

## Дальнейшее расширение диапазона применимости теории коротких волн

© В.Н. Охитин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*В рамках теории коротких волн получено второе приближение (названное  $\beta$ -приближением) для параметров одномерных ударных волн, в котором коэффициенты при высших членах разложения функций в степенные ряды не совпадают со вторыми производными функций по своему аргументу, но обеспечивают существенно лучшее совпадение с истинными значениями функций. Сравнение результатов вычислений по полученному решению с результатами численных расчетов для плоской ударной волны треугольного профиля в воздухе показывает, что это приближение при расчете ее параметров, в том числе длительности фазы сжатия, позволяет расширить диапазон применения теории коротких волн с погрешностью в доли процента до избыточного давления на фронте 0,3, а в пределах нескольких процентов — до 0,4 от начального давления в атмосфере.*

**Ключевые слова:** теория коротких волн, разложение в ряд, избыточное давление, длительность фазы сжатия

**Введение.** Теория коротких волн (ТКВ), разработанная советскими учеными, например [1–8], предназначена для того, чтобы получить представление о распространении одномерных ударных волн (УВ) на большом удалении от места их возникновения при условии, что длина волны значительно меньше радиуса кривизны ее фронта. Использование ТКВ для решения задачи о прохождении плоской УВ через слой горячего воздуха [9] показывает, что диапазон ее применимости достаточно ограничен. При избыточном давлении на фронте  $\Delta p_2$ , которое больше  $0,1p_1$ , ошибки вычислений начинают заметно возрастать (здесь и далее индексы 1 и 2 относятся к параметрам перед и за фронтом УВ). В работе [10] получено второе приближение ТКВ, позволяющее расширить диапазон ее применимости до избыточного давления, составляющего  $0,2p_1$ .

Цель настоящей работы — дальнейшее расширение диапазона применимости ТКВ.

**$\beta$ -приближение ТКВ.** В работе [10] использовано второе приближение разложения функций в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{(u+c)} = \frac{1}{c_1} - 2m(\rho u) + A(\rho u)^2;$$
$$\frac{1}{D} - \frac{1}{(u+c)} = m(\rho u) - B(\rho u)^2,$$

где

$$m = \frac{k+1}{4} \frac{1}{\rho_1 c_1^2};$$

$$A = \frac{(k+1)(k+3)}{4\rho_1^2 c_1^3};$$

$$B = \frac{(k+1)(7k+15)}{32\rho_1^2 c_1^3}.$$

Здесь  $u$ ,  $c$ ,  $\rho$ ,  $D$ ,  $k$  — массовая и звуковая скорости, плотность, скорость фронта ударной волны, показатель адиабаты (для воздуха при температуре 15 °С  $k = 1,4$ ;  $p_1 = 1,013 \cdot 10^5$  Па;  $\rho_1 = 1,225$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_1 = 340$  м/с).

Для того чтобы получить аналитические соотношения на константы вторых членов разложения, накладываем условие  $B = 2A/3$  [10], которое для воздуха выполняется с погрешностью около 5 %. Второе приближение приводит к расширению диапазона применения ТКВ по избыточному давлению до  $\Delta p \sim 0,2p_1$ , однако не приводит к повышению точности вычисления длительности фазы сжатия УВ.

Для избыточного давления на фронте одномерных УВ получено выражение [10]

$$\frac{\Delta p_2}{p_1} = K_1 \begin{cases} (\bar{r}_2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 + K_2 (\bar{r}_2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \right] & \text{при } \nu = 0; \\ \left[ 2\bar{r}_2 (\sqrt{\bar{r}_2} - 1) \right]^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + K_2 \left[ 2(\sqrt{\bar{r}_2} - 1) \right]^{-\frac{3}{2}} \ln \bar{r}_2 \right\} & \text{при } \nu = 1; \\ \left( \bar{r}_2^2 \ln \bar{r}_2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 + K_2 (1 - \bar{r}_2^{-1}) (\ln \bar{r}_2)^{-\frac{3}{2}} \right] & \text{при } \nu = 2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $K_1 = \frac{c_1}{p_1} \sqrt{\frac{Q}{m r_0}}$ ;  $K_2 = \frac{B}{2m} \sqrt{\frac{Q}{m r_0}}$ ;  $\bar{r}_2 = \frac{r_2}{r_0}$  ( $Q = \int_0^{t_0} (\rho u)_0 dt$  — расход

массы газа через единицу поверхности  $r = r_0$  за время  $t_0$ , быстро достигающего максимума для короткой УВ;  $r_0$  — радиус, с которого можно использовать ТКВ);  $\nu = 0, 1, 2$  — параметр симметрии для плоской, цилиндрической и сферической волны соответственно.

Для определения длительности фазы сжатия УВ получено соотношение [10]

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1 + 2m \frac{\Delta p_2^0}{c_1} \frac{x}{\tau_0} \left( 1 - \frac{A}{2m} \frac{\Delta p_2}{c_1} \right)}{\sqrt{1 + 2m \frac{\Delta p_2^0}{c_1} \frac{x}{\tau_0} \left( 1 - \frac{B}{m} \frac{\Delta p_2}{c_1} \right)}}, \quad (2)$$

где  $x = r - r_0$  — удаление рассматриваемой точки от начального сечения  $r_0$  (индекс «0» относится к расстоянию, начиная с которого можно использовать ТКВ).

Анализ соотношений (1), (2) показывает, что избыточное давление в волне зависит от константы  $B$  в разложении, а длительность фазы сжатия — также и от константы  $A$ . Если константу  $A$  вычислять как  $A = 3B/2$ , то ее значение будет отличаться примерно на 5 % от величины в разложении в ряд Тейлора. Возможно, с этим связаны погрешности вычисления  $\tau$  во втором приближении [10].

В принципе, можно получить третье приближение ТКВ, учитывая третий член в разложении функций в ряд Тейлора. Однако в этом случае придется сделать достаточно громоздкие выкладки, в связи с чем трудно поддается анализу. К тому же оно обладает тем же недостатком, что и второе приближение, — величина констант в разложении зависит от выбора функции, по которой одна из них вычисляется. Поэтому будем искать разложение функций в виде

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{u+c} &= 1 - 2mc_1(\rho u) + Ac_1(\rho u)^\beta; \\ \frac{c_1}{D} - \frac{c_1}{u+c} &= mc_1(\rho u) - Bc_1(\rho u)^\beta, \end{aligned} \quad (3)$$

откуда

$$\begin{aligned} A(\rho u)^\beta &= \frac{1}{c_1} \left[ \frac{c_1}{u+c} + 2mc_1(\rho u) - 1 \right]; \\ B(\rho u)^\beta &= \frac{1}{c_1} \left[ mc_1(\rho u) - \left( \frac{c_1}{D} - \frac{c_1}{u+c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Наложим условие

$$A = \frac{\beta+1}{\beta} B,$$

позволяющее проинтегрировать уравнение вдоль положительной характеристики [10]. Получим три уравнения с тремя неизвестными  $A$ ,  $B$  и  $\beta$ . Будем называть разложение (3)  $\beta$ -приближением ТКВ. Вычисляя

при заданных значениях аргумента  $(\rho u)_*$  согласно (4) выражения  $A(\rho u)_*^\beta = A_*$  и  $B(\rho u)_*^\beta = B_*$ , получим

$$\frac{A}{B} = \frac{A_*}{B_*} = \frac{\beta + 1}{\beta},$$

откуда

$$\beta = \frac{1}{\left(\frac{A_*}{B_*} - 1\right)}.$$

Принимая в качестве заданного значения аргумента для воздуха

$$(\rho u)_* = 79,131 \left( \frac{\Delta p}{p_1} = 0,25 \right),$$

получим  $\beta \approx 2,03$ , т. е. с высокой точностью можно положить  $\beta = 2$ , и тогда  $\beta$ -приближение формально будет совпадать со вторым приближением ТКВ. Однако коэффициенты при вторых членах разложения функций в ряды не совпадают с их вторыми производными по аргументу  $(\rho u)$ .

Коэффициенты  $A$  или  $B$  можно рассчитать, используя выражения (4), с обязательным привлечением связи

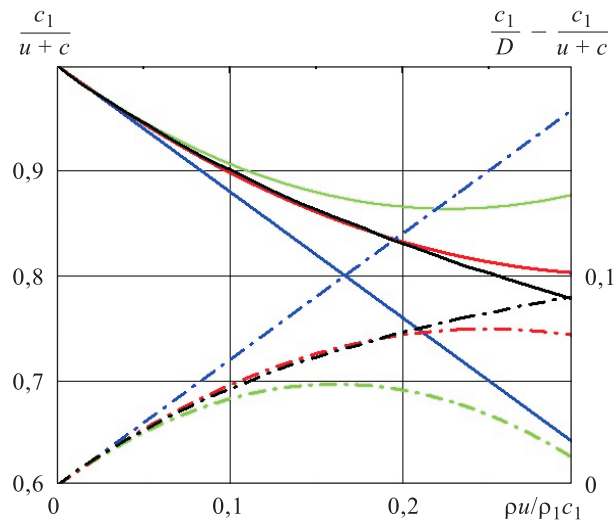
$$A = \frac{\beta + 1}{\beta} B,$$

при этом в обоих случаях они будут различными. Однако это различие составляет доли процента, поэтому возьмем их среднее значение и окончательно получим:

$$A = 1,80761 \frac{1}{\rho_1^2 c_1^3}; \quad B = 1,20507 \frac{1}{\rho_1^2 c_1^3}.$$

Для сравнения на рисунке представлены графики зависимостей функций  $\left(\frac{c_1}{u+c}\right)$  и  $\left(\frac{c_1}{D} - \frac{c_1}{u+c}\right)$  от аргумента  $\frac{\rho u}{\rho_1 c_1}$ , где сплошные линии относятся к первой функции, а штрихпунктирные — ко второй. Черный цвет кривых соответствует зависимостям, полученным из соотношений динамической совместности на фронте УВ, синий — первому приближению, зеленый — второму приближению, красный —  $\beta$ -приближению ТКВ. Видно, что  $\beta$ -приближение обеспечивает

существенно меньшие погрешности по отношению к истинному значению функций (сравним соответствующие сплошные и штрихпунктирные кривые черного и красного цвета).



Результаты различных приближений для функций  $\left(\frac{c_1}{u+c}\right)$  и  $\left(\frac{c_1}{D} - \frac{c_1}{u+c}\right)$   
в зависимости от аргумента  $\frac{\rho u}{\rho_1 c_1}$

**Заключение.** Проведенные численные расчеты распространения плоской УВ треугольного профиля в воздухе показывают, что  $\beta$ -приближение ТКВ с погрешностью в доли процента применимо до избыточного давления  $\left(\frac{\Delta p}{p_1}\right) = 0,3$ , а с погрешностью в несколько процентов — до  $\left(\frac{\Delta p}{p_1}\right) = 0,4$ . При этом все соотношения, полученные в [10] для второго приближения, остаются справедливыми.

Таким образом, полученное  $\beta$ -приближение приводит к дальнейшему расширению диапазона применимости ТКВ и может быть использовано для оценки нагрузок на объекты при большом удалении от места взрыва.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ландау Л.Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. *ПММ*, 1945, т. 9, № 4, с. 286–292.
- [2] Христианович С.А. Ударная волна на значительном расстоянии от места взрыва. *ПММ*, 1956, т. 20, № 5, с. 599–605.

- [3] Коротков П.Ф. Об ударных волнах на значительном расстоянии от места взрыва. *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1958, № 3, с. 165–168.
- [4] Гриб А.А., Рыжков О.С., Христианович С.А. Теория коротких волн. *ПМТФ*, 1960, № 1, с. 37–46.
- [5] Замышляев Б.В., Яковлев Ю.С. *Динамические нагрузки при подводном взрыве*. Ленинград, Судостроение, 1967, 486 с.
- [6] Коробейников В.П., Христофоров Б.Д. Подводный взрыв. В кн.: *Итоги науки и техники. Сер. Гидромеханика*. Т. 9. Москва, Гос. ком. Совета Министров СССР по науке и технике, АН СССР, ВИНТИ, 1976, с. 15–21.
- [7] Яковлев Ю.С. *Гидродинамика взрыва*. Ленинград, Судпромгиз, 1961, 361 с.
- [8] Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики*. Москва, Наука, 1989, 368 с.
- [9] Охитин В.Н., Меньшаков С.С. О защитных свойствах слоя горячего воздуха. *ПМТФ*, 2002, т. 43, № 4, с. 87–97.
- [10] Охитин В.Н. Второе приближение теории коротких волн. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2005, № 1, с. 56–66.

Статья поступила в редакцию 09.11.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Охитин В.Н. Дальнейшее расширение диапазона применимости теории коротких волн. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2022, вып. 3.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-3-2158>

**Охитин Владимир Николаевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Высокоточные летательные аппараты» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: газодинамика, механика сплошных сред, физика горения и взрыва.  
e-mail [okhitin@bmstu.ru](mailto:okhitin@bmstu.ru)

## Further extending the short wave theory applicability range

© V.N. Okhitin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The short wave theory was used to obtain the second approximation, called the  $\beta$ -approximation, for the parameters of one-dimensional shock waves. In this approximation, at the higher-order terms of the expansion of functions in power series, the coefficients do not coincide with the second derivatives of the functions in their argument, but provide significantly the best match with the true values of the functions. Comparison of calculations based on the obtained solution with the results of numerical calculations for a flat shock wave with a triangular profile in air shows that this approximation, when calculating the shock wave parameters, including the duration of the compression phase, allows extending the short wave theory applicability range with an error of a fraction of a percent to an overpressure at the front 0.3, and within a few percent — up to 0.4 of the initial pressure in the atmosphere.*

**Keywords:** short wave theory, expansion in series, overpressure, compression phase duration

### REFERENCES

- [1] Landau L.D. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1945, vol. 9, no. 4, pp. 286–292.
- [2] Khristianovich S.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1956, vol. 20, no. 5, pp. 599–605.
- [3] Korotkov P.F. *Izv. AN SSSR. Otd. tekhn. nauk (Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR)*, 1958, no. 3, pp. 165–168.
- [4] Grib. A.A., Ryzhkov O.S., Khristianovich S.A. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1960, no. 1, pp. 37–46.
- [5] Zamyshlyayev B.V., Yakovlev Yu.S. *Dinamicheskie nagruzki pri podvodnom vzryve* [Dynamic loads during underwater explosion]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1967, 486 p.
- [6] Korobeynikov V.P., Khristoforov B.D. Podvodny vzryv [Underwater explosion]. In: *Itogi nauki i tekhniki, ser. Gidromekhanika* [Results of science and technology, ser. Hydromechanics]. Vol. 9. Moscow, State. Com. USSR Council of Ministers for Science and Technology, USSR Academy of Sciences, VINIT, 1976, pp. 15–21.
- [7] Yakovlev Yu.S. *Gidrodinamika vzryva* [Explosion hydrodynamics]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1961, 361 p.
- [8] Ovsyannikov L.V. *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki* [Lectures on the fundamentals of gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 368 p.
- [9] Okhitin V.N., Menshakov S.S. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 87–97.
- [10] Okhitin V.N. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennyye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2005, no. 1, pp. 56–66.

**Okhitin V.N.** (b. 1943) graduated from Bauman Moscow State Technical School in 1966, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of High-Precision Airborne Devices, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: gas dynamics, continuum mechanics, physics of combustion and explosion. e-mail: okhitin@bmstu.ru