нога), который может вращаться относительно сегмента на угол ψ . Угол ψ отсчитывается от внешнего перпендикуляра к хорде сегмента и выбирается в качестве управляемой функции. Управление ограничено: $|\psi| \leq \frac{\pi}{2}$. Целью работы

является получение закона оптимального управления аналитически. Для поиска оптимального управления применен оригинальный метод, разработанный Ю.Ф. Голубевым для оптимизации амплитуды колебательных систем [2, 4].

Для применения принципа оптимального раскачивания требуется предусмотреть знакопостоянство вспомогательных функций. Это

может быть сделано за счет ограничений на параметры системы. Например, можно сделать достаточно большой массу сегмента или взять $m_2 = 2m_1$ и $\rho < 2R \sin(\alpha/2)$. Здесь m_1 — масса стержня; m_2 — масса материальной точки на левом конце хорды, уравнивающей стержень; R — радиус окружности, ограничивающей сегмент; $\sin \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R}$, $\cos \alpha = \frac{h}{R}$; ρ — расстояние от точки крепления стержня до его центра масс; h — расстояние от центра окружности до хорды, ограничивающей сегмент.

Описание результатов. Полученный в работе закон управления может быть сформулирован следующим образом. В начальный момент времени хорда сегмента параллельна горизонтальной плоскости. Предположим, что начальное отклонение происходит влево, угол φ начинает возрастать. Тогда управление принимается равным

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi, \text{ из начального вертикального положения «ноги» происходит}$$

моментальное его отклонение влево, после стержень поддерживается в горизонтальном положении до конца возрастания. Как только увеличение угла φ становится невозможным, требуется моментально отклонить «ногу» в крайнее правое положение, $\psi = -\frac{\pi}{2}$

и перейти в режим $\psi = -\frac{\pi}{2} - \varphi$, после прохождения сегментом положения $\varphi = 0$.

Выполнен численный анализ оптимального движения системы и сравнение с другими, неоптимальными режимами раскачивания. Проведенное численное исследование демонстрирует, что построенное управление позволяет ускорить раскачивание, обеспеченное кусочно-постоянным управлением. С геометрической точки зрения полученное управление так же имеет преимущества, так как позволяет не задумываться о допустимых отклонениях «ноги» робота при достаточно больших углах во избежание столкновения или упора об горизонтальную опорную плоскость. В описанном алгоритме движения «нога» робота остается параллельной опорной плоскости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00123 А.

Литература

1. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В. Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения «вверх ногами». *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*, № 6, с. 163–176.
2. Голубев Ю.Ф. *Автономная оптимизация колебаний систем с дефицитом управления*. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. № 28. Москва, 2020.

3. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В. Переворачивание шагающего робота в рабочее состояние из аварийного положения «вверх ногами». *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. № 48*. Москва, 2019, 22 с.
4. Golubev Yu.F. Optimal Control for Nonlinear Oscillations of Natural Mechanical Systems. *Lobachevskii Journal of Mathematics Kazanskii Gosudarstvennyi Universitet. Kazan State University (Russian Federation)*, vol. 42, no. 11, pp. 2596–2607.

Optimal exit of the robot from an emergency position

© Yu.F. Golubev^{1,2}, V.D. Kulikova^{1*}, E.V. Melkumova¹

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

²Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): kulikovavictoriadm@gmail.com

Abstract. When the robot moves off-road, various emergency situations may arise. In the absence of breakdowns, the most catastrophic case is when, due to a fall, the robot finds itself in an inverted position with its legs up, and the body lying on the reference plane. The paper investigates the optimal rotation of the robot due to the movement of the legs. This work develops the results obtained in the preprint [1, 4] in terms of algorithms for controlling the behavior of a robot in extreme situations. In contrast to [1, 4], where the rotation of the robot is carried out using piecewise-constant control, the function of the position of the legs of the robot in this work belongs to the class of piecewise-continuous functions.

Keywords: control, optimization, emergency, flipping of the robot's body, rocking.

Formulation of the problem. We consider a plane model problem in which the robot body is a segment of a circle lying on a horizontal line. The segment can be rotated without slipping along the reference straight line, turning about the center of the circle at an angle φ , measured from the vertical radius directed to the point of tangency of the segment with the straight line. A rod (leg) is attached to the right end of the chord of the segment, and can rotate around to the segment at an angle ψ . The angle ψ is measured from the outer perpendicular to the chord of the segment. It is selected as the managed function. Control is limited: $|\psi| \leq \frac{\pi}{2}$. The aim of the work is to obtain the law of optimal control analytically. To search for optimal control, we will apply the original method developed by Yu.F. Golubev, to optimize the amplitude of oscillatory systems [2, 3].

For applying the method for optimal control of mechanical systems oscillations, auxiliary functions must preserve the sign. This can be done by limiting the parameters of the system. For example, we can make the

segment mass big enough, or take $m_2 = 2m_1$ and $\rho < 2R \sin(\alpha/2)$. Here m_1 is the mass of the rod; m_2 is the mass of the material point at the left end of the chord that balances the rod; R is the radius of the circle that bounds the segment; ρ is the distance from the point of attachment of the rod to its center of mass; h is the distance from the center of the circle to the chord that bounds the segment; $\sin \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{R}$, $\cos \alpha = \frac{h}{R}$.

Results. The control law obtained in this work can be formulated as follows. At the initial moment of time, the chord of the segment is parallel to the horizontal plane. Suppose that the initial deviation occurs to the left, the angle φ begins to increase. Then the control is taken equal to $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, from the initial vertical position of the "leg" it immediately deviates to the left, after that the rod is kept in a horizontal position until the end of the increase. As soon as the increase in the angle φ becomes impossible, it is required to immediately deflect the "leg" to the extreme right position, $\psi = -\frac{\pi}{2}$ and switch to the mode $\psi = -\frac{\pi}{2} - \varphi$, after the segment has passed the position $\varphi = 0$.

A numerical analysis of the optimal motion of the system is made. We compared the result with other, non-optimal oscillation modes. The performed numerical study demonstrates that the constructed control makes it possible to accelerate the oscillation provided by piecewise constant control. From a geometric point of view, the resulting control also has advantages. We may not think about the permissible deflections of the robot's leg at sufficiently large angles. There will definitely not be a collision or stop on the horizontal reference plane, since in the described movement algorithm the robot's leg remains parallel to the reference plane.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00123 A).

References

1. Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Melkumova E.V. Flipping the Walking Robot to the Working Position from the Emergency "Upside Down". *Keldysh Institute preprints*. No. 48. Moscow, 2019, 22 p.
2. Golubev Yu.F. Optimal Control for Nonlinear Oscillations of Natural Mechanical Systems. *Lobachevskii Journal of Mathematics Kazanskii Gosudarstvennyi Universitet*. Kazan State University (Russian Federation), vol. 42, no. 11, pp. 2596–2607.
3. Golubev Yu.F. An Autonomous Optimization of Oscillations of Systems with a Control Deficit. *Keldysh Institute preprints*. No. 28. Moscow, 2020,
4. Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Melkumova E.V. Bringing an Insectomorphic Robot into Working Condition from an Emergency Position "Upside Down". *Journal of Computer and Systems Sciences International*, no. 6, pp. 163–176.

Кватернионное представление дифференциальных уравнений эйлера поворота

© А.Е. Ламоткин*, Н.Е. Мисюра, Е.А. Митюшов

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

*E-mail (докладчика): alexey.lamotkin@urfu.ru

Аннотация. В докладе дается вывод дифференциальных уравнений равномерного эйлера поворота твердого тела относительно произвольной оси и рассматриваются свойства этого уравнения. Процедура вывода основана на использовании кинематических уравнений, связывающих нормированный кватернион ориентации \mathbf{q} и кватернион угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Показано, что решением этого уравнения является закон сферической линейной интерполяции (дуга большого круга на гиперсфере S^3).

Ключевые слова: эйлеров поворот, дуга большого круга на S^3 , кватернион ориентации, дифференциальное уравнение плоского поворота.

Активное применение кватернионов для описания движения твердого тела делает особенно актуальными исследования дифференциальных уравнений в кватернионах [1]. В данной работе ставится цель вывести дифференциальное уравнение равномерного эйлера поворота твердого тела в кватернионах.

Пусть твердое тело совершает равномерный поворот с угловой скоростью, заданной кватернионом $\boldsymbol{\omega}$, тогда имеет место следующее кинематическое уравнение [2, 3]:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{q}. \quad (1)$$

Продифференцировав соотношение (1) по времени, получим дифференциальное уравнение, описывающее равномерный поворот на гиперсфере S^3 :

$$\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{4} \omega^2 \mathbf{q} = 0. \quad (2)$$

Покажем, что решением уравнения (2) действительно будут являться эйлеровы траектории на гиперсфере S^3 , общее решение данного уравнения имеет вид:

$$\mathbf{q} = \mathbf{c}_1 \cos \frac{\omega t}{2} + \mathbf{c}_2 \sin \frac{\omega t}{2}, \quad (3)$$

где \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 — кватернионы, определяемые начальными или граничными условиями поворота.

Рассмотрим поворот, определенный граничными положениями:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0, \mathbf{q}(T) = \mathbf{q}^T, \quad (4)$$

где T — время поворота. Из (3) и (4) получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{q}^0, \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{\mathbf{q}^T - \mathbf{q}^0 \cos \frac{\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), имеем:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 \cos \frac{\omega t}{2} + \frac{\mathbf{q}^T - \mathbf{q}^0 \cos \frac{\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \sin \frac{\omega t}{2}, \quad (6)$$

при этом (6) может быть преобразовано к виду

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 \frac{\sin \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{\omega T}{2} \right]}{\sin \frac{\omega T}{2}} + \mathbf{q}^T \frac{\sin \left[\frac{\omega t}{2} \right]}{\sin \frac{\omega T}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7)$$

Полученное выражение (7) является частным случаем выражения линейной сферической интерполяции [4]:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 \frac{\sin \left[(1-u)\theta \right]}{\sin \theta} + \mathbf{q}^T \frac{\sin \left[u\theta \right]}{\sin \theta}, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

при $u = \frac{t}{T}$.

Таким образом, выражение (7), являющееся решением (2), задает дугу большого круга на S^3 , которая, как известно, является траекторией эйлера поворота твердого тела.

Отметим, что уравнение (2) может быть проинтерпретировано как уравнение четырехмерного гармонического осциллятора, что придает уравнению классической механики твердого тела некоторый квантово-полевой смысл, близкий к осцилляторной интерпретации уравнений Эйлера — Пуассона [5].

Литература

1. Корнев В.В. Решение линейного дифференциального уравнения в кватернионах. *Математика и механика*, 1999, с. 39–40.
2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. *Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела*. Москва, Наука, 1973.
3. Челноков Ю.Н. *Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением*. Москва, Физматлит, 2011.
4. Shoemake K. Animating Rotation with Quaternion Curves. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 1985, vol. 19 (3), pp. 245–254.
5. Абрамов Д.Л. *Точная разрешимость уравнений Эйлера–Пуассона: глобальная динамика и дзета-функции*. Москва, Научный мир, 2021.

Quaternion representation of differential equations of Euler rotation

© А.Е. Lamotkin*, Н.Е. Misyura, Е.А. Mityushov

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia

*E-mail (speaker): alexey.lamotkin@urfu.ru

Abstract. In the paper, the derivation of differential equations of uniform Euler rotation of a rigid body about an arbitrary axis is given and the properties of this equation are considered. The derivation procedure is based on the use of kinematic equations connecting the normalized orientation quaternion \mathbf{q} and the angular velocity quaternion $\boldsymbol{\omega}$. It is shown that the solution of this equation is the spherical linear interpolation (an arc of a great circle on a hypersphere S^3).

Keywords: Euler rotation, great-circle arc on S^3 , orientation quaternion, differential equation of plane rotation.

References

1. Kornev V.V. Solving a linear differential equation in quaternions. *Mathematics and Mechanics*, 1999, pp. 39–40.
2. Branets V.N., Shmyglevsky I.P. *Application of quaternions in problems of rigid body orientation*. Moscow, Nauka, 1973.
3. Chelnokov Yu.N. *Quaternion models and methods of dynamics, navigation and motion control*. Moscow, Fizmatlit, 2011.
4. Shoemake K. Animating Rotation with Quaternion Curves. *SIGGRAPH Computer Graphics*, 1985, vol. 19 (3), pp. 245–254.
5. Abrarov D.L. *Exact solvability of the Euler–Poisson equations: global dynamics and zeta functions*. Moscow, Scientific world, 2021.

Стабилизация связей и обратные задачи динамики

© Р.Г. Мухарлямов

Российский университет дружбы народов (РУДН), Москва, Россия
E-mail: robgar@mail.ru

Аннотация. Задача стабилизации связей рассматривается как обратная задача динамики. Общая структура системы уравнений движений определяется по известной совокупности уравнений дифференциальных связей. Определяются условия описания динамики системы уравнениями Лагранжа с диссипативными силами, обеспечивающими стабилизацию связей при численном решении. Приводятся результаты моделирования решения задачи о стабилизации движения материальной точки по коническому сечению.

Ключевые слова: динамика, система, устойчивость, уравнение, стабилизация.

Введение. Задача стабилизации связей, ограничивающих перемещения точек системы, состоит в модификации реакций связей, обеспечивающей асимптотическую устойчивость соответствующего инвариантного множества уравнений динамики. При этом реакции связей составляют управляющие силы, призванные обеспечить цели управления, заданные уравнениями связей. В целом проблемы математического моделирования процессов динамики сводятся к построению уравнению движений, обладающих заданными свойствами, и могут быть рассмотрены как обратные задачи динамики.

Термины «прямая задача динамики» и «обратная задача динамики», или «первая задача динамики» и «вторая задача динамики», достаточно условны. Часто задачу определения силы, под действием которой материальная точка совершает известное движение, определяют как прямую задачу [1]. Различные задачи определения сил, обеспечивающих движения механических систем с заданными свойствами, в работах А.С. Галиуллина [2, 3] рассматриваются как обратные задачи динамики. К ним же можно отнести задачи построения выражений управляющих воздействий в системах управления [4]. Ряд авторов вводят просто две разные задачи механики без уточнения.

В классической механике первая постановка обратной задачи динамики была сформулирована И. Ньютоном [5] как определение выражения силы, обеспечивающей движение материальной точки по траектории, соответствующей законам Кеплера. Задача, поставленная И. Ньютоном, и дальше привлекала внимание механиков. Так, М.Г. Верланд [6] определил позиционную силу, под действием которой при любых начальных условиях движение материальной точки

происходит по коническому сечению. Развитию задачи Бертрана были посвящены известные работы М.Г. Darboux [7], И.Г. Имшенецкого [8] и других исследователей. Суслов Г.К. [9] поставил задачу об определении потенциальных сил, соответствующих первым интегралам голономной механической системы, и изложил аналитический метод построения силовой функции системы в случае, когда число интегралов на единицу меньше степени свободы системы. Жуковский Н.Е. построил силовую функцию в явном виде для системы с двумя степенями свободы [10] и исследовал устойчивость движений [11].

В задачах моделирования динамики существенным является обеспечение стабилизации связей за счет дополнительных управляющих сил [12]. Уравнения движения замкнутой системы должны обеспечивать асимптотическую устойчивость инвариантного множества, определяемого уравнениями связей.

Стабилизация частных интегралов уравнений динамики. Связи, используемые в классической механике, представляют собой частные интегралы

$$g_{\alpha}(\mathbf{q}, t) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, a, \quad (1)$$

$$g_{\beta i}(\mathbf{q}, t) \dot{q}^i + g_{\beta}(\mathbf{q}, t) = 0, \quad \beta = a + 1, \dots, m, \quad m < n, \quad (2)$$

$$\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n), \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \quad \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}, \quad i = 1, \dots, n.$$

уравнений динамики замкнутой системы. Уравнения голономных связей (1) предполагают также выполнение уравнений дифференциальных связей, которые совместно с уравнениями (2) составляют систему m линейных алгебраических уравнений относительно n переменных \dot{q}^i :

$$g_{\mu i}(\mathbf{q}, t) \dot{q}^i = -g_{\mu}(\mathbf{q}, t), \quad \mu = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Если матрица $(g_{\mu i}(\mathbf{q}, t))$ коэффициентов при всех допустимых значениях переменных \mathbf{q}, t имеет максимальный ранг, то система (3) имеет решение

$$\dot{q}^i = v^i(\mathbf{q}, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

которое содержит произвольные функции. Введем уравнения программных связей с учетом возможных отклонений от кинематических соотношений (4):

$$y_{\alpha} = g_{\alpha}(\mathbf{q}, t) \quad z_i = m_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}^j - v_i(\mathbf{q}, t), \quad v_i(\mathbf{q}, t) = m_{ij}(\mathbf{q}) v^j(\mathbf{q}, t). \quad (5)$$

Здесь $m_{ij}(\mathbf{q})$ — коэффициенты кинетической энергии системы, величины y_α, z_i удовлетворяют уравнениям возмущений связей

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = z_\alpha, \quad \frac{dz_i}{dt} = Z_i(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad Z_i(0, 0, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_a), \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n), \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \quad (7)$$

имеющих асимптотически устойчивое тривиальное решение $\mathbf{y} = 0, \mathbf{z} = 0$. В результате получается система дифференциальных уравнений

$$f_i \equiv m_{ij}\ddot{q}^j + m_{ij,k}\dot{q}^j\dot{q}^k - v_{i,k}\dot{q}^k - v_{i,t} - F_i = 0, \quad (8)$$

$$m_{ij} = m_{ij}(\mathbf{q}), \quad m_{ij,k} = \frac{\partial m_{ij}}{\partial q^k} = m_{ij,k}(\mathbf{q}),$$

$$F_i(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = Z_i(\mathbf{y}(\mathbf{q}, t), \mathbf{z}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t),$$

$$v_{i,k} = \frac{\partial v_i}{\partial q^k} = m_{ij,k}v^j + m_{ij}v_k^j = v_{i,k}(\mathbf{q}, t), \quad v_k^j = \frac{\partial v^j}{\partial q^k},$$

$$v_{i,t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} = m_{ij}v_t^j = v_{i,t}(\mathbf{q}, t), \quad v_i^j = \frac{\partial v^j}{\partial t}, \quad v^j = v^j(\mathbf{q}, t),$$

$$i, j, k = 1, \dots, n.$$

В систему (8) включены произвольные функции, которые содержатся в выражениях значений скоростей (4), и функции $F_i(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, определяемые выбором правых частей уравнений (6). Используя обобщенные условия Гельмгольца [13], система может быть представлена в форме уравнений Лагранжа с диссипативными силами.

Задача Бертрана и стабилизация движения материальной точки по коническому сечению. Требуется определить силы, под действием которых точка единичной массы будет совершать устойчивое движение по коническому сечению с постоянной секторной скоростью. Траектория точки и условие постоянства секторной скорости в прямоугольной системе координат, начало которой совпадает с одним из фокусов, описываются уравнениями

$$r - ex - p = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad (9)$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} - c = 0,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0.$$

Здесь e — эксцентриситет конического сечения; p — фокальный параметр; $c = \text{const}$. Уравнениям связей (3) соответствуют уравнениям программных связей

$$y_1 = r - ex - p, \quad \dot{z}_1 = \dot{r} - e\dot{x}, \quad \dot{z}_2 = x\dot{y} - y\dot{x} - c, \quad (10)$$

и уравнениям возмущений связей

$$\frac{dz_i}{dt} = \dot{z}_i, \quad \frac{d\dot{z}_i}{dt} = Z_i(y_1, \dot{z}_1, \dot{z}_2, x, y, \dot{x}, \dot{y}, t), \quad (11)$$

$$Z_i(0, 0, 0, x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Из уравнений (10) следуют кинематические соотношения

$$\dot{x} = \frac{1}{p + y_1} \left(x\dot{z}_1 - \frac{y}{r}(c + \dot{z}_2) \right), \quad \dot{y} = \frac{1}{p + y_1} \left(\left(\frac{x}{r} - e \right) (c + \dot{z}_2) + y\dot{z}_1 \right). \quad (12)$$

Дифференцируя равенства (12), получаем систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x} = \frac{1}{p + y_1} \left(-x \frac{c^2}{r^3} + xZ_1 - \frac{y}{r} Z_2 \right), \quad \ddot{y} = \frac{1}{p + y_1} \left(\left(\frac{x}{r} - e \right) Z_2 - y \frac{c^2}{r^3} + yZ_1 \right). \quad (13)$$

В случае $Z_2 \equiv 0$ получается, что $\dot{z}_2 = \text{const}$, а силы, действующие на систему, являются центральными. Из уравнений (13) следует, что подбором функции $Z_1(y_1, \dot{z}_1, c, x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ можно обеспечить асимптотическую устойчивость движения материальной точки по коническому сечению, что необходимо для стабилизации связи. Полагая величины отклонений y_1, z_1, z_2 малыми и разлагая в ряд правые части уравнений (13), можно доказать, что система (13), содержащая y_1, z_1, z_2 в степени не выше первой, удовлетворяет обобщенным условиям Гельмгольца [13] и может быть приведена к уравнениям Лагранжа с диссипативными силами.

Заключение. Множество уравнений динамики построено по известным уравнениям связей и выражения кинетической энергии. Используя обобщенные условия Гельмгольца, система уравнений движений может быть представлена в форме уравнений Лагранжа с диссипативными силами, что позволяет решить задачу стабилизации связей. Приводится решение задачи Бертрана с обеспечением орбитальной устойчивости движения по траектории.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ,
проект № 19-08-00261-а.*

Литература

1. Аппель П. *Теоретическая механика*. Москва, Физматлит, т. 1, 1960, 515 с.
2. Галиуллин А.С. *Методы решения обратных задач динамики*. Москва, Наука, 1986, 224 с.
3. Галиуллин А.С. *Аналитическая динамика*. Москва, Высш. шк., 1989, 264 с.
4. Мухарлямов Р.Г. Обратные задачи динамики. В кн.: *Устойчивость движения. Аналитическая механика. Управление движением*. Москва, Наука, 1981, с. 217–223.
5. Ньютон И. *Математические начала натуральной философии*. Москва, Наука, 1989, 688 с.
6. Bertrand M.G. Theoreme relative au mouvement d'un point attire vers un centre fixe. *Compte rendus*, 1873, vol. 77, vol. LXXVII, no. 16, 20 Octobre 1873, pp. 849–853.
7. Darboux M.G. Recherche de la loi que dois suivre une force centrale pour que la trajectoire qu'elle determine soit toujours une conique. *Compte rendus*, 1877, vol. LXXXIV, no. 16, 16 Avriile, 1877, pp. 760–762.
8. Имшенецкий В.Г. Определение силы, движущей по коническому сечению материальную точку, в функции ее координат. В кн.: *Сообщения Харьковского математического общества*, 1879, вып. 1, 11 с.
9. Суслов Г.К. *О силовой функции, допускающей заданные интегралы*. Киев, Изд-во Киевского университета, 1890, 114 с.
10. Жуковский Н.Е. Определение силовой функции по данному семейству траекторий. *Полное собр. соч.* Т. I. Москва–Ленинград, Главная редакция авиационной литературы, 1937, с. 293–308.
11. Жуковский Н.Е. О прочности движения. *Полное собр. соч.* Т. I. Москва–Ленинград, Главная редакция авиационной литературы, 1937, с. 110–205.
12. Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.*, 1972, vol. 1, pp. 1–16.
13. Kielau G., Maisser P. A generalization of the Helmholtz conditions for the existence of a first-order Lagrangian. *Z. angew. Math. Mech.*, 2006, no. 86 (9), pp. 722–735.

Constraint stabilization and inverse problems of dynamics

© R.G. Mukharlyamov

RUDN University, Moscow, Russia

E-mail: robgar@mail.ru

Abstract. The problem of constraint stabilization is considered as an inverse problem of dynamics. The general structure of dynamics equations is determined by known equations of differential constraints. The conditions for describing the dynamics of the system are determined by Lagrange equations with dissipative forces that ensure the constraint stabilization in the numerical solution. The results of modeling the solution of the problem of stabilization of the motion of a material point along a conical section are presented.

Keywords: *dynamics, system, stability, equations, stabilization.*

This work was supported by the grant RFBR no. 19-08-00261-a.

Брахистохрона и двумерная задача Годдарда

© Е.В. Малых, Н.В. Смирнова, О.Ю. Черкасов

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: wyvling@gmail.com, nina.smirnova247@yandex.ru, oyuche@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости в однородном поле тяжести и в однородной, сопротивляющейся среде. В качестве управляющих переменных рассматриваются угол траектории и тяга. Целью управления является максимизация горизонтальной дальности за заданное время. Количество топлива задано. Наряду с задачей максимизации дальности рассматривается модифицированная задача о брахистохроне, сформулированная следующим образом: найти кривую, соединяющую две точки в вертикальной плоскости, вдоль которой материальная точка в поле силы тяжести и неконсервативной силы перемещается из начальной в конечную точку за кратчайшее время. Для определенной области в пространстве переменных построен синтез оптимального управления тягой и углом наклона траектории. Структура оптимальной тяги качественно совпадает с классическим решением задачи Годдарда: максимальная-промежуточная-нулевая или нулевая-промежуточная-нулевая.

Ключевые слова: особое управление, управление тягой, задача брахистохрона, вязкое трение.

Текст тезисов. Уравнения движения имеют вид:

$$\dot{x} = v \cos \theta, \dot{y} = v \sin \theta, \dot{v} = \frac{-kv + cu}{m} - g \sin \theta, \dot{m} = -u,$$

где x, y — горизонтальная и вертикальная координаты точки соответственно; v — модуль скорости; m — масса точки; k — коэффициент вязкого трения; c — скорость истечения рабочего тела; g — ускорение свободного падения; θ — угол наклона траектории; u — скорость изменения массы точки, θ и u рассматриваются в качестве управлений.

Граничные условия для системы имеют вид

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0, m(0) = m_0, m(T) = m_T.$$

Здесь T — заданный момент окончания процесса.

Целевая функция имеет вид

$$J = -x(T) \rightarrow \min_{\theta, u}.$$

Предполагая, что промежуточная (сингулярная) тяга удовлетворяет ограничениям, показано, что оптимальная программа тяги состоит из двух дуг, максимальной тяги в начале и нулевой тяги в конце, или трех дуг: максимальной тяги в начале, затем промежуточная тяга и нулевая тяга в конце. Также возможна следующая комбинация дуг: нулевая тяга в начале, затем промежуточная тяга и снова нулевая тяга в конце. Логика управления тягой аналогична известному решению задачи Годдарда. Представлены результаты численного моделирования, иллюстрирующие теоретические выводы.

Литература

1. Indig N., Asher J.B. Singular Control for Two-Dimensional Goddard Problems Under Various Trajectory Bending Laws. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2018, vol. 42 (2), pp. 1–15. DOI: 10.2514/1.G003670
2. Jeremic O., Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z. On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, vol. 54, pp. 2900–2912.

Brachistochrone Problem and Two-Dimensional Goddard Problem

© E.V. Malykh, N.V. Smirnova, O.Yu. Cherkasov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: wyvling@gmail.com, nina.smirnova247@yandex.ru, oyuche@yandex.ru

Abstract. The motion of a point mass in a vertical plane under the action of gravitational forces, linear viscous friction, the support reaction of the curve and the thrust is considered. The slope angle and the thrust are considered as control variables. The amount of fuel is given. The goal of the control is to maximize the horizontal coordinate of the point in a given time. The interrelated Brachistochrone problem is also considered. The optimal synthesis in the three-dimensional space “slope angle-velocity-mass” is constructed. Assuming that the intermediate (singular) thrust satisfies the constraints, it is shown that the optimal thrust program consists of two arcs, maximum thrust at the beginning and zero thrust at the end, or three arcs: maximum thrust at the beginning, then intermediate thrust and zero thrust at the end. The following combination of arcs is also possible: zero thrust at the beginning, then an intermediate thrust and again zero thrust at the end. The results of numerical simulation illustrating the theoretical conclusions are presented.

Keywords: *singular arc, thrust control, brachistochrone problem, viscous friction.*

References

1. Indig N., Asher J.B. Singular Control for Two-Dimensional Goddard Problems Under Various Trajectory Bending Laws. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2018, vol. 42 (2), pp. 1–15. DOI: 10.2514/1.G003670
2. Jeremic O., Salinic S., Obradovic A., Mitrovic Z. On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, vol. 54, pp. 2900–2912.

О влиянии бокового ветра на прямолинейное движение тележки с ротором Савониуса

© А.П. Голуб, А.Ф. Зубков, А.А. Мастерова*, Ю.Д. Селюцкий

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: masterovaanya@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача об исследовании влияния ветра на динамику колесной тележки, приводимой в движение ротором Савониуса и движущейся вдоль прямолинейной направляющей под действием постоянного потока, направленного под фиксированным углом к линии движения.

Ключевые слова: ветромобиль, ротор Савониуса, динамика.

Предполагается, что тележка, приводимая в движение ротором типа Савониуса, едет поступательно по абсолютной шероховатой поверхности вдоль фиксированной прямой. Аэродинамическое воздействие на систему сводится к силам, действующим на лопасти ротора. Для моделирования этого воздействия используется подход, описанный в работе. Проанализировано влияние направления скорости потока на стационарные решения усредненной по углу поворота ротора системы, а также влияние зависимости аэродинамических коэффициентов от угла поворота ротора на установившийся режим и на переходные процессы.

Литература

Голуб А.П., Зубков А.Ф., Мастерова А.А., Селюцкий Ю.Д. Динамика колесной тележки, приводимой в движение ротором Савониуса. *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2021, № 22 (5), с. 254–261.

On the influence of a side wind on the straight-line motion of a cart with a Savonius rotor

© A.P. Holub, A.F. Zubkov, A.A. Masterova*, Yu.D. Selyutskiy

Institute of Mechanics of the Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

*E-mail: masterovaanya@yandex.ru

Abstract. The paper considers the problem of studying the effect of wind direction on the dynamics of a wheeled cart driven by the Savonius rotor and moving along a straight-line guide under the action of a constant flow directed at a fixed angle to the line of motion.

Keywords: *wind car, Savonius rotor, dynamics.*

Method of an Analogy in the Tasks of Contact of the Walking Robot and Grip with a Cylinder

© Yu.F. Golubev^{1,2}, E.V. Melkumova²

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: golubev@keldysh.ru, elena_v_m@mail.ru

Abstract. We consider the problem of brittle cylinder gripping by the five manipulator fingers. Each finger contacts the cylinder in a single supporting point with Amontons — Coulomb friction or for two footholds spinning friction. Using numerical simulations and analytically, possible locations of the contact points on the cylinder, for which there is a kinetostatics problem solution when the cylinder is moved by five fingers, are received. There is an analogy of the equilibrium of a five-legged robot on a cylinder for the problems of transfer by a manipulator with a five-finger grip of a cylinder.

Keywords: *five-finger grip, Amontons — Coulomb friction, five-legged robot.*

The work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 19-01-00123 A).

References

Golubev Yu.F., Melkumova E.V. Metod of Analogy for a Walking Robot and a Grip. 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 22–27 August 2021, Milano, Italy. *Abstract Book*, pp. P103609 — FS12 — Education in Mechanics — Poster.

Метод аналогии в задачах о контакте шагающего робота и схвата с цилиндром

© Ю.Ф. Голубев^{1,2}, Е.В. Мелкумова²

¹Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

²МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: elena_v_m@mail.ru

Аннотация. Исследуется задача об удержании хрупкого прямого кругового шероховатого цилиндра пятью пальцами рук робота-манипулятора. Каждый из пальцев имеет одну точку в контакте с цилиндром и трением Амонтона — Кулона, а для двух точек опоры — с трением верчения. Численно и аналитически получены возможные области расположения точек контакта на цилиндре, для которых существует решение задачи кинестатики при переносе цилиндра двумя и пятью пальцами. Эта задача имеет аналогии задачам о равновесии многоногого шагающего робота на поверхности объекта цилиндрической формы.

Ключевые слова: пятипальцевый хват, трение Амонтона – Кулона, пятиногий робот.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00123 А).

Литература

Golubev Yu F., Melkumova E.V. Metod of Analogy for a Walking Robot and a Grip. 25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 22-27 August 2021. Milano, Italy, Abstract Book, pp. P103609 — FS12 — Education in Mechanics — Poster.

Спасение шестиногого робота из аварийной ситуации на неровной поверхности

© Ю.Ф. Голубев^{1,2}, В.В. Корянов¹, Е.В. Мелкумова²

¹Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

²МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: golubev@keldysh.ru, korianov@keldysh.ru, elena_v_m@mail.ru

Аннотация. Предложен метод раскачивания шестиногого робота с помощью циклического движения ног, обеспечивающий переворот корпуса и возвращение робота в рабочее положение из положения «вверх ногами». Показано, что переворот робота возможен, если корпус имеет верхнюю оболочку в виде усеченного цилиндра. Рассмотр-

рены варианты раскачивания при наличии наклона опорной поверхности, а также ямки и бугорка в области контакта. Наклон может задаваться комбинацией поворотов вокруг разных осей. Компьютерное моделирование выполнено с помощью программного комплекса «Универсальный механизм».

Ключевые слова: шестиногий робот, аварийная ситуация, переворот корпуса, раскачивание.

Введение и постановка задачи. Данная работа развивает результаты, представленные в [1], в части построения алгоритмов управления поведением робота в экстремальных ситуациях с использованием методов компьютерного моделирования. Полная динамическая модель робота формируется автоматически средствами комплекса «Универсальный механизм» [2].

Решаемая задача формулируется следующим образом. В результате непредвиденной случайности шагающий робот оказывается лежащим на спине в положении «вверх ногами». Он должен без посторонней помощи за счет имеющихся у него ресурсов по управлению перевернуться в исходное рабочее положение, когда ноги находятся в опоре, а корпус — наверху.

Переворот осуществляется с помощью циклического движения ног.

Для облегчения переворота корпус имеет форму выпуклой вверх части цилиндра, срезанного плоскостью, параллельной оси цилиндра. В модельной задаче рассматривается раскачивание однородного сегмента круга без проскальзывания на опорной прямой (рис. 1). К правому концу B хорды сегмента плоским шарниром прикреплена нога, стержень массы m_1 , который может вращаться относительно сегмента на угол ψ . На другом конце хорды в точке E расположена точечная масса m_2 , уравнивающая ногу.

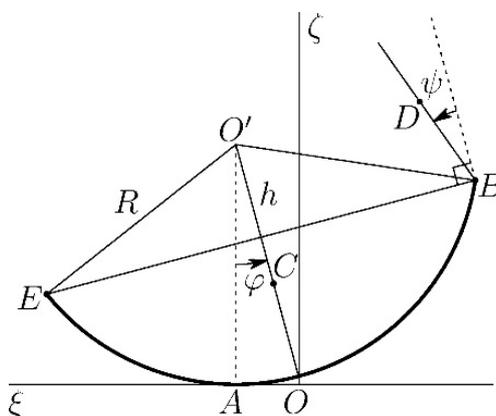


Рис. 1. Перевернутое положение робота

Раскачивание робота на спине. Аналитическое описание процесса раскачивания выполняется с помощью теоремы об изменении кинетического момента системы относительно подвижной точки A [3]. Из анализа модельной задачи следует, что управляющий угол отклонения активных ног нужно переключать между двумя постоянными значениями (они соответствуют предельным положениям активных ног при махах в сторону пассивных ног и обратно) в моменты времени, когда угловая скорость корпуса обращается в ноль. Переключение происходит в виде линейного перехода.

Компьютерное моделирование полной динамики робота проводится с целью уточнения параметров раскачивания при учете наличия трения в контакте (используется встроенная в «Универсальный механизм» [2] модель трения, основанная на вязкоупругом взаимодействии тел в точке контакта, а также учитывается момент трения качения). Механическая система имеет 24 степени свободы.

Была рассмотрена опора в виде горизонтальной плоскости [3, 4] и в виде наклонной плоскости с небольшим (не больше 15 градусов) уклоном в сторону переворота. Опционально в области контакта может находиться цилиндрическая ямка, рядом с ней, со сдвигом в сторону переворота, — цилиндрический бугорок. Численные эксперименты показали, что возможность переворота есть в случае, когда их радиусы немного больше радиуса усеченного цилиндра, соответствующего спине робота.

При уменьшении массы ног следует увеличивать угол отмашки (мах в сторону, противоположную стороне переворота). Когда уклон наклонной плоскости способствует раскачиванию, необходимо уменьшать угол отмашки по сравнению с аналогичным вариантом раскачивания без уклона.

В численных экспериментах добавление наклона опоры вокруг еще одной (не вертикальной) оси или поворота корпуса вокруг вертикальной оси связанной с ним системы координат не приводило к необходимости изменения параметров раскачивания.

На рис. 2, 3 показаны фрагменты раскачивания в случае, когда опорная поверхность последовательно повернута вокруг двух осей. Поворот задается сначала вокруг горизонтальной оси, направленной вправо, на 15° , затем, в повернутой системе координат, вокруг оси, сонаправленной с продольной осью робота, на 10° . Центр масс робота находится немного выше в процессе всего движения по сравнению с вариантом, когда первого поворота опоры нет, но при выбранных параметрах механической системы это мало влияет на раскачивание. Размеры ямки и бугорка примерно наибольшие для выбранных параметров робота.

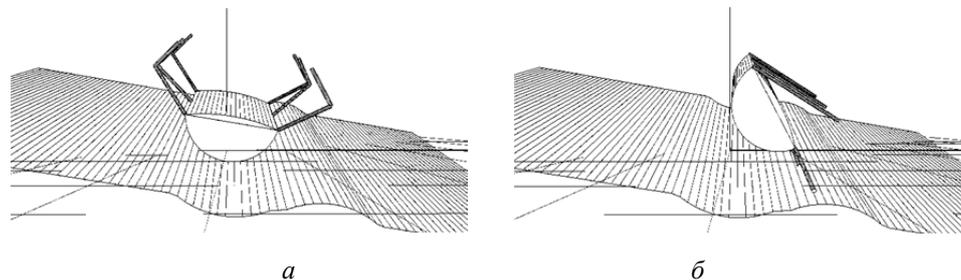


Рис. 2. Раскачивание при наличии двух поворотов опоры: начальное положение (а), типичный мах в сторону пассивных ног (б)

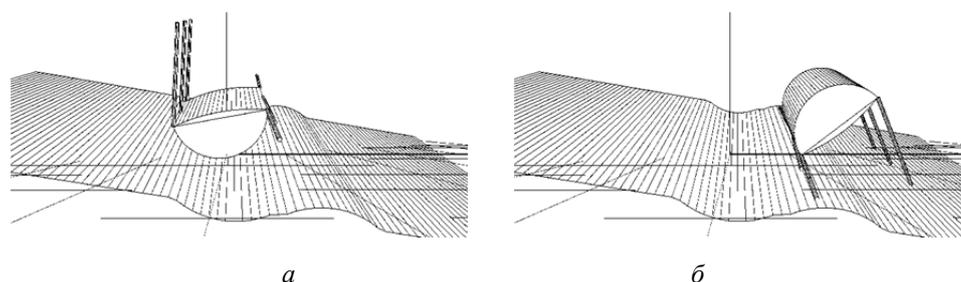


Рис. 3. Типичный мах в сторону активных ног (а), положение сразу после переворота (б)

На рис. 4 приведены зависимости основных параметров движения от времени для этого варианта раскачивания. Приведены угол отклонения корпуса $\varphi = \pi + \phi$ (рад), управляющий угол активных ног ψ (рад), угловая скорость $\dot{\phi}$ (рад/с). Вертикальная линия отмечает завершение перестройки ног в положение перед непосредственным раскачиванием.

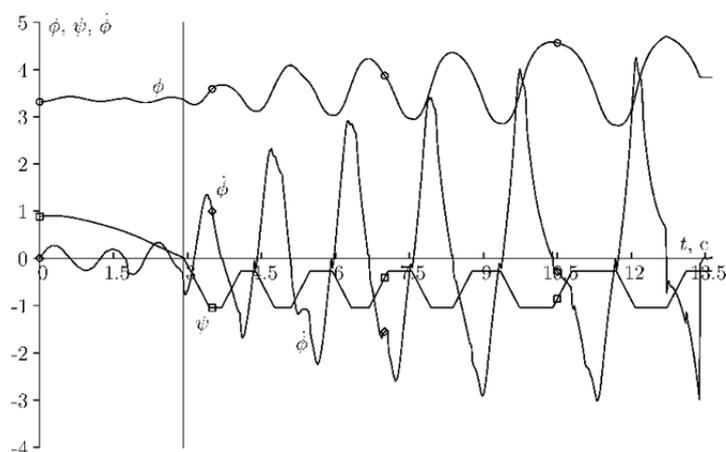


Рис. 4. Зависимости основных параметров от времени для раскачивания на опоре с двумя поворотами (масса корпуса 25,42 кг, масса одной ноги 2,4 кг)

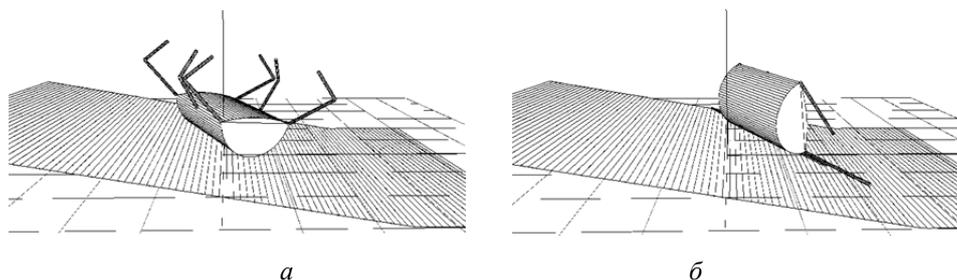


Рис. 5. Раскачивание при дополнительном повороте корпуса в начале: начальное положение (а), типичный мах в сторону пассивных ног (б)

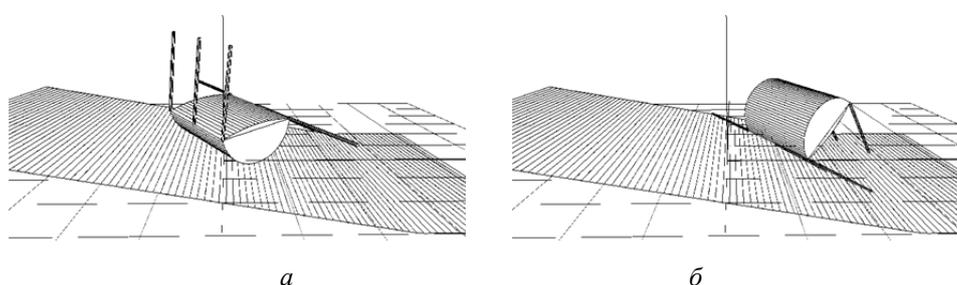


Рис. 6. Типичный мах в сторону активных ног (а), положение сразу же после переворота (б) (масса корпуса 25,42 кг, масса одной ноги 1 кг)

На рис. 5, 6 показаны фрагменты раскачивания для варианта, когда в начальном положении повернута не опора, а сам робот вокруг вертикальной оси, связанной с корпусом системы координат. Величина поворота 30° . Отметим, что если таким же образом повернуть корпус на 90° , то получится немного другой вариант раскачивания, так как отклонения центра масс при начальной перестройке ног уже не будут приводить к небольшому отклонению корпуса в начале. Если не добавить это отклонение за счет модификации этапов перестройки ног, то для того, чтобы раскачивание работало при таком начальном повороте, нужно увеличивать массу ног.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(проект № 19-01-00123 А).*

Литература

1. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. *Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов*. Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018, 212 с.
2. *Универсальный механизм*. URL: <http://www.umlab.ru> (дата обращения: 18.06.2015).
3. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В. Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения «вверх ногами». *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*, 2019, № 6, с. 163–176. DOI: 10.1134/S0002338819060052

4. Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Melkumova E.V. Flipping the Walking Robot to the Working Position. *25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 22–27 August 2021*. Milano, Italy, Abstract Book, 2021, pp. 2080–2081.

Rescuing a six-legged robot from an emergency on an uneven surface

© Yu.F. Golubev^{1,2}, V.V. Koryanov¹, E.V. Melkumova²

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: golubev@keldysh.ru, korianov@keldysh.ru, elena_v_m@mail.ru

Abstract. A method of rocking a six-legged robot using cyclic leg movements is proposed, which ensures the body flip and returns the robot to the working position from the upside-down position. It is shown that the overturning of the robot is possible if the body has an upper shell in the form of a truncated cylinder. The variants of rocking in the presence of an inclination of the support surface, as well as a pit and a bump in the contact area are considered. The inclination can be set by a combination of rotations around different axes. Computer simulation is performed using the "Universal Mechanism" software package.

Keywords: six-legged robot, emergency, flipping of the robot's body, rocking.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 19-01-00123 A).

References

1. Golubev Yu.F., Koryanov V.V. *Extreme locomotion capabilities of insectomorphic robots*. Moscow, Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, 2018, 212 p. (in Russ.).
2. *Universal mechanism*. URL: <http://www.umlab.ru> (accessed: 06.18.2015).
3. Golubev Y.F., Koryanov V.V., Melkumova E.V. Bringing an insectomorphic robot to a normal position from an abnormal upside down position. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2019, vol. 58, no. 6, pp. 987–999. DOI: 10.1134/S1064230719060054
4. Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Melkumova E.V. Flipping the Walking Robot to the Working Position, *25th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 22–27 August 2021*. Milano, Italy, Abstract Book, pp. 2080–2081.

Начальная стадия заноса четырехколесного аппарата при блокировке или пробуксовке его колес

© А.П. Новодерова

МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия

E-mail: an.novoderova@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается движение двухосного четырехколесного аппарата на начальной стадии заноса, возникающего при блокировке или пробуксовке колес одной из осей, в случае, когда колеса другой оси сохраняют сцепление с опорной плоскостью [1–3]. С помощью подходов динамики неголономных систем и метода фазовой плоскости в работе получены и аналитически исследованы линейаризованные уравнения упрощенной четырехколесной модели аппарата по малым угловой и поперечной скоростям корпуса, а также малому углу поворота передних колес. Проводится их сравнение с аналогичными уравнениями, полученными для двухколесной «велосипедной» модели аппарата [1–3].

Ключевые слова: занос колесного аппарата, велосипедная и четырехколесная модели, модель кулонова трения, модель увода, динамика неголономных систем, метод фазовой плоскости.

В работе рассматривается задача о заносе двухосного четырехколесного аппарата, движущегося по горизонтальной однородной опорной плоскости. В результате блокировки или пробуксовки колеса ведущие оси аппарата теряют сцепление с опорной плоскостью (начинают скользить), взаимодействуя с ней посредством сухого трения. Изучается начальная стадия заноса аппарата после завершения процессов блокировки или пробуксовки колес [2], когда поперечная и угловая скорости его корпуса невелики, углы поворота передних колес относительно корпуса (вокруг вертикальной оси) считаются малыми. Колеса незаблокированной, непробуксовывающей оси сохраняют сцепление с опорной плоскостью.

В отличие от работ [1–3], где рассматривалась «велосипедная» модель аппарата, в настоящей работе проводится аналитическое исследование уравнений движения четырехколесной модели. Изучаются уравнения движения переднеприводных или заднеприводных аппаратов, имеющих низкое расположение центра масс и центра парусности. Деформации колес аппарата в направлении вертикальной оси считаются малыми, рассматривается линейный закон распределения нормальных давлений в области их контакта с опорной плоскостью [4, 5].

Упрощенная модель может быть исследована с помощью качественных методов интегрирования дифференциальных уравнений и метода фазовой плоскости.

Проводится анализ динамики аппарата и влияния угла поворота руля (передних колес) на занос аппарата и сравнение результатов с результатами, полученными в [1–3]. Показано, что поворот передних колес вокруг вертикальной оси позволяет регулировать занос на начальной стадии в случаях скольжения пробуксовывающих перед-

них колес и скольжения пробуксовывающих или заблокированных задних колес. Получены формулы, позволяющие аналитически исследовать зависимости поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата от его продольной скорости для различных малых углов поворота передних колес.

Работа имеет теоретический характер, но полученные результаты позволяют извлечь рекомендации для анализа заноса и могут быть использованы при формировании алгоритмов программного обеспечения тренажеров и средств активной безопасности, в частности, систем управления рулем (поворотом передних колес).

Литература

1. Влахова А.В., Новодерова А.П. Моделирование заноса аппарата с повернутыми передними колесами. *Известия РАН. МТТ*, 2019, № 1, с. 23–49.
2. Влахова А.В., Новожилов И.В. О заносе колесного экипажа при «блокировке» и «пробуксовке» одного из колес. *Фундаментальная и прикладная математика*, 2005, т. 11, вып. 7, с. 11–20.
3. Влахова А.В., Новожилов И.В., Смирнов И.А. Математическое моделирование заноса автомобиля. *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ.*, 2007, № 6, с. 44–50.
4. Иванов А.П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела. *ПММ*, 2009, т. 73, вып. 2, с. 189–203.
5. Карапетян А.В. О движении шайбы на вращающейся горизонтальной плоскости. *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ.*, 2019, № 5, с. 37–41.

The initial stage of skidding of a four-wheeled vehicle when its wheels block or slip

© A.P. Novoderova

Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russia
E-mail: an.novoderova@yandex.ru

Abstract. The motion of a two-axle four-wheeled vehicle at the initial stage of skidding is considered when the wheels of one of its axis block or slip, the wheels of the another axis don't lose traction with the reference plane [1–3]. The linearized equations of a simplified four-wheeled model of the vehicle for small angular and transverse body velocities, as well as a small angle of rotation of the front wheels are obtained and analytically investigated. They are compared with similar equations obtained for a two-wheeled «bicycle» model of the vehicle [1–3].

Keywords: vehicle skidding, bicycle and four-wheeled vehicle models, Coulomb friction model, slip model, dynamics of nonholonomic systems, phase-plane method.

The paper considers the problem of skidding a two-axle four-wheeled vehicle along a horizontal homogeneous reference plane. As a result of blocking or slipping, the wheels of one of the axis of the vehicle lose traction with the reference plane (it begin to slip), interacting with it by dry friction. The initial stage of skidding is studied after the completion of the processes of blocking or slipping of wheels [2], when the transverse and angular velocities of its body are low, the angles of rotation of the front wheels relative to the body (around the vertical axis) are considered small. Wheels that are not locked and not slipped do not lose traction with the reference plane.

In contrast to the works [1–3], where the «bicycle» model of the vehicle was considered, in this paper an analytical study of the equations of motion of the four-wheeled model is carried out. The equations of motion of front- or rear-wheel drive vehicles with a low center of mass are studied. Deformations of the vehicle wheels in the direction of the vertical axis are considered small, and a linear distribution law of normal reactions in the region of their contact with the reference plane is considered [4, 5].

The simplified model can be investigated using qualitative methods for integrating differential equations and the phase plane method.

The analysis of the influence of the angle of rotation of the steering wheel (front wheels) on the skid of the vehicle and the comparison of the results with the results obtained in [1–3]. Situations are discussed when following the recommendation adopted in the theory of driving a car «to turn the steering wheel in the direction of the rear axle skidding» allows you to reduce the angular velocity more quickly than with the front wheels not rotated or turned in another direction. It is shown that the angle of rotation of the front wheels around the vertical axis makes it possible to adjust the skid at the initial stage in cases of slip of the front wheels and slip or block of the rear wheels. Formulas are obtained that allow us to analytically investigate the dependence of the transverse and angular velocities of the vehicle body on its longitudinal velocity for various small angles of rotation of the front wheels.

The work is of a theoretical nature, but the results obtained make it possible to extract recommendations for the analysis of skidding and can be used in the formation of software algorithms for simulators and active safety equipment, in particular, steering control systems (turning the front wheels).

References

1. Vlakhova A.V., Novoderova A.P. The skidding modelling of an apparatus with turned front wheels. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 1, pp. 19–38.
2. Vlakhova A.V., Novozhilov I.V. On skidding of a wheeled vehicle when one of the wheels “Blocks” or “Slips”. *Journal of Mathematical Sciences, Plenum Publishers (United States)*, 2007, vol. 146, no. 3, pp. 5803–5810.

3. Vlachova A.V., Novozhilov I.V., Smirnov I.A. Mathematical simulation of skidding. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2007, vol. 62, no. 6, pp. 165–171.
4. Ivanov A.P. A dynamically consistent model of the contact stresses in the plane motion of a rigid body. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 134–144.
5. Karapetyan A.V. Motion of a puck on a rotating horizontal plane. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2019, vol. 74, pp. 118–122.

Режимы спуска тяжелого оперенного тела в сопротивляющейся среде

© Ю.М. Окунев, О.Г. Привалова^{*}, В.А. Самсонов

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^{*}E-mail: privalova@imec.msu.ru

Аннотация. Приводятся результаты, полученные при исследовании спуска тяжелого оперенного тела в сопротивляющейся среде. Показывается, что в зависимости от углов установки оперения на теле меняются его режимы спуска. Устанавливается влияние формы лопасти на характер движения тела.

Ключевые слова: режимы спуска, углы установки оперения, форма лопасти.

Regimes of descent of a heavy finned body in resisting medium

© Yu.M. Okunev, O.G. Privalova^{*}, V.A. Samsonov

Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^{*}E-mail: privalova@imec.msu.ru

Abstract. Investigation of a descent of a heavy finned body in resisting medium was carried out. The corresponding results are discussed. It is shown how pitch angles of blades and shape of blades influence regimes of descent.

Keywords: regimes of descent, pitch angles of blades, shape of blades.

К динамике стержневых систем с односторонними связями

© Г.М. Розенблат¹, В.Т. Гришакин^{1,2}

¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет,
Москва, Россия

²Московский авиационный институт, Москва, Россия

E-mail: gr51@mail.ru, Grichacin@yandex.ru

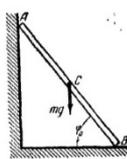
Аннотация. Рассматривается постановка и решение задач динамики стержневых механических систем с односторонними связями. Движущей силой во всех рассматриваемых случаях является сила тяжести. Поскольку на все рассматриваемые в упомянутых задачах системы тел наложены неустойчивые связи, для их корректного решения необходим учет одностороннего действия прикладываемых к телам изучаемых систем сил реакции связей. Детально рассмотрено движение изучаемых систем после обнуления сил реакции связей. Приведены результаты численных экспериментов, на основе которых построены схемы движения изучаемых систем тел, иллюстрирующие перемещения указанных систем после их отрыва от опорных поверхностей.

Ключевые слова: неустойчивые связи, нормальные реакции, свободное падение.

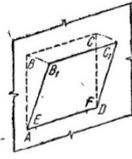
Введение. Несмотря на большое количество публикаций, относящихся к проблеме изучения динамики стержневых систем с односторонними связями, вопросу изучения движения механических систем после обнуления опорных реакций уделено недостаточное внимание. В данной работе рассматриваются задачи из задачника [1, 2], которые прежде были решены частично или в допущении, что наложенные на тела связи удерживающие.

Постановки задач. Условия рассмотренных задач 43.4 и 43.5 задачника [1], а также задач 7.29 и 7.30 задачника [2] приведены на рис. 1.

43.5 (1115). Однородный стержень AB длиной a поставлен в вертикальной плоскости под углом φ_0 к горизонту так, что концом A он опирается на гладкую вертикальную стену, а концом B — на гладкий горизонтальный пол; затем стержню предоставлено падать без начальной скорости.



К задаче 43.5.



К задаче 43.7.

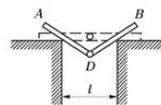
- 1) Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня.
- 2) Найти, какой угол φ_1 будет составлять стержень с горизонтом в тот момент, когда он отойдет от стены.

Ответ: 1) $\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{3g}{a}(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}$, $\ddot{\varphi} = \frac{3g}{2a} \cos \varphi$;

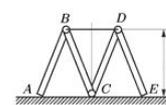
2) $\sin \varphi_1 = \frac{2}{3} \sin \varphi_0$.

43.6. Используя условие предыдущей задачи, определить угловую скорость $\dot{\varphi}$ стержня и скорость нижнего его конца в момент падения стержня на пол.

7.29. Однородные стержни AD и BD (см. рисунок), шарнирно соединенные в точке D , опираются на два гладких угла. Длина каждого стержня равна расстоянию между опорами l . В начальный момент стержни горизонтальны и расположены симметрично относительно опор, а затем (после малого начального толчка) приходят в движение за счет собственного веса, причем точка D перемещается по вертикали. Определить скорость точки D в тот момент, когда концы A и B стержней достигнут угловых точек.



К задаче 7.29



К задаче 7.30

7.30. «Гармошка» $ABCDE$ (см. рисунок) из четырех шарнирно соединенных однородных стержней длины l каждый стоит на гладком горизонтальном полу и удерживается в равновесии стяжкой BD . После разрыва стяжки гармошка начинает падать. Найти зависимость скорости точки B от ее высоты h над полом, если в начальный момент эта высота была равна h_0 .

Рис. 1. Условия рассматриваемых задач

Дифференциальные уравнения плоского движения стержня в задаче 43.5 приведены в работе [3] и позволяют определить угловое ускорение стержня до его отрыва от стенки в виде $\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2a} \cos \varphi$.

Угловая скорость на рассматриваемом участке движения стержня определяется путем интегрирования $\ddot{\varphi}$ с учетом нулевых начальных условий:

$$|\dot{\varphi}| = \sqrt{\frac{3g}{a} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}.$$

Исследуя зависимость реакции N_A от обобщенной координаты φ , легко установить, что обнуление исследуемой величины происходит при $\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{2}{3} \sin \varphi_0\right)$.

На втором этапе движения стержня (после его отрыва в точке A) зависимость угловой скорости стержня может быть найдена с применением закона сохранения энергии и примет вид:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{4g}{3a} \frac{9 - \sin^2 \varphi_0}{3 \cos^2 \varphi + 1} (\sin \varphi_0 - \sin \varphi)}, \quad 0 < \varphi < \varphi_1. \quad (1)$$

Угловое ускорение на рассматриваемом этапе движения можно найти путем дифференцирования (1) по обобщенной координате, а именно $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$. Тогда выражение для реакции $N_B(\varphi)$ может быть получено из третьего уравнения системы дифференциальных уравнений движения в виде

$$N_B(\varphi) = \frac{3g}{(1 + 3 \cos^2 \varphi)^2} \sqrt{\frac{4}{3} + \sin^2 \varphi - \sin \varphi_1 \left(3 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi_1\right) \sin \varphi}, \quad (2)$$

$$0 < \varphi < \varphi_1.$$

На рис. 2 приведены графики функций $N_A(\varphi)$ и $N_B(\varphi)$ для стержня единичной массы и длины. На рис. 3 показана схема движения изучаемого стержня после его отрыва от вертикальной опорной поверхности.

При решении задачи 7.29 в качестве обобщенной координаты принят угол φ , образуемый стержнем с горизонталью, а начало отсчета расположено в точке D (см. рис. 1). Применяя закон сохранения полной механической энергии, получим выражение для угловой скорости стержня до его отрыва:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{\operatorname{tg}\varphi - \sin\varphi}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4\cos^4\varphi} - \frac{1}{2\cos\varphi}}}, \quad 0 < \varphi < \varphi_1. \quad (3)$$

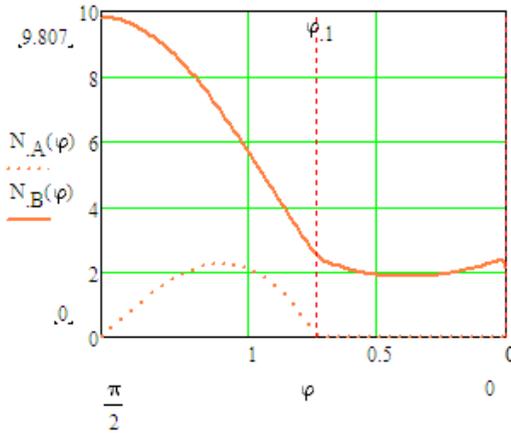


Рис. 2. Зависимости $N_A(\varphi)$ и $N_B(\varphi)$ в задаче 43.5 (43.6)

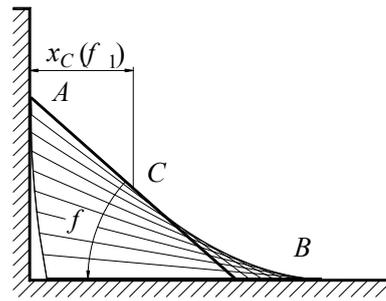


Рис. 3. Схема движения стержня в задаче 43.5 (43.6)

Угловое ускорение стержня $\ddot{\varphi}$ может быть найдено путем дифференцирования по обобщенной координате выражения (3) аналогично тому, как это выполнено в предыдущем случае.

Для определения абсолютной величины реакции \vec{N} , направленной перпендикулярно стержням, применим теорему о движении центра масс:

$$2\ddot{y} = 2g - 2N \cos\varphi \Rightarrow N = \frac{g - \ddot{y}}{\cos\varphi},$$

$$\text{где } \ddot{y} = \left(\sin\varphi + \frac{2\sin\varphi}{\cos^3\varphi} \right) \frac{l\dot{\varphi}^2}{2} + \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - \cos\varphi \right) \frac{l\ddot{\varphi}}{2}.$$

Получив функцию $N(\varphi)$ и исследуя ее, приходим к выводу, что стержни теряют контакт с опорной поверхностью при $\varphi = \varphi_1 = 0,815$ рад. Последующее движение стержней может быть изучено с применением системы дифференциальных уравнений, полученных, например, с применением уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}l^2\ddot{\varphi} - \ddot{y}l \cos\varphi &= -gl \cos\varphi, \\ 2\ddot{y} - l\dot{\varphi} \cos\varphi + l\dot{\varphi}^2 \sin\varphi &= 2g, \end{aligned} \quad (4)$$

откуда путем исключения \ddot{y} получим уравнение динамики вращательного движения стержня в виде

$$\ddot{\varphi} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0. \quad (5)$$

Зависимость угловой скорости на исследуемом этапе движения стержневой системы определяем интегрированием выражения (5) с начальными условиями, соответствующими $\varphi_1 = 0,815$ рад. Получим

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \dot{\varphi}(\varphi_0) \sqrt{\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cos^2 \varphi}}, \quad \varphi_1 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Схема движения механической системы задачи 7.29 приведена на рис. 5. При этом положение стержней, при котором происходит их отрыв от опорной поверхности ($\varphi_1 = 0,815$ рад), выделено жирными линиями.

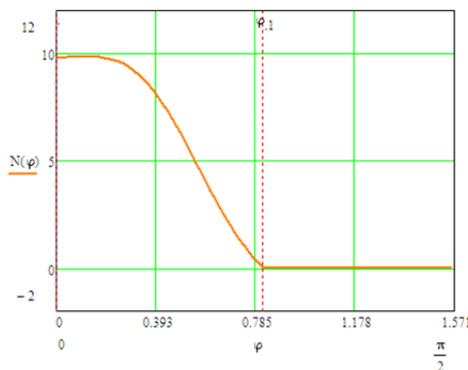


Рис. 4. Зависимость $N(\varphi)$ в задаче 7.29

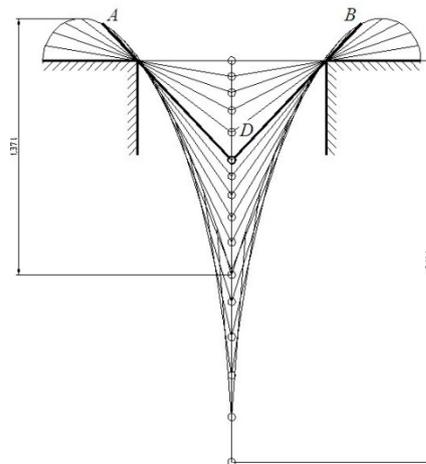


Рис. 5. Схема движения стержней в задаче 7.29

При решении задачи 7.30 в качестве обобщенной координаты также принят угол φ , образуемый стержнем CD с горизонталью (см. рис. 1). Соотношение масс внешних стержней и массы всей системы учтено с помощью коэффициента

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \in [0, 1], \quad (7)$$

где m_1 — массы внутренних стержней; m_2 — массы внешних стержней.

Кинетическую энергию стержня DE найдем по теореме Кёнига, а кинетическую энергию внутреннего стержня CD — как энергию вращения относительно неподвижной оси. Тогда кинетическая энергия механической системы примет вид:

$$T = 2T_{CD} + 2T_{DE} = (m_1 + m_2) \left(\frac{1}{3} + 2\lambda \sin^2 \varphi \right) l^2 \dot{\varphi}^2. \quad (8)$$

По закону сохранения полной механической энергии кинетическая энергия системы равна работе сил тяжести, которую можно вычислить по формуле

$$A(m\bar{g}) = 2(m_1 + m_2)g \frac{l}{2} (\sin \varphi(0) - \sin \varphi). \quad (9)$$

Приравнявая (8) и (9), получим выражение для обобщенной скорости:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g \sin \varphi(0) - \sin \varphi}{l \left(\frac{1}{3} + 2\lambda \sin^2 \varphi \right)}}. \quad (10)$$

Угловое ускорение стержней найдем путем дифференцирования (10) по обобщенной координате φ . В результате получим

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g \left(\frac{1}{6} + 2\lambda \sin \varphi(0) \sin \varphi - \lambda \sin^2 \varphi \right) \cos \varphi}{l \left(\frac{1}{3} + 2\lambda \sin^2 \varphi \right)^2}. \quad (11)$$

Величину нормальной реакции N опорной поверхности на стержни рассматриваемой конструкции определим с применением ко всей механической системе теоремы о движении центра масс в проекции на вертикальную ось Sy . В результате получим

$$N = 2(m_1 + m_2)g \left[1 - \frac{l}{2g} \left(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi \right) \right] > 0. \quad (12)$$

Условие (12) является необходимым для сохранения справедливости формул (8)–(11). При его невыполнении рассматриваемая конструкция становится системой с двумя степенями свободы. Анализируя выражение (12), можно найти указанное условие в виде

$\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi < 2g/l$, откуда при $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$ получим

$$\frac{1 - \sin \varphi}{\frac{1}{3} + 2\lambda \sin^2 \varphi} \sin \varphi + \frac{\left(\frac{1}{6} + 2\lambda \sin \varphi - \lambda \sin^2 \varphi\right) \cos^2 \varphi}{\left(\frac{1}{3} + 2\lambda \sin^2 \varphi\right)^2} < 2. \quad (13)$$

На рис. 6 приведены графики зависимости $\frac{N(\varphi)}{2(m_1 + m_2)g}$ при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$, построенные для двух практически значимых случаев: $\lambda = 0$ и $\lambda = 0,5$. Как видно из рис. 6 и рис. 7, обнуление опорной реакции $N(\varphi)$ возникает при различных углах φ_0 .

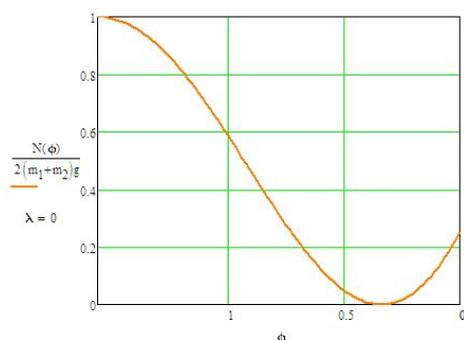


Рис. 6. Зависимость $\frac{N(\varphi)}{2(m_1 + m_2)g}$ при $\lambda = 0$ в задаче 7.30

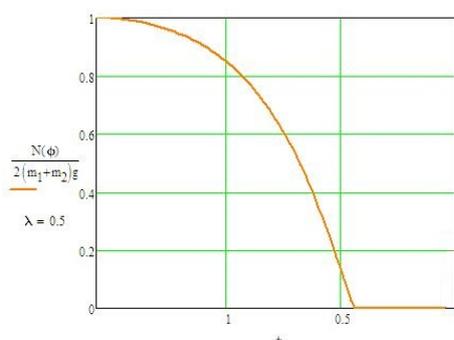


Рис. 7. Зависимость $\frac{N(\varphi)}{2(m_1 + m_2)g}$ при $\lambda = 0,5$ в задаче 7.30

Движение рассматриваемой механической системы при $N(\varphi) = 0$ может быть изучено с применением уравнения Лагранжа второго рода [4, 5]. В силу симметрии рассматриваемой механической системы (см. рис. 1) свободное движение стержней можно задать двумя обобщенными координатами φ, ψ . Тогда система дифференциальных уравнений движения изучаемой конструкции при $\vec{N} = 0$ примет вид

$$-\ddot{y} \cos \varphi + 2\ddot{\varphi} l \left(\frac{1}{3} + 2\lambda \sin^2 \varphi\right) + 4\dot{\varphi}^2 l \lambda \sin \varphi \cos \varphi = -g \cos \varphi, \quad (14)$$

$$\ddot{y} = g + \frac{l}{2} (-\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ddot{\varphi} \cos \varphi).$$

Исключая \ddot{y} из последних двух уравнений и вводя обозначение $u = \dot{\varphi}^2$, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{du}{d\varphi} \left[\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{4} + 2\lambda \right) \sin^2 \varphi \right] + u \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{4} + 2\lambda \right) \sin \varphi \cos \varphi \right] = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим следующие зависимости:

$$\dot{\varphi} = \sqrt{u} = -\sqrt{h} \left[\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{4} + 2\lambda \right) \sin^2 \varphi \right]^{-1/2},$$

$$\ddot{\varphi} = -h \left(\frac{1}{4} + 2\lambda \right) \sin \varphi \cos \varphi \left[\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{4} + 2\lambda \right) \sin^2 \varphi \right]^{-2},$$

откуда зависимость вертикального ускорения точки C от угла φ

$$a_{Cy} = \ddot{y} = g - \frac{h \frac{l}{2} \left(\frac{1}{3} + 2\lambda \right) \sin \varphi}{\left[\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{4} + 2\lambda \right) \sin^2 \varphi \right]^2}. \quad (15)$$

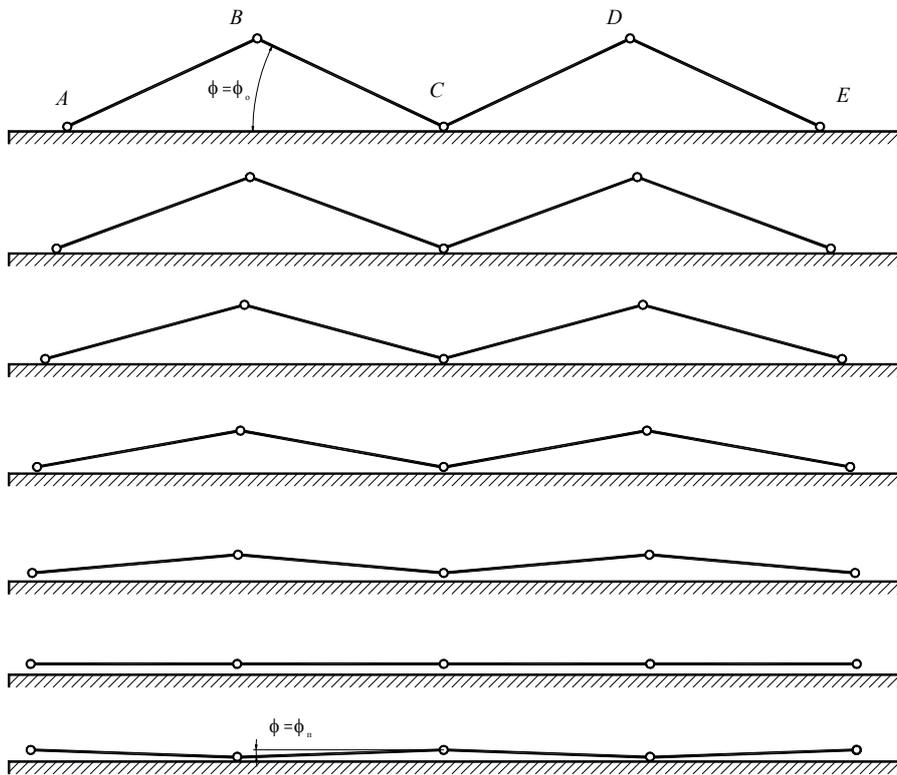


Рис. 8. Схема движения механической системы при $\lambda = 0,5$ в задаче 7.30

Предполагая, что начальные условия нулевые, получим

$$y(\varphi) = \frac{l}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) - \frac{l}{2} \sqrt{u(\varphi_0)} \cos \varphi_0 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{u(\psi)}} + \frac{g}{2} \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{u(\psi)}} \right)^2.$$

На рис. 8 приведена схема движения изучаемой конструкции — последовательность занимаемых конструкцией положений, построенных для случая $\lambda = 0,5$ на основе приведенных ранее зависимостей. Отметим, что для рассмотренного на рис. 8 случая в момент времени, когда все стержни расположены горизонтально, вертикальные перемещения всех точек системы одинаковы и составляют $0,03l$, а максимальные вертикальные перемещения точек A , C и E составляют $0,033l$.

Литература

1. Мещерский И.В. *Задачи по теоретической механике*. Санкт-Петербург, Лань, 2012, 448 с.
2. Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Е.И., Яковенко Г.Н. *Сборник задач по аналитической механике*. Москва, Физматлит, 2002, с. 61–62.
3. Козлова З.П., Паншина А.В., Розенблат Г.М. *Теоретическая механика в решениях задач из сборника И.В. Мещерского. Кн. 3: Динамика материальной системы*. Розенблат Г.М., ред. Изд. стереотип. Москва, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2021, 432 с.
4. Журавлев В.Ф., Розенблат Г.М. *Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике*. Москва, ЛЕНАНД, 2017, 240 с.
5. Журавлев В.Ф., Фуфаев Н.А. *Механика систем с односторонними связями*. Москва, Наука, 1993, 240 с.
6. Журавлев В.Ф. Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями. *ПММ*, 1978, т. 42, вып. 5, с. 781–788.
7. Маркеев А.П. *Теоретическая механика*. 2-е изд. Москва, ЧеРо, 1999, 572 с.
8. Гришакин В.Т. *Теоретическая механика: практикум*. Москва, МАДИ, 2020, 144 с.
9. Веретенников В.Г., Сеницын В.А. *Теоретическая механика (дополнения к общим разделам)*. Москва, Физматлит, 2006, 416 с.
10. Розенблат Г.М. Анализ некоторых задач по механике систем с односторонними связями. *Развитие методов виртуального цифрового моделирования и экспериментальных исследований прочности и динамики машин и дорожных конструкций. Сборник трудов 79-й Международной научно-методической и научно-исследовательской конференции МАДИ*. Москва, МАДИ, 2021, с. 29–46.

On the dynamics of rod systems with one-way bonds

© G.M. Rosenblat¹, V.T. Grishakin^{1,2}

¹Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI),
Moscow, Russia

²Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia
E-mail: gr51@mail.ru, Grishakin@yandex.ru

Abstract. The formulation and solution of problems of dynamics of rod mechanical systems with one-way connections is considered. The driving force in all cases under consideration is gravity. Since unstopable bonds are imposed on all the systems of bodies considered in the mentioned tasks, for their correct solution it is necessary to take into account the unilateral action of the reaction forces of the bonds applied to the bodies of the studied systems. The motion of the studied systems after zeroing the bond reaction forces is considered in detail. The results of numerical experiments are presented, on the basis of which the motion schemes of the studied systems of bodies are constructed, illustrating the movements of these systems after their separation from the supporting surfaces.

Keywords: *unstopable bonds, normal reactions, free fall.*

References

1. Meshchersky I.V. *Problems in theoretical mechanics: textbook*. St. Petersburg, Lan, 2012, 448 p.
2. Pyatnitsky E.S., Trukhan N.M., Hanukaev E.I., Yakovenko G.N. *Collection of problems in analytical mechanics*. Moscow, Fizmatlit, 2002, pp. 61–62.
3. Kozlova Z.P., Panshina A.V., Rosenblat G.M. *Theoretical mechanics in solving problems from the collection of I.V. Meshchersky. Book 3: Dynamics of a material system*. Rosenblat G.M., ed. Ed. Stereotyp. Moscow, Book house "LIBROCOM", 2021, 432 p.
4. Zhuravlev V.F., Rosenblat G.M. Paradoxes, counterexamples and errors in mechanics. *Introduction by Academician of the Russian Academy of Sciences D.M. Klimov*. Moscow, LENAND, 2017, 240 p.
5. Zhuravlev V.F., Fufaev N.A. *Mechanics of systems with one-way connections*. Moscow, Nauka, 1993, 240 p.
6. Zhuravlev V.F. Equations of motion of mechanical systems with ideal one-way connections. *PMM*, 1978, vol. 42, iss. 5, pp. 781–788.
7. Markeev A.P. *Theoretical Mechanics: textbook for universities*. Second ed. Moscow, Chero, 1999.
8. Grishakin V.T. *Theoretical mechanics: practicum*. Moscow, MADI, 2020, 144 p.
9. Veretennikov V.G., Sinitsyn V.A. *Theoretical mechanics (additions to general sections)*. Moscow, Fizmatlit, 2006, 416 p.
10. Rosenblat G.M. Analysis of some problems in the mechanics of systems with one-way connections. *Development of methods of virtual digital modeling and experimental studies of strength and dynamics of machines and road structures. Proceedings of the 79th International Scientific-methodical and Research Conference of MADI, 2021*. Moscow, MADI, pp. 29–46.

Анализ орбитальной устойчивости периодических маятниковых движений твердого тела с неподвижной точкой в случае Гесса

© Б.С. Бардин, А.А. Савин

Московский авиационный институт, Москва, Россия
E-mail: bsbardin@yandex.ru, sashka_savin@mail.ru

Аннотация. Рассматривается движение твердого тела с неподвижной точкой в однородном поле тяжести. Предполагается, что геометрия масс тела соответствует случаю Гесса. Исследуется задача об орбитальной устойчивости периодических маятниковых движений, при которых центр масс движется в неподвижной вертикальной плоскости, на нулевом уровне вертикального кинетического момента. В окрестности невозмущенного движения введены локальные координаты и выписаны уравнения возмущенного движения. На нулевом уровне энергии была выполнена изоэнергетическая редукция, что свело исследование орбитальной устойчивости невозмущенного движения к исследованию устойчивости положения равновесия системы с полутора степенями свободы. Для исследования линеаризованной системы уравнений возмущенного движения был применен алгоритм Ковачича. Это позволило построить в явном виде матрицу монодромии линейной редуцированной системы и показать, что маятниковые вращения в случае Гесса орбитально неустойчивы. В случае маятниковых колебаний показано, что в задаче об орбитальной устойчивости возникает явление так называемого тождественного резонанса, когда резонанс первого порядка имеет место при всех значениях параметров. В этом случае для почти всех значений параметров матрица монодромии имеет непростые элементарные делители. Данный факт позволяет говорить о неустойчивости в линейном приближении. Нелинейный анализ устойчивости показал орбитальную неустойчивость периодических колебаний в полной нелинейной системе.

Ключевые слова: гамильтониан, орбитальная устойчивость, алгоритм Ковачича.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00637.

Analysis of the orbital stability of periodic pendulum motions of a rigid body with a fixed point in the Hess case

© B.S. Bardin, A.A. Savin

Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia
E-mail: bsbardin@yandex.ru, sashka_savin@mail.ru

Abstract. The motion of a rigid body with a fixed point in a uniform gravity field is considered. It is assumed that the geometry of the body masses corresponds to the Hess case. The problem of the orbital stability of periodic pendulum motions, in which the center of mass moves in a fixed vertical plane, at the zero level of the vertical angular momentum, is investigated. In the vicinity of the unperturbed motion, local coordinates are introduced and the equations of the perturbed motion are written out.

At the zero energy level, isoenergy reduction was performed, which reduced the study of the orbital stability of unperturbed motion to the study of the stability of the equilibrium position of a system with one and a half degrees of freedom. To study the linearized system of equations of perturbed motion, the Kovacic algorithm was applied. This made it possible to construct in an explicit form the monodromy matrix of a linear reduced system and to show that pendulum rotations in the Hess case are orbitally unstable. In the case of pendulum oscillations, it is shown that in the problem of orbital stability, the phenomenon of the so-called identical resonance arises, when a first-order resonance occurs for all values of the parameters. In this case, for almost all values of the parameters, the monodromy matrix has non-simple elementary divisors. This fact allows us to speak of instability in the linear approximation. Nonlinear stability analysis showed the orbital instability of periodic oscillations in a complete nonlinear system.

Keywords: *Hamiltonian, orbital stability, Kovacic algorithm.*

This research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project no. 20-01-00637).

Восстановление параметров устойчивых по Якоби демпфированных маятниковых систем с использованием гибридных алгоритмов глобальной оптимизации

© П.М. Шкапов^{1*}, А.В. Сулимов^{1,2}, В.Д. Сулимов¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

²Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Севастополе, Севастополь, Россия

*E-mail: spm2@bk.ru

Аннотация. На основе теории Косамби — Картана — Черна вводится геометрическое описание демпфированных маятниковых систем с двумя степенями свободы. В рамках подхода могут быть определены пять геометрических инвариантов исследуемой системы. Предполагается, что собственные значения второго инварианта (называемого тензором кривизны отклонения) системы не только дают оценку ее устойчивости по Якоби, но также содержат полезную информацию о параметрах системы. Формулируется обратная задача восстановления параметров системы по заданным приближенно собственным значениям второго инварианта. Реализован оптимизационный подход к решению обратных задач. Приведены численные примеры восстановления существенных параметров устойчивых по Якоби демпфированных систем (двойного маятника и эллиптического маятника с упругой связью) по заданным приближенно спектрам

собственных значений вторых инвариантов систем. В процессе глобальной минимизации критериальных функций обратных задач использованы новые гибридные алгоритмы.

Ключевые слова: маятниковая система, демпфирование, геометрический инвариант, устойчивость по Якоби, восстановление параметров, глобальная оптимизация, гибридный алгоритм.

Введение. Теория Косамби — Картана — Черна (теория ККЧ) представляет один из современных методов исследования устойчивости динамических систем, определяемую как устойчивость по Якоби [1, 2]. В рамках подхода вводится геометрическое описание системы, что дает возможность определить пять геометрических инвариантов системы. Собственные значения второго инварианта (также называемого тензором кривизны отклонения) устанавливают оценку устойчивости системы по Якоби. Применение теории ККЧ актуально в приложениях, где для рассматриваемой системы необходимо изучение ее робастности (меры нечувствительности и/или адаптации к изменению параметров собственно системы и окружающей среды) или требуется идентифицировать области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби [3].

Пусть для исследуемой маятниковой системы, имеющей заданную структуру, определены второй инвариант (тензор кривизны отклонения) и его собственные значения. Далее предполагается, что указанные собственные значения второго инварианта не только дают оценку устойчивости системы по Якоби (в контексте теории ККЧ), но также содержат некоторую полезную информацию о параметрах системы (структура системы известна). Возможна постановка обратной задачи, в которой требуется определить существенные характеристики системы по заданным собственным значениям второго инварианта. Входные данные задачи могут быть получены экспериментально, посредством прямых измерений с последующей компьютерной обработкой. В качестве искомым рассматриваются, например, физические и геометрические характеристики системы, характеристики управления и др. Для исследуемой системы формулируется обратная задача, связанная с восстановлением и анализом существенных характеристик системы по косвенной информации, представленной конечным множеством собственных значений второго инварианта. Обратные задачи на собственные значения относятся к классу некорректно поставленных задач, при решении которых требуется применение специальных регуляризирующих методов [4]. Одним из основных подходов к решению подобных задач является оптимизационный, связанный с минимизацией некоторой критериальной функции (функции рассогласования). В приложениях необходимо учитывать неполноту входной

косвенной информации, зашумленность измеряемых данных, возможное наличие кратных собственных значений, другие особенности. Естественная ограниченность энергии изменений в системе служит обоснованием предположению о том, что отношения приращений критериальных функций к приращениям аргументов не превышают некоторого порога, характеризуемого с помощью константы Липшица. Критериальные функции обратных задач в общем случае являются непрерывными, многомерными, локально липшицевыми, многоэкстремальными, не обязательно всюду дифференцируемыми. Следовательно, для решения обратных задач вычислительной диагностики требуется применение алгоритмов глобальной недифференцируемой оптимизации [5]. Реализуемый далее подход основан на разработке и применении математических моделей систем, методов определения геометрических структур и анализа устойчивости систем по Якоби, методов теории обратных задач, методов глобальной недифференцируемой оптимизации.

Геометрические структуры и устойчивость системы по Якоби. Краткий обзор теории ККЧ представлен в работах [1, 2]. Предполагается, что переменные динамической системы x^i , $i=1, 2, \dots, n$, определены на действительном гладком n -мерном многообразии M ; касательное расслоение многообразия M обозначается как TM . Результирующие уравнения (нелинейные в общем случае) движения системы, представленные в соответствии с теорией ККЧ, имеют вид

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x^j, \dot{x}^j, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где каждая функция $G^i(x^j, \dot{x}^j, t)$ имеет класс гладкости C^∞ , $\dot{x}^i = dx^i/dt$, $\ddot{x}^i = d^2x^i/dt^2$. Для уравнений вида (1) могут рассматриваться задачи определения пяти геометрических инвариантов системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка при преобразованиях координат: $\tilde{t} = t$, $\tilde{x}^i = f^i(x^j)$. При этом ККЧ-ковариантная производная векторного поля u^i определена в виде

$$\frac{Du^i}{dt} \equiv \dot{u}^i + N_j^i u^j, \quad (2)$$

где N_j^i представляют локальные коэффициенты нелинейной связности.

Если траектории $\tilde{x}^i = x^i + \varepsilon u^i$ (здесь ε — малая величина) близки к траекториям уравнений (1), то при $\varepsilon \rightarrow 0$ указанные уравнения преобразуются к виду

$$\ddot{u}^i + 2N_j^i \dot{u}^j + 2Z_j^i u^j = 0, \quad (3)$$

где Z_j^i — кривизна нуль-связности. С использованием (2) уравнение (3) можно переписать в ковариантной форме [1, 2]:

$$\frac{D^2 u^i}{dt^2} = P_j^i u^j.$$

Здесь P_j^i — второй геометрический инвариант (тензор кривизны отклонения), который может быть представлен в виде

$$P_j^i = \frac{\partial N_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k - 2G^k G_{jk}^i + N_k^i N_j^k - 2Z_j^i,$$

при этом функции G^i определяются в соответствии с установленной структурой уравнений движения (1), а локальные коэффициенты нелинейной связности N_j^i , кривизны нуль-связности Z_j^i и связности Бервальда соответственно могут быть найдены как

$$N_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial \dot{x}^j}; \quad Z_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial x^j}; \quad G_{jk}^i = \frac{\partial^2 G^i}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}.$$

Собственные значения второго геометрического инварианта (тензора P_j^i кривизны отклонения) используется при анализе устойчивости динамической системы по Якоби. Далее для каждой из исследуемых маятниковых систем собственные значения соответствующего тензора P_j^i определяются в виде

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2},$$

где $\tau = P_1^1 + P_2^2$; $\Delta = P_1^1 P_2^2 - P_2^1 P_1^2$.

Определение [1]. Траектории уравнений (1) устойчивы по Якоби, если и только если действительные части собственных значений тензора кривизны отклонения P_j^i всюду строго отрицательны и неустойчивы по Якоби в противном случае.

Постановка обратной задачи. Обратная задача восстановления параметров системы в рамках выбранной математической модели описывается операторным уравнением

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

где X, Y — гильбертовы пространства; A — компактный линейный оператор, действующий из X в Y . Правая часть возмущенного операторного уравнения (приведенного выше) представляет приближенные входные данные y^δ , полученные из эксперимента (при измерениях). Предполагается, что погрешность задания входной информации δ известна; при этом имеет место $\|y^\delta - y\| \leq \delta$. Требуется определить устойчивые приближенные решения по заданной приближенно косвенной информации y^δ . Следует отметить, что во многих приложениях обратные задачи являются некорректно поставленными. Далее реализуется подход, основанный на методе регуляризации [6].

Приближенное решение рассматриваемой обратной задачи предполагает поиск минимума функционала Тихонова $J_\alpha(x)$:

$$x_\alpha^\delta = \arg \min_{x \in X} J_\alpha(x), \quad \alpha > 0,$$

где x_α^δ — регуляризованное решение уравнения $Ax = y^\delta$ с параметром регуляризации α .

Гибридные алгоритмы глобальной оптимизации. Гибридные методы глобальной недифференцируемой оптимизации структурно объединяют стохастические методы сканирования пространства переменных и численные процедуры локального поиска. Гибридный подход к решению задач глобальной оптимизации (в том числе при наличии ограничений) представлен в работах [7–9].

В настоящей работе используются два новых гибридных алгоритма глобальной недифференцируемой оптимизации:

– QOM-PCASFC: объединяет стохастический кратный алгоритм QOM-PCA столкновения частиц (обучение с построением квазиоппозиций) [8] в фазе сканирования пространства переменных и детерминированный алгоритм SFC, реализующий метод кривой, заполняющей пространство;

– RBM-PCASFC: объединяет стохастический кратный алгоритм RBM-PCA столкновения частиц (обучение методом вращений) [9] и алгоритм SFC.

Аналогичный подход с использованием гибридных алгоритмов глобальной оптимизации реализован применительно к задаче восстановления параметров неустойчивой по Якоби динамической системы Лоренца [10].

Численные примеры

Пример 1. Плоский двойной маятник состоит из двух математических маятников, сочлененных шарниром. Первый (верхний) маятник, вращающийся вокруг горизонтальной оси неподвижного плос-

кого шарнира, представляет собой безмассовый жесткий стержень длиной l_1 , несущий на свободном конце материальную точку массой m_1 . Вторым (нижний) маятник, вращающийся вокруг оси подвижного шарнира, связывающего оба маятника, состоит из безмассового жесткого стержня длиной l_2 с материальной точкой массой m_2 на его свободном конце. К первому маятнику присоединен демпфер; при этом отношение расстояния точки соединения стержня и подвижного элемента демпфера от неподвижного шарнира к длине стержня определяется параметром γ . Демпфер характеризуется коэффициентом линейно-вязкого сопротивления μ .

Предполагается, что по результатам анализа экспериментальных данных для исследуемой системы (демпфированного двойного маятника) установлены следующие приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения: $\lambda_1^* \approx -27,47$; $\lambda_2^* \approx -4,24$. Приведенная косвенная информация, полученная моделированием системы при стандартных значениях ее параметров ($l_1 = l_2 = l = 1,0$ м; $m_1 = m_2 = m = 0,4$ кг; $\mu = 8,0$ Н/(м/с)), представляет входные данные для решения обратной задачи. Относительная погрешность входных данных не превышает 1,0%. Свободными переменными являются нормированные величины x_1, x_2 , соответствующие искомым параметрам m, μ (массе материальной точки и коэффициенту линейно-вязкого сопротивления). Критериальная функция рассматриваемой обратной задачи определена в виде

$$F(x) = \sum_{i=1}^2 \gamma_i f_i^2(x) + \alpha \|x\|_2^2,$$

где $\gamma_i, f_i(x)$ — весовой коэффициент и частный критерий, соответствующие i -му собственному значению λ_i ; $f_i(x) = (\lambda_i^* - \lambda_i(x))$, $i = 1, 2$; α — параметр регуляризации; $x \in \mathbb{R}^2$.

При решении используется гибридный алгоритм QOM-PCASFC. Соответствующая плотности развертки $m = 5$ кривая Пеано–Гильберта критериальной функции $F(P(z))$, $z \in [0, 1)$ показана на рис. 1. Изменение свободных переменных x_i , $i = 1, 2$ при возрастании плотности развертки в заключительной фазе локального поиска показано на рис. 2; соответствующее изменение значений критериальной функции $F(x)$ представлено на рис. 3.

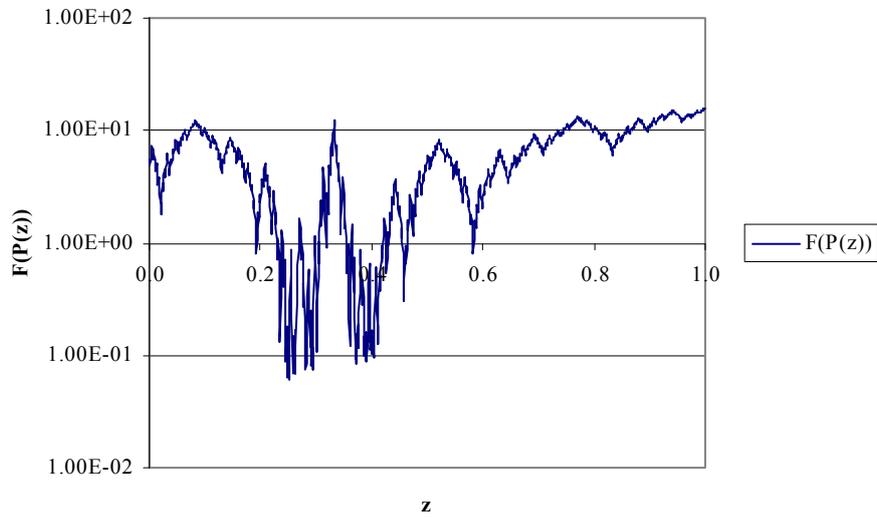


Рис. 1. Кривая Пеано–Гильберта критериальной функции $F(P(z))$, $z \in [0, 1)$, соответствующая плотности развертки $m = 5$

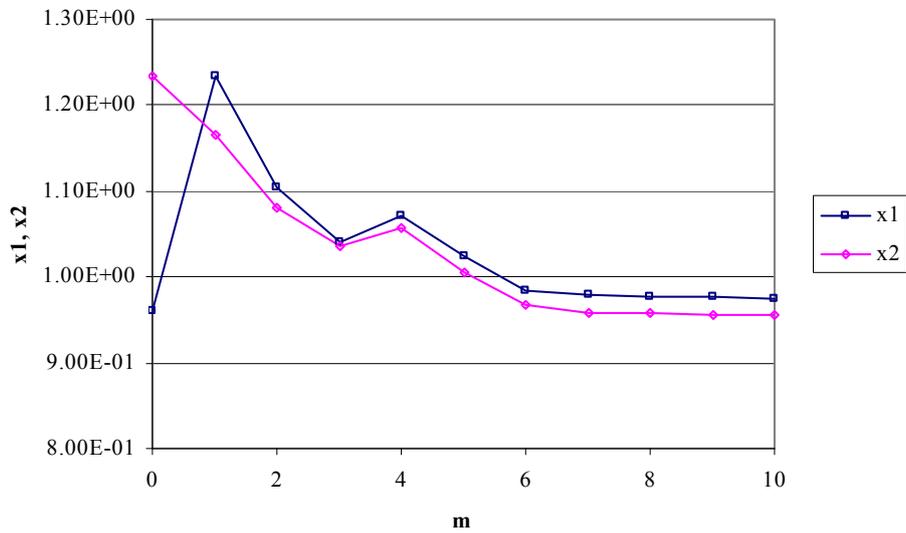


Рис. 2. Изменение свободных переменных x_i , $i = 1, 2$, при возрастании плотности развертки m

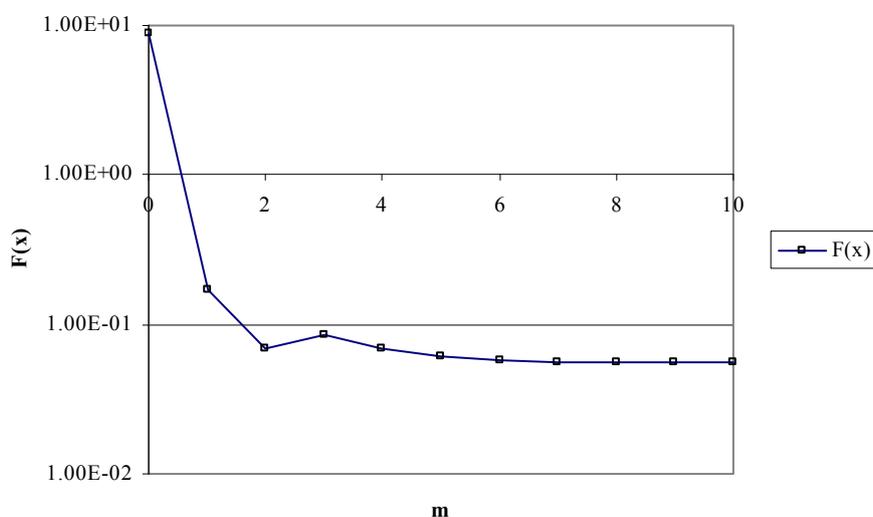


Рис. 3. Изменение критерияльной функции $F(x)$ при возрастании плотности развертки m

Восстановленные значения параметров системы соответственно равны: $m \approx 0,3902$ кг; $\mu \approx 8,602$ Н/(м/с). Наибольшая относительная погрешность решения (здесь определяется восстановленным значением коэффициента линейно-вязкого сопротивления μ) здесь не превышает 7,53 %. Итак, по заданным приближенно собственным значениям второго инварианта устойчивой по Якоби демпфированной системы (двойного маятника) восстановлены ее существенные параметры, значения которых близки к стандартным: $m_* = 0,4$ кг; $\mu_* = 8,0$ Н/(м/с).

Пример 2. Исследуемая система с двумя степенями свободы — демпфированный эллиптический маятник с упругой связью — включает в себя ползун, движущийся по гладкому горизонтальному основанию, сочлененный плоским шарниром (без трения) с математическим маятником. Первое звено (ползун) имеет массу $m_1 = M$; второе звено (математический маятник) представлено жестким безмассовым стержнем длины l , несущим на свободном конце материальную точку массы $m_2 = m$. На ползун наложена упругая связь — пружина с заданным коэффициентом жесткости c . К ползуну присоединена подвижная часть демпфера, коэффициент линейно-вязкого сопротивления которого равен μ . Для описания движения рассматриваемой системы введены две обобщенные координаты: x — перемещение ползуна вдоль горизонтальной направляющей; θ — угол отклонения стержня

от вертикальной оси, проходящей через подвижный шарнир, сочленяющий оба звена.

Предполагается, что по результатам анализа экспериментальных данных для исследуемой системы установлены следующие приближенные собственные значения тензора кривизны отклонения: $\lambda_1^* \approx -28,61$; $\lambda_2^* \approx -8,53$. Приведенная косвенная информация, полученная численным моделированием системы при стандартных значениях ее параметров ($l = 1,0$ м; $m_1 = M = 0,6$ кг; $m_2 = m = 0,4$ кг; $c = 20,0$ Н/м; $\mu = 8,0$ Н/(м/с)), представляет входные данные для решения обратной задачи. Относительная погрешность входных данных не превышает 1,0 %. Свободными переменными являются нормированные величины x_1, x_2 , соответствующие искомым параметрам c, μ (коэффициенту жесткости пружины и коэффициенту линейно-вязкого сопротивления). Критериальная функция рассматриваемой обратной задачи определена так же, как и в примере 1.

При решении сформулированной обратной задачи используется гибридный алгоритм RBM-PCASFC. Изменение свободных переменных $x_i, i = 1, 2$, при возрастании плотности развертки в заключительной фазе локального поиска показано на рис. 4; соответствующее изменение значений критериальной функции $F(x)$ представлено на рис. 5.

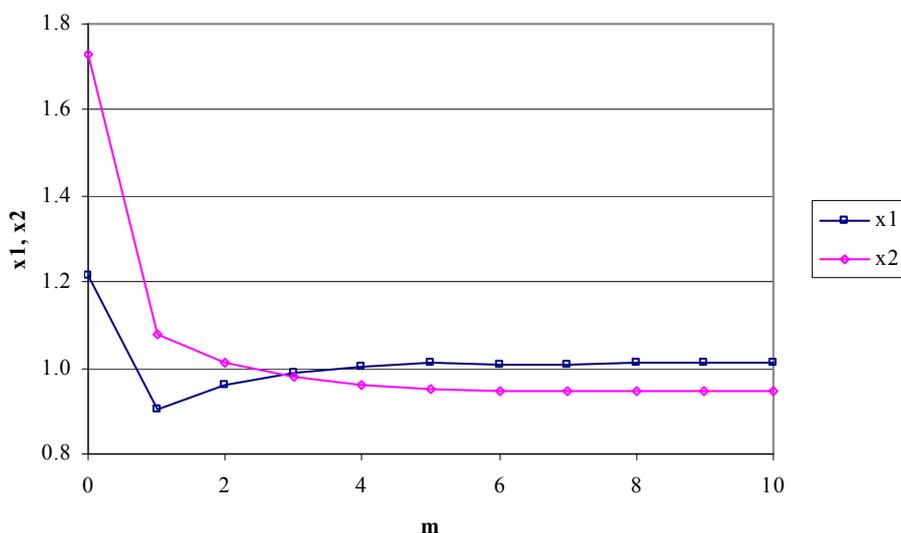


Рис. 4. Изменение свободных переменных $x_i, i = 1, 2$, при возрастании плотности развертки m

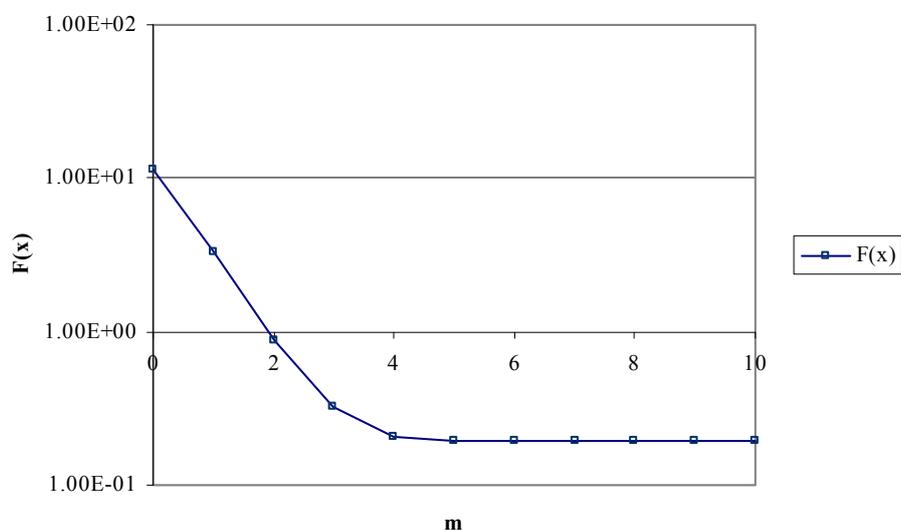


Рис. 5. Изменение критериальной функции $F(x)$ при возрастании плотности развертки m

Восстановленные значения параметров системы соответственно равны: $c \approx 20,22$ Н/м; $\mu \approx 0,3776$ Н/(м/с). Наибольшая относительная погрешность решения (здесь определяется восстановленным значением коэффициента линейно-вязкого сопротивления μ) здесь не превышает 5,6%. Итак, по заданным приближенно собственным значениям второго инварианта устойчивой по Якоби демпфированной системы (эллиптического маятника с упругой связью) восстановлены ее существенные параметры, значения которых близки к стандартным: $c_* = 20,0$ Н/м; $\mu_* = 0,4$ Н/(м/с).

Заключение. Представлена методика восстановления существенных параметров устойчивых по Якоби демпфированных маятниковых систем с двумя степенями свободы по заданным приближенно собственным значениям их тензоров кривизны отклонения. Сформулированы соответствующие обратные задачи на собственные значения для указанных тензоров. При решении регуляризованных обратных задач реализован оптимизационный подход. Для демпфированных систем — двойного маятника и эллиптического маятника с упругой связью — численное решение получено с использованием новых гибридных алгоритмов глобальной оптимизации. Точность восстановления искомых свободных параметров систем согласована с точностью задания входной информации.

Литература

1. Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems — applications in gravitation and cosmology. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196.
2. Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, art. no. 1656014, 24 p.
3. Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.
4. Wang Y., Yagola A.G., Yang C. *Optimization and regularization for computational inverse problems and applications*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2010, vol. XVIII, 351 p.
5. Xu Y.T., Zhang Y., Wang S.-G. A modified tunneling function method for non-smooth global optimization and its applications in artificial neural network. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, vol. 39, no. 21, pp. 438–6450.
6. Sprung B., Hohage T. Higher order convergence rates for Bregman iterated variational regularization of inverse problems. *Numerische Mathematik*, 2019, vol. 141, no. 2, pp. 215–252.
7. Liu J., Zhang S., Wu C., et al. A hybrid approach to constraint global optimization. *Applied Soft Computing*, 2016, vol. 47, pp. 281–294.
8. Torres R.H., Campos Velho H.F., da Luz E.F.P. Enhancement of the Multi-Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization. *Selecciones Matemáticas*, 2019, vol. 06 (2), pp. 156–177.
9. Torres R. H., de Campos Velho H.F. Rotation-based sampling Multi-Particle Collision Algorithm with Hooke–Jeeves. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 5, no. 1, art. no. 01473, 7 p.
10. Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V. Jacobi stability and updating parameters of dynamical systems using hybrid algorithms. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2018, vol. 468, art. no. 012040, 11 p.

Restoration of parameters of Jacobi stable damped pendulum systems using hybrid algorithms of global optimization

© P.M. Shkapov¹, A.V. Sulimov^{1,2}, V.D. Sulimov¹

¹Bauman Moscow State University, Moscow, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Branch in Sevastopol, Sevastopol, Russia

E-mail: spm2@bk.ru

Abstract. Geometric descriptions of two damped pendulum systems are introduced on base of the Kosambi — Cartan — Chern theory. The inverse problem of restoration parameters of the system from given eigenvalues of the deviation curvature tensor is considered. The optimization approach is realized for solving the corresponding regularized inverse problem. Two numerical examples illustrate the efficiency of the approach. The solutions of the problems on restoration of parameters of damped systems — the double pendulum and the elliptical pendulum —

are obtained. In both cases the accuracy of the solution found is consistent with the accuracy of the given input data.

Keywords: *pendulum system, damping, geometric invariant, Jacobi stability, restoration of parameters, global optimization, hybrid algorithm.*

References

1. Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems — applications in gravitation and cosmology. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196.
2. Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, art. no. 1656014, 24 p.
3. Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.
4. Wang Y., Yagola A.G., Yang C. *Optimization and regularization for computational inverse problems and applications*. Berlin, Heidelberg, Springer Verlag, 2010, vol. XVIII, 351 p.
5. Xu Y.T., Zhang Y., Wang S.-G. A modified tunneling function method for non-smooth global optimization and its applications in artificial neural network. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, vol. 39, no. 21, pp. 438–6450.
6. Sprung B., Hohage T. Higher order convergence rates for Bregman iterated variational regularization of inverse problems. *Numerische Mathematik*, 2019, vol. 141, no. 2, pp. 215–252.
7. Liu J., Zhang S., Wu C., et al. A hybrid approach to constraint global optimization. *Applied Soft Computing*, 2016, vol. 47, pp. 281–294.
8. Torres R.H., Campos Velho H.F., da Luz E.F.P. Enhancement of the Multi-Particle Collision Algorithm by mechanisms derived from the opposition-based optimization. *Selecciones Matemáticas*, 2019, vol. 06 (2), pp. 156–177.
9. Torres R. H., de Campos Velho H.F. Rotation-based sampling Multi-Particle Collision Algorithm with Hooke–Jeeves. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 5, no. 1, art. no. 01473, 7 p.
10. Sulimov V.D., Shkapov P.M., Sulimov A.V. Jacobi stability and updating parameters of dynamical systems using hybrid algorithms. *IOP Conference Series: Material Science and Engineering*, 2018, vol. 468, art. no. 012040, 11 p.

Анализ устойчивости по Якоби демпфированных маятниковых систем с двумя степенями свободы

© П.М. Шкапов^{1*}, А.В. Сулимов^{1,2}, В.Д. Сулимов¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

²Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Севастополе, Севастополь, Россия
E-mail: spm2@bk.ru

Аннотация. Эволюция демпфированных маятниковых систем во времени во многих случаях может быть описана уравнениями Эйлера — Лагранжа. Исследование устойчивости траекторий результирующей системы дифференциальных уравнений второго порядка

основано на теории Косамби — Картана — Черна. Геометрические структуры, определяемые в рамках подхода, позволяют описывать свойства системы с использованием пяти геометрических инвариантов. Второй инвариант (называемый также тензором кривизны отклонения) дает оценку устойчивости системы по Якоби. Для демпфированных систем с двумя степенями свободы — двойного маятника и эллиптического маятника с упругой связью — определены вторые инварианты. Условия устойчивости исследуемых систем по Якоби сформулированы в терминах их свободных параметров.

Ключевые слова: маятниковая система, линейно-вязкое сопротивление, геометрический инвариант, устойчивость по Якоби.

Введение. Многие практические исследования устойчивости динамических систем основаны на применении методов Ляпунова [1]. В общем случае конфигурационное пространство системы не является евклидовым. Один из современных методов исследования устойчивости динамических систем представляет теория Косамби — Картана — Черна (теория ККЧ) [2]. Вводится фундаментальное предположение о существовании взаимно-однозначного соответствия между динамической системой второго порядка и уравнениями геодезических в ассоциированном пространстве Финслера. Реализован дифференциально-геометрический подход к вариационным дифференциальным уравнениям, описывающим отклонение целой траектории динамической системы от ближайших траекторий. Геометрическое описание, основанное на теории ККЧ, дает возможность определить пять геометрических инвариантов системы. Второй инвариант — тензор кривизны отклонения — устанавливает оценку устойчивости системы по Якоби, при этом критерий устойчивости формулируется с использованием собственных значений указанного тензора. Анализ устойчивости динамической системы по Якоби связан с изучением ее робастности — меры нечувствительности и адаптации к изменению параметров собственно системы и окружающей среды [3]. Применение теории ККЧ актуально в практических приложениях, где для исследуемой системы требуется идентифицировать области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби.

Рассматриваются демпфированные (при наличии линейно-вязкого сопротивления) маятниковые системы с двумя степенями свободы: двойной маятник и эллиптический маятник с упругой связью. Целью является формулировка критериев устойчивости систем по Якоби в терминах их свободных параметров. Реализуемый подход основан на разработке математических моделей систем, а также применении уравнений Эйлера — Лагранжа, методов определения геометрических структур и анализа устойчивости систем по Якоби.

Геометрические инварианты и устойчивость системы по Якоби. Краткий обзор теории ККЧ представлен в работах [2, 4]. Предполагается, что переменные динамической системы x^i , $i = 1, 2, \dots, n$, определены на действительном гладком n -мерном многообразии M ; касательное расслоение многообразия M обозначается как TM . Рассматривается открытое связное подмножество Ω евклидова $(2n+1)$ -мерного пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$. На Ω вводится $(2n+1)$ -мерная локальная система координат (x^i, y^i, t) , $i = 1, 2, \dots, n$, где

$$x^i = (x^1, x^2, \dots, x^n), \quad y^i = (y^1, y^2, \dots, y^n),$$

$$y^i = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right), \quad t \text{ — время.}$$

Уравнения движения лагранжевой механической системы (M, L, F_i) могут быть получены с использованием (регулярной) функции Лагранжа $L: TM \rightarrow \mathbb{R}$ и уравнений Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial y^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = F_i, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь F_i , $i = 1, 2, \dots, n$, представляют внешние силы. Результирующие уравнения (нелинейные в общем случае) движения системы, представленные в соответствии с теорией ККЧ, имеют вид

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x^j, \dot{x}^j, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где каждая функция $G^i(x^j, \dot{x}^j, t)$ имеет класс гладкости C^∞ , $\dot{x}^j = dx^j / dt$, $\ddot{x}^j = d^2x^j / dt^2$. Для уравнений вида (1) могут рассматриваться задачи определения пяти геометрических инвариантов системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка при преобразованиях координат:

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x}^i = f^i(x^j). \quad (2)$$

При этом ККЧ-ковариантная производная векторного поля u^i определена в виде

$$\frac{Du^i}{dt} \equiv \dot{u}^i + N_j^i u^j, \quad (3)$$

здесь N_j^i представляют локальные коэффициенты нелинейной связности:

$$N_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial \dot{x}^j}. \quad (4)$$

Тогда первый геометрический инвариант определяется в виде

$$\varepsilon^i = 2G^i - N_j^i \dot{x}^j. \quad (5)$$

Если рассматривается случай, когда траектории $\tilde{x}^i = x^i + \varepsilon u^i$ (здесь ε — малая величина) близки к траекториям системы уравнений (1), то при $\varepsilon \rightarrow 0$ указанная система уравнений преобразуется к виду:

$$\ddot{u}^i + 2N_j^i \dot{u}^j + 2Z_j^i u^j = 0, \quad (6)$$

где Z_j^i — кривизна нуль-связности:

$$Z_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial x^j}. \quad (7)$$

Коэффициенты связности Бервальда определяются в виде:

$$G_{jk}^i = \frac{\partial^2 G^i}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}. \quad (8)$$

С использованием производной (3) уравнение (6) можно переписать в ковариантной форме [2, 4]:

$$\frac{D^2 u^i}{dt^2} = P_j^i u^j.$$

Здесь P_j^i — второй геометрический инвариант (тензор кривизны отклонения) представлен в виде:

$$P_j^i = \frac{\partial N_j^i}{\partial x^k} \dot{x}^k - 2G^k G_{jk}^i + N_k^i N_j^k - 2Z_j^i,$$

при этом функции G^i определяются в соответствии с установленной структурой уравнений движения (1), а локальные коэффициенты нелинейной связности N_j^i , кривизны нуль-связности Z_j^i и связности Бервальда могут быть найдены согласно (4), (7) и (8).

Собственные значения второго геометрического инварианта (тензора P_j^i кривизны отклонения) используются при анализе устойчи-

ности динамических систем по Якоби. Далее для каждой из исследуемых маятниковых систем собственные значения соответствующего тензора P_j^i определяются в виде:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2},$$

где $\tau = P_1^1 + P_2^2$; $\Delta = P_1^1 P_2^2 - P_2^1 P_1^2$.

Определение [2]. Траектории уравнений (1) устойчивы по Якоби, если и только если действительные части собственных значений тензора кривизны отклонения P_j^i всюду строго отрицательны и неустойчивы по Якоби в противном случае.

Двойной маятник с демпфированием. Плоский двойной маятник состоит из двух математических маятников, сочлененных шарниром [5]. Первый (верхний) маятник, вращающийся вокруг горизонтальной оси неподвижного плоского шарнира, представляет собой безмассовый жесткий стержень длиной l_1 , несущий на свободном конце материальную точку массой m_1 . Вторым (нижним) маятником, вращающимся вокруг оси подвижного шарнира, связывающего оба маятника, состоит из безмассового жесткого стержня длиной l_2 с материальной точкой массой m_2 на его свободном конце. К первому маятнику присоединен демпфер; при этом отношение расстояния точки соединения стержня и подвижного элемента демпфера от неподвижного шарнира к длине стержня определяется параметром γ . Демпфер характеризуется коэффициентом линейно-вязкого сопротивления μ . Для описания движения рассматриваемой системы с двумя степенями свободы введены две обобщенные координаты: θ_1 — угол отклонения первого стержня от вертикальной оси, проходящей через неподвижный шарнир; θ_2 — угол отклонения второго стержня от вертикальной оси, проходящей через подвижный шарнир, сочленяющий маятники. Дифференциальные уравнения движения двойного демпфированного маятника, полученные с использованием уравнений Эйлера–Лагранжа, имеют вид (g — ускорение свободного падения):

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{\mu\gamma^2}{m_1} \dot{\theta}_1 + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_1} \theta_1 = 0;$$

$$\ddot{\theta}_2 - \frac{\mu\gamma^2 l_1}{m_1 l_2} \dot{\theta}_1 - \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2} \theta_1 + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2} \theta_2 = 0.$$

Применение к исследуемой системе подхода на основе теории ККЧ позволяет, в частности, определить компоненты ее тензора кривизны отклонения в следующем виде:

$$P_1^1 = \frac{\mu^2 \gamma^4}{4m_1^2} - \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_1}; \quad P_2^1 = \frac{m_2 g}{m_1 l_1};$$

$$P_1^2 = -\frac{\mu^2 \gamma^4 l_1}{4m_1^2 l_2} + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2}; \quad P_2^2 = -\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l_2}.$$

Анализ устойчивости системы (двойного демпфированного маятника) по Якоби, выполненный на основе данных о собственных значениях тензора P_j^i в соответствии с приведенным выше определением, приводит к следующему результату (в терминах параметров системы).

Если свободные параметры системы (двойного математического маятника с демпфированием) $l_1, l_2, m_1, m_2, \mu, \gamma$ удовлетворяют одновременно ограничениям

$$\mu - \frac{2}{\gamma^2} \sqrt{m_1(m_1 + m_2)} \frac{g}{l_1} < 0 \quad \text{и} \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

то система устойчива по Якоби, в противном случае система неустойчива по Якоби. При этом устойчивость по Якоби двойного математического маятника с демпфированием в положении равновесия не зависит от свободного параметра l_2 .

Эллиптический маятник с демпфированием и упругой связью. Исследуемая система с двумя степенями свободы включает в себя ползун, движущийся по гладкому горизонтальному основанию, сочлененный плоским шарниром (без трения) с математическим маятником [6]. Первое звено (ползун) имеет массу $m_1 = M$; второе звено (математический маятник) представлено жестким безмассовым стержнем длины l , несущим на свободном конце материальную точку массы $m_2 = m$. На ползун наложена упругая связь — пружина с заданным коэффициентом жесткости c . К ползуну присоединена подвижная часть демпфера, коэффициент линейно-вязкого сопротивления которого равен μ . Для описания движения рассматриваемой системы введены две обобщенные координаты: x — перемещение ползуна вдоль горизонтальной направляющей; θ — угол отклонения

стержня от вертикальной оси, проходящей через подвижный шарнир, сочленяющий оба звена. Дифференциальные уравнения движения эллиптического демпфированного маятника с упругой связью, полученные с использованием уравнений Эйлера — Лагранжа, имеют вид

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{M} \dot{x} + \frac{c}{M} x - \frac{m}{M} g \theta = 0;$$

$$\ddot{\theta} + \frac{M+m}{M} \frac{g}{l} \theta - \frac{\mu}{lM} \dot{x} - \frac{c}{lM} x = 0.$$

Компоненты тензора кривизны отклонения системы определены в виде

$$P_1^1 = \frac{\mu^2 - 4Mc}{4M^2}; \quad P_2^1 = \frac{m}{M} g;$$

$$P_1^2 = \frac{4Mc - \mu^2}{4lM^2}; \quad P_2^2 = -\frac{M+m}{M} \frac{g}{l}.$$

Анализ устойчивости системы (эллиптического демпфированного маятника с упругой связью) по Якоби, выполненный на основе данных о собственных значениях тензора P_j^i в соответствии с приведенным выше определением, приводит к следующему результату (в терминах параметров системы).

Если свободные параметры системы (эллиптического демпфированного маятника с упругой связью) l, M, m, c, μ удовлетворяют ограничению

$$\mu - \mu_* < 0,$$

где μ_* — наименьшее из значений $\sqrt{Mc + M(M+m)\frac{g}{l}}$ и $2\sqrt{Mc}$, то система устойчива по Якоби, в противном случае система неустойчива по Якоби.

Заключение. Исследована устойчивость по Якоби демпфированных маятниковых систем с двумя степенями свободы: двойного маятника и эллиптического маятника с упругой связью. Приведены дифференциальные уравнения движения обеих систем. В соответствии с теорией Косамби — Картана — Черна введено геометрическое описание систем с указанием способов определения локальных коэффициенты нелинейной связности, кривизны нуль-связности и связности Бервальда. Для обеих систем в явном виде представлены компоненты тензоров кривизны отклонения и метод определения собственных

значений указанных тензоров. Условия устойчивости по Якоби сформулированы в терминах свободных параметров демпфированных маятниковых систем.

Литература

1. Hafstein S.F., Valfells A. Efficient computation of Lyapunov functions for nonlinear systems by integrating numerical solutions. *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 97, no. 3, pp. 1895–1910.
2. Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems — applications in gravitation and cosmology. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196.
3. Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.
4. Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, art. no. 1656014, 24 p.
5. Oiwa S., Yajima T. Jacobi stability analysis and chaotic behavior of nonlinear double pendulum. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2017, vol. 14, no. 12, art. no. 1750176, 19 p.
6. Шкапов П.М., Сулимов А.В., Сулимов В.Д. Вычислительная диагностика неустойчивых по Якоби динамических систем с использованием гибридных алгоритмов глобальной оптимизации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 4 (97), с. 40–56.

Jacobi stability analysis of damped pendulum systems with two degrees of freedom

© P.M. Shkapov¹, A.V. Sulimov^{1,2}, V.D. Sulimov¹

¹Bauman Moscow State University, Moscow, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Branch in Sevastopol, Sevastopol, Russia
E-mail: spm2@bk.ru

Abstract. The Jacobi stability of damped pendulum systems with two degrees of freedom (the double pendulum and the elliptical pendulum with spring) is investigated. Geometric descriptions of the systems are introduced on base of the Kosambi — Cartan — Chern theory. Deviation curvature tensors of the systems are defined explicitly. Eigenvalues of the deviation curvature tensor give the stability of the system in the Jacobi sense. Conditions of the Jacobi stability are formulated in terms of free parameters for both the damped pendulum systems.

Keywords: *pendulum system, linearly viscous resistance, geometric invariant, Jacobi stability.*

References

1. Hafstein S.F., Valfells A. Efficient computation of Lyapunov functions for nonlinear systems by integrating numerical solutions. *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 97, no. 3, pp. 1895–1910.

2. Böhmer C.G., Harko T., Sabau S.V. Jacobi stability analysis of dynamical systems — applications in gravitation and cosmology. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 16, no. 4, pp. 1145–1196.
3. Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.
4. Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, art. no. 1656014, 24 p.
5. Oiwa S., Yajima T. Jacobi stability analysis and chaotic behavior of nonlinear double pendulum. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2017, vol. 14, no. 12, art. no. 1750176, 19 p.
6. Shkapov P.M., Sulimov A.V., Sulimov V.D. Vychislitel'naya diagnostika neustoychivyykh po Yakobi dinamicheskikh system s ispol'zovaniem gibridnykh algoritmov global'noy optimizatsii. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki*, 2021, no. 4 (97), с. 40–56.

Система двух перпендикулярных цилиндров

© Ю.Ф. Голубев^{1,2}, Е.В. Мелкумова², К.А. Филатов²

¹ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

²МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: golubev@keldysh.ru, elena_v_m@mail.ru, fil_k_a@mail.ru

Аннотация. Рассматривается модельная задача о преодолении завала из деревьев в лесу шагающим роботом. Механическая система представляет собой два однородных цилиндра, которые лежат на горизонтальной плоскости друг на друге под некоторым углом. Решена задача о равновесии взаимно перпендикулярных цилиндров. Выписаны ограничения по трению. Проведено аналитическое исследование системы с трением для случая, когда цилиндры лежат перпендикулярно, выяснено, при каких углах возможно равновесие системы. Выписаны условия равновесия для системы с действующей на нее силой со стороны робота. Проведено аналитическое исследование системы без робота, а также численное исследование для системы с роботом.

Ключевые слова: шероховатые цилиндры, трение Амонтона–Кулона, преодоление препятствий.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(проект № 19-01-00123 А).*

Литература

Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. Преодоление шестиногим роботом изолированных цилиндрических препятствий. *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша*, № 65. Москва, 2020, 34 с.

System of two perpendicular cylinders

© Yu.F. Golubev^{1,2}, E.V. Melkumova², K.A. Filatov²

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: golubev@keldysh.ru, elena_v_m@mail.ru, fil_k_a@mail.ru

Abstract. A model problem of overcoming a blockage of trees in a forest by a walking robot is considered. The mechanical system consists of two homogeneous cylinders that lie on a horizontal plane on top of each other at a certain angle. The problem of the equilibrium of mutually perpendicular cylinders is solved. Friction limits are written out. An analytical study of the system with friction is carried out for the case when the cylinders are perpendicular, it is found out at what angles the equilibrium of the system is possible. Equilibrium conditions for a system with a force acting on it from a robot are written out. An analytical study of a system without a robot was carried out, as well as a numerical study for a system with a robot.

Keywords: rough cylinders, Amonton – Coulomb friction, overcoming obstacles.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00123 A).

References

Golubev Yu.F., Koryanov V.V. *Overcoming isolated cylindrical obstacles by a six-legged robot*. Preprints IPM them. M.V. Keldysh, no. 65. Moscow, 2020, 34 p.

2.2. Небесная механика

Руководители: д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Сазонов,
д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Ивашкин

Интеграл энергии при движении точки в задаче двух тел с учетом сжатия Земли

© В.В. Ивашкин

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: Ivashkin@keldysh.ru

Аннотация. В работе показано влияние полярного сжатия Земли на интеграл энергии для траектории точки в космическом полете. Для модели сжатия Земли с использованием второй зональной гармоники потенциала гравитационного поля Земли получено выражение для интеграла энергии, обобщающее обычный интеграл энергии для Кеплеровского невозмущенного поля. Представлено изменение Кеплеровской константы энергии за счет сжатия Земли. Для орбиты общего вида получено в первом приближении конечное представление этого изменения. Для полетов к планетам и Луне определена начальная скорость отлета КА от Земли при учете сжатия Земли. Работа развивает [1, 2].

Ключевые слова: материальная точка, траектория космического полета, сжатие Земли, вторая зональная гармоника, интеграл энергии.

Введение. В случае центрального ньютоновского гравитационного поля Земли движение КА удовлетворяет уравнению:

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \partial U_0/\partial \mathbf{r}^* = \partial(\mu/r)/\partial \mathbf{r}^* = -(\mu/r^3)\mathbf{r}, \quad (1)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор КА в инерциальной геоцентрической геоэваториальной системе координат, $r = |\mathbf{r}|$; * — знак транспонирования; μ — гравитационный параметр Земли; здесь

$$U_0(\mathbf{r}) = \mu/r \quad (2)$$

— «Кеплеровский» потенциал притяжения Земли без учета возмущений. Важнейшим первым интегралом в этом случае является интеграл энергии [1–8]:

$$V^2 - 2U_0 = V^2 - 2\mu/r = h_K, \quad h_K = -\mu/a, \quad (3)$$

где $V = |\mathbf{V}|$, \mathbf{V} — геоцентрическая скорость КА в указанной системе координат; h_K — Кеплеровская константа энергии; a — оскулирующая большая полуось орбиты при эллиптическом движении, когда $h_K < 0$, $a > 0$. Из (3) получим для начальной скорости в Кеплеровском случае:

$$V_0 = (h_K + 2\mu/r_0)^{1/2}. \quad (4)$$

Интеграл энергии (3) меняется, если учесть возмущения от сжатия Земли как тела вращения. В работе рассмотрим этот вопрос. Работа развивает [1, 2].

Обобщенный интеграл энергии при учете сжатия Земли. В качестве первого шага анализа движения КА у Земли при наличии ее сжатия это сжатие учитывается с помощью второй зональной гармоники U_2 : к основному, «Кеплеровскому» члену U_0 (2) в потенциале Земли U прибавляется вторая зональная гармоника U_2 [1, 2, 4, 5, 7, 8]:

$$U = U_0(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}); \quad (5)$$

$$U_2(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon}{r^3} \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) = -\frac{\varepsilon}{r^3} \left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right), \quad \varepsilon = (3/2) J_2 \mu R_e^2. \quad (6)$$

Здесь $\mu \approx 398600.4481 \text{ км}^2/\text{с}^2$ — гравитационный параметр Земли; φ — геоцентрическая широта КА; $J_2 = -C_{20}$ — коэффициент зональной гармоники 2-го порядка; R_e — средний экваториальный радиус Земли: $R_e \approx 6378,137 \text{ км}$; $J_2 \approx 1082,63 \cdot 10^{-6}$ [8]; $\varepsilon \approx 2,63328 \cdot 10^{10} \text{ км}^5/\text{с}^2$. Уравнения движения (1) принимают вид:

$$d^2 \mathbf{r} / dt^2 = \partial U / \partial \mathbf{r}^*, \quad (7)$$

где U — потенциал (2, 5, 6).

Рассмотрим удвоенную энергию движения КА $h(t)$:

$$h(t) = V^2 - 2U = V^2 - 2U_0 - 2U_2 = h_K + \frac{2\varepsilon}{r^3} \left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (8)$$

Так как потенциал $U = U(\mathbf{r})$, то $dh/dt = 0$ в силу уравнений движения, $h = \text{const}$ [3, 6]. На траектории КА механическая энергия (8) постоянна:

$$h = V^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{2\varepsilon}{r^3} \left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right) = h_K - 2U_2 = \text{const}. \quad (9)$$

Называем этот интеграл **обобщенным интегралом энергии**, так как он обобщает интеграл (3) на случай учета сжатия Земли при расчете траектории КА [1, 2].

Замечание 1. Данный подход может быть применен и для более полной модели зональных гармоник. Для Земли [8]: $J_3 = -2,53 \cdot 10^{-6}$; $J_4 = -1,61 \cdot 10^{-6}$.

Замечание 2. В данном случае потенциального осесимметричного силового поля есть еще интеграл осевого момента количества движения [6]:

$$xV_y - yV_x = \text{const}. \quad (9a)$$

В [9, 10] также показано существование интегралов энергии и осевого момента количества движения для модели геопотенциала в виде полного ряда его разложения по зональным гармоникам.

Выписав интеграл (9) для начальной точки $\mathbf{x}_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0, t_0)$ и для некоторой другой (текущей или конечной) точки $\mathbf{x}_f(\mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f, t_f)$ и приравняв их, получим соотношение:

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) = V_f^2 - \frac{2\mu}{r_f} + \frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right), \quad (10)$$

применим его к анализу траекторий отлета КА от Земли к Луне и планетам.

Изменение Кеплеровской константы энергии на орбите отлета к планете и Луне. Из (10) следует, что изменение Кеплеровской константы энергии:

$$\Delta h_K = h_{Kf} - h_{K0} = -2U_{20} + 2U_{2f} = \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (11)$$

Если при $h_K < 0$ перейти от h_K к оскулирующей большой полуоси a (3), то из (11), после линеаризации по a , получим вариацию Δa , соответствующую [11].

При полете к планете отлет в сфере действия Земли будет происходить по квазигиперболической орбите. Для оценок возьмем скорость «на бесконечности» $\sim 3-4$ км/с. В этом случае расстояние r_f возрастает неограниченно:

$$r_f \rightarrow \infty; 2U_{2f} \rightarrow 0. \quad (12)$$

Изменение Кеплеровской константы энергии Δh_k стремится к предельному значению Δh_{kl} :

$$\Delta h_k \rightarrow \Delta h_{kl} \equiv -2U_{20} = \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (13)$$

При полете к Луне рассмотрим эллиптическую орбиту с перигеем в начальной точке, $r_\pi = r_0 \approx 6578$ км, с расстоянием в апогее r_a , $r_a \geq r_M$, соответствующим расстоянию до Луны r_M при подлете КА к Луне, $r_M \approx (360-405)$ тыс. км. При этом в (11) расстояние r_f возрастает от r_0 до $r_M < \infty$. Предельное изменение кеплеровской константы энергии приближенно будет тоже соответствовать (13).

Численные оценки сделаны для случая $u_0 = 0$, тогда $z_0 = 0$, $\Delta h_{kl} \approx -2\varepsilon/3r_0^3$, для Земли $\Delta h_{kl} \approx -0,0617$ км²/с². Численные расчеты для траекторий полета к Луне подтверждают эти оценки [12]. При $h_K < 0$ это изменение Кеплеровской константы энергии соответствует изменению большой полуоси: $\Delta a \approx -6200$ км при $a = 200$ тыс. км, $\Delta a \approx -9000$ км при $a = 220$ тыс. км, $\Delta a \approx -56000$ км при $a = 600$ тыс. км [12, 13].

Замечание 3. В выражении (11) для изменения Кеплеровской константы энергии за счет сжатия Земли можно взять за независимую переменную истинную аномалию, тогда получим:

$$r = p/(1 + e \cos \theta); z/r = \sin \varphi = \sin i \sin u = \sin i \sin(\omega + \theta).$$

Здесь i , ω — наклонение и аргумент перигея орбиты; u , θ — аргумент широты и истинная аномалия точки. Сделав некоторые тождествен-

ные тригонометрические преобразования, приведем выражение (11) для Δh_K к конечной сумме нескольких простых тригонометрических выражений типа косинусоид $c_{j\theta} \cos(n_j\omega + m_j\theta)$ [2]. Если возьмем за элементы орбиты их начальные значения, то получим изменение Δh_K в первом приближении [2, 14–15].

Замечание 4. Если точка приближается к Земле, то изменение Кеплеровской константы энергии будет происходить «в обратном направлении».

Замечание 5. Для околопараболических орбит изменение Δh_K может привести к изменению типа орбиты с гиперболической на эллиптическую и наоборот.

Скорость отлета с околоземной орбиты ожидания. Одним из следствий изменения Кеплеровской константы энергии в рамках модели (5)–(7) является изменение начальной скорости КА отлета от Земли по сравнению с Кеплеровской моделью движения. При учете сжатия для орбиты отлета в точке r_f после эффекта сжатия зададим Кеплеровскую константу энергии h_K (или V_∞, a), которая задавалась ранее в (4) для Кеплеровского случая поля. Тогда в модели (5)–(7) с учетом сжатия Земли начальная скорость определяется из (10) выражением:

$$V_0 = \sqrt{h_K + \frac{2\mu}{r_0} - \Delta h_0 + \Delta h_f} = \sqrt{h_K + \frac{2\mu}{r_0} + \Delta h}; \quad (14)$$

$$\Delta h = \Delta h_f - \Delta h_0 = \frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) \approx -\frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (15)$$

Даны численные оценки при $z_0 = 0$. Учет сжатия Земли при полете к планете (по квазигиперболе с $V_\infty = 3\text{--}4$ км/с) или к Луне (по квазиэллиптической орбите) увеличивает по сравнению с Кеплеровским случаем начальную скорость V_0 на ~ 3 м/с. Это приводит к увеличению начальной оскулирующей большой полуоси на ~ 6500 км, начального апогейного расстояния — на ~ 13 тыс. км — по сравнению с Кеплеровским случаем [12, 13].

Замечание 6. При приближении точки к Земле встает задача определения ее конечной скорости у Земли.

Выводы. Рассмотрена модель движения КА с учетом сжатия Земли. Для случая потенциала поля притяжения Земли, в котором учтен главный член, соответствующий Кеплеровскому движению, и зональная гармоника второго порядка, на основе обобщенного интеграла энергии для этой модели приведено изменение Кеплеровского интеграла энергии при полетах к планетам и Луне. Для этих полетов определена начальная скорость отлета КА от Земли при учете сжатия Земли.

Литература

1. Ивашкин В.В. Применение обобщенного интеграла энергии для анализа движения космического аппарата с учетом сжатия Земли. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 3. DOI: 10.18698/2308-6033-2021-3-2067
2. Ивашкин В.В. Влияние сжатия Земли на интеграл энергии и некоторые характеристики орбиты космического аппарата. *Космические исследования*, 2021, т. 59, № 5, с. 373–376. DOI: 10.31857/S0023420621050046
3. Суслов Г.К. *Теоретическая механика*. Москва, Гостехиздат, 1944, 656 с.
4. Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений. *Космические исследования*, 1963, т. 1, вып. 1, с. 5–50.
5. Эльясберг П.Е. *Введение в теорию полета искусственных спутников Земли*. Москва, Наука, 1965, 540 с.
6. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. Москва, Наука, 1979, 432 с.
7. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. *Основы механики космического полета*. Москва, Наука, 1990, 448 с.
8. Chobotov V.A., ed. *Orbital Mechanics. AIAA Education Series*. AIAA, USA, 2002, 365 p.
9. Челноков Ю.Н. Кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли. *Космические исследования*, 2019, т. 57, № 2, с. 117–131. DOI: 10.1134/S002342061902002X
10. Челноков Ю.Н. Кватернионные регулярные модели возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли. *Прикладная математика и механика*, 2019, т. 83, № 4, с. 562–585. DOI: 10.1134/S003282351902005X
11. Krause H.G.L. Die säkularen und periodischen Störungen der Bahn eines künstlichen Erdsatelliten. *7th International Astronautical Congress, Rome. September 1956. Proceedings*, pp. 523–585.
12. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. Москва, Наука, 1975, 392 с.
13. Ивашкин В.В. *Об оптимальных траекториях полета КА к Луне в системе Земля–Луна–Солнце*. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 85. Москва, 2001, 32 с.
14. Проскурин В.Ф., Батраков Ю.В. Возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли. *Бюллетень Института теоретической астрономии*. 1960, т. VII, № 7 (90), с. 537–549.
15. Абалакин В.К. и др. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике*. 2-е изд. Москва, Наука, 1976, 864 с.

Integral of energy for particle motion in two-body problem with taking into account the Earth oblateness

© V.V. Ivashkin^{1,2}

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: Ivashkin@keldysh.ru

Abstract. The paper shows the influence of the Earth's polar oblateness on the energy integral for the particle space motion trajectory. At the model of the Earth's oblateness using the second zonal harmonic of the

Earth's gravity potential, there is obtained the energy integral that generalizes the usual one for the Keplerian unperturbed field. The change in the Keplerian energy constant due to the Earth oblateness is presented. A finite representation of this change is obtained in the first approximation. The paper develops [1a, 2a].

Keywords: *particle, space motion trajectory, oblateness of the Earth, the second zonal harmonic, integral of energy.*

References

1. Ivashkin V.V. Using generalized integral of energy for analysis of spaceflight dynamics with taking into account the Earth oblateness. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2021, iss. 3, pp. 242–246. DOI: 10.18698/2308-6033-2021-3-2067
2. Ivashkin V.V. The Influence of the Earth's Oblateness on the Energy Integral and Some Characteristics of a Spacecraft's Orbit. *Cosmic Research*, 2021, vol. 59, no. 5, pp. 324–327. DOI: 10.1134/S001095252105004X

Анализ правила Тициуса–Боде для Кеплеровой орбиты

© А.И. Андреев, В.А. Чанчиков

АГТУ, Астрахань, Россия
E-mail: aresut79@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрено правило Тициуса — Боде. Данное правило проанализировано и представлено в виде последовательности для млн км. Соотношение кубов членов этой последовательности приблизительно равно кубам больших полуосей орбит Солнечной системы, что позволяет соотнести исследуемое правило с третьим законом Кеплера. С этой точки зрения проанализирована система Kepler-11, расчетные правила орбит которой позволяют рассчитывать радиусы орбит ее экзопланет.

Ключевые слова: *правило Тициуса — Боде, третий закон Кеплера, планетарные расстояния, орбиты, последовательность.*

Введение. Орбиты космических тел, расположенные вокруг общего тяготеющего центра, подчиняются законам всемирного тяготения и трем законам Кеплера. В 1766 г. впервые было предложено правило Тициуса — Боде (закон Боде), формулирующийся следующим образом: к каждому элементу последовательности $D_i = 0, 3, 6, 12, \dots, n$ прибавляется 4, затем результат делится на 10. Однако, несмотря на внешнюю гармоничность правила, остается до конца неясным его физическая природа. Разрешения этого вопроса можно достичь, если предположить, что правило Тициуса — Боде не является самостоятельным законом, а представляет собой частный случай

одного из законов небесной механики. Так, в представленном правиле фигурирует большая полуось, что позволяет сделать догадку о возможности близкой природы этого правила к третьему закону Кеплера и, более того, его частного случая. Для установления этой закономерности необходимо рассмотреть соотношение орбит планет солнечной системы. И это означало бы, что правило Тициуса — Боде существует не только для солнечной системы, но и справедливо для любой планетарной системы [1]. Это рассуждение подтверждается тем, что данное правило имеет место и для экзопланет различных систем. В 2013 г. было показано, что из 27 отобранных для анализа систем 22 системы удовлетворяют взаимным соотношениям радиусов орбит лучше, чем в Солнечной системе, две системы подходят под правило примерно, как Солнечная, у трех систем правило работает хуже Солнечной [2, 3]. Выполнение правила Тициуса — Боде для других систем, кроме Солнечной, говорит о том, что за данным правилом должен стоять фундаментальный закон. Наиболее вероятно, что этим законом является третий закон Кеплера.

Анализ правила Тициуса — Боде и сравнение с законом Кеплера. Правило имеет следующую зависимость:

$$R_i = \frac{D+4}{10}, \quad (1)$$

где $D = 0, 3, 6, 12, \dots, n$.

Числа 4 и 10 в формуле (1) можно рассматривать как расстояния в астрономических единицах (150 млн км). Преобразуем эти числа в расстояние для миллионов километров и найдем первые члены последовательности D .

Тогда

$$R_i = \frac{D+600}{1500}. \quad (2)$$

Получим первые пять членов последовательности (табл. 1).

Таблица 1

Диаметр орбиты в километрах и а.е.

Название небесного тела	Значение D_i	Значение R_i , а.е.
Меркурий	89 400	0,4
Венера	156 900	0,7
Земля	224 400	1,0
Марс	359 400	1,6
Пояс Астероидов	629 400	2,8

Рассматривая члены последовательности D , найдем их разницу для задания закономерности (начиная со второго члена последовательности):

$$\Delta D = D_i - D_{i-1}. \quad (3)$$

Первые пять чисел, соответствующие расстояниям первых пяти небесных тел Солнечной системы, показаны в табл. 2. Насколько видно, эти числа образуют последовательность с основанием $D_i = 67\,500$.

Таблица 2

Разница членов последовательности

ΔD	$\Delta D/67\,500$
67 500	1
67 500	1
135 000	2
270 000	4
540 000	8

Значения ΔD (см. табл. 2) выстраиваются в последовательность:

$$\Delta D = 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots, n.$$

Если взять сами значения D_i (см. табл. 1) и поделить на первый член последовательности 67 500 (как константу), то получим следующий ряд чисел:

$$\frac{D_i}{67500} = H_i = 1.32, 2.32, 3.32, 5.32, 9.32, 17.32, 33.32, \dots, n. \quad (4)$$

Тогда зависимость радиуса орбиты в млн км от последовательности H_i можно представить в виде:

$$R_i = \frac{(H_i \cdot 67500) + 600}{1500}. \quad (5)$$

Отожествляя последовательность H_i с большими полуосями орбит, выведем следующее соотношение:

$$\frac{T_1^2(M + m_1)}{T_2^2(M + m_2)} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \approx \frac{H_i^3}{H_{i+1}^3}. \quad (6)$$

Соотношения периодов вращения, больших полуосей и элементов последовательности H_i представлены в табл. 3.

Таблица 3

Соотношения членов H_i и больших полуосей орбит

Пара объектов	$\frac{T_1^2 (M + m_1)}{T_2^2 (M + m_2)}$	$\frac{a_1^3}{a_2^3}$	$\frac{H_i^3}{H_{i+1}^3}$
Меркурий – Венера	0,1533	0,1533	0,1844
Венера – Земля	0,3785	0,3785	0,3412
Земля – Марс	0,2827	0,2827	0,2430

Правило Тициуса — Боде для системы Kepler-11. Для системы Kepler-11 правило Тициуса — Боде можно описать следующим выражением (выбрано подбором, расстояние а.е.):

$$R_i = \frac{D+9}{100}, \quad (7)$$

где D — элемент последовательности, $D = 0, 3, 6, 12, \dots$

Данные по правилу Тициуса — Боде для данной системы и фактические данные большой полуоси движения планеты приведены в табл. 4.

Таблица 4

Планетарные расстояния системы Kepler-11

Планета	Большая полуось орбиты (фактические данные), а.е.	Радиус орбиты по правилу Тициуса — Боде, а.е.	Элемент последовательности D
b	0,091	0,09	0
c	0,107	0,12	3
d	0,155	0,15	6
e	0,195	0,21	12
f	0,250	0,33	24
g	0,466	0,57	48

Из табл. 4 видно, что фактические наблюдаемые расстояния и расстояния по правилу Тициуса — Боде имеют близкие значения, что позволяет говорить о всеобщности и имеющемся физическом фундаменте данного правила.

Заключение. В работе рассмотрено правило Тициуса — Боде. Данное правило проанализировано и представлено в виде последовательности. Соотношение кубов членов этой последовательности позволяет говорить об их сходимости с кубами соотношения больших полуосей. Это показывает возможное отношение к третьему закону Кеплера. Коэффициенты в расчетной формуле этого правила зависят от распределения масс планетарной системы и могут быть найдены

методом подбора. Их поиск является следующим шагом в данном исследовании.

Литература

1. Ньето М. *Закон Тициуса—Боде. История и теория*. Москва, Мир, 1976, 192 с.
2. Bovaird T., Lineweaver Ch.H. Exoplanet Predictions Based on the Generalised Titius-Bode Relation. *arXiv:1304.3341v4* [astro-ph.EP], 1 Aug 2013.
3. Gomes R., Levison H.F., Tsiganis K., Morbidelli A. Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets. *Nature*, 2005, vol. 435, no. 7041, pp. 466–469. DOI:10.1038/nature03676

Моделирование динамики в задаче двух тел с учетом стабилизации траектории

© Г.И. Боровков

Российский университет дружбы народов (РУДН), Москва, Россия
E-mail: 1032182612@rudn.ru

Аннотация. Рассматривается задача управления динамикой системы двух материальных точек, совершающих движение под действием гравитационных сил. Предлагается метод моделирования динамики системы с учетом стабилизации связей. Определяются ограничения, накладываемые на уравнения возмущений связей, обеспечивающие требуемую точность процесса вычислений. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: динамика, система, уравнения, связи, стабилизация.

Введение. Задача двух тел в простейшей постановке может быть представлена уравнениями движения точки под действием центральной силы. Уравнение движения точки под действием центральной силы можно решить аналитически и получить точное решение. Однако при наличии возмущающей силы решение этого уравнения можно получить только численно. Метод Рунге — Кутты позволит без труда получить численное решение, но погрешность будет накапливаться, что со временем даст сильное искажение траектории. Погрешность можно минимизировать, используя метод стабилизации связи.

Постановка задачи. Траектория движения точки под действием центральной силы определяется решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}, \quad u = \frac{1}{r},$$

которое запишем в виде системы

$$\begin{cases} \frac{du}{d\varphi} = z, \\ \frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{p} - u. \end{cases} \quad (1)$$

Аналитическое решение системы (1) записывается равенством

$$u = A \cos(\varphi + \alpha) + \frac{1}{p},$$

в котором постоянные интегрирования A, α , определяются по известным начальным условиям:

$$u(0) = u_0, \quad z(0) = z_0. \quad (2)$$

Если начальные условия не соответствуют равенствам (2), то движение точки будет отклоняться от предполагаемой траектории

$$u = A(u_0, z_0) \cos(\varphi + \alpha(u_0, z_0)) + \frac{1}{p},$$

и при численном решении системы (1) могут возрасти. Для компенсации этих отклонений добавим во втором уравнении системы (1) дополнительную силу R , обеспечивающую стабилизацию связи:

$$\frac{dz}{d\varphi} = -u + \frac{1}{p} + R.$$

Обозначим отклонение от траектории движения точки величиной

$$h \equiv u - A \cos(\varphi) - \frac{1}{p}.$$

Закон изменения величины отклонения h определяется выбором дополнительной силы R . Для этого составляется система уравнений возмущений связей [1]

$$\frac{dh}{d\varphi} = g, \quad \frac{dg}{d\varphi} = H(h, g, u, z, \varphi). \quad (3)$$

Правая часть второго уравнения выбирается так, чтобы система имела асимптотически устойчивое тривиальное решение $h = 0, g = 0$, которое соответствует невозмущенной траектории, т. е.

$$H(0, 0, u, z, \varphi) = 0.$$

В простейшем случае функцию H , например [2], можно представить линейной функцией относительно переменных h, g с постоянными коэффициентами:

$$H = -l^2 h - 2kg, \quad l, k - \text{const}, \quad k > 0.$$

Подстановка выражений

$$h \equiv u - A \cos(\varphi) - \frac{1}{p}, \quad g = z + A \sin(\varphi)$$

в систему (3) приводит к уравнению для определения выражения дополнительной силы

$$R = -l^2 \left(u - A \cos(\varphi) - \frac{1}{p} \right) - 2k(z + A \sin(\varphi)) + u - A \cos(\varphi) - \frac{1}{p}.$$

Замена системы (1) системой с дополнительной силой

$$\begin{cases} \frac{du}{d\varphi} = z, \\ \frac{dz}{d\varphi} = -l^2 \left(u - A \cos(\varphi) - \frac{1}{p} \right) - 2k(z + A \sin(\varphi)) - A \cos(\varphi), \end{cases} \quad (4)$$

позволяет ограничить заданными пределами величину отклонений от траектории.

Приводится пример решения системы (4) методом Рунге — Кутты четвертого порядка.

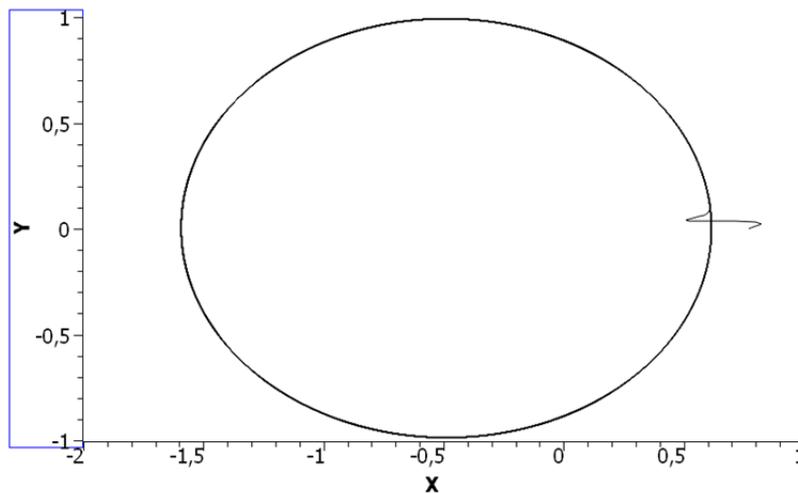


Рис. 1. Решение системы (4) при $k = l = 150$; $p = 1$, $A = 0,5$; $z(0) = 0$; $u(0) = 1,3$; $h(0) = -0,2$, $g(0) = 0$

Литература

1. Мухарлямов Р.Г. Управление динамикой системы с дифференциальными связями. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2019, № 4, с. 16–28.
2. Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.*, 1972, no. 1, pp. 1–16.

Simulation of dynamics in the two-body problem taking into account trajectory stabilization

© G.I. Borovkov

RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: 1032182612@rudn.ru

Abstract. The problem of controlling the dynamics of a system of two material points moving under the action of gravitational forces is considered. A method is proposed for modeling the dynamics of a system taking into account the constraint stabilization. The restrictions imposed on the constraint perturbations equations are determined, which ensure the required accuracy of the computation process. The results of numerical experiments are presented.

Keywords: *dynamics, system, equations, relations, stabilization.*

References

1. Mukharlyamov R.G. Control of the Dynamics of a System with Differential Constraints. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2019, vol. 58, no. 4, pp. 16–28.
2. Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.*, 1972, vol. 1, pp. 1–16.

Применение пространственных моделей поля силы тяжести Земли в решении задачи векторной аэрогравиметрии

© В.С. Вязьмин

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: v.vyazmin@navlab.ru

Аннотация. Доклад посвящен задаче определения вектора силы тяжести по измерениям бескарданного аэрогравиметра вдоль траектории самолета. В состав аэрогравиметра входят бескарданная инерциальная навигационная система (БИНС) и приемники сигналов ГНСС (GPS/ГЛОНАСС). В докладе представлен подход к решению задачи на основе интеграции данных БИНС и ГНСС и использовании

пространственных априорных моделей поля силы тяжести (задаваемых масштабирующими функциями Абеля — Пуассона на сфере). Задача сформулирована в рамках теории инерциальной навигации и сведена к стандартной линейной задаче оптимального стохастического оценивания, решаемой фильтром Калмана. Представлены результаты обработки данных реальной съемки с бескарданным аэрогравиметром.

Ключевые слова: вектор силы тяжести, инерциальная гравиметрия, фильтр Калмана.

Аэрогравиметрия является разделом прикладной геофизики, направленным на измерение параметров аномального поля силы тяжести Земли с борта летательного аппарата (самолета или вертолета). В настоящее время хорошо разработана скалярная аэрогравиметрия, измеряющая вертикальную компоненту вектора силы тяжести (аномалию силы тяжести). Целью векторной аэрогравиметрии, активно развиваемой в мире различными научными группами, является определение всех трех компонент вектора силы тяжести вдоль траектории полета летательного аппарата по результатам аэрогравиметрических измерений. Измерения доставляются бескарданным аэрогравиметром, состоящим из бескарданной инерциальной навигационной системы (БИНС) навигационного класса точности и приемников сигналов ГНСС (бортового и наземного). Решение задачи предполагается в режиме постобработки.

В рамках теории инерциальной навигации задача векторной аэрогравиметрии формулируется как задача коррекции БИНС по данным ГНСС — координатам и скоростям чувствительной массы гравиметра, вычисленным по первичным измерениям (кодовым, доплеровским, фазовым) спутниковых приемников. Математическая постановка задачи основывается на введении априорной гипотезы (модели) о векторе силы тяжести и введение статистической информации об ошибках измерений инерциальных датчиков БИНС и ошибках данных ГНСС. После этого задача сводится к линейной задаче оптимального стохастического оценивания [1]. Основная сложность при решении указанной задачи состоит в разделении оценок горизонтальных компонент вектора силы тяжести (уклонений отвесной линии) и инструментальных погрешностей БИНС (угловые ошибки определения ориентации корпуса БИНС, дрейфы нулей гироскопов и акселерометров и др.).

В данной работе предложены новый подход и алгоритм решения задачи, основанные на введении априорной модели поля силы тяжести в пространстве (с помощью сферических скейлинг-функций Абеля — Пуассона) [2]. В докладе представлены результаты обработки

данных реального аэрогравиметрического полета с бескарданным гравиметром.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(проект № 19-01-00179).*

Литература

1. Болотин Ю.В., Вязьмин В.С. Спектральный анализ точности векторной аэрогравиметрии. *Фундаментальная и прикладная математика*, 2018, т. 22, № 2, с. 33–57.
2. Vyazmin V.S., Golovan A.A., Bolotin Yu.V. New strapdown airborne gravimetry algorithms: Testing with real flight data. In: *28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS 2021). Proceedings*. CSRI Elektropribor, JSC, St. Petersburg, Russia, 2021, pp. 1–8.
DOI: 10.23919/ICINS43216.2021.9470826

Using spatial models of Earth's gravity field in the airborne vector gravimetry problem

© V.S. Vyazmin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: v.vyazmin@navlab.ru

Abstract. Airborne vector gravimetry is aimed at determining Earth's gravity vector given strapdown gravimeter measurements at the aircraft's flight path. A strapdown airborne gravimeter consists of a strapdown inertial navigation system (INS) and GNSS (GPS/GLONASS) receivers. We present an approach to airborne vector gravimetry based on the INS-GNSS integration and a-priori spatial gravity models (designed using the Abel-Poisson spherical scaling functions). The mathematical statement of the problem is formulated within theory of inertial navigation and is reduced to the standard stochastic linear estimation problem solved by Kalman filtering. Numerical results from processing real strapdown airborne gravimetry flight data are discussed.

Keywords: *gravity vector, inertial gravimetry, Kalman filtering.*

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research
(grant no. 19-01-00179).*

References

1. Bolotin Yu.V., Vyazmin V.S. Spectral analysis of the airborne vector gravimetry problem. *J. Math. Sci.*, 2021, vol. 253, no. 6, pp. 778–795.
DOI: 10.1007/s10958-021-05269-7
2. Vyazmin V.S., Golovan A.A., Bolotin Yu.V. New strapdown airborne gravimetry algorithms: Testing with real flight data. In: *28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS 2021). Proceedings*. CSRI Elektropribor, JSC, St. Petersburg, Russia, 2021, pp. 1–8.
DOI: 10.23919/ICINS43216.2021.9470826

Управление орбитальным движением космического аппарата с малой тягой

© В.П. Горьков, Н.Л. Григоренко, Л.Н. Лукьянова

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: v-p-gorkov@yandex.ru, grigor@cs.msu.ru, lln@cs.msu.ru

Аннотация. Рассматривается задача перелета на заданную орбиту управляемого космического аппарата (КА), динамика которого описывается математической моделью движения при гравитационном воздействии на КА одного притягивающего центра. Приведен класс позиционных управлений тягой двигательной системы, зависящий от параметров задачи, который решает задачу управляемости на заданную орбиту. Позиционные управления получены в аналитической форме. Приведены результаты численных расчетов позиционного управления и траекторий движения для различных тестовых параметров процесса и вариантов целевых траекторий КА.

Ключевые слова: космический аппарат (КА), траектория движения, позиционное управление, законы Кеплера, функции рассогласования, асимптотическая устойчивость.

Литература

1. Гроздовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. *Механика космического полета: Проблемы оптимизации*. Москва, Наука, 1975, 702 с.
2. Колесников А.А. *Новые нелинейные методы управления полетом*. Москва, Физматлит, 2013, 196 с.

Low-thrust spacecraft orbital motion control

© V.P. Gorkov, N.L. Grigorenko, L.N. Lukyanova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: v-p-gorkov@yandex.ru, grigor@cs.msu.ru, lln@cs.msu.ru

Abstract. The problem of transfer to a given orbit of a controlled spacecraft, the dynamics of which is described mathematical model of motion under gravitational impact on the spacecraft of one attracting center. A class of positional thrust controls of the propulsion system is given, depending on the parameters of the problem, which solves the problem of controllability to a given orbit. Positional controls are obtained in analytical form. The results of numerical calculations of positional control and motion paths for various test process parameters and options for target trajectories of the spacecraft.

References

1. Grozdovsky G.L., Ivanov Yu.N., Tokarev V.V. *Space flight mechanics: Optimization Problems*. Moscow, Nauka, 1975, 702 p.
2. Kolesnikov A.A. *New nonlinear flight control methods*. Moscow, Fizmatlit, 2013, 196 p.

Выбор геометрических параметров системы двигателей-маховиков при поддержании орбитальной ориентации космического аппарата

© Е.С. Коломиец*, А.И. Игнатов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): eva.kolomietz@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрен режим орбитальной ориентации космического аппарата — гиростата, реализуемый с помощью гиросистемы. Гиросистема состоит из четырех двигателей-маховиков, угловые положения осей вращения которых относительно связанной с космическим аппаратом системы координат характеризуются двумя геометрическими параметрами. Приведены зависимости для выбора значений этих параметров, которые позволяют уменьшить скорость накопления собственного кинетического момента каждого из маховиков. На основе линеаризованных уравнений вращательного движения космического аппарата получены зависимости для оценки величины накапливаемого суммарного кинетического момента гиросистемы в рассматриваемом режиме ориентации. Приведены результаты численного моделирования полной системы уравнений движения космического аппарата с учетом воздействия внешних возмущающих моментов.

Ключевые слова: орбитальная ориентация, космический аппарат — гиростат, двигатель-маховик, кинетический момент.

Режим орбитальной ориентации космического аппарата (КА) используется для решения ряда целевых задач, в частности, при проведении космических экспериментов [1]. Для поддержания достаточно точной орбитальной ориентации КА можно использовать различные исполнительные органы системы управления: электромагнитные органы управления [2], а также гиросистему (двигатели-маховики или гиродины) [1, 3]. В данной работе в качестве исполнительного органа системы управления спутника рассматривается гиросистема. При использовании гиросистемы одним из критериев эффективности ее функционирования является скорость накопления гиростатического момента. Эта скорость определяет промежутки времени между

разгрузками гиросистемы и должна быть достаточно малой, чтобы обеспечить продолжительные отрезки невозмущенного полета КА.

Рассмотрим КА — гиросат, форма которого аппроксимируется прямым круговым цилиндром (рис. 1) радиуса R_c и высотой L_c , с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами — солнечными батареями суммарной площади S_b . Введем связанную с КА правую декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, образованную его главными центральными осями инерции. Базисные орты этой системы обозначим e_1, e_2, e_3 . Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек относятся к системе $Ox_1x_2x_3$. Координаты геометрических центров цилиндра и пластин солнечных батарей обозначим $(x_c, 0, 0)$ и $(x_b, 0, 0)$ соответственно. Далее в расчетах используются следующие параметры КА: $m = 6440$ кг, $I_1 = 2600$ кг·м², $I_2 = 11100$ кг·м², $I_3 = 10\,900$ кг·м², $R_c = 1,3$ м, $L_c = 5,0$ м, $S_b = 33$ м², $x_b = -1$ м, $x_c = 0,3$ м, где I_i — главные центральные моменты инерции КА, $i = 1, 2, 3$. Начальные условия движения центра масс КА задаются в восходящем узле орбиты в момент 09:10:34 UTC 21.09.2007. Начальные элементы орбиты: высота в апогее 450 км, высота в перигее 400 км, наклонение $63,0^\circ$, аргумент широты перигея $53,5^\circ$, долгота восходящего узла (отсчитывается от точки среднего весеннего равноденствия эпохи даты) $164,0^\circ$. Указанные параметры приближенно соответствуют спутникам *Фотон-М № 4*, *Бион-М № 1*.

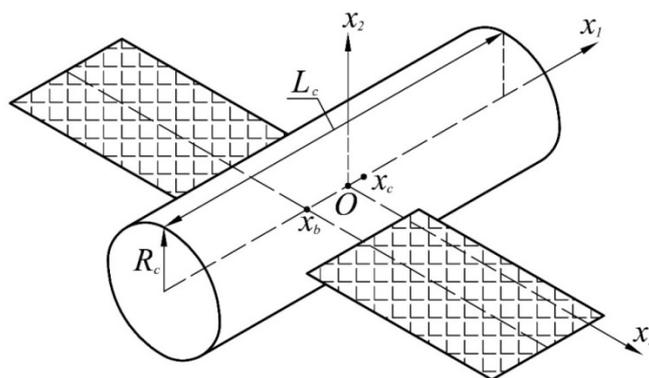


Рис. 1

Гиросистема состоит из четырех двигателей-маховиков, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам четырехугольной пирамиды. Высота пирамиды параллельна оси Ox_3 , линии

пересечения граней пирамиды с плоскостью Ox_1x_2 параллельны или перпендикулярны осям Ox_1 , Ox_2 . Вектор $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$ суммарного кинетического момента маховиков выражается формулой

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^4 h_k \mathbf{g}_k, \quad (1)$$

где h_k — алгебраическое значение кинетического момента маховика с номером k , $k = \overline{1, 4}$; \mathbf{g}_k — орт оси вращения маховика с номером k . Здесь и далее считаем, что на КА используется система одинаковых маховиков, для каждого из которых значение $h_{\max} = 20$ Н·м·с. В этом случае $-h_{\max} \leq h_k \leq h_{\max}$, где h_{\max} — абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного маховика. Орты \mathbf{g}_k , $k = \overline{1, 4}$, имеют компоненты

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (-d_1, -d_2, d_3)^T, \quad \mathbf{g}_2 = (-d_1, d_2, -d_3)^T, \quad \mathbf{g}_3 = (d_1, d_2, d_3)^T, \\ \mathbf{g}_4 &= (d_1, -d_2, -d_3)^T. \end{aligned}$$

Здесь $d_1 = \sin \alpha \cos \beta$, $d_2 = \sin \alpha \sin \beta$, $d_3 = \cos \alpha$, α — угол между осью Ox_3 и каждым из ортов \mathbf{g}_k , β — угол между осью Ox_1 и проекцией каждого из ортов \mathbf{g}_k на плоскость Ox_1x_2 . Углы α и β — параметры системы, полагаем, что $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$.

Введем правую декартову орбитальную систему координат $Oz_1z_2z_3$. Точка O — центр масс КА, ось Oz_3 направлена вдоль геоцентрического радиус-вектора точки O , ось Oz_2 — вдоль вектора кинетического момента орбитального движения КА. Базисные орты этой системы обозначим через \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{E}_3 . Система $Ox_1x_2x_3$ может быть получена из системы $Oz_1z_2z_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\vartheta + \pi/2$ вокруг оси Oz_2 ; 2) на угол φ вокруг новой оси Oz_3 ; 3) на угол ψ вокруг оси Oz_1 , полученной после первых двух поворотов и совпадающей с осью Ox_1 .

Оценим возможности системы маховиков при стабилизации КА в орбитальной системе координат $Oz_1z_2z_3$. Для определенности будем рассматривать стабилизацию КА в окрестности положения

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{e}_3 = -\mathbf{E}_2. \quad (2)$$

При выполнении неравенств $I_1 < I_3 < I_2$ положение равновесия (2) является неустойчивым [5]. При поддержании неизменной

ориентации КА в системе $Oz_1z_2z_3$ кинетический момент маховиков должен изменяться в соответствии с уравнениями

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{K} = \hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}, \quad \hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3). \quad (3)$$

Здесь \mathbf{K} — полный кинетический момент КА; $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость КА; $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)^T$ — главный момент внешних сил, приложенных к КА; символом \tilde{d}/dt обозначена локальная производная вектора. Из внешних моментов будем учитывать только гравитационный и восстанавливающий аэродинамический. При оценке накопленного кинетического момента маховиков будем считать, что орбита КА круговая радиуса r и неизменна в абсолютном пространстве. Влияние атмосферы учитываем в предположении, что скорость набегающего потока направлена по касательной к орбите КА. Тогда $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{E}_2$, $\mathbf{r} = r \mathbf{E}_3$, $\mathbf{v} = v \mathbf{E}_1$, где $v = |\mathbf{v}| = \omega_0 r$; $\omega_0 = \sqrt{\mu_E / r^3}$ — среднее движение КА (орбитальная частота), μ_E — гравитационный параметр Земли; \mathbf{r} — геоцентрический радиус-вектор точки O , $r = |\mathbf{r}|$; \mathbf{v} — скорость точки O относительно поверхности Земли, $v = |\mathbf{v}|$. Линеаризовав уравнения (3) в окрестности положения равновесия (2) и проинтегрировав при фиксированных значениях углов ψ , ϑ , φ получившиеся дифференциальные уравнения с нулевыми начальными условиями, получим:

$$H_1 = \frac{1}{\omega_0} [M_1 \sin \omega_0 t - M_2 (1 - \cos \omega_0 t)],$$

$$H_2 = \frac{1}{\omega_0} [M_1 (1 - \cos \omega_0 t) + M_2 \sin \omega_0 t], \quad H_3 = M_3 t,$$

$$M_1 = 4\omega_0^2 (I_2 - I_3) \tilde{\psi}, \quad M_2 = (\omega_0^2 (I_1 - I_3) + \pi R_c^2 x_c \rho_a v^2) \varphi, \quad (4)$$

$$M_3 = (3\omega_0^2 (I_1 - I_2) - \pi R_c^2 x_c \rho_a v^2) \tilde{\vartheta}, \quad \tilde{\vartheta} = \vartheta + \pi/2, \quad \tilde{\psi} = \psi - \pi/2,$$

где ρ_a — плотность атмосферы в точке O . Из уравнений (5) следует, что накопление составляющих H_1 , H_2 кинетического момента системы маховиков носит циклический характер, при этом составляющая H_3 неограниченно возрастает с течением времени.

Запишем орты \mathbf{g}_k , $k = \overline{1, 4}$, осей вращения маховиков в виде матрицы $D = \|\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4\|$, тогда выражение (1) можно представить как

$$\mathbf{H} = D\mathbf{G}, \quad (5)$$

где D — прямоугольная матрица размерности 3×4 , $\mathbf{G} = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$. Соотношение (5) нельзя единственным образом разрешить относительно величин h_k , $k = \overline{1, 4}$. Для достижения единственности потребуем, чтобы решение системы (5) относительно h_k имело минимальную евклидову норму. Тогда

$$\mathbf{G} = D^+\mathbf{H}, \quad (6)$$

где $D^+ = D^T(DD^T)^{-1}$ — матрица, псевдообратная для матрицы D [6].

Представим компоненты вектора \mathbf{G} , определяемого уравнением (6), в виде функций $h_k(\alpha, \beta)$, $k = \overline{1, 4}$. В области $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$ найдем значения углов α и β , при которых функция

$$f(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{k=1}^4 h_k^2(\alpha, \beta)} \quad (7)$$

будет иметь минимум. В указанной области функция (7) является непрерывно дифференцируемой. Положим, что $H_i = H_{i \max} = \text{const} > 0$, $i = 1, 2, 3$, тогда минимум функции (7) достигается при

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= \arctg \left(\sqrt[4]{\left(\frac{H_{1 \max}}{H_{3 \max} \sin \beta_{\min}} \right)^2 + \left(\frac{H_{2 \max}}{H_{3 \max} \cos \beta_{\min}} \right)^2} \right) = \\ &= \arctg \left(\sqrt{\frac{H_{1 \max} + H_{2 \max}}{H_{3 \max}}} \right), \\ \beta_{\min} &= \arctg \left(\sqrt{\frac{H_{1 \max}}{H_{2 \max}}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Используя формулы (4), можно получить лишь весьма приближительную оценку величины накапливаемого собственного кинетического момента системы маховиков. Более точные значения $H_{i \max}$, $i = 1, 2, 3$, используемые для расчета значений углов α_{\min} , β_{\min} можно получить в результате численного моделирования полной системы уравнений движения КА.

Полная система уравнений состоит из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс КА, другая — движение относительно центра масс (вращательное движение). Первая подсистема записывается в гринвичской системе координат. Ее переменными служат компоненты векторов \mathbf{r} и \mathbf{v} [7]. В ней учитываются нецентральность гравитационного поля Земли и сопротивление атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается в соответствии с моделью ГОСТ Р 25645.166–2004. Баллистический коэффициент КА и параметры атмосферы считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения. Подсистема уравнений вращательного движения КА состоит из уравнений (3), учитывающих гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты, а также кинематических уравнений Пуассона и уравнений описывающих изменения величин H_i , $i = 1, 2, 3$. Скорость накопления кинетического момента маховиков во многом определяется видом и параметрами выбранного закона управления вращательным движением КА [3]. В данном случае используем в качестве закона управления тривиальный пропорционально-дифференцирующий регулятор. На рис. 2, 3 приведены графики собственных кинетических моментов маховиков, полученные в результате моделирования полной системы уравнений движения КА.

Графики на рис. 2 приведены для значений углов $\alpha = \arctan(\sqrt{2})$, $\beta = 45^\circ$, которые соответствуют максимальному объему области вариации кинетического момента, создаваемого системой маховиков. По данным на рис. 2 видно, что значения $h_{\max} = 20$ Н·м·с маховики достигают примерно за шесть суток орбитального полета КА. Графики на рис. 3 приведены для значений углов $\alpha_{\min} = 31^\circ$, $\beta_{\min} = 45^\circ$, которые получены по формулам (8). Значения $h_{\max} = 20$ Н·м·с маховики достигают примерно за семь суток орбитального полета КА (см. рис. 3). Таким образом, результаты моделирования показали, что, используя значения углов α_{\min} , β_{\min} можно увеличить продолжительность интервалов стабилизации КА в окрестности положения равновесия (2) примерно на сутки.

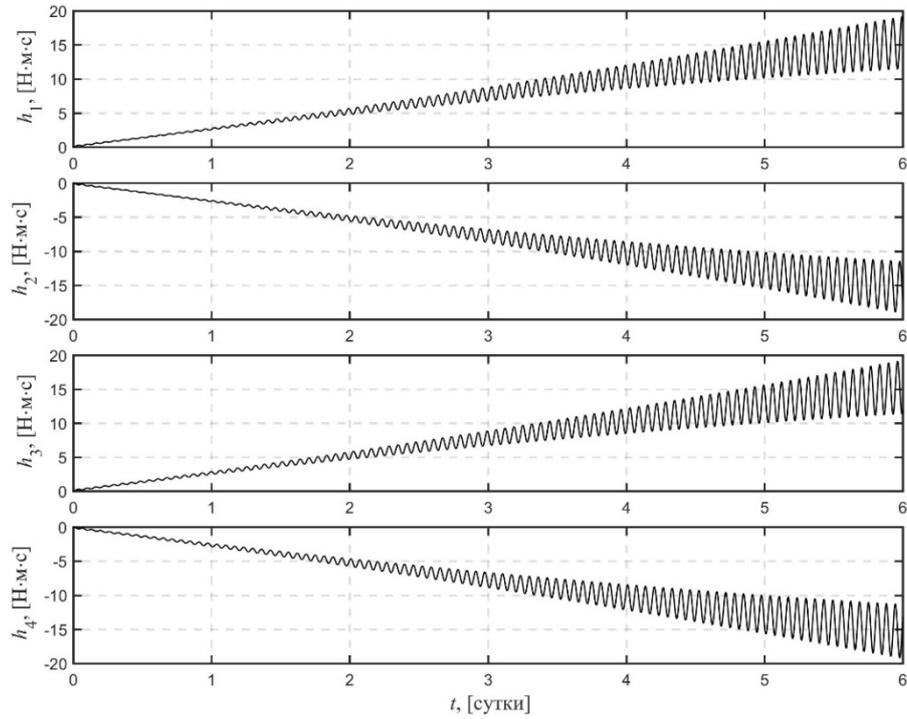


Рис. 2

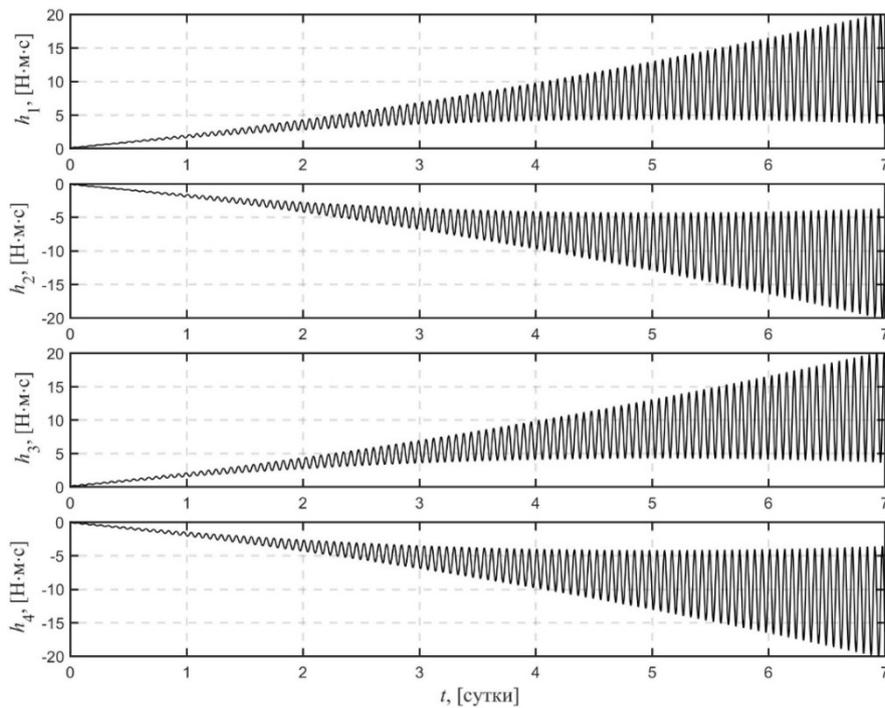


Рис. 3

Литература

1. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режимов вращательного движения ИСЗ с малым уровнем микроускорений электромеханическими исполнительными органами. *Космические исследования*, 2012, т. 50, № 5, с. 380–393.
2. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Стабилизация режима гравитационной ориентации искусственного спутника Земли электромагнитной системой управления. *Космические исследования*, 2020, т. 58, № 1, с. 40–48.
3. Игнатов А.И., Сазонов В.В. Реализация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы. *Известия РАН. ТУСУ*, 2020, № 1, с. 129–142.
4. Игнатов А.И. Выбор геометрических параметров расположения системы двигателей-маховиков при управлении вращательным движением космического аппарата. *Известия РАН. ТУСУ*, 2022, № 1, с. 86–106.
5. Белецкий В.В. *Движение искусственного КА относительно центра масс*. Москва, Наука, 1965.
6. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. 4-е изд. Москва, Наука, Физматлит, 1988.
7. Бажинов И.К., Гаврилов В.П., Ястребов В.Д. и др. *Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса «Салют-6» — «Союз» — «Прогресс»*. Москва, Наука, 1985.

Deciding on reaction wheel assembly geometric parameters in the spacecraft orbital orientation mode

© E.S. Kolomietc^{*}, A.I. Ignatov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

^{*}E-mail (speaker): eva.kolomietz@yandex.ru

Abstract. The orbital orientation mode of spacecraft-gyrost, implemented by gyrosystem, is considered. The gyrosystem consists of four reaction wheels with their angular axis compositions in relation to spacecraft-linked coordinate system. Two required for control variables, which characterise the system, and their volume adoptions are outlined. Given that, the rate of own angular momentum accumulation reduction is pertinent for each reaction wheel. Based on linearised equations of spacecraft torque motion, the blueprints for overall accumulated angular momentum assessment are scrutinised. Ultimately, spacecraft motion system of equations is presented via numerical modeling with allowance for external disturbing momentum.

Keywords: orbital orientation mode, spacecraft – gyrost, reaction wheel, angular momentum.

Анализ схем расположения двигателей-маховиков на борту космического аппарата при управлении движением относительно центра масс

© Е.В. Мартыненко*, Г.А. Иванов, А.И. Игнатов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): ekaterinamart2002@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены две возможные схемы расположения системы двигателей-маховиков на борту космического аппарата. Первая схема представляет собой систему из четырех маховиков, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам четырехугольной пирамиды. Вторая — система из шести маховиков, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам шестиугольной пирамиды. Относительно системы координат, связанной с космическим аппаратом, построены области возможных значений суммарного кинетического момента, создаваемого маховиками. Форма и объем построенных областей определяются значениями параметров, характеризующих каждую из рассмотренных схем. Приведены зависимости для выбора значений указанных параметров, обеспечивающих максимально широкие возможности управления угловой скоростью космического аппарата.

Ключевые слова: космический аппарат, гиросистема, двигатель-маховик, кинетический момент.

Комплекс электромеханических исполнительных органов (гиросистема), входящий в систему управления космическим аппаратом (КА), предназначен для создания управляющих моментов. Во многих случаях при создании длительно существующих КА использованию гиросистемы в составе системы управления нет альтернативы [1]. В то же время электромеханические исполнительные органы — одни из наиболее массивных и энергопотребляющих устройств, постоянно задействованных в процессе функционирования КА. В связи с этим задачи выбора типа исполнительных органов гиросистемы и оптимизации их характеристик являются актуальными.

Для крупногабаритных и тяжелых КА с высокими требованиями к динамике и точности ориентации целесообразность применения гиросистемы на основе силовых гироскопов различного типа во многих случаях очевидна [2]. Для малых КА выбор типа исполнительных органов системы управления, как правило, ограничивается двигателями-маховиками или гиродинами, что тоже является нетривиальной задачей. Между областями применения перечисленных устройств нельзя провести резких границ.

Динамические требования к системе управления КА, включающей в свой состав гиросистему, во многом определяются множеством требуемых значений кинетического момента H_T [3]. Множество H_T является областью изменения в связанной с КА системе координат вектора суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой. Изменение этого вектора в указанной области в соответствии с реализуемыми в системе законами должно обеспечивать требуемое управление параметрами вращательного движения КА. Естественно, что множество H_T должно содержаться внутри множества максимальных значений кинетического момента H_C , реализуемых гиросистемой.

Таким образом, для всех вариантов построения гиросистемы должно быть обеспечено выполнение условия:

$$H_T \subset H_C. \quad (1)$$

При этом можно утверждать, что величина суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой, будет достаточна для обеспечения требуемой угловой скорости вращения КА [4].

В работе в качестве электромеханических исполнительных органов рассматривается система управляющих двигателей-маховиков. Область вариации возможных значений суммарного кинетического момента H_C , создаваемого системой, зависит от количества маховиков, схемы их расположения относительно жестко связанной с КА системы координат и максимального значения кинетического момента, реализуемого каждым из маховиков.

Вектор \mathbf{H} суммарного кинетического момента маховиков выражается формулой

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^n h_k \mathbf{g}_k, \quad (2)$$

где h_k — алгебраическое значение кинетического момента маховика с номером k , $k = \overline{1, n}$; \mathbf{g}_k — орт оси вращения маховика с номером k ; n — общее количество маховиков в системе. Здесь и далее считаем, что система всегда состоит из одинаковых маховиков. В этом случае $-h_{\max} \leq h_k \leq h_{\max}$, где h_{\max} — абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного маховика. Величина h_{\max} — один из параметров системы.

Введем связанную с системой маховиков правую декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, в которой вектор \mathbf{H} представлен своими компонентами H_i , $i = 1, 2, 3$. Рассмотрим область P_n пространства

$R^3(H_1, H_2, H_3)$, заполняемую концами векторов (2) (начала векторов помещены в точку O). Чтобы обеспечить полную ориентацию КА, на нем должно быть установлено не менее трех маховиков [5], орты осей вращения которых линейно независимы. В общем случае область P_n представляет собой многогранник, обладающий центральной симметрией относительно точки O , для которого справедлива теорема Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$, где $B = n(n-1) + 2$ — число вершин, $P = 2n(n-1)$ — число ребер, $\Gamma = n(n-1)$ — число граней. Если все маховики в системе одинаковые, то многогранник P_n является выпуклым, а все его грани – ромбы, каждая сторона которых имеет длину $2h_{\max}$ [6]. Стороны каждого ромба параллельны каким-либо из ортов \mathbf{g}_k и \mathbf{g}_j , площадь соответствующего ромба равна $h_{\max}^2 |\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_j|$, где $k \neq j$, $j, k = \overline{1, n}$.

Рассмотрим две системы двигателей-маховиков: «четырёхугольная пирамида» (рис. 1, а) и «шестиугольная пирамида» (рис. 1, б).

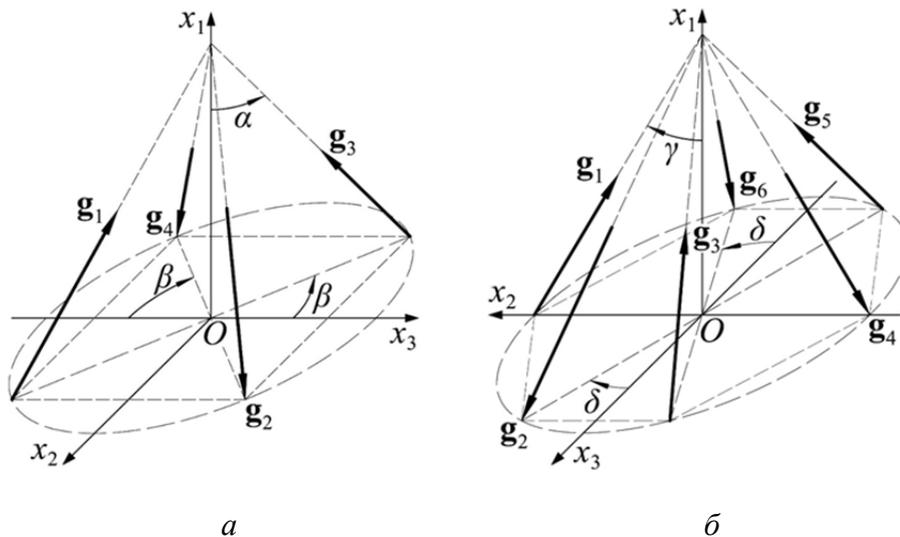


Рис. 1

Каждая из рассматриваемых схем параметризуется двумя углами (α , β и γ , δ), задающими ориентацию ортов \mathbf{g}_k , $k = \overline{1, n}$, относительно осей системы $Ox_1x_2x_3$.

Рассмотрим область множества требуемых значений кинетического момента H_T . В случае наличия в программе функционирования КА режимов программных поворотов область H_T будет пред-

ставлять собой в общем случае эллипсоид [4, 6]. Как было написано выше, для того, чтобы система маховиков обеспечивала требования к динамике КА, должно выполняться условие (1). Проще всего проверить выполнение условия (1) можно, построив области H_T и H_C в одной системе координат и в едином масштабе. Для этого необходимо выбрать значения параметров системы двигателей-маховиков, т. е. соответствующие значения углов ориентации ортов \mathbf{g}_k , $k = \overline{1, n}$, а также величину h_{\max} .

Соотношения для угловых параметров можно получить, используя различные критерии. В качестве одного из критериев использовалось требование выполнения условия равенства максимальных абсолютных значений угловых скоростей вращения КА вокруг его главных центральных осей инерции, реализуемых системой маховиков. Для системы «четырёхугольная пирамида» зависимости, определяющие значения углов α и β , имеют вид

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}}{I_1} \right), \quad \beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{I_2}{I_3} \right),$$

где I_i — главные центральные моменты инерции КА в системе $Ox_1x_2x_3$, $i = 1, 2, 3$. Для системы «шестиугольная пирамида» зависимости, определяющие значения γ , δ , имеют более громоздкий вид и здесь не приводятся. Для расчета значений углов в зависимости от значений I_i была реализована программа. Эта же программа позволяет строить области H_T , H_C и подбирать необходимое для выполнения условия (1) значение h_{\max} . На рис. 2 приведен пример результатов расчета параметров системы «шестиугольная пирамида» в зависимости от заданных значений I_i , $i = 1, 2, 3$, и построения областей соответствующих областей H_T , H_C .

В случае если в программе функционирования КА отсутствуют режимы программных поворотов, а есть режимы стабилизации относительно инерциальной системы координат (к примеру орбитальной), то критерием выбора значений угловых параметров системы двигателей-маховиков может быть размер области H_C . При этом для сравнения размеров областей H_C , создаваемых гиросистемами с различными типами и количеством электромеханических исполнительных органов, применяется коэффициент использования кинетического момента, предложенный в [3]. Указанный коэффициент является безразмерной величиной. Для системы, состоящей из n одинаковых двигателей-маховиков, он вычисляется по формуле

$$\chi(\mathbf{r}) = \frac{H(\mathbf{r})}{nh_{\max}} \leq 1,$$

где $H(\mathbf{r})$ — расстояние от точки O до границы области H_C в заданном направлении \mathbf{r} . В данной работе в качестве $H(\mathbf{r})$ используется величина R максимального радиуса сферы, полностью вписанной в многогранник P_n . Для систем «четырёхугольная пирамида» и «шестиугольная пирамида» приведены аналитические зависимости, позволяющие вычислить значения R в зависимости от значений параметров схемы двигателей-маховиков. В таблице для сравнения приведены максимально возможные значения $\chi(\mathbf{r})$ различных схем двигателей-маховиков.

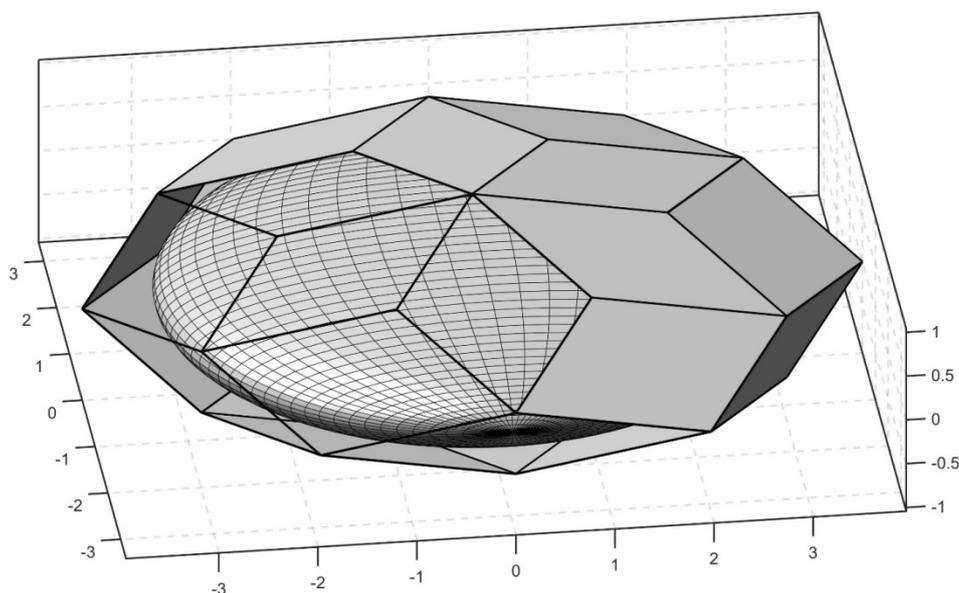


Рис. 2

$n = 4$	$n = 6$
«Четырёхугольная пирамида» $\chi_{\max} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,408$	«Шестиугольная пирамида» $\chi_{\max} = \frac{4}{9} \approx 0,444$
«Тетраэдр» $\chi_{\max} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,408$	«Додекаэдр» $\chi_{\max} = \frac{4}{3\sqrt{5}} \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx 0,459$

В схеме «тетраэдр» орты осей вращения маховиков \mathbf{g}_k , $k = \overline{1, n}$, расположены нормально по отношению к граням тетраэдра, в схеме «додекаэдр» — нормально по отношению к граням додекаэдра. Показано, что значения χ_{\max} для схем «четырёхугольная пирамида» и «шестиугольная пирамида» реализуются, если в основании пирамиды будет лежать соответствующий правильный многоугольник, а угол между высотой пирамиды и ортами \mathbf{g}_k , $k = \overline{1, n}$, будет равен $\arctg(\sqrt{2})$.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при предварительном проектировании систем управления ориентацией КА, применяющих в качестве исполнительных органов двигателя-маховики.

Литература

1. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. *Управление ориентацией космических аппаратов*. Москва, Наука, 1974.
2. Сорокин А.В., Башкеев Н.И., Яременко В.В. и др. Гиросиловая система ориентации космического аппарата «Ресурс-ДК». *Труды IX Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам*. СПб., ЦНИИ «Электроприбор», 2002, с. 268–274.
3. Токарь Е.Н. О рациональном построении систем гиросиловых стабилизаторов. *Космические исследования*, 1978, т. XVI, вып. 1, с. 22–30.
4. Игнатов А.И. Выбор геометрических параметров расположения системы двигателей-маховиков при управлении вращательным движением космического аппарата. *Известия РАН. ТИСУ*, 2022, № 1, с. 86–106.
5. Васильев В.Н. *Системы ориентации космических аппаратов*. Москва, ФГУП «НПП ВНИИЭМ», 2009.
6. Игнатов А.И., Давыдов А.А., Сазонов В.В. *Анализ динамических возможностей систем управления малым космическим аппаратом, построенных на базе двигателей-маховиков*. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 47. Москва, 2005.

Analysis of the reaction wheel array arrangement in spacecraft control mode relative to the centre of mass

© E.V. Martynenkova*, G.A. Ivanov, A.I. Ignatov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): ekaterinamart2002@gmail.com

Abstract. Two possible variants of the arrangement of the reaction wheels array on board the spacecraft are considered. The first variant is a reaction wheels array, the axes of rotation of which are parallel to the lateral edges of the quadrangular pyramid. The second option is a reaction wheels array, the axes of rotation of which are parallel to the lateral edges of the hexagonal pyramid. Relative to the spacecraft-linked coordinate

system, the areas of possible values of the total angular momentum of the reaction wheels array are describe. The shape and volume of the described areas are determined by the values of the parameters characterizing each of the considered reaction wheels array. Dependences are given for the deciding on parameter values that provide the widest possible control over the angular velocity of the spacecraft.

Keywords: *spacecraft, gyrosystem, reaction wheel, angular momentum.*

Увеличение дальности полета космического аппарата, совершающего полет по баллистической траектории

© В.А. Иванов^{*}, В.С. Ручинский, Е.В. Ручинская

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^{*}E-mail (докладчика): 2SVR@mail.ru

Аннотация. В работе исследуются возможности применения космической тросовой системы для увеличения дальности полета космического летательного аппарата, совершающего полет по баллистической траектории. После окончания активного участка полета происходит отделение космического аппарата от отработанной ступени ракеты, но при этом аппарат остается связанным с ней тросом. Таким образом, рассматриваемая тросовая система состоит из космического аппарата и отработанной ступени ракеты. За счет определенного выбора параметров развертывания тросовой системы и ее вращения, а также выбора момента расцепления связки разработана методика увеличения дальности полета космического аппарата по сравнению с обычной баллистической траекторией, которая имела бы место без применения тросовой системы.

Ключевые слова: *орбитальная тросовая система, космический аппарат, управляемое движение связанных объектов, баллистической траекторией, эллиптические траектории, кеплерового движения геоцентрический радиус, угловая скорость, вращение тросовой системы вокруг центра масс.*

Тезисы. В работе исследуется возможность применения космической тросовой системы для увеличения дальности полета космического летательного аппарата, совершающего полет по баллистической траектории. После окончания активного участка полета происходит отделение космического аппарата от отработанной ступени ракеты, но при этом аппарат остается связанным с ней тросом. Таким образом, рассматриваемая тросовая система состоит из космического аппарата и отработанной ступени ракеты.

После отделения космического аппарата происходит разматывание троса и одновременно тросовая система приводится во вращение вокруг центра масс. В некоторый расчетный момент времени происходит расцепление тросовой системы и космический аппарат переходит в свободный полет по новой баллистической траектории.

За счет определенного выбора параметров развертывания тросовой системы и ее вращения, а также выбора момента расцепления связки можно получить увеличение дальности полета космического аппарата по сравнению с обычной баллистической траекторией, которая имела бы место без применения тросовой системы.

Дальность полета по баллистической траектории зависит от параметров абсолютного движения космического аппарата в начальной точке (в момент расцепления тросовой системы), от геоцентрического радиуса, от величины и направления абсолютной скорости.

Для увеличения геоцентрического радиуса и абсолютной скорости космического летательного аппарата необходимо, чтобы в момент расцепления связки космический аппарат находился над обработанной ступенью, а вращение тросовой системы происходило в направлении углового движения центра масс тросовой системы.

На основе рассмотренных в работе закономерностей движения связанных космических объектов на эллиптических траекториях и известных соотношений кеплерового движения летательных аппаратов разработана методика определения дальности полета космического аппарата, позволяющая оценить влияние различных параметров развертывания и вращения тросовой системы на удаление точки спуска космического аппарата на Землю.

Производилось сравнение полученной дальности полета с дальностью полета космического аппарата по траектории максимальной дальности при тех же начальных условиях, но без применения тросовой системы.

По разработанной методике были проведены расчеты дальности полета космического аппарата для различных характеристик процесса развертывания и вращения тросовой системы для начальных условий, соответствующих максимальной дальности полета по обычной баллистической траектории. Для каждого из вариантов производилось определение величины увеличения дальности полета космического аппарата за счет применения тросовой системы.

Установлено увеличение дальности полета при определенных значениях угловой скорости вращения тросовой системы вокруг центра масс, при различных вариантах продолжительности процесса развертывания тросовой системы и по мере приближения точки расцепления связки к вертикальному положению тросовой системы.

Литература

1. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С., Ручинская Е.В. *Математические модели и методы исследования динамики связанных космических объектов при решении практических задач*. Москва, 2005, 185 с.
2. Иванов В.А., Елкин К.С., Даниленко А.В., Ручинский В.С. Подготовка эксперимента по применению орбитальной тросовой системы для спуска объектов с орбиты на Землю. *Научные труды «МАТИ» — РГТУ им. К.Э. Циолковского*. Вып. 12 (84). Москва, 2007, с. 182–186.
3. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Выведение привязного объекта в расчетную точку встречи с космическим аппаратом, движущимся по эллиптической орбите. *Научные труды «МАТИ» — Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского*. Вып. 20 (92). Москва, ИЦ «МАТИ», 2013, с. 110–119.
4. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Выведение привязного объекта в расчетную точку встречи с космическим аппаратом, движущимся по круговой орбите. *Научные труды «МАТИ» — Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского*. Вып. 21 (93). Москва, ИЦ «МАТИ», 2013, с. 86–97.
5. Иванов, В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. *Орбитальное функционирование связанных космических объектов*. Москва, ИНФРА-М, 2014, 320 с.

Increasing the flight range of a spacecraft flying along a ballistic trajectory

© V.A. Ivanov^{*}, V.S. Ruchinskiy, E.V. Ruchinskaya

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

^{*}E-mail (speaker): 2SVR@mail.ru

Abstract. The paper investigates the possibilities of using a space cable system to increase the flight range of a spacecraft flying along a ballistic trajectory. After the end of the active part of the flight, the spacecraft is separated from the spent rocket stage, but the device remains connected to it by a cable. Thus, the cable system in question consists of a spacecraft and a spent rocket stage. A technique has been developed to increase the flight range of the spacecraft in comparison with a conventional ballistic trajectory, which would have taken place without the use of a cable system.

Keywords: *orbital tether system, spacecraft, controlled motion of connected objects, ballistic trajectory, elliptical trajectories, geocentric radius, angular velocity, rotation of the tether system around the center of mass.*

Theses. Due to a certain choice of parameters for the deployment of the cable system and its rotation, as well as the choice of the moment of uncoupling of the bundle, a technique has been developed to increase the flight range of the spacecraft compared to a conventional ballistic trajectory, which would have taken place without the use of a cable system.

The paper investigates the possibilities of using a space cable system to increase the flight range of a spacecraft flying along a ballistic trajectory. After the end of the active part of the flight, the spacecraft is separated from the spent rocket stage, but the device remains connected to it by a cable. Thus, the cable system in question consists of a spacecraft and a spent rocket stage.

After separation of the spacecraft, the cable is unwound and at the same time the cable system is rotated around the center of mass. At some estimated time, the cable system is uncoupled and the spacecraft goes into free flight along a new ballistic trajectory.

Due to a certain choice of parameters for the deployment of the cable system and its rotation, as well as the choice of the moment of uncoupling of the bundle, it is possible to obtain an increase in the flight range of the spacecraft compared to the usual ballistic trajectory that would take place without the use of a cable system.

The flight range along the ballistic trajectory depends on the parameters of the absolute motion of the spacecraft at the starting point (at the moment of uncoupling of the cable system), on the geocentric radius, on the magnitude and direction of the absolute velocity.

To increase the geocentric radius and absolute velocity of the spacecraft, it is necessary that at the moment of uncoupling the bundle, the spacecraft is above the spent stage, and the rotation of the cable system occurs in the direction of the angular motion of the center of mass of the cable system.

On the basis of the laws of motion of connected space objects on elliptical trajectories considered in the work and the known ratios of Kepler motion of aircraft, a technique for determining the flight range of a spacecraft has been developed, which allows to assess the influence of various parameters of deployment and rotation of the cable system on the removal of the point of descent of the spacecraft to Earth.

The obtained flight range was compared with the flight range of the spacecraft along the trajectory of the maximum range under the same initial conditions, but without the use of a cable system.

According to the developed methodology, calculations of the flight range of the spacecraft were carried out for various characteristics of the process of deployment and rotation of the cable system for initial conditions corresponding to the maximum flight range along a conventional ballistic trajectory. For each of the variants, the magnitude of the increase in the flight range of the spacecraft was determined through the use of a cable system.

An increase in the flight range has been established at certain values of the angular velocity of rotation of the cable system around the center of mass, with different variants of the duration of the deployment of the cable system and as the uncoupling point of the bundle approaches the vertical position of the cable system.

References

1. Иванов В.А., Елкин К.С., Даниленко А.В., Ручинский В.С. Подготовка эксперимента по применению орбитальной тросовой системы для спуска объектов с орбиты на Землю. *Научные труды «МАТИ» — РГТУ им.К.Э. Циолковского. Вып. 12 (84)*. Москва, 2007, с. 182–186.
2. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Динамика полета и математическое моделирование орбитального функционирования системы связанных космических объектов. Москва, ИЦ «МАТИ» — РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2008, 200 с.
3. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Выведение привязного объекта в расчетную точку встречи с космическим аппаратом, движущимся по эллиптической орбите. *Научные труды «МАТИ» — Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского. Вып. 20 (92)*. Москва, ИЦ «МАТИ», 2013, с. 110–119.
4. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Выведение привязного объекта в расчетную точку встречи с космическим аппаратом, движущимся по круговой орбите. *Научные труды «МАТИ» — Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского. Вып. 21 (93)*. Москва, ИЦ «МАТИ», 2013, с. 86–97.
5. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Орбитальное функционирование связанных космических объектов. Москва, ИНФРА-М, 2014, 320 с.

К вопросу об управляемом движении связанных космических аппаратов

© С.А. Купреев^{1*}, В.С. Ручинский², Е.В. Ручинская²

¹Российский университет дружбы народов (РУДН), Москва, Россия

²МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): 2SVR@mail.ru

Аннотация. Решение практических задач производится на основе применения математических методов качественной теории динамических систем и теории бифуркаций. Для этого была разработана динамическая система, определяющая управляемое движение орбитальных тросовых систем. Установлено, что рассматриваемая динамическая система имеет пять бифуркационных значений параметра управления и, следовательно, 11 типов качественных структур относительного движения связанных объектов. По результатам исследования установлены требуемые значения параметров управления и области начальных условий движения для реализации различных режимов движения и нескольких переходных режимов.

Ключевые слова: орбитальная тросовая система, космический аппарат, управляемое движение связанных объектов, динамическая система, теория бифуркаций, фазовая поверхность, предельные циклы, наноспутник.

Тезисы. В последние годы возросла интенсивность исследований, посвященных рассмотрению возможностей орбитальных тросовых систем и определению рациональных областей и способов их применения для решения практических задач. Для решения этих задач необходимо иметь представление о возможных режимах управляемого движения связанных объектов орбитальных тросовых систем.

Решение практических задач производится на основе применения математических методов качественной теории динамических систем и теории бифуркаций. Для этого была разработана динамическая система, определяющая управляемое движение орбитальных тросовых систем с использованием закона регулирования длины троса.

Установлено, что рассматриваемая динамическая система имеет пять бифуркационных значений параметра управления и 11 типов качественных структур относительного движения связанных объектов. Каждой качественной структуре соответствует определенная совокупность режимов движения орбитальных тросовых систем. Особые траектории динамической системы (состояния равновесия, сепаратрисы и предельные циклы) разделяют фазовую поверхность на области с одинаковым типом траекторий относительного движения объектов. Тем самым полученные особые траектории определяют границы областей реализации того или иного типа относительного движения.

По результатам качественного исследования установлены требуемые значения параметров управления и области начальных условий движения для реализации различных режимов движения и нескольких переходных режимов.

Используя результаты качественного исследования, а также основные закономерности механики космического полета и механики движения связанных космических объектов, проведено исследование эффективности применения рассматриваемых режимов относительного движения орбитальных тросовых систем при решении задач вывода наноспутника на орбиту, выполнения орбитальных и локальных маневров, сближения в космосе, осуществления транспортных операций и спуска объектов с орбиты на Землю.

Литература

1. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. *Разработка и исследование математических моделей движения связанных космических объектов при испытании летательных аппаратов и спуске с орбиты на Землю.* Хабаровск, ХГТУ, 2001, 72 с.
2. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С., Ручинская Е.В. *Математические модели и методы исследования динамики связанных космических объектов при решении практических задач.* Москва, 2005, 185 с.

3. Иванов В.А., Ручинский В.С., Ручинская Е.В. Развертывание орбитальной тросовой системы на эллиптической орбите. *Научные труды «МАТИ» — Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского*. Вып. 10 (82). Москва, 2006, с. 184–188.
4. Иванов В.А., Ручинский В.С., Ручинская Е.В. Уравнения управляемого движения гибко связанных объектов на эллиптических орбитах. *Научные труды «МАТИ» — Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского*. Вып. 11 (83). Москва, 2006, с. 193–196.
5. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. *Космические тросовые системы*. Москва, Альфа-М, 2014, 208 с.

On the issue of controlled motion of connected spacecraft

© S.A. Kupreev^{1*}, V.S. Ruchinskiy², E.V. Ruchinskaya²

¹Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russia

²Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): 2SVR@mail.ru

Abstract. The solution of practical problems is based on the application of mathematical methods of the qualitative theory of dynamical systems and the theory of bifurcations. For this purpose, a dynamic system was developed that determines the controlled motion of orbital tether systems. It is established that the dynamic system under consideration has five bifurcation values of the control parameter and, consequently, eleven types of qualitative structures of relative motion of connected objects. According to the results of the study, the required values of the control parameters and the area of the initial driving conditions for the implementation of various driving modes and several transient modes have been established.

Keywords: *orbital tether system, spacecraft, controlled motion of connected objects, dynamic system, bifurcation theory, phase surface, limit cycles.*

Theses. Recently, there has been an increase in the intensity of research devoted to the study of the capabilities of orbital tethered systems and the identification of rational areas and methods of their application to solve practical problems. To solve these problems, it is necessary to have an idea of the possible modes of controlled motion of connected objects of orbital tether systems, nanosatellite

To this end, it has developed a dynamic system that determines the controlled motion of orbital cable systems using the law governing the length of the cable.

It is established that the dynamic system under consideration has five bifurcation values of the control parameter and, consequently, eleven types of qualitative structures of relative motion of connected objects. Each qualitative structure corresponds to a certain set of motion modes of

orbital tethered systems. Special trajectories of a dynamic system (equilibrium states, separatrices and limit cycles) divide the phase surface into regions with the same type of trajectories of relative motion of objects. Thus, the obtained special trajectories define the boundaries of the areas of realization of a certain type of relative motion.

Based on the results of a qualitative study, the required values of the control parameters and the area of the initial driving conditions for the implementation of various driving modes and several transient modes have been established.

Using the results of a qualitative study, as well as the basic laws of the mechanics of space flight and the mechanics of motion of related objects, we studied the effectiveness of the considered modes of relative motion of orbital tether systems in solving the problems of launching a nanosatellite into orbit, performing orbital and local maneuvers, rendezvous in space, as well as performing transport operations and launching objects from orbit to Earth.

References

1. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. *Разработка и исследование математических моделей движения связанных космических объектов при испытании летательных аппаратов и спуске с орбиты на Землю*. Хабаровск, ХГТУ, 2001. 72 с.
2. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С., Ручинская Е.В. *Математические модели и методы исследования динамики связанных космических объектов при решении практических задач*. Москва, 2005, 185 с.
3. Иванов В.А., Ручинский В.С., Ручинская Е.В. Развертывание орбитальной тросовой системы на эллиптической орбите. *Научные труды «МАТИ» — Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского*. Вып. 10 (82). Москва, 2006, с. 184–188.
4. Иванов В.А., Ручинский В.С., Ручинская Е.В. Уравнения управляемого движения гибко связанных объектов на эллиптических орбитах. *Научные труды «МАТИ» — Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского*. Вып. 11 (83), Москва, 2006, с. 193–196.
5. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. *Космические тросовые системы*. Москва, Альфа-М, 2014, 208 с.

Расширение доступных областей посадки на поверхности Венеры с помощью гравитационного маневра

© Н.А. Эйсмонт¹, В.А. Зубко^{1,3*}, А.А. Беляев^{1,3}, К.С. Федяев^{1,4},
Л.В. Засова¹, Д.А. Горинов¹, А.В. Симонов²

¹ИКИ РАН, Москва, Россия

²НПО им. С.А. Лавочкина, Москва, Россия

³МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

⁴Московский авиационный институт, Москва, Россия

*E-mail (докладчика): v.zubko@iki.rssi.ru

Аннотация. Рассматривается задача расширения достижимых районов посадки на поверхности Венеры с помощью гравитационного маневра, переводящего КА на резонансную с Венерой орбиту с соотношением периодов 1:1 к орбитальному периоду Венеры.

Ключевые слова: гравитационный маневр, резонансная орбита, Венера, «Венера-Д».

Тезисы. В рамках проекта «Венера-Д» рассматривается задача баллистического проектирования траектории перелета космического аппарата, обеспечивающей посадку спускаемого аппарата в заданную область поверхности Венеры. При стандартном подходе к выбору окна старта и при наличии ограничений на величину угла входа спускаемого модуля в атмосферу, а также на максимально допустимую в процессе его спуска перегрузку значительная часть поверхности планеты оказывается недоступной для посадки. Простейшим способом расширения области посадки может быть увеличение окна старта за счет умеренного уменьшения массы полезной нагрузки. Однако возможности такого увеличения существенно ограничены, в первую очередь, требуемыми затратами характеристической скорости. В данном исследовании предлагается использовать новый подход, позволяющий обеспечить посадку спускаемого модуля в любую точку поверхности Венеры. Основой предлагаемого подхода является использование гравитационного поля планеты для перевода космического аппарата на гелиоцентрическую орбиту, резонансную в соотношении 1:1 с орбитальным периодом Венеры, и последующего возвращения в исходное положение через один венерианский год, когда доступной для посадки окажется уже другая часть поверхности. В работе показано, что применение нового подхода позволяет обеспечить радикальное расширение достижимых областей посадки, а также доступ к любой точке на поверхности Венеры за счет увеличения продолжительности перелета и небольшого увеличения затрат характеристической скорости.

Increasing the available landing areas on the surface of Venus using a gravity assist maneuver

© N.A. Eismont¹, V.A. Zubko^{1,3*}, A.A. Belyaev^{1,3}, K.S. Fedyayev^{1,4},
L.V. Zasova¹, D.A. Gorinov¹, A.V. Simonov²

¹IKI RAS, Moscow, Russia

²S.A. Lavochkin Research and Production Association, Moscow, Russia

³Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

⁴Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

*E-mail (speaker): v.zubko@iki.rssi.ru

Abstract. The research focuses on increasing areas available for landing on the Venus surface using a gravity assist near Venus to change the orbit of the spacecraft by a resonant one with Venus with period ratio 1 by 1.

Keywords: *Venus, gravity assist, resonant orbit, "Venera-D".*

Theses. The "Venera-D" project considers the problem of design a spacecraft trajectory providing landing of the lander in a predetermined area of the surface of Venus. With the standard approach to the choice of the launch window and with restrictions on the value of the re-entry angle of the lander and on the maximum allowable overload during its descent, a significant part of the planet's surface is inaccessible for landing. The easiest way to expand the landing area may be to increase the launch window by moderately decreasing the payload mass. However, the possibility of such an increase is significantly limited, primarily by the required cost of characteristic velocity. In this study, a new approach is proposed to ensure landing at any point on the surface of Venus. The basis of the proposed approach is the use of the gravitational field of the planet to transfer the spacecraft to the heliocentric orbit, resonant in the ratio of 1:1 with the Venus orbit, and the subsequent return to the Venus in one Venusian year when another part of the surface will be available for landing. The research shows that the new approach allows providing a radical expansion of achievable areas of landing and provides access to any point on the surface of Venus by the cost of increasing duration of the flight and a small increase in the cost of the characteristic velocity.

Эффекты физической либрации Луны, вызванные жидким ядром

© М.Ю. Баркин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: barkin@yandex.ru

Аннотация. Разрабатывается аналитическая теория физической либрации Луны на основе ее двухслойной модели, состоящей из твердой несферичной мантии и эллипсоидального жидкого ядра. Луна движется по высокоточной возмущенной орбите в гравитационном поле Земли и других небесных тел. Получены оценки динамических (меридиональных) сжатий жидкого ядра Луны. Эти результаты получены в результате сравнения разрабатываемой аналитической теории физической либрации Луны с эмпирической теорией либрации Луны, построенной на основе лазерных наблюдений.

Ключевые слова: Луна, ядро, лазерные наблюдения, физическая либрация.

В данной работе будем рассматривать вращение Луны на основе ее двухслойной модели [1, 2], состоящей из твердой мантии и эллипсоидального жидкого ядра с идеальной жидкостью, которая совершает простое движение по Пуанкаре. Твердое ядро в данной работе исключается из рассмотрения.

Орбитальное движение Луны описывается высокоточной долгосрочной численной теорией DE/LE-406, на основе которой были построены необходимые в теории вращения Луны разложения сферических функций координат Луны в ряды Пуассона по кратным аргументам теории орбитального движения l_M, l_S, F и D [3, 4]. В результате с помощью указанных вспомогательных разложений были построены разложения второй гармоники силовой функции гравитационного потенциала в переменных Андуайе — Пуанкаре [4].

Для исследования вращательного движения двухслойной Луны необходимо, в первую очередь, определить главные моменты инерции Луны (как полной системы) A , B и C , значения моментов инерции ее ядра A_c , B_c и C_c и, соответственно, динамические сжатия ядра $\varepsilon_D = 1 - A_c / B_c$ и $\mu_D = 1 - C_c / B_c$. Указанные параметры являются основными в рассматриваемой задаче и они определяют вынужденные и свободные либрации Луны и ее ядра в гравитационном поле Земли и других небесных тел.

В работе [5] сейсмическими методами была построена оболочечная модель Луны с твердым и жидким ядром с радиусами около 240 км и 330 км. Было подтверждено существование частично расплавленной зоны вокруг жидкого ядра с радиусом 480 км или шарового слоя с радиусами 330...480 км. Жидкое ядро Луны (или жидкий шаровой слой с радиусами 240...330 км) занимает примерно ~60 % от объема всего ядра и дает наибольший вклад в значение полярного момента инерции ядра. Здесь мы используем результаты указанной работы для определения динамических параметров ядра и

мантии Луны с целью дальнейшего исследования влияния жидкого ядра Луны на физические либрации Луны.

В указанной модели средние значения плотности жидкого ядра и твердого ядра (или их однородных моделей) составляют: $\delta_{l,c} = 5,11 \text{ г/см}^3$ и $\delta_{s,c} = 8,04 \text{ г/см}^3$. Таким образом, избыточная плотность твердого ядра по сравнению с плотностью жидкого ядра составляет $\Delta\delta_{s,l} = 2,93 \text{ г/см}^3$. В дальнейшем пренебрежем погрешностями в определении средних плотностей. Для значений среднего радиуса твердого ядра и жидкого ядра имеем следующие оценки: $R_{l,c} = 330 \pm 20 \text{ км}$, $R_{s,c} = 240 \pm 10 \text{ км}$ [5].

Подчеркнем, что модель однородного твердого ядра и его жидкой оболочки хорошо согласуется с данными сейсмических наблюдений. Поэтому ряд динамических характеристик ядра (полярные моменты инерции, динамические сжатия и т. п.) мы построим, основываясь на соответствующих однородных моделях в виде однородных шаров или эллипсоидов, используя дополнительные наблюдательные данные, например, по лазерной локации Луны [5, 6]. Приведем результаты вычисления осевых моментов инерции твердого ядра, рассматриваемого как однородный шар, и жидкого ядра как однородного шарового слоя.

Для твердого ядра Луны, рассматриваемого как сферическое однородное тело с радиусом $R_{s,c} = 240 \pm 10 \text{ км}$, значения массы и полярного момента инерции рассчитываются по формулам

$$m_{s,c} = \frac{4}{3} \pi \delta_{s,c} R_{s,c}^3, \quad C_{s,c} = \frac{8}{15} \pi \delta_{s,c} R_{s,c}^5 \quad (1)$$

и, по нашим оценкам, составляют

$$m_{s,c} = (4,65 \pm 0,58) 10^{23} \text{ г}, \quad C_{s,c} = (1,07 \pm 0,23) 10^{38} \text{ г} \cdot \text{см}^2. \quad (2)$$

Аналогичным образом определяем массу и момент инерции жидкого ядра, также рассматриваемого как сферический однородный слой жидкости, по формулам:

$$m_{l,c} = \frac{4}{3} \pi \delta_{l,c} (R_{l,c}^3 - R_{s,c}^3) = (4,73 \pm 1,78) 10^{23} \text{ г}, \quad (3)$$

$$C_{l,c} = \frac{8}{15} \pi \delta_{l,c} (R_{l,c}^5 - R_{s,c}^5) = (2,67 \pm 0,81) 10^{38} \text{ г} \cdot \text{см}^2. \quad (4)$$

В результате получаем, что суммарная масса и полярный момент инерции всего ядра, включающего в себя жидкое ядро и твердое ядро, будут:

$$m_c = m_{s,c} + m_{l,c} = (9,38 \pm 1,61)10^{23} \text{ кг}, \quad (5)$$

$$C_c = C_{s,c} + C_{l,c} = (3,74 \pm 1,04)10^{38} \text{ г} \cdot \text{см}^2. \quad (6)$$

Следует отметить, что значение момента инерции жидкого ядра (4) составляет около 71,3 % от момента инерции всего ядра (6) (вместе с твердым ядром). Это означает, что в динамике вращательного движения Луны превалирующую роль играет именно жидкое ядро. В определенной степени это оправдывает наш выбор двухслойной модели Луны для первых исследований динамической роли жидкого ядра.

Основные либрации Луны, обусловленные жидким эллипсоидальным ядром. Сравнение аналитической и эмпирической теорий свободной либрации Луны.

Метод \ Переменные	Θ	Период (сут.)	Ампл. $\cos \Theta$ (")	Ампл. $\sin \Theta$ (")
P_1 наблюдения	Un	27,312	0,000	-0,016
P_1 теория	$F + \Omega + \Pi$	27,312	-0,001	-0,016
P_2 наблюдения	Un	27,312	-0,016	0,002
P_2 теория	$F + \Omega + \Pi$	27,312	-0,016	0,001
ρ наблюдения	Un	7468,39	-0,013	0,052
ρ теория	$\Omega + \Pi$	7449,89	-0,007	0,049
$I\sigma$ наблюдения	Un	7481,53	-0,045	-0,002
$I\sigma$ теория	$\Omega + \Pi$	7449,89	-0,049	-0,007
τ наблюдения	Un	–	–	–
τ теория	$\Omega + \Pi$	7449,89	-0,001	–

Период свободной либрации Луны с жидким эллипсоидальным ядром был оценен нами в 75133,87 суток, или соответственно в 205,7 лет. Этот период соответствует сумме динамических меридиональных сжатий Луны в $\varepsilon_D + \mu_D = 7,244 \cdot 10^{-4}$. В предположении о подобии динамических сжатий всей Луны и ее ядра были получены следующие оценки: $\varepsilon_D = 4,419 \cdot 10^{-4}$, $\mu_D = 2,825 \cdot 10^{-4}$. Восемь свободных либраций в классических переменных теории вращения Луны ρ , $I\sigma$ и P_1 , P_2 из общего списка не идентифицированных либраций Луны, выявленных в результате анализа лазерных наблюдений [7], в нашей работе получили объяснение и механическую интерпретацию (таблица). Дополнительно в работе была выявлена малая

свободная либрация в долготе τ , также обусловленная влиянием жидкого эллипсоидального ядра, с периодом в 7449,89 сут. и с небольшой амплитудой около $0^{\circ}001$ (таблица).

Актуальность этих исследований связана с возрастающей точностью лазерных наблюдений Луны и с разработкой и осуществлением проектов по изучению вращения Луны непосредственно с поверхности Луны, в частности в японском проекте ILOM [8]. Результаты данной работы также свидетельствуют, что указанные характеристики либрации Луны зависят от других возможных факторов и должны быть изучены более детально и более точно в будущем, в том числе с использованием новых методов и подходов (например, астрометрическим методом наблюдений с поверхности Луны в японском проекте ILOM [8]). Теоретические исследования вынужденных и свободных либраций Луны в будущем будут выполнены на основе более совершенных моделей внутреннего строения Луны с жидким и твердым ядром (с учетом их эксцентричного положения, гравитационного взаимодействия, колебаний их центров масс и т. п. факторов).

Литература

1. Ferrandiz J.M., Barkin Yu.V. Model of the Earth with the eccentric and the moveable liquid core. In: *Motion of Celestial bodies, Astrometry and Astronomical Reference Frames, Lohrmann-Kolloquium Proceedings (Dresden, September 13–15, 1999)*. Soffel M., Capitaine N., eds. Journees 1999&IX. Dresden, Germany, 2000, p. 192.
2. Ferrandiz J.M., Barkin Yu.V. New approach to development of Moon rotation theory. *Proc. of International conference "Astrometry, Geodynamics and Solar System Dynamics: from milliarcseconds to microarcseconds" (September 22–25, 2003, St. Petersburg, Russia)*. A. Finkelstein, N. Capitaine, eds. Journees, 2003. IPA RAS, 2002, pp. 199–200.
3. Kudryavtsev S.M. Long-term harmonic development of lunar ephemeris. *Astronomy & Astrophysics*. A&A, vol. 471, pp. 1069–1075. DOI: 10.1051/0004-6361:20077568
4. Barkin Yu.V., Kudryavtsev S.M., Barkin M.Yu. Perturbations of the first order of the Moon rotation. *Proceedings of International Conference "Astronomy and World Heritage: across Time and Continents" (Kazan, 19–24 August)*. KSU, 2009, pp. 161–164.
5. Weber R.C., Lin Pei-Ying, Garnero E.J., Williams Q., Lognonné P. *Seismic Detection of the Lunar Core*. *Science*, 2011, vol. 331, p. 309. DOI: 10.1126/science.1199375
6. Williams J.G., Boggs D.H., Ratcliff J. T. Lunar moment of inertia, Love number and core. *43rd Lunar and Planetary Science Conference*, 2012, art. no. 2230.
7. Rambaux N., Williams J.G. The Moon's physical librations and determination of their free modes. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2011, vol. 109, iss. 1, pp. 85–10. DOI 10.1007/s10569-010-9314-2
8. Hanada H., Heki K., Araki H., et al. (18 coauthors). Application of a PZT telescope to In situ Lunar orientation Measurements (ILOM), in *Proceedings of 25th General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics*. Springer, 2004, pp. 163–168.

Effects of the physical libration of the Moon caused by the liquid core

© M.Yu. Barkin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: barkin@yandex.ru

Abstract. An analytical theory of the physical libration of the Moon is being developed on the basis of its two-layer model, consisting of a solid non-spherical mantle and an ellipsoidal liquid core. The moon moves in a highly accurate disturbed orbit in the gravitational field of the Earth and other celestial bodies. Estimates of the dynamic (meridional) compressions of the liquid core of the Moon are obtained. These results were obtained by comparing the developed analytical theory of the physical libration of the Moon with the empirical theory of the libration of the Moon, built on the basis of laser observations.

Keywords: *Moon, core, laser observations, physical libration.*

References

1. Ferrandiz J.M. Barkin Yu.V. Model of the Earth with the eccentric and the moveable liquid core. In: *Motion of Celestial bodies, Astrometry and Astronomical Reference Frames (Dresden, September 13–15, 1999). Lohrmann-Kolloquium Proceedings.* Soffel M., Capitaine N., eds. Journées 1999&IX. Dresden, Germany, 2000, p. 192.
2. Ferrandiz J.M., Barkin Yu.V. New approach to development of Moon rotation theory. *Proceed. of International conference “Astrometry, Geodynamics and Solar System Dynamics: from milliarcseconds to microarcseconds”.* (September 22–25, 2003, St. Petersburg, Russia). A. Finkelstein and N. Capitaine, eds. Journées 2003. IPA RAS, 2002, p. 199–200.
3. Kudryavtsev S.M. Long-term harmonic development of lunar ephemeris. *Astronomy & Astrophysics.* A&A, vol. 471, pp. 1069–1075.
DOI: 10.1051/0004-6361:20077568
4. Barkin Yu.V., Kudryavtsev S.M., Barkin M.Yu. Perturbations of the first order of the Moon rotation. *Proceedings of International Conference “Astronomy and World Heritage: across Time and Continents” (Kazan, 19–24 August).* KSU, 2009, pp. 161–164.
5. Weber R.C., Lin Pei-Ying, Garnero E.J., Williams Q., Lognonné P. Seismic Detection of the Lunar Core. *Science*, 2011, vol. 331, iss. 309.
DOI: 10.1126/science.1199375
6. Williams J.G., Boggs D.H., and J. T. Ratcliff. Lunar moment of inertia, Love number and core. *43rd Lunar and Planetary Science Conference*, 2012, art. no. 2230.
7. Rambaux N., Williams J.G. The Moon's physical librations and determination of their free modes. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2011, vol. 109, iss. 1, pp. 85–10. DOI 10.1007/s10569-010-9314-2
8. Hanada H., Heki K., Araki H., et al. (18 coauthors). Application of a PZT telescope to In situ Lunar orientation Measurements (ILOM), in *Proceedings of 25th General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics.* Springer, 2004, pp. 163–168.

**Модели внутреннего строения
частично дифференцированного титана с учетом
влияния углеродного вещества низкой плотности**

© В.А. Кронрод*, А.Н. Дунаева, О.Л. Кусков

Институт геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского
(ГЕОХИ РАН), Москва, Россия

*E-mail: va_kronrod@mail.ru

Аннотация. Обсуждаются модели внутреннего строения частично дифференцированного титана, в которых железоканнивая компонента спутника, входящая в состав каменно-ледяной мантии и железоканнивого ядра, соответствует веществу L-LL или CI хондритов с примесью низкоплотной компоненты, представленной нерастворимыми органическими соединениями углерода. Исследовано влияние углеродной фракции на параметры каменно-ледяной мантии, железоканнивого ядра и на общее содержание воды в титане.

Ключевые слова: титан, внутреннее строение, хондриты, органическое вещество.

Работа выполнена в рамках госзадания ГЕОХИ РАН.

**Models of the internal structure of partially differentiated
titan with the addition of low density carbonaceous matter**

© V.A. Kronrod*, A.N. Dunaeva, O.L. Kuskov

Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry
(GEOKHI RAS), Moscow, Russia

*E-mail (speaker): va_kronrod@mail.ru

Abstract. Models of the internal structure of partially differentiated Titan are discussed. In these models, the rocky component of the satellite, which belongs to the rock-ice mantle and the rock-iron satellite's core, is considered as an L-LL or CI chondrite-like substance with an admixture of a low-density component represented by insoluble organic carbon compounds. The influence of the carbon fraction on the parameters of the rock-ice mantle, rocky core, and on the total water content in Titan has been investigated.

Keywords: Titan, internal structure, chondrites, organic substance.

*The work was performed as part of the state assignment
of Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry.*

Влияние температурозависимой вязкости на тепловую эволюцию ядер ледяных спутников

© Е.В. Кронрод*, В.А. Кронрод, О.Л. Кусков

Институт геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского
(ГЕОХИ РАН), Москва, Россия
*E-mail: e.kronrod@gmail.com

Аннотация. Исследуется влияние вязкости недр железокаменных ядер ледяных спутников-гигантов на характерные времена нагрева, эффективность конвективного теплопереноса, величину теплового потока с поверхности, температуру ядер в настоящее время. Рассматривается модель двухкомпонентной гомогенной смеси. Вязкость мало-вязкого компонента приравнивается вязкости силикатов, вязкость второго компонента — приблизительно на 2 порядка меньше. Численные эксперименты показали, что концентрация компонента с малой вязкостью определяет характер тепловой эволюции железокаменных ядер.

Ключевые слова: ледяные спутники-гиганты, ядро, температура, конвекция, дегидратация.

Работа выполнена в рамках госзадания ГЕОХИ РАН.

The effect of temperature-dependent viscosity on the thermal evolution of cores of icy satellites

© E.V. Kronrod*, V.A. Kronrod, O.L. Kuskov

Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry
(GEOKHI RAS), Moscow, Russia
*E-mail (speaker): e.kronrod@gmail.com

Abstract. The effect of the viscosity of the iron-rocky cores of giant icy satellites on the characteristic heating times, the efficiency of convective heat transfer, the magnitude of the heat flux from the surface, and the temperature of the cores at the present time is investigated. A model of a two-component homogeneous mixture was considered. The viscosity of the low-viscosity component is equal to the viscosity of silicates, the viscosity of the second component is ~ 2 orders of magnitude lower. Numerical experiments have shown that the concentration of a component with low viscosity determines the nature of the thermal evolution of iron-rocky cores.

Keywords: large icy satellites, core, temperature, convection, dehydration.

*The work was performed as part of the state assignment
of Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry.*

Динамика марсианской пыли: изучение in-situ

© И.А. Кузнецов¹, А.В. Захаров¹, Г.Г. Дольников¹, А.Н. Ляш¹,
F. Esposito², E. Seran³, M. Godefroy³, В.М. Готлиб¹, С. Molfese²,
F. Cortecchia², F. Cozzolino⁴, В. Saggin⁵, А.С. Бычкова¹, А.Е. Дубов¹,
А.А. Карташева¹, И.А. Шашкова¹, А.В. Шеховцова¹

¹Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

²INAF — Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Неаполь, Италия

³LATMOS, Guyancourt, Франция

⁴University of Naples “Federico II”, Неаполь, Италия

⁵Politecnico di Milano, Милан, Италия

E-mail: kia@iki.rssi.ru

Аннотация. Пылевой комплекс — это набор из четырех датчиков, предназначенный для изучения эоловых процессов на Марсе с основной целью мониторинга суточных, сезонных и годовых циклов пыли и окружающей среды.

В состав приборного комплекса входят:

- 1) ударный сенсор для измерения динамики песчинок;
- 2) счетчик частиц MicroMED для измерения гранулометрического состава;
- 3) датчики электрического поля для измерения потенциалов окружающего электрического поля;
- 4) радиочастотная антенна ЕМА для обнаружения и измерения атмосферных электростатических разрядов;
- 5) датчик проводимости для измерения проводимости атмосферы.

Ключевые слова: Марс, пылевые частицы, динамика пыли, изучение пыли, пылевые дьяволы, сальтация.

Martian dust dynamics: in-situ investigation

© I.A. Kuznetsov¹, A.V. Zakharov¹, G.G. Dolnikov¹, A.N. Lyash¹,
F. Esposito², E. Seran³, M. Godefroy³, V.M. Gotlib¹, С. Molfese²,
F. Cortecchia², F. Cozzolino⁴, В. Saggin⁵, А.С. Bychkova¹,
А.Е. Dubov¹, А.А. Kartasheva¹, I.A. Shashkova¹, А.В. Shekhovtsova¹

¹Space Research Institute (IKI), Moscow, Russia

²INAF – Osservatorio Astronomico di Capodimonte, Napoli, Italy

³LATMOS, Guyancourt, France

⁴University of Naples “Federico II”, Napoli, Italy

⁵Politecnico di Milano, Milano, Italy

E-mail: kia@iki.rssi.ru

Abstract. DC is a suite of four sensors devoted to the study of Aeolian processes on Mars with a primary aim of monitoring the diurnal, sea-

sonal, and annual dust-environment cycles by Martian-ground-based measurements of dust flux in situ, i.e., in the near-surface atmosphere of Mars.

This suite includes: (1) an *Impact Sensor*, for the measurement of the sand-grain dynamics; (2) a particle-counter sensor, *MicroMED*; (3) an *Electric Field* sensors, for the measurement of the ambient electric field potentials; (4) a radiofrequency antenna *EMA*; (5) a *Conductivity Sensor* for the atmospheric conductivity measurement.

Keywords: *martian dust, Mars, dusty storms, dust devils, saltation, dust instrument.*

Оценка параметров относительного движения и матрицы инерции некооперируемого космического объекта с использованием лидара

© R. Opromolla*, A. Nocerino, G. Fasano, M. Grassi

University of Naples "Federico II", Department of Industrial Engineering, Naples, Italy

*E-mail: roberto.opromolla@unina.it

Аннотация. Космический мусор, особенно на наиболее населенных орбитах (низкой околоземной орбите и геосинхронной), представляет сегодня серьезную угрозу для активных спутниковых операций и в целом для будущей космической деятельности. Поэтому в последнее время уделяется все больше внимания реализации мер по уменьшению и ликвидации последствий образования мусора, направленных на обеспечение устойчивого использования космического пространства путем предотвращения возникновения так называемого синдрома Кесслера. Ожидается, что ключевую роль будут играть космические миссии, направленные на активный увод крупных отработавших космических аппаратов/корпусов ракет с орбиты (ADR). Такие миссии потребуют автономного космического аппарата для безопасного наблюдения за целью на близком расстоянии, а затем и операций сближения, захвата и утилизации неактивных космических объектов. Основные технические проблемы здесь связаны с разработкой передовых и надежных функций наведения, навигации и управления. В данной работе основное внимание уделяется аспектам относительной навигации. Большинство потенциальных целей-кандидатов для миссий ADR не способны к кооперации, т. е. не могут обмениваться навигационной информацией с аппаратом и не оснащены легко распознаваемыми искусственными маркерами (установленными в соответствии с известной конфигурацией ad-hoc). Таким образом, активные и пассивные электрооптические (ЭО) датчики

представляют собой наиболее удобный технологический вариант для оценки параметров относительного состояния цели и аппарата на этапах миссии, в которых два космических объекта находятся на орбите в непосредственной близости друг от друга. Эти датчики могут также использоваться для обновления знаний о форме и инерционных свойствах цели, которые могли измениться из-за длительного пребывания в космосе. В данной работе основное внимание уделяется использованию активных систем обнаружения и регистрации света (LIDAR), учитывая их способность предоставлять прямую трехмерную информацию и их устойчивость к переменным условиям освещенности. В частности, представлена многоэтапная архитектура для оценки параметров относительного движения и инерции цели во время наблюдения на близком расстоянии. Архитектура предусматривает реализацию алгоритмов отслеживания углового положения цели на основе измерений лидара, которые затем интегрируются в фильтр Калмана с неориентированной фильтрацией с учетом модели объекта. Измерения ориентации на основе лидара также используются для получения оценок угловой скорости цели, которые необходимы для вычисления матрицы инерции путем решения линейной системы на основе закона сохранения кинетического момента. В работе реализованы стратегии автономного обнаружения сбоев, чтобы избежать расхождения в погрешностях расчета, потенциально вызванных неблагоприятными условиями наблюдения цели, возникающими во время инспекции. Оценка эффективности проводится с помощью численного моделирования, реалистично воспроизводящего динамику относительного движения на близком расстоянии и работу лидара. В качестве тестовых примеров рассматриваются цели, характеризующиеся сильно отличающимися размером, формой и орбитальной динамикой.

Ключевые слова: миссии увода космического мусора, маневры вблизи цели, относительная навигация, оценка матрицы инерции, оценка ориентации в пространстве, лидар.

Relative state and inertia parameters estimation of uncooperative space targets using LIDAR

© R. Opromolla^{*}, A. Nocerino, G. Fasano, M. Grassi

University of Naples "Federico II", Department of Industrial Engineering, Naples, Italy

^{*}E-mail: roberto.opromolla@unina.it

Abstract. Space debris, especially in the most crowded orbital regimes, e.g., in Low Earth Orbit and Geosynchronous Earth Orbit, represent nowadays a serious threat to active satellite operations and, more in general, to future in orbit activities. Hence, the space community has been

recently paying a growing attention toward the implementation of debris mitigation and remediation measures aimed at ensuring a sustainable use of outer space by avoiding the triggering of the so-called Kessler syndrome. With regards to remediation measures, future space missions dedicated to the active removal of large defunct spacecraft/rocket bodies from their orbit are expected to play a key role. Such Active Debris Removal mission scenarios will require an autonomous spacecraft (chaser) to safely monitor at close distance, and then approach, capture and dispose inactive space objects. In this framework, major technical challenges are related to the development of advanced and reliable Guidance, Navigation and Control functionalities. This work focuses on relative navigation aspects. In this respect, most of potential candidate targets for ADR missions are uncooperative, i.e., neither able to exchange navigation information with the chaser nor equipped with easily recognizable artificial markers (mounted according to ad-hoc known configuration). Hence, active and passive Electro-Optical (EO) sensors represent the most convenient technological option to estimate the target-chaser relative state parameters during the mission phases in which the two space objects are orbiting in close proximity (e.g., close range rendezvous, monitoring, and final approach). Indeed, EO sensors can also be used to update the knowledge of the target shape and inertia properties, which may have changed due to its long time in orbit. This work focuses on the use of active Light Detection and Ranging (LIDAR) systems considering their capability to provide direct 3D information from the scene and their robustness against variable illumination conditions. Specifically, a multi-step architecture for the estimation of the relative motion and inertia parameters of an uncooperative target during a close-range monitoring trajectory is presented. The architecture foresees the implementation of model-based algorithms for pose initialization and tracking based on LIDAR measurements, which are then integrated into an Unscented Kalman Filter according to a loosely coupled configuration. LIDAR-based pose measurements are also used to retrieve accurate target angular velocity estimates which are used to compute the targets' moments of inertia ratios by solving a linear system based on the conservation equation for the angular momentum. Autonomous failure detection strategies are implemented to avoid divergence in the relative state estimation error potentially caused by unavoidable, unfavorable target observation geometries occurring during the monitoring trajectory. Performance assessment is carried out through numerical simulations realistically reproducing close-range relative motion dynamics and LIDAR sensor operation, and considering targets characterized by highly variable size, shape, and orbital dynamics as test cases.

Keywords: *Active Debris Removal, close-proximity maneuvers, relative navigation, target inertia determination, pose estimation, LIDAR.*

Анализ итерационных алгоритмов для расчета перелетов между компланарными околокруговыми орбитами с применением двигателя малой тяги

© А.М. Закалужский*, Д.А. Гришко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*E-mail: zakaluga@gmail.com

Аннотация. В докладе рассматриваются алгоритмы расчета параметров маневров, обеспечивающих переход между компланарными околокруговыми орбитами в случае космического аппарата, оснащенного двигателем малой тяги. В качестве первого приближения используются аналитические методы построения перелетной траектории, основанные на теории маневрирования на околокруговых орбитах. Далее выполняется моделирование движения космического аппарата в разработанном программном комплексе, учитывающем продолжительность работы двигателя в центральном или нормальном гравитационном поле. Рассматривается схема, при которой двигатель космического аппарата включается на продолжительное время два раза на каждом витке. Исследованы ошибки выведения на целевую орбиту, возникающие при использовании приближенных аналитических методов. Рассмотрены методы коррекции расхождений параметров формируемой орбиты с целевыми значениями.

Ключевые слова: маневрирование, космический аппарат, малая тяга, околокруговые орбиты, итерационная процедура.

В докладе рассматривается задача моделирования компланарного перехода космического аппарата (КА), оснащенного двигательной установкой малой тяги, между околокруговыми орбитами. Для решения данной задачи может быть применен классический подход [1], основанный на поиске закона управления тягой с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина [2].

В работе представлен альтернативный подход к решению задачи перехода, основанный на положениях теории импульсного маневрирования на околокруговых орбитах и ее адаптации к задаче ограниченной малой тяги. Предполагается, что переход осуществляется между близкими орбитами. Тогда параметры компланарного перехода между базовой (начальной) и целевой (конечной) орбитами могут быть рассчитаны на базе аналитического метода А.А. Баранова из ИПМ им. М.В. Келдыша РАН [3]. Метод расчета предполагает, что маневр осуществляется путем выполнения последовательной серии включений ДУ, вектор тяги которой направлен по трансверсали в орбитальной системе координат. Каждый виток содержит два интервала

включения, их протяженность фиксирована, а центры этих интервалов соответствуют решению задачи в импульсной постановке.

В первую очередь был реализован алгоритм А1 прямого моделирования задачи перелета в точном программном комплексе на основе параметров маневров, найденных из приближенного аналитического метода [4, 5, 6, 7]. Имея начальные данные о базовой и целевой орбите (a — большая полуось орбиты, e — эксцентриситет, ω — аргумент перицентра), параметрах КА (P — тяга ДУ, m — масса КА), можно рассчитать параметры маневра перехода такие, как: n — число витков, φ_1 — центр первого включения на витке, $\Delta\varphi_1$ — угловая протяженность первого включения, ΔV_1 — приращение скорости за первое включение, φ_2 — центр второго включения на витке, $\Delta\varphi_2$ — угловая протяженность второго включения, ΔV_2 — приращение скорости за второе включение. Далее формируется программа маневров, состоящая из параметров для каждого включения ДУ: N_n — номер витка включения ДУ, U_n — аргумент широты включения, N_k — номер витка включения, U_k — аргумент широты выключения ДУ, ΔV — величина приращения характеристической скорости. Далее проводится численное моделирование и определяется отклонение вектора состояния от целевого значения (рис. 1).

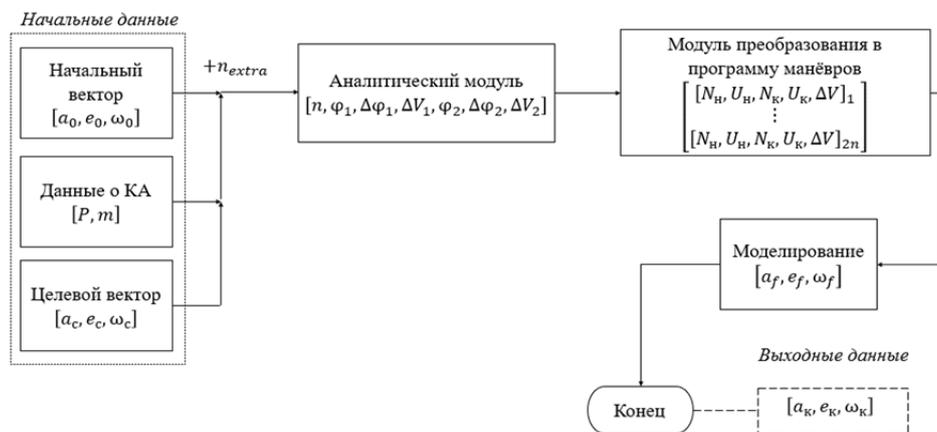


Рис. 1. Алгоритм А1 численного моделирования перелета с базовой орбиты $[a_0, e_0, \omega_0]$ на целевую $[a_c, e_c, \omega_c]$ без коррекций и с результатом моделирования $[a_k, e_k, \omega_k]$

Полученное в результате моделирования отклонение показывает ошибку приближенного аналитического метода. Чтобы ее компенсировать, предлагается модифицировать алгоритм расчета (рис. 2).

Предлагается замкнуть алгоритм расчета А2 и использовать отклонение по каждому из параметров орбиты как коррекцию целевого вектора состояния КА. После моделирования определяются отклонения $[\Delta a, \Delta e, \Delta \omega]$, проводится проверка, удовлетворяют ли они заданной точности ε . Если да, то расчет оканчивается. Иначе выполняется расчет нового целевого вектора $[a_{c_n}, e_{c_n}, \omega_{c_n}]$, который используется на следующей итерации алгоритма.

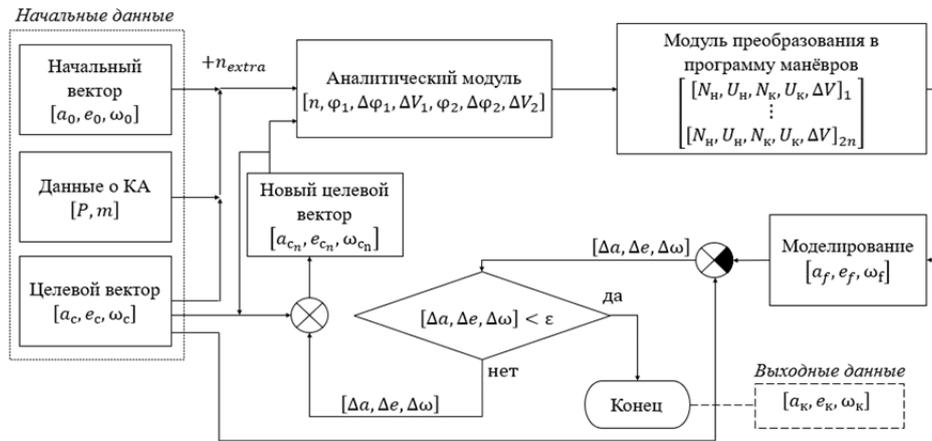


Рис. 2. Алгоритм А2 численного моделирования перелета с базовой орбиты $[a_0, e_0, \omega_0]$ на целевую $[a_c, e_c, \omega_c]$ с итерационной коррекцией нового целевого вектора $[a_{c_n}, e_{c_n}, \omega_{c_n}]$

Из серии проведенных расчетов следует, что при одновременной коррекции значений (a, e, ω) изменение аргумента перицентра оказывает существенное влияние на два других параметра. Для околокруговых орбит это приводит к плохой сходимости алгоритма. По этой причине в данном исследовании упор был сделан на коррекцию только большой полуоси и эксцентриситета. В качестве меры понижения чувствительности алгоритма к изменению аргумента перицентра может стать введение весового коэффициента для отклонений каждого параметра орбиты.

Тестирование показывает, что для большой полуоси и эксцентриситета алгоритм А2 сходится, и можно получить эти параметры с заданной точностью. В то же время предлагается рассмотреть другой вариант алгоритма (А3), основанный на решении краевой задачи методом секущих (рис. 3).

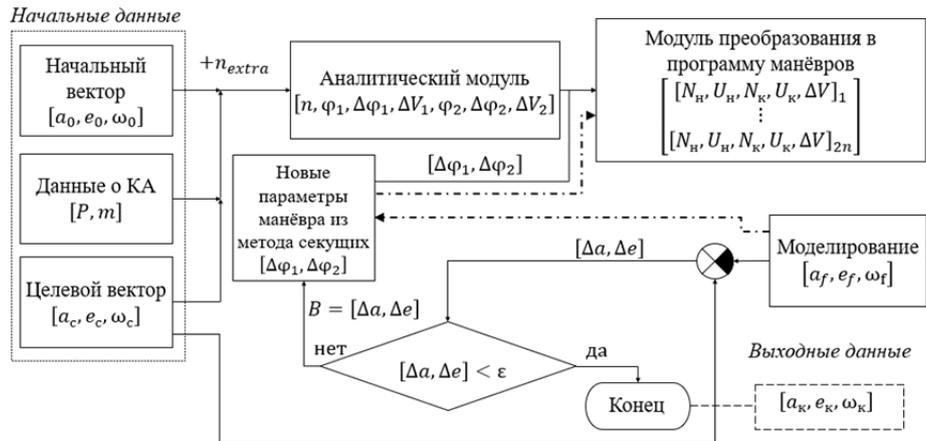


Рис. 3. Алгоритм А3 численного моделирования перелета с базовой орбиты $[a_0, e_0, \omega_0]$ на целевую $[a_c, e_c, \omega_c]$ с итерационной коррекцией параметров манёвра $[\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2]$

В отличие от предыдущего алгоритма предлагается использовать приближенный метод расчета для первоначального приближения, а далее корректировать параметры маневра $[\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2]$. Предполагается, что на каждой итерации алгоритма А3 решается краевая задача, где a и e — краевые (контролируемые) параметры, а $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$ — управляющие параметры. Вычисляя вектор невязок (отклонений) $\mathbf{B} = [\Delta a, \Delta e]$ и изменяя параметры перелета, можно получить большую полуось и эксцентриситет в конце моделирования с заданной точностью.

Алгоритмы А2 и А3 необходимы по той причине, что используемый в данной работе приближенный аналитический метод расчета параметров маневров получен из таких допущений, как центральность поля тяготения, неизменность массы КА и близость орбит к круговым. Алгоритмы позволяют гарантировать решение задачи компланарного перехода с учетом всех возмущений, действующих на КА в реальном полете. Для проверки этого утверждения была проведена серия расчетов в нормальном поле тяготения. Для КА с $m = 556$ кг, $P = 0,083$ Н получены отклонения по большой полуоси и эксцентриситету с точностью не хуже $\varepsilon = 1,0E^{-6}$ (табл. 1, 2).

На основе полученных отклонений можно сделать следующие выводы:

1) учет реальных условий полета потребует коррекции аналитически вычисленных параметров маневров перехода;

2) представленные алгоритмы успешно справляются с решением задачи с заданной точностью при введении возмущений в модель движения;

3) наибольшие затруднения возникают с получением требуемого значения аргумента перицентра.

Таблица 1

Параметры орбит

Параметры	базовой орбиты	целевой орбиты
a , км	7157,97	7257,97
e	0,001549	0,001449
ω , град	85,9342	50,9342
i , град	86,4	86,4

Таблица 2

Отклонения параметров для центрального и нормального поля притяжения Земли

Поле тяготения	Вариант алгоритма	δa , км	δe	$\delta \omega$, град
Центральное	A1	-0,010975	-0.000009	-0,08921
	A2	-7,401e-07	-5,894e-08	-0,08944
	A3	-4,104e-07	-1,797e-09	-1,84401
Нормальное	A1	2,815431	0,000276	-29,5101
	A2	-1,622e-07	6,496e-09	-33,6930
	A3	-8,083e-07	8,653e-09	14,9935

Литература

1. Кирилук Е.В. Анализ влияния массово-энергетических характеристик орбитального блока на выбор оптимальной схемы выведения ка на геостационарную орбиту. *Научное наследие и развитие идей К.Э. Циолковского. Материалы 54-х Научных чтений памяти К.Э. Циолковского, Калуга, 17–19 сентября 2019 г.* Калуга, АКФ «Политоп», 2019, с. 37–39.
2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* Москва, Физматгиз, 1961, 393 с.
3. Баранов А.А. *Маневрирование космических аппаратов в окрестности круговой орбиты.* Москва, Издательство «Спутник +», 2016, 512 с.
4. Лысенко Л.Н., Бетанов В.В., Звягин Ф.В. *Теоретические основы баллистико-навигационного обеспечения космических полетов.* Л.Н. Лысенко, ред. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 518 с.

5. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н. *Баллистика и навигация космических аппаратов*. 3-е изд., перераб. и доп. Москва, Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016.
6. Тюлин А.Е., Бетанов В.В., Кобзарь А.А. *Навигационно-баллистическое обеспечение полета ракетно-космических средств. Книга 1. Методы, модели и алгоритмы оценивания параметров движения*. Москва, Радиотехника, 2018, 480 с.
7. Тюлин А.Е., Бетанов В.В., Кобзарь А.А. *Навигационно-баллистическое обеспечение полета ракетно-космических средств. Книга 2: Системный анализ НБО*. Москва, Радиотехника, 2018, 488 с.

Analysis of iterative algorithms in case of flights between coplanar near-circular orbits with low thrust engine

© А. Zakaluzhskii*, D. Grishko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

*E-mail: zakaluga@gmail.com

Abstract. The presentation outlines algorithms for calculating the parameters of maneuvers that ensure transfers between coplanar near-circular orbits for a spacecraft equipped with a low thrust engine. As a first approximation, flight trajectory is calculated using analytical methods based on the theory of maneuvering in the vicinity of a circular orbit. Next, the simulation of the spacecraft's motion is performed within the developed software package, which takes into account the duration of the engine's thrust in the central and normal gravity fields. The research considers a scheme, when the spacecraft's engine is turned on twice during each revolution. The report studies the errors which are performed during the insertion into the target orbit and caused by approximate analytical mathematical models. The methods for correcting the difference between the parameters of the formed orbit and the target orbit are reviewed.

Keywords: *maneuvers, space vehicle, low thrust engine, near-circular orbits, iterative algorithm.*

Анализ сближений космических аппаратов «Луч-5В», «NSS-6» и «SES-8» в окрестности точки 95° в.д. на геостационарной орбите

© С.Г. Иванов^{1,4}, А.А. Баранов², Н.В. Чернов³

¹АО НТПП «Комплексное развитие технологий», Москва, Россия

²ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

³АО «Астрономический научный центр», Москва, Россия

⁴МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: isgsial@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются особенности движения геостационарных космических аппаратов, находящихся в окрестности точки 95° восточной долготы, а также оценивается влияние их взаимного движения на возникновение опасных сближений. На основании результатов моделирования можно сделать вывод о том, что стратегии управления аппаратом «Луч-5В» и смежных с ним аппаратов принципиально разные. При отсутствии регулярной коммуникации между операторами аппаратов всегда присутствует риск опасных сближений. В работе проанализирована возможность осуществления согласованной коллокации для обеспечения безопасного управления КА «Луч-5В».

Ключевые слова: *космический аппарат, маневрирование, коллокация, опасные сближения, геостационарная орбита, численный прогноз.*

Геостационарная орбита — уникальный, но ограниченный ресурс, используемый при создании систем спутниковой связи. Регулированием вопросов размещения спутников на геостационарной орбите (ГСО) занимается Международный союз электросвязи (МСЭ). Теоретически если каждому предполагаемому космическому аппарату (КА) на ГСО выделить область орбиты $\pm 0,1^\circ$, то можно разместить на орбите 1800 спутников. Однако не для всех точек орбиты размещение там аппарата будет одинаково эффективно. В настоящее время распределение функционирующих КА вдоль ГСО является неравномерным [1], что означает близкое, т. е. в пределах доли градуса, расположение точек стояния по отношению друг к другу. Кроме того, космическая промышленность движется в сторону уменьшения массы и габаритов спутников, при этом увеличивается их число, создаются спутниковые группы и кластеры. Таким образом, повышается вероятность того, что рабочие области КА на ГСО все чаще будут пересекаться или совпадать. Задача, состоящая в управлении несколькими КА с пересекающимися или совпадающими рабочими областями, называется задачей коллокации. Она заметно осложняется разными существующими стратегиями поддержания орбитальной позиции. Следовательно, выявление факта опасных сближений объектов и разработка схем уклонения от столкновений являются актуальными задачами, особенно с учетом ограниченного ресурса ГСО [2].

Целью данного исследования является анализ существующих схем безопасной коллокации. На примере точки стояния 95° восточной долготы рассмотрено движение реальных космических аппаратов и предпринята попытка восстановить схемы поддержания их орбитальных позиций. В данной работе использовались измерения векторов состояния КА «Луч-5В», «NSS-6» и «SES-8» за полугодовой интервал наблюдения с 09.06.2014 г. по 17.02.2015 г. Процесс

моделирования заключался в прогнозировании пассивного движения на интервале между измерениями. По достижении времени очередного измерения начальные данные для моделирования обновлялись. Расчет движения выполнялся численным интегрированием методом Эверхарта 15-го порядка с переменным шагом [3]. Модель возмущений включала в себя гравитационное поле Земли с учетом нецентральности (8x8), гравитационное воздействие Луны и Солнца, давление солнечного света [3].

КА «Луч-5В», удерживаемый в диапазоне долготы $95^{\circ} \pm 0,2^{\circ}$, совершал суточно-периодические колебания, напоминавшие петлю. Орбита аппарата имела достаточно высокое для ГСО наклонение. В «наивысшей» точке он отдалялся от плоскости экватора на расстояние около 3000 км. На фоне суточных колебаний КА относительно точки стояния был заметен общий периодический тренд. Идентификация маневров коррекции основывалась на скачкообразном изменении большой полуоси.

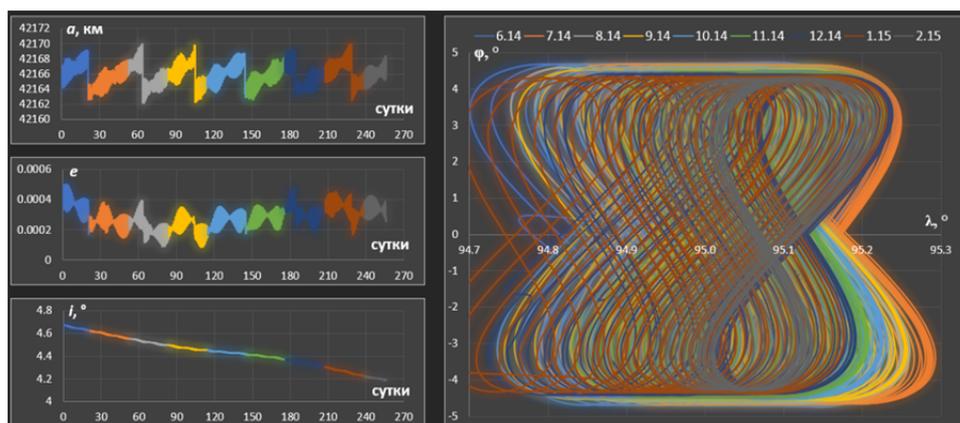


Рис. 1. Иллюстрация движения КА «Луч-5В» в различных представлениях: изменение большой полуоси, эксцентриситета, наклонения, движение в координатах Гринвичская долгота–широта

Можно сделать вывод о том, что КА «Луч-5В» управлялся по предельной фазовой кривой [4] путем варьирования значения большой полуоси орбиты. При таком методе управления корректируют скорость дрейфа КА вдоль ГСО по отношению к номинальной точке стояния. Существуют методики, на основании которых можно рассчитать величину импульса и время между маневрами [5] для такой стратегии управления. Традиционный метод совместного управления несколькими аппаратами на ГСО заключается в разделении интервалов поддержания КА (рис. 2).

Рабочие области КА «SES-8» и «NSS-6» полностью совпадали, аппараты удерживались в диапазоне $95^{\circ} \pm 0,04^{\circ}$, наклонение их орбит

было близким к нулю. Управление этими аппаратами осуществлялось по схеме, отличной от классической — главным параметром управления является значение вектора эксцентриситета (рис. 3). Это заметно при отображении совместного движения этих КА в координатах ($e_x = e \cos(\Omega + \omega)$, $e_y = e \sin(\Omega + \omega)$).

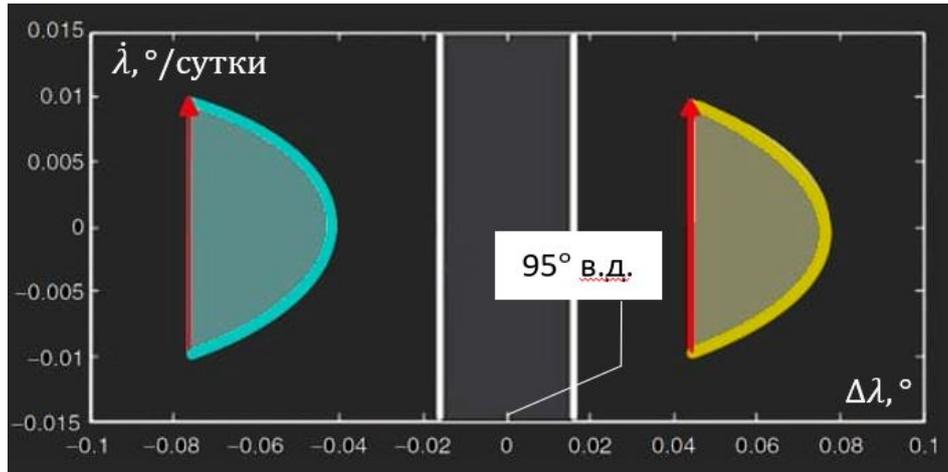


Рис. 2. Иллюстрация поддержания по фазовой траектории и метода коллокации разделением интервалов поддержания двух аппаратов по долготе

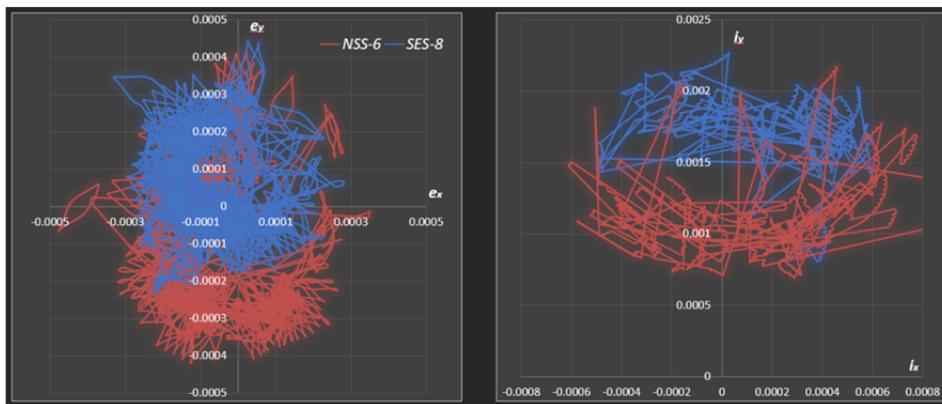


Рис. 3. Иллюстрация движения КА «NSS-6» и «SES-8» в различных представлениях изменения векторов эксцентриситета и наклона

У данного метода есть множество вариаций, имеющих общее принципиальное сходство: корректируя эволюционное изменение векторов эксцентриситета можно обеспечить гарантированное минимальное расстояние между объектами [6]. Для этого необходимо, чтобы годографы векторов эксцентриситета управляемых аппаратов представляли собой окружности, разнесенные относительно друг

друга (рис. 4). При этом луч, проведенный из центра соответствующей окружности через конец вектора эксцентриситета, должен быть направлен на Солнце. Такой метод позволяет эффективно обеспечивать безопасное относительное движение в ограниченной области пространства, однако требует постоянной координации действий операторов КА.

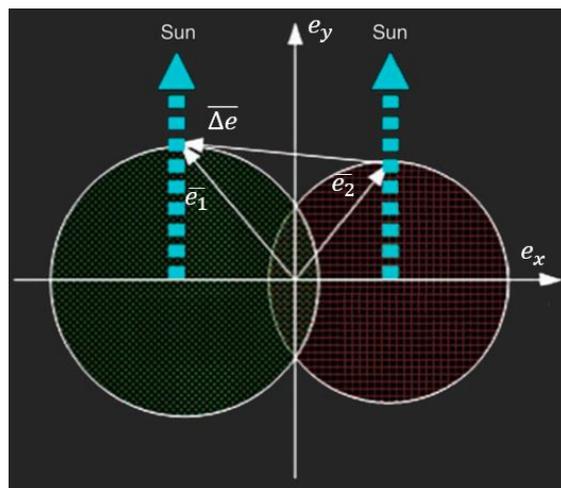


Рис. 4. Иллюстрация метода управления векторами эксцентриситета при управлении несколькими КА

На основании анализа совместного движения аппаратов были сделаны следующие выводы.

1. Стратегии управления аппаратом «Луч-5В» и смежных с ним принципиально разные, управление не является согласованным.
2. При отсутствии коммуникации между ЦУП несогласованность управления может привести к опасным сближениям.
3. Возможное решение задачи безопасного управления — согласованная коллокация аппаратами «Луч-5В» и смежных с ним аппаратов.
4. Альтернативой коллокационному управлению может быть стратегия с применением маневров уклонения.

Литература

1. *Каталог космических объектов Celestrack*. URL: <https://celestrak.com/> (дата обращения: 24.11.2021).
2. Степанов А.А., Акимов А., Гриценко А., Чазов В. Особенности построения и эксплуатации орбитальных группировок систем спутниковой связи. *Спутниковая связь и вещание*, 2016. URL: <http://lib.tsonline.ru/articles2/sputnik/osobennosti-postroeniya-i-ekspluatatsii-orbitalnyh-gruppirovok-sistem-sputnikovoy-svyazi> (дата обращения: 24.11.2021).

3. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. *Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы*. Томск, Издательство Томского ун-та, 2007.
4. Чернявский Г.М., Бартнев В.А., Малышев В.А. *Управление орбитой стационарного спутника*. Москва, Машиностроение, 1984, 144 с.
5. Chao-Chun «George» Chao. *Applied orbit perturbation and maintenance*, 2005.
6. Li H. Geostationary Satellites Collocation. *National Defense Industry Press*. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.

Convergence analysis of the Luch-5V, NSS-6 and SES-8 spacecraft in the vicinity of the 95-degree longitude point in the geostationary orbit

© S.G. Ivanov^{1,4}, A.A. Baranov², N.V. Chernov³

¹АО НТП «КРТ», Moscow, Russia

²KIAM RAS, Moscow, Russia

³АО «ANC», Moscow, Russia

⁴Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: isgsial@mail.ru

Abstract. The paper considers the problem of joint motion of geostationary spacecraft, whose maintenance areas overlap or coincide. Some cases of dangerous convergences in the year 2014 are presented, involving the Russian satellite “Luch-5V” and two satellites of the European Space Agency, “NSS-6” and “SES-8”. The motion analysis of the satellites and the analysis of their position-keeping strategies were carried out. These investigations are based on the half-year measurement interval and the results of numerical trajectory calculation between measurement nodes using the Everhart 15-order method. The maintenance patterns were identified, according to which “Luch-5V”, “NSS-6” and “SES-8” spacecraft are kept in the vicinity of the longitude +95° point.

Keywords: *collocation, spacecraft, dangerous approaches, geostationary orbit, numerical propagation.*

О задачах стабилизации стационарных движений спутника при помощи магнитных моментов

© В.М. Морозов¹, В.И. Каленова¹, М.Г. Рак²

¹НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова,
Москва, Россия

E-mail: moroz@imec.msu.ru

Аннотация. Рассматривается стабилизация стационарных движений (положений равновесия и регулярных прецессий) спутника, центр масс которого движется по круговой орбите в гравитационном и магнитном полях Земли. Управляющие моменты формируются за счет взаимодействия с магнитным полем Земли. Рассматриваются моменты, создаваемые магнитными катушками, и моменты сил Лоренца, возникающие при взаимодействии заряженного экрана, установленного на спутнике, с геомагнитным полем. Линеаризованные в окрестности стационарных движений уравнения представляют собой линейные нестационарные системы. Для решения задач стабилизации описывается предложенный ранее подход, основанный на приведении к стационарным системам большего, чем порядок исходной системы, порядков. Исследуется управляемость и строятся алгоритмы стабилизации. Приведены результаты математического моделирования, подтверждающего эффективность предложенных алгоритмов.

Ключевые слова: стабилизация, линейные нестационарные системы, приводимость, управляемость, алгоритмы стабилизации.

Литература

1. Каленова В.И., Морозов В.М. *Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики*. Москва, Физматлит, 2010, 208 с.
2. Морозов В.М., Каленова В.И. Стабилизация положения равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов. *Космические исследования*, 2021, т. 59, № 5, с. 393–407.
3. Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов. *ПММ*, 2021, т. 85, № 4, с. 436–453.

On stabilization problems of steady-state motions of satellite using different moments arising from interaction with the geomagnetic field

© V.M. Morozov¹, V.I. Kalenova¹, M.G. Rak²

¹Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

²Lomonosov Moscow State University, mechanics and mathematics department

E-mail: moroz@imec.msu.ru

Использование deep-space маневра в задаче о минимизации затрат характеристической скорости межпланетного перелета

© А.Ю. Царегородцев

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: tsaregorodtsevandrej@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача поиска оптимальных дат для перелета к планетам Солнечной системы. Для решения данной задачи разработано приложение с пользовательским графическим интерфейсом, позволяющее строить изолинии характеристической скорости. На основе полученных дат строится траектория межпланетного перелета с промежуточным импульсом, минимизируется характеристическая скорость. Получены результаты, показывающие, что использование промежуточного deep-space маневра может значительно уменьшать затраты топлива на перелет к Марсу и Венере.

Ключевые слова: межпланетный перелет, маневр в глубоком космосе, задача Ламберта.

Тезисы. Задача поиска оптимальных дат для перелета к планетам Солнечной системы ставилась и решалась следующим образом.

1. Считалось, что координаты и скорости КА в начальный момент времени совпадают с координатами и скоростями Земли, в конечный момент времени T — с координатами и скоростями планеты назначения. При этом кинематические векторы планет вычислялись по соответствующим эфемеридам с использованием открытого исходного кода Project Pluto [1].

2. На протяжении всей траектории поле тяготения Солнца считалось центральным ньютоновским, притяжение планет и других тел не учитывалось.

3. В условиях 1 и 2 получили краевую задачу Ламберта:

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \vec{r}(0) = \vec{r}_0, \vec{r}(T) = \vec{r}_1,$$

которая сводится [2] к нелинейному уравнению одной переменной. Для его решения использовался метод ложного положения.

4. Выбранный для моделирования промежуток времени разбивался на отрезки длиной в один синодический период планеты назначения. На каждом таком отрезке строилась сетка из дат отлета T_0 и подлета T_1 с шагом в одни сутки, на сетке решалась задача Ламберта. Среди всех полученных решений выбиралось оптимальное в смысле минимума характеристической скорости миссии:

$$v_{\text{хар}} = |\vec{v}_{\text{отлета}}| + |\vec{v}_{\text{подлета}}| \rightarrow \min.$$

Здесь скорости отлета и подлета — скорости КА относительно Земли и планеты-цели в соответствующие моменты времени.

Далее ставилась задача улучшения локально-оптимального двухимпульсного безвиткового перелета за счет deep-space-маневра —

добавочного промежуточного импульса. Фиксируются плоскость и даты перелета, полученные в двух-импульсной постановке. Требуется найти оптимальный трехимпульсный перелет.

Для решения данной задачи необходимо варьировать координаты точки выдачи промежуточного импульса и время прилета в эту точку. Пусть $\alpha \in [0, 1]$, $\beta > 0$. В том случае, когда угол левого поворота от вектора \vec{r}_0 к вектору \vec{r}_1 $\varphi < \pi$, координаты варьируются на множестве:

$$\vec{r}_{\text{промежуточный}} \in \beta[\alpha\vec{r}_0 + (1-\alpha)\vec{r}_1].$$

В том случае, когда $\varphi \geq \pi$, множество варьирования координат рассматриваемой точки приобретает следующий вид:

$$\vec{r}_{\text{промежуточный}} \in \{\beta[\alpha\vec{r}_0 - (1-\alpha)\vec{r}_1] \cup -\beta[\alpha\vec{r}_0 + (1-\alpha)\vec{r}_1] \cup \beta[-\alpha\vec{r}_0 + (1-\alpha)\vec{r}_1]\}.$$

Время прилета в промежуточную точку T_{point} варьируется на отрезке $[0, T]$ с шагом в одни сутки. Далее на полученной сетке параметров решаются две задачи Ламберта — перелет от Земли к промежуточной точке и от точки к планете назначения. Затем на сетке минимизируется характеристическая скорость миссии:

$$v_{\text{хар}} = |\vec{v}_{\text{отлета}}| + |\vec{v}_{\text{пром}}| + |\vec{v}_{\text{подлета}}| \rightarrow \min.$$

Здесь $\vec{v}_{\text{пром}}$ — величина промежуточного импульса.

Марс			Венера		
Год отлета	2 импульса	3 импульса	Год отлета	2 импульса	3 импульса
	Характеристическая скорость, км/с			Характеристическая скорость, км/с	
2022	6,48	6,25	2021	7,56	7,07
2024	5,80	5,77	2023	6,27	6,12
2026	5,61	5,61	2024	5,97	5,91
2028	5,99	5,93	2026	6,84	6,63
2030	6,74	6,44	2028	8,11	7,55
2033	6,33	6,33	2029	7,64	7,13
2035	5,85	5,85	2031	6,37	6,19
2037	6,85	6,47	2032	5,90	5,85
2039	6,02	5,93	2034	6,76	6,54
2041	5,61	5,61	2036	8,06	7,52

Для проведения вычислительных экспериментов были взяты ближайшие 10 оптимальных дат для двух-импульсного перелета к Марсу и Венере. На их основе решалась и задача с deep-space-маневром. Ниже приведены таблицы характеристических скоростей для двух описанных баллистических схем, из которых видно, что предложенная схема с deep-space-маневром действительно позволяет уменьшить затраты характеристической скорости.

Литература

1. *Project Pluto*. URL: <https://projectpluto.com/>
2. Lancaster E.R., Blanchard R.C. A unified form of Lambert's theorem. *NASA technical note TN D-5368*, 1969, pp. 1–20.

The use of deep-space maneuver in the problem of minimizing the costs of the characteristic velocity of an interplanetary flight

© A.Y. Tsaregorodtsev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: tsaregorodtsevandrej@yandex.ru

Abstract. The paper considers the problem of finding optimal dates for a flight to the planets of the Solar system. In order to solve this problem, there has been developed the software with graphical user interface that allows you to display isolines of the characteristic velocity (pork-chop plots). Based on the obtained dates, trajectory of an interplanetary flight with an intermediate pulse is constructed, the characteristic velocity is minimized. The results of that paper are showing that the use of an intermediate deep-space maneuver can significantly reduce fuel costs for flights to Mars and Venus.

Keywords: *interplanetary flight, deep-space maneuver, Lambert's problem.*

References

1. *Project Pluto*. URL: <https://projectpluto.com/>
2. Lancaster E.R., Blanchard R.C. A unified form of Lambert's theorem. *NASA technical note TN D-5368*, 1969, pp. 1–20.