

## Особенности применения комбинированного функционала масса — время при решении задачи оптимизации многовиткового выведения космического аппарата на высокоэнергетическую орбиту

© Е.В. Кирилук<sup>1,2</sup>, М.Н. Степанов<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>НИЦ (г. Королев) ЦНИИ ВКС Минобороны РФ, Московская область,  
г. Королев, 141092, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

<sup>3</sup>4 ЦНИИ Минобороны РФ, Московская область, г. Королев, 141092, Россия

*Приведены основные особенности применения комбинированного функционала масса — время к задаче оптимизации многовитковых траекторий с использованием принципа максимума на примере некопланарного перелета орбитального блока с низкой опорой на геостационарную орбиту. Проанализировано насыщение зависимости достижимой массы орбитального блока на целевой орбите от весового коэффициента в комбинированном функционале для широкого диапазона изменения массово-энергетических характеристик разгонных блоков при заданной структуре оптимальной траектории. Аналогичный анализ проведен для структур оптимальных траекторий, содержащих различное количество перигейных активных участков, при фиксированных массово-энергетических характеристиках разгонного блока. Рассмотрены диапазоны изменения весового коэффициента, в которых существуют оптимальные схемы, содержащие различное количество перигейных активных участков. Даны рекомендации по назначению коэффициента насыщения, при котором решение задачи с комбинированным функционалом можно считать совпадающим с решением задачи о максимизации конечной массы орбитального блока.*

**Ключевые слова:** геостационарная орбита, комбинированный функционал, многовитковая траектория, оптимальная траектория, принцип максимума, разгонный блок

**Введение.** В настоящее время сохраняется тенденция к увеличению массы полезных грузов (ПГ), выводимых на высокоэнергетические орбиты, в частности на геостационарную орбиту (ГСО), поэтому задачи определения оптимального управления движением орбитального блока (ОБ) с максимизацией значения его конечной массы являются основными в баллистическом обосновании схем выведения ПГ. Применение различного рода упрощений, например, решение задачи в импульсной постановке, т. е. допущение бесконечно большой тяги и пренебрежение потерями на гравитацию, позволяет получить экстремали, содержащие, как правило, два активных участка (АУТ). Такой подход вполне оправдан для ОБ, обладающих высокой тяговооруженностью. В случае сравнительно низкой тяговооруженности разгонного блока (РБ) (например, в случае РБ «Бриз-М»), используемого в составе

ОБ, продолжительность активных участков траектории на витке перестает быть пренебрежимо малой, а также возрастают гравитационные потери и потери на управление. Энергетически выгодным становится дробление активных участков двухимпульсной схемы на несколько для снижения гравитационных потерь, в связи с чем становится актуальной задача оптимизации параметров многовитковых траекторий перелета орбитальных блоков.

В отсутствие ограничения на время выведения минимальный расход массы топлива при применении двигателя ограниченной тяги достигается на минимизирующей последовательности экстремалей. Для перелетов между компланарными круговыми орбитами минимизирующая последовательность стремится к так называемому циклическому скользящему режиму, представляющему собой бесконечную последовательность переходных квазиэллиптических орбит с включениями ограниченной тяги на малое время в окрестностях перигетров и апоцентров этих орбит. Поскольку тяга ограничена, а времена ее включения малы — число витков вокруг Земли, число активных участков и, следовательно, время перелета теоретически может быть сколь угодно велико [1, 2]. Однако в реальных баллистических задачах предельная продолжительность перелета ограничена ресурсом работы РБ (а именно, его бортовой аппаратуры) и особенностями состава полезной нагрузки (ПН), выводимой на целевую орбиту, в частности, спецификой условий поддержания теплового режима полезной нагрузки.

В задачах оптимального управления для случаев наличия противоречивых по своей физической природе технических требований получили широкое применение комбинированные функционалы, примеры которых приведены в [3–7].

В связи с наличием описанных выше ограничений, при решении задачи оптимизации траекторий межорбитальных перелетов в [5–7] предлагается вместо классического функционала

$$I = -m(T) \tag{1}$$

использовать функционал комбинированного типа, позволяющий учесть ограничение на продолжительность перелета:

$$I = T - km(T), \tag{2}$$

где  $T$  — продолжительность перелета, с;  $m$  — масса орбитального блока, нормированная относительно начальной массы на опорной орбите (безразмерная величина);  $k$  — весовой коэффициент, регулирующий компромисс между затратами массы топлива на выведение ОБ и затратами на сокращение времени полета, с.

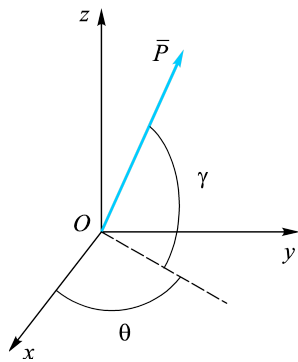
При решении задачи оптимизации траектории межорбитального перелета с применением комбинированного функционала ограничение на время выведения задается значением коэффициента  $k$ , которому соответствует определенное время выведения  $T$ . При  $k = 0$  этот функционал соответствует функционалу задачи быстрогодействия с неограниченной заранее конечной массой ПГ, при  $k \rightarrow \infty$  — функционалу задачи о выведении КА с максимальной конечной массой и неограниченной продолжительностью движения, при  $k \neq 0$  — функционалу задачи с максимальной конечной массой и ограничением движения по времени [5–7]. Следует отметить, что при решении задачи оптимального выведения ОБ на ГСО с низкой опорной орбиты (НОО) с существующими РБ траектория выведения должна содержать как минимум два АУТ, поэтому коэффициент компромисса в функционале (2) должен быть  $k \geq k_{\min} > 0$ , где  $k_{\min}$  соответствует минимальной продолжительности перелета, а увеличение  $k$  до бесконечности приводит к асимптотическому решению задачи с максимальной конечной массой ПГ для схемы выведения с двумя АУТ, т. е. с продолжительностью полета менее одного витка. Однако применение функционала (2) имеет ряд особенностей в случае рассмотрения многовитковых траекторий перелета. Так, при схеме перелета с  $N$  перигейными активными участками одинаковому значению весового коэффициента  $k$  может соответствовать значение массы ОБ на целевой орбите, близкое к предельно достижимому, а при схеме перелета с  $(N+1)$  перигейными активными участками — значение массы ОБ, отличающееся от предельно достижимого на несколько процентов. Следовательно, степень «компромисса» между затратами времени и затратами топлива различна для различных структур (по расположению и количеству активных участков) схемы перелета. Кроме того, она также различна для разных массово-энергетических характеристик (МЭХ) ОБ.

Цель настоящей работы — определение на примере выведения на геостационарную орбиту чувствительности таких параметров, как масса ОБ на целевой орбите и полное время выведения, к изменению коэффициента  $k$  при разных массово-энергетических характеристиках ОБ и различных структурах оптимальных траекторий перелета. Устанавливается степень «компромисса» между затратами времени и затратами топлива и определяются значения  $k$ , при которых решение задачи при фиксированной структуре схемы выведения будет асимптотически близким к решению задачи минимизации расхода массы. Кроме того, выявляются диапазоны значений весового коэффициента  $k$ , в которых существуют схемы выведения, содержащие  $N$  перигейных активных участков.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача оптимального перелета многоступенчатого ОБ в центральном ньютоновском гравитационном поле Земли между некомпланарными круговыми орбитами. Аэродинамические силы, а также гравитационное влияние Солнца и Луны не учитываются. Движение центра масс ОБ описывается в абсолютной геоцентрической экваториальной системе координат (АГЭСК)  $Oxyz$  системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{V}_x = \frac{\beta w}{m} \cos \theta \cos \gamma - \mu \frac{x}{r^3} \equiv a_{V_x}; \\ \dot{V}_y = \frac{\beta w}{m} \sin \theta \cos \gamma - \mu \frac{y}{r^3} \equiv a_{V_y}; \\ \dot{V}_z = \frac{\beta w}{m} \sin \gamma - \mu \frac{z}{r^3} \equiv a_{V_z}; \\ \dot{x} = V_x; \\ \dot{y} = V_y; \\ \dot{z} = V_z; \\ \dot{m} = -\beta, \end{cases} \quad (3)$$

где  $x, y, z$  — координаты центра масс ОБ;  $V_x, V_y, V_z$  — проекции вектора скорости ОБ на соответствующие оси АГЭСК;  $a_{V_x}, a_{V_y}, a_{V_z}$  — проекции вектора ускорения на соответствующие оси АГЭСК;  $\mu = 3,986005 \text{ м}^3/\text{с}^2$  — гравитационный параметр Земли;  $m = M/M_0$  — нормированная масса ОБ ( $M$  — масса, кг);  $w$  — скорость истечения;  $\beta$  — нормированный массовый секундный расход топлива;  $\theta, \gamma$  — углы ориентации вектора тяги (рис. 1);  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — модуль радиус-вектора.



**Рис. 1.** Ориентация вектора тяги  $\vec{P}$  в абсолютной геоцентрической экваториальной системе координат

Множество допустимых управлений задается следующими условиями:

$$\theta \in [0, 2\pi]; \quad \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \quad \beta \in [0, \beta_{\max}]. \quad (4)$$

Граничные условия на левом ( $t = t_0 = 0$ ) и правом ( $t = T$ ) концах траектории имеют вид, соответственно:

$$\begin{aligned} |\vec{r}(t_0)| = R_3 + h, \quad |\vec{V}(t_0)| = \sqrt{\frac{\mu}{R_3 + h}}, \\ (\vec{r}(t_0), \vec{V}(t_0)) = 0, \quad i(t_0) = i_0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} |\bar{r}(T)| &= R_{\text{ГСО}}, \quad |\bar{V}(T)| = \sqrt{\frac{\mu}{R_{\text{ГСО}}}}, \\ (\bar{r}(T), \bar{V}(T)) &= 0, \quad z(T) = 0, \quad V_z(T) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $R_3$  — радиус Земли;  $R_{\text{ГСО}}$  — радиус ГСО;  $i$  — наклонение орбиты.

Минимизируется функционал комбинированного типа вида (2), включающий в себя продолжительность перелета  $T$  и нормированную массу орбитального блока на целевой орбите  $m(T)$  [5, 6].

**Формализация задачи с точки зрения принципа максимума.** Задачей оптимального управления в форме Понтрягина называют задачу, вид которой приведен в [8]. Математическая формализация задачи поиска оптимального управления с точки зрения применения принципа максимума кратко приведена далее.

Функция Понтрягина для системы (3) имеет вид

$$H = \psi_{V_x} a_{V_x} + \psi_{V_y} a_{V_y} + \psi_{V_z} a_{V_z} + \psi_x V_x + \psi_y V_y + \psi_z V_z - \psi_m \beta. \quad (7)$$

Уравнения Эйлера для сопряженных переменных:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x = \frac{\mu}{r^5} \left[ (r^2 - 3x^2) \psi_{V_x} - 3x(y\psi_{V_y} + z\psi_{V_z}) \right]; \\ \dot{\psi}_y = \frac{\mu}{r^5} \left[ (r^2 - 3y^2) \psi_{V_y} - 3y(x\psi_{V_x} + z\psi_{V_z}) \right]; \\ \dot{\psi}_z = \frac{\mu}{r^5} \left[ (r^2 - 3z^2) \psi_{V_z} - 3z(x\psi_{V_x} + y\psi_{V_y}) \right]; \\ \dot{\psi}_{V_x} = -\psi_x; \\ \dot{\psi}_{V_y} = -\psi_y; \\ \dot{\psi}_{V_z} = -\psi_z; \\ \dot{\psi}_m = \frac{\beta w}{m^2} \left[ \psi_{V_x} \cos \theta \cos \gamma + \psi_{V_y} \sin \theta \cos \gamma + \psi_{V_z} \sin \gamma \right]. \end{cases} \quad (8)$$

В случае применения функционала (2) значимое условие трансверсальности:

$$\psi_m(T) = \lambda_0 k. \quad (9)$$

Условие стационарности по времени  $T$  имеет вид

$$H(T) = \lambda_0.$$

Выделим из функции Понтрягина (7) функцию  $H_1$ , зависящую от управлений:

$$H_1 = \frac{P}{m} \psi_V - \psi_m \beta = \frac{P}{m} \left( \psi_V - \frac{m \psi_m}{w} \right) = \frac{P}{m} \rho,$$

$$\psi_V \equiv \psi_{V_x} \cos \theta \cos \gamma + \psi_{V_y} \sin \theta \cos \gamma + \psi_{V_z} \sin \gamma; \quad (10)$$

$$\rho = \psi_V - \frac{m \psi_m}{w}. \quad (11)$$

Функция переключения  $\rho$  (11) определяет оптимальные моменты включения и выключения двигательной установки. Согласно необходимым условиям оптимальности, для достижения минимума функционала (2) управления должны иметь следующий вид:

$$\beta = \begin{cases} \beta_{\max}, & \rho > 0; \\ 0, & \rho < 0; \\ [0, \beta_{\max}], & \rho = 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\cos \theta \cos \gamma = \frac{\psi_{V_x}}{\psi_V}, \quad \sin \theta \cos \gamma = \frac{\psi_{V_y}}{\psi_V}, \quad \sin \gamma = \frac{\psi_{V_z}}{\psi_V}, \quad (13)$$

где  $\psi_V = \sqrt{\psi_{V_x}^2 + \psi_{V_y}^2 + \psi_{V_z}^2}$ .

Воспользуемся свойством однородности [5] и примем, что в начальный момент времени функция  $\psi_V(t_0) = 1$  (9). Тогда из условий (13) следует:

$$\begin{aligned} \psi_{V_x}(t_0) &= \cos \theta(t_0) \cos \gamma(t_0); \\ \psi_{V_y}(t_0) &= \sin \theta(t_0) \cos \gamma(t_0); \\ \psi_{V_z}(t_0) &= \sin \gamma(t_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Система (3), (8) имеет векторный первый интеграл [5]:

$$\bar{K} = \bar{r} \times \bar{\psi}_r + \bar{V} \times \bar{\psi}_V, \quad (15)$$

где  $\bar{\psi}_r(\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ ,  $\bar{\psi}_V(\psi_{V_x}, \psi_{V_y}, \psi_{V_z})$  — векторы, сопряженные радиус-вектору и вектору скорости соответственно;  $\bar{K}(K_1, K_2, K_3)$  — вектор констант.

Значение  $\psi_x(t_0)$  при заданных значениях  $x(t_0)$ ,  $y(t_0)$ ,  $V_x(t_0)$ ,  $V_y(t_0)$ ,  $\psi_y(t_0)$ ,  $\psi_{V_x}(t_0)$ ,  $\psi_{V_y}(t_0)$  определяется из проекции первого векторного интеграла (15) на ось  $Oz$  АГЭСК.

В качестве параметра останова численного интегрирования траекторий при рассмотрении функционала (2) может использоваться значение переменной, сопряженной массе ОБ, в конечный момент времени (9).

В итоге решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи размерности 5, для решения которой необходимо определить значения  $\theta(t_0)$ ,  $\gamma(t_0)$ ,  $\psi_y(t_0)$ ,  $\psi_z(t_0)$ ,  $\psi_m(t_0)$ , обеспечивающие удовлетворение условий (4).

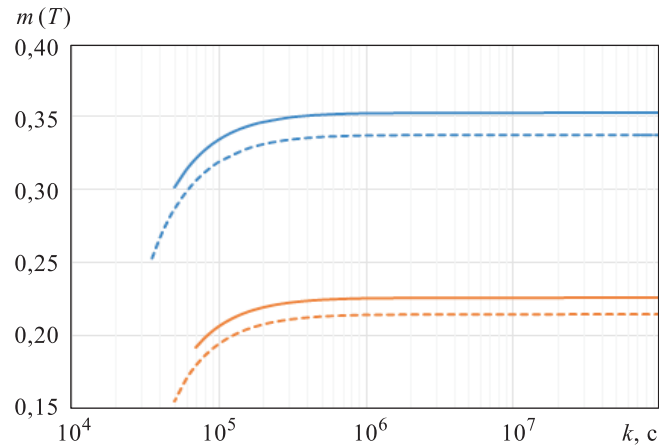
**Анализ насыщения зависимости массы орбитального блока на целевой орбите от коэффициента в комбинированном функционале.** Рассмотрим влияние коэффициента  $k$  в функционале (2) на схемы выведения на геостационарную орбиту для спектра массово-энергетических характеристик ОБ. Как отмечалось выше, изменение коэффициента компромисса эквивалентно изменению ограничения на полное время выведения.

В качестве начальной опорной орбиты принимается круговая орбита высотой 200 км с наклоном  $50^\circ$ . В качестве предельных значений МЭХ ОБ были приняты начальные тяговооруженности на низкой опорной орбите ( $n_o$ ) 0,1 и 0,45 ед. и удельные импульсы тяги (УИТ)  $I_{уд}$ , равные 330 с и 470 с соответственно. Для исследования влияния коэффициента  $k$  на массу ОБ на целевой орбите и полное время выведения варьирование коэффициента  $k$  с решением серии краевых задач принципа максимума проводилось для следующих сочетаний МЭХ ОБ:

- 1)  $n_o = 0,1$ ;  $I_{уд} = 330$  с;
- 2)  $n_o = 0,1$ ;  $I_{уд} = 470$  с;
- 3)  $n_o = 0,45$ ;  $I_{уд} = 330$  с;
- 4)  $n_o = 0,45$ ;  $I_{уд} = 470$  с.

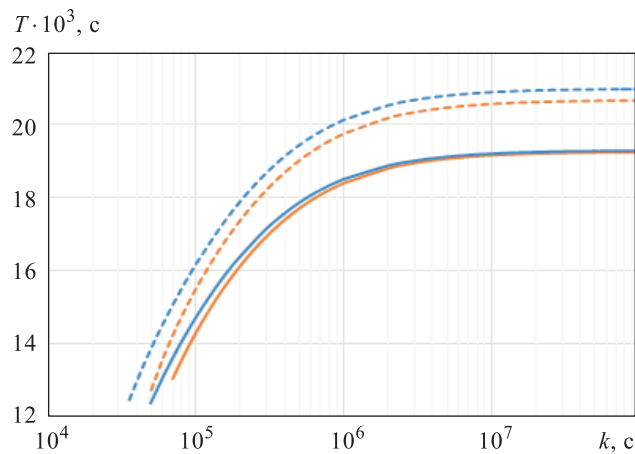
Полученные зависимости массы ОБ на геостационарной орбите и полного времени выведения от значения коэффициента компромисса для случая перелета на целевую орбиту посредством двух АУТ представлены на рис. 2, 3. Ось абсцисс на рис. 2, 3 для наглядности дана в логарифмическом масштабе. Под полным временем выведения, представленным на рис. 3, в данном случае подразумевается промежуток времени от начала первого АУТ на НОО до момента выхода на ГСО — момента окончания второго АУТ.

Зависимости массы ОБ на геостационарной орбите от полного времени выведения, приведенные на рис. 4, позволяют количественно оценить изменение затрат массы топлива, необходимых для сокращения времени выведения, или, наоборот, — возможности увеличения массы выводимого ПГ в ущерб быстродействию выполнения поставленной задачи.



**Рис. 2.** Зависимости массы ОБ на ГСО от значения коэффициента  $k$  при различных МЭХ ОБ:

—  $n_0 = 0,45$ , УИТ 470 с; —  $n_0 = 0,1$ , УИТ 470 с; —  $n_0 = 0,45$ , УИТ 330 с;  
 - -  $n_0 = 0,1$ , УИТ 330 с



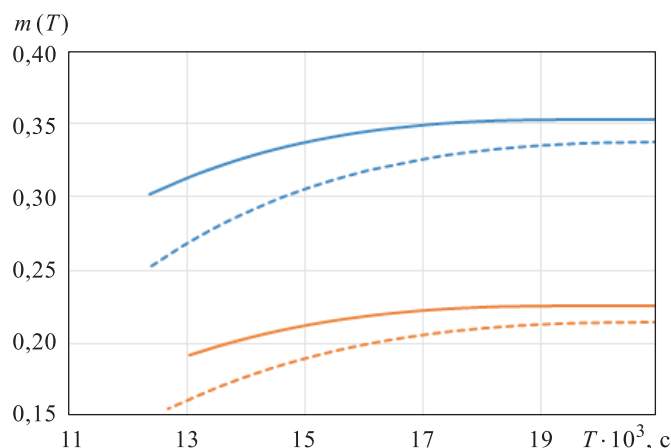
**Рис. 3.** Зависимости полного времени выведения на ГСО от значения коэффициента  $k$  при различных МЭХ ОБ:

—  $n_0 = 0,45$ , УИТ 470 с; —  $n_0 = 0,1$ , УИТ 470 с; —  $n_0 = 0,45$ , УИТ 330 с;  
 - -  $n_0 = 0,1$ , УИТ 330 с

Для рассматриваемых зависимостей существуют некоторое значение коэффициента  $k = k_n$  и соответствующее ему время выведения, при котором происходит насыщение зависимости  $m(T)$ . Дальнейшее увеличение  $k$  свыше значения коэффициента  $k_n$  не дает сколько-нибудь существенного изменения конечной массы. Следовательно, начиная со значения  $k = k_n$  решение задачи с комбинированным функционалом (2) можно принять соответствующим решению задачи выведения без ограничения на время для рассматриваемой схемы выведения (для рассматриваемого числа АУТ). Значение  $k_n$  ограничивает



диапазон максимально возможной выводимой массы ПГ при рассматриваемой схеме выведения. Проанализируем насыщение зависимости  $m(T)$  при различных МЭХ. Значения массы ОБ на ГСО (для схемы с двумя АУТ) для всех рассматриваемых сочетаний МЭХ при четырех значениях коэффициента  $k$ , различающихся на порядок, а также относительное изменение массы  $m(T)$  при увеличении  $k$  на порядок представлены в табл. 1.



**Рис. 4.** Зависимость массы ОБ на ГСО от полного времени выведения при различных МЭХ ОБ:

—  $n_0 = 0,45, \text{УИТ } 470 \text{ с}$ ; - -  $n_0 = 0,1, \text{УИТ } 470 \text{ с}$ ; —  $n_0 = 0,45, \text{УИТ } 330 \text{ с}$ ;  
 - -  $n_0 = 0,1, \text{УИТ } 330 \text{ с}$

Таблица 1

**Массы ОБ на ГСО при различных МЭХ ОБ и коэффициентах  $k$**

$k, \text{с}$	$m(T)$	$\Delta m(T), \%$	$m(T)$	$\Delta m(T), \%$
	$n_0 = 0,1; \text{УИТ } 330 \text{ с}$		$n_0 = 0,1; \text{УИТ } 470 \text{ с}$	
$10^5$	0,194770	—	0,318548	—
$10^6$	0,214502	10,1310	0,336704	5,6996
$10^7$	0,214925	0,1969	0,337095	0,1160
$10^8$	0,214930	0,0023	0,337100	0,0015
	$n_0 = 0,45, \text{УИТ } 330 \text{ с}$		$n_0 = 0,45, \text{УИТ } 470 \text{ с}$	
$10^5$	0,206601	—	0,333798	—
$10^6$	0,225657	9,2232	0,351489	5,2999
$10^7$	0,226051	0,1747	0,351854	0,1039
$10^8$	0,226056	0,0020	0,351858	0,0012

По данным, представленным в табл. 1 и на рис. 2, можно сделать следующие выводы о насыщении рассмотренных зависимостей  $m(T)$ :

– при фиксированной начальной тяговооруженности ОБ и прочих равных условиях меньшему удельному импульсу тяги двигательной

установки соответствует большее значение производной  $\partial m(T)/\partial k$  при фиксированном значении  $k$ , т. е. насыщение зависимости  $m(T)$  наступает при больших значениях  $k$  по мере уменьшения УИТ;

– при фиксированном удельном импульсе тяги двигательной установки ОБ и прочих равных условиях меньшему значению начальной тяговооруженности ОБ соответствует большее значение производной  $\partial m(T)/\partial k$  при фиксированном значении  $k$ , т. е. насыщение зависимости  $m(T)$  наступает при больших значениях  $k$  по мере уменьшения начальной тяговооруженности ОБ;

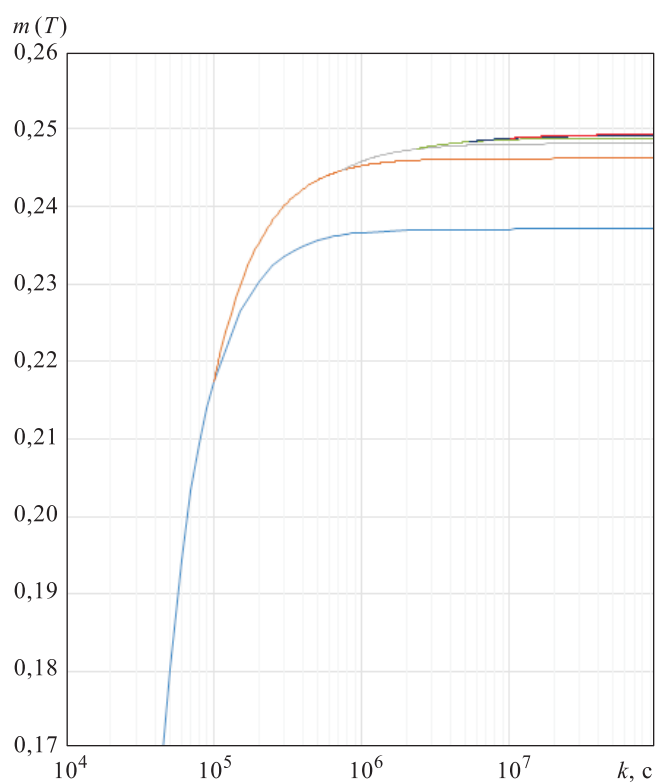
– значение  $k$ , при котором происходит насыщение зависимости  $m(T)$ , более чувствительно к изменению УИТ, нежели к изменению начальной тяговооруженности ОБ;

– для всех рассмотренных сочетаний МЭХ ОБ увеличение массы ОБ на ГСО, отвечающее изменению  $k$  на порядок — с  $10^7$  с до  $10^8$  с, составляет величину, существенно меньшую 0,1 %. Следовательно, в широком диапазоне значений МЭХ ОБ для схем выведения, содержащих два АУТ, значение коэффициента компромисса  $10^8$  с может быть принято в качестве коэффициента насыщения  $k_n$  зависимости  $m(T)$ .

**Анализ областей существования схем, содержащих заданное количество перигейных активных участков.** Интерес, однако, представляет не только чувствительность коэффициента насыщения  $k_n$  к МЭХ ОБ, но и его изменение при изменении количества АУТ выведения. Для выполнения соответствующего анализа для фиксированных МЭХ ОБ было проведено решение серии краевых задач принципа максимума при варьировании значения  $k$  для схем выведения на ГСО, содержащих от одного до шести перигейных АУТ и один завершающий апогейный АУТ.

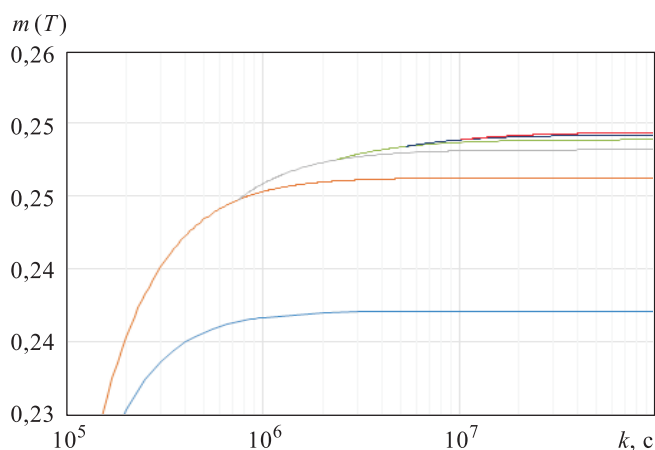
Структуры траекторий с  $(N+1)$  активными участками получены на базе решения краевой задачи принципа максимума, отвечающего структурам с  $N$  активными участками, путем применения интегрирования в обратном времени в сочетании с методом продолжения решения краевой задачи принципа максимума по параметру [9–12]. Данный подход является развитием работ [13, 14].

Зависимости для стартовой тяговооруженности ОБ на НОО  $n_0 = 0,1$  и УИТ двигательной установки, равного 353 с, приведены на рис. 5–8. Оси абсцисс на рис. 5–7 представлены в логарифмическом масштабе. Полученные зависимости массы ОБ на геостационарной орбите от значения коэффициента  $k$  для случаев перелета на целевую орбиту посредством различного количества АУТ показаны на рис. 5.



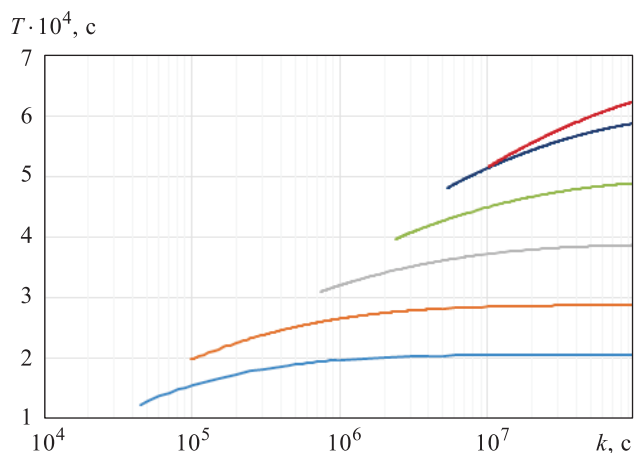
**Рис. 5.** Зависимости массы ОБ на ГСО от значения коэффициента  $k$  при перелетах с разным количеством АУТ:

— 2; — 3; — 4; — 5; — 6; — 7



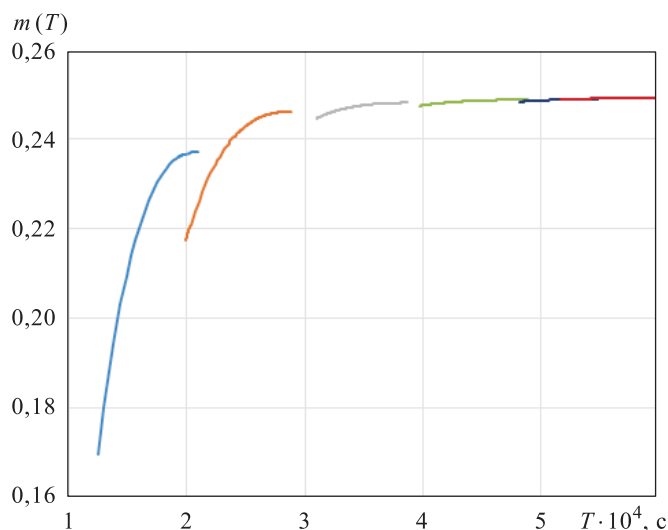
**Рис. 6.** Зависимости массы ОБ на ГСО от значения коэффициента  $k$  при перелетах с различным количеством АУТ (увеличенный фрагмент):

— 2; — 3; — 4; — 5; — 6; — 7



**Рис. 7.** Зависимости полного времени выведения от значения коэффициента  $k$  при перелетах с различным количеством АУТ:

— 2; — 3; — 4; — 5; — 6; — 7



**Рис. 8.** Зависимость массы ОБ на ГСО от полного времени выведения при перелетах с различным количеством АУТ:

— 2; — 3; — 4; — 5; — 6; — 7

Увеличенный фрагмент графиков, приведенных на рис. 5, показан на рис. 6. Зависимости полного времени выведения от значения коэффициента  $k$  для случаев перелета на целевую орбиту посредством различного количества АУТ представлены на рис. 7. Графики зависимости массы ОБ на геостационарной орбите от полного времени выведения приведены на рис. 8.

На рис. 5–7 наглядно продемонстрирована особенность применения комбинированного функционала (2): одному и тому же значению

коэффициента  $k$  могут соответствовать несколько схем выведения. Зависимость  $t(k)$  имеет несколько точек бифуркации — значений  $k_{6i}$ , при которых появляются альтернативные варианты схем выведения. Например, при значении коэффициента компромисса  $k_{61} \approx 9,98 \cdot 10^4$  с появляется альтернатива использования схем, содержащих один или два перигейных АУТ. При значении коэффициента компромисса  $k_{62} \approx 7,46 \cdot 10^5$  с существуют три альтернативных схемы выведения: с одним, двумя и тремя перигейными АУТ. При значении коэффициента компромисса  $k_{63} \approx 2,38 \cdot 10^6$  с — четыре альтернативные схемы, и т. д.

Добавление в схему одного перигейного АУТ приводит к увеличению угловой дальности на виток и, соответственно, к увеличению времени выведения. В связи с тем, что коэффициент  $k$  отражает отношение между величиной массы ОБ на ГСО и полным временем выведения, минимальное значение коэффициента  $k$ , при котором существует схема выведения, тем больше, чем большее количество АУТ она содержит. Следует отметить, что решения краевой задачи принципа максимума, полученные для схем выведения, содержащих различное количество АУТ, при одинаковом значении  $k$  принадлежат разным областям в пространстве начальных значений сопряженных переменных. В настоящий момент простой и регулярный метод «прямого» перехода от решения, содержащего  $N$  АУТ, к решению, содержащему  $(N+1)$  АУТ, не разработан. Однако явление существования альтернативных схем выведения при одинаковых значениях коэффициента  $k$  может быть использовано для дальнейшей разработки подобного регулярного метода.

Анализ диапазонов, в которых располагаются точки бифуркации, важен для дальнейшего применения описанного в [13, 14] метода получения дополнительных перигейных участков путем интегрирования с отрицательным шагом. Представленные результаты демонстрируют, в каких диапазонах значений  $k$  применение данного метода не имеет смысла в силу отсутствия альтернативной схемы, содержащей дополнительный перигейный АУТ.

Интервалы полных длительностей выведения могут частично пересекаться для схем, содержащих различное количество АУТ, что видно на рис. 7, 8. При этом, как показано на рис. 8, при одинаковом времени выведения схема выведения, содержащая меньшее количество АУТ, может отвечать большей массе ОБ на целевой орбите. Схемы с двумя и тремя АУТ позволяют сделать вывод о том, что полное время выведения, отвечающее отсутствию ограничения на время в рамках применения схемы с двумя АУТ, соответствует достаточно жесткому ограничению на время для схемы с тремя АУТ вследствие наличия в ней дополнительного промежуточного витка.

Таким образом, дробление одного из АУТ в схеме выведения с целью увеличения выводимой массы может быть целесообразно только тогда, когда допустимое время выведения больше, чем максимальное время, реализуемое для рассматриваемой схемы. Причем в каждом конкретном случае целесообразность подлежит проверке в связи с тем, что интервалы полных длительностей выведения для разных схем являются дискретными.

Проанализируем насыщение зависимости  $m(T)$  для схем выведения, содержащих различное количество АУТ. Значения массы ОБ, выводимого на ГСО, для всех рассматриваемых схем при четырех значениях коэффициента  $k$ , различающихся на порядок, а также относительное изменение массы  $m(T)$  при увеличении  $k$  на порядок даны в табл. 2.

Таблица 2

**Массы ОБ на ГСО для схем выведения с различным количеством АУТ при различных коэффициентах  $k$**

$k, c$	$m(T)$	$\Delta m(T), \%$	$m(T)$	$\Delta m(T), \%$	$m(T)$	$\Delta m(T), \%$
	2 АУТ		3 АУТ		4 АУТ	
$10^5$	0,217388	–	0,217434	–	–	–
$10^6$	0,236657	8,8637	0,245263	12,7990	0,24582	–
$10^7$	0,237069	0,1741	0,246182	0,3750	0,248049	0,9066
$10^8$	0,237074	0,0021	0,246197	0,0059	0,248122	0,0295
	5 АУТ		6 АУТ		7 АУТ	
$10^5$	–	–	–	–	–	–
$10^6$	–	–	–	–	–	–
$10^7$	0,248624	–	0,248797	–	0,248808*	–
$10^8$	0,248810	0,0752	0,249128	0,1333	0,249296	0,1959

\*Значение приведено для  $k = 1,0258 \cdot 10^7$  — минимального  $k$ , при котором существует схема.

Насыщение зависимости  $m(T)$  для схем, содержащих большее количество АУТ, происходит, при прочих равных условиях, при больших значениях коэффициента  $k$ , что связано, в том числе, со сдвигом интервала существования схем с большим количеством АУТ в сторону увеличения значений  $k$ . Однако для всех рассматриваемых схем увеличение массы ОБ на ГСО, отвечающее изменению  $k$  на порядок — с  $10^7$  с до  $10^8$  с, составляет меньше 0,2 %. Следовательно, при варьировании количества АУТ в схеме выведения, так же как и в случае варьирования МЭХ ОБ, значение коэффициента компромисса  $10^8$  с может быть принято в качестве коэффициента насыщения  $k_n$  зависимости  $m(T)$ .

Представленный анализ иллюстрирует основное преимущество применения комбинированного функционала: при значениях коэффициента  $k$ , близких к  $k_n$ , в случае дробления одного из АУТ не требуется осуществлять поиск полного времени выведения, соответствующего полной реализации энергетических возможностей применяемой схемы, время будет найдено автоматически.

**Заключение.** На примере выведения ПГ на геостационарную орбиту проведен анализ чувствительности достижимого значения массы ОБ на целевой орбите и полного времени его выведения к изменению коэффициента  $k$  комбинированного функционала масса — время при различных массово-энергетических характеристиках ОБ и различных структурах оптимальных траекторий перелета. Показано, что для широкого спектра массово-энергетических характеристик ОБ в качестве так называемого коэффициента «насыщения»  $k_n$  при проведении расчетов может быть принято идентичное значение  $k$ , равное  $10^8$  с. На примере ОБ со сравнительно низкой стартовой тяговооруженностью (0,1 ед.) продемонстрирована основная особенность применения комбинированного функционала масса — время при решении задачи оптимизации многовитковых траекторий: частичное пересечение областей значений весового коэффициента  $k$ , в которых существуют структуры оптимальных траекторий, содержащие различное количество перигейных активных участков. Для данного примера показаны точки бифуркации решения — значения весового коэффициента  $k$ , при которых появляются альтернативные структуры оптимальной траектории. Приведены рекомендации по баллистическому обоснованию схем выведения ПГ на ГСО в зависимости от допустимого времени перелета.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кротов В.Ф., Гурман В.И. *Методы и задачи оптимального управления*. Москва, Наука, 1973, 448 с.
- [2] Гурман В.И. *Вырожденные задачи оптимального управления*. Москва, Наука, 1977, 304 с.
- [3] Сю Д., Мейер А. *Современная теория автоматического управления и ее применение*. Москва, Машиностроение, 1972, 552 с.
- [4] Фельдбаум А.А. *Основы теории оптимальных автоматических систем*. Москва, Физматгиз, 1963, 552 с.
- [5] Григорьев К.Г., Федина А.В. Оптимальное пространственное выведение космического аппарата на геостационарную орбиту с орбиты искусственного спутника Земли. *Техническая кибернетика*, 1993, № 4, с. 116–126.
- [6] Григорьев К.Г. О маневрах космического аппарата при минимальных затратах массы и ограниченном времени. *Космические исследования*, 1994, т. 32, № 2, с. 45–60.
- [7] Григорьев К.Г. О наискорейших маневрах космического аппарата. *Космические исследования*, 1994, т. 32, № 1, с. 56–59.

- [8] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Физматгиз, 1961, 393 с.
- [9] Шалашин В.И., Кузнецов Е.Б. *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике*. Москва, Эдиториал УРСС, 1999, 244 с.
- [10] Allgower E.L., Georg K. *Introduction of Numerical Continuation Methods*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1990, 388 p.
- [11] Rheinboldt W.C. Numerical continuation methods: a perspective. *Journal of computational and applied mathematics*, 2000, vol. 124, pp. 229–244. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00428-3
- [12] Кузнецов Е.Б. *Некоторые приложения метода продолжения решения по наилучшему параметру*. Москва, Изд-во МАИ, 2013, 160 с.
- [13] Катаргин А.П., Степанов М.Н. Минимизирующая последовательность траекторий перелета космического аппарата с низкой круговой орбиты на стационарную орбиту искусственного спутника Земли. *Труды VI Всероссийских научных чтений по военной космонавтике, посвященных памяти М.К. Тихонравова. Сб. науч. тр.* Королёв, Московская обл., 4 ЦНИИ Минобороны РФ, 2008, кн. 2, с. 217–228.
- [14] Кирилук Е.В., Корянов В.В., Степанов М.Н. Минимизирующие последовательности траекторий перелета космического аппарата с низкой круговой орбиты на высокоэнергетические орбиты различных типов. *Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского*, 2017, № 656, с. 74–78.

Статья поступила в редакцию 22.06.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кирилук Е.В., Степанов М.Н. Особенности применения комбинированного функционала масса — время при решении задачи оптимизации многовиткового выведения космического аппарата на высокоэнергетическую орбиту. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2022, вып. 3.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-3-2164>

**Кирилук Елена Владимировна** — младший научный сотрудник НИЦ (г. Королёв) ЦНИИ ВКС Минобороны России; старший преподаватель кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область деятельности и научных интересов: баллистическое обоснование применения средств выведения, оптимизация траекторий движения летательных аппаратов. e-mail: kiriliuk\_e@bmstu.ru

**Степанов Михаил Николаевич** — канд. техн. наук, доцент, старший научный сотрудник 4 ЦНИИ Минобороны России, старший научный сотрудник НИЦ (г. Королёв) ЦНИИ ВКС Минобороны России. Область деятельности и научных интересов: баллистическое обеспечение космических средств. e-mail: step\_m\_n@mail.ru



## **Aspects of applying combined mass–time functional in solving the problem of optimizing the multiple-burn transfer of a spacecraft into a high-energy orbit**

© E.V. Kiriliuk<sup>1,2</sup>, M.N. Stepanov<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Central Scientific Research Institute of the Aerospace Forces,  
Ministry of Defence of Russia, Moscow Region, Korolyov town, 141092, Russia

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

<sup>3</sup> 4<sup>th</sup> Central Scientific and Research Institute, Ministry of Defence of Russia, Moscow  
Region, Korolyov town, 141092, Russia

*Through the example of a non-coplanar transfer of an orbital unit with a low reference to a geostationary orbit, the paper describes the main aspects of applying the combined mass–time functional to the problem of optimizing multiple-burn transfer using the maximum principle. The study analyzes the saturation of the dependence of the orbital unit's mass in the target orbit on the weight coefficient for a wide range of the orbital unit's mass-energy characteristics of upper stages for a given structure of the optimal trajectory. Furthermore, a similar analysis was carried out for structures of optimal trajectories containing a different number of perigee active sections, with fixed mass-energy characteristics of the upper stage. The ranges of variation of the weight coefficient are demonstrated, in which there are optimal schemes containing a different number of perigee active sites. Recommendations are given for setting the saturation coefficient, at which the solution of the problem with the combined functional can be considered coinciding with the solution of the problem of maximizing the finite mass of the orbital block.*

**Keywords:** geostationary orbit, combined functional, multiple-burn transfers, optimal trajectory, maximum principle, space tug

### REFERENCES

- [1] Krotov V.F., Gurman V.I. *Metodi i zadachi optimalnogo upravleniya* [Methods and problems of optimal control]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 448 p.
- [2] Gurman V.I. *Vyrozhdennye zadachi optimalnogo upravleniya* [Degenerate optimal control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 304 p.
- [3] Hsu J.C., Meyer A.U. *Modern Control Principles and Applications*, 1968, 769 p. [In Russ.: Hsu J.C., Meyer A.U. *Sovremennaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya i ego primeneniye*. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1972, 552 p.]
- [4] Fedelbaum A.A. *Osnovy teorii optimalnykh avtomaticheskikh system* [Fundamentals of the theory of optimal automatic systems]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 552 p.
- [5] Grigoriev K.G., Fedyna A.V. *Izvestiya Rossiskoy akademii nauk. Tehnicheskaya kibernetika — Engineering Cybernetics*, 1993, no. 4, pp. 116–126.
- [6] Grigoriev K.G. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 1994, vol. 32, no. 2, pp. 45–60.
- [7] Grigoriev K.G. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 1994, vol. 32, no. 1, pp. 56–59.
- [8] Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishechenko E.F., *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* [The Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 393 p.
- [9] Shalashin V.I., Kuznetsov E.B. *Metod prodolzheniya resheniya po no parametru i nailuchshaya parametrizatsiya v prikladnoy matematike i mekhanike* [Method

- of solution continuation with respect to a parameter and the best parametrization in applied mathematics and mechanics]. Moscow, Editorial URSS Publ., 1999, 244 p.
- [10] Allgower E.L., Georg K. *Introduction of Numerical Continuation Methods*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1990, 388 p.
- [11] Rheinboldt W.C. Numerical continuation methods: a perspective. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, vol. 124, pp. 229–244. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00428-3
- [12] Kuznetsov E.B. *Nekotorye prilozheniya metoda prodolzheniya resheniya po nailuchshemu parametru* [Some applications of the solution continuation method with respect to the best parameter]. Moscow, MAI Publ., 2013, 160 p.
- [13] Katargin A.P., Stepanov M.N. Minimiziruyuschaya posledovatelnost traektorii pereleta kosmicheskogo apparata s nizkoy krugovoy orbity na stacionarnuyu orbitu iskusstvennogo sputnika Zemli [Minimizing the sequence of flight trajectories of a spacecraft from a low circular orbit to a stationary orbit of an artificial Earth satellite]. *Trudy VI Vserossiyskikh nauchnykh chteniy po voennoy kosmonavtike, posvyashennykh pamyati M.K. Tikhonravova* [Proceedings of the VI All-Russian scientific readings on military cosmonautics, dedicated to the memory of M.K. Tikhonravova. Collection of scientific papers]. Korolyov town, Moscow Region, 4th Central Scientific and Research Institute, Ministry of Defence of Russia, 2008, book 2, pp. 217–228.
- [14] Kiriliuk E.V., Koryanov V.V., Stepanov M.N. *Trudy VoЕННО-kosmicheskoy akademii im. A.F. Mozhayskogo (Proceedings of the Military Space Academy. A.F. Mozhaisky)*, 2017, no. 656, pp. 74–78.

**Kiriliuk E.V.**, Junior Research Fellow, Central Scientific Research Institute of the Aerospace Forces, Ministry of Defence of Russia; Assist. Professor, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: ballistic justification for the use of launch vehicles, optimization of aircraft trajectories. e-mail: kiriliuk\_e@bmstu.ru

**Stepanov M.N.**, Cand. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, 4th Central Scientific and Research Institute, Ministry of Defence of Russia; Central Scientific Research Institute of the Aerospace Forces, Ministry of Defence of Russia. Research interests: ballistic support of space vehicles. e-mail: step\_m\_n@mail.ru