

**Сквозная оптимизация траекторий выведения  
полезного груза на геостационарную орбиту  
с применением энергетических возможностей  
разгонного блока и собственной  
двигательной установки космического аппарата**

© Е.В. Кирилук<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>НИЦ (г. Королёв) ЦНИИ ВКС Минобороны РФ,  
Московская область, г. Королёв, 141092, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Рассмотрен подход к проведению сквозной численной оптимизации траектории перелета многоступенчатого орбитального блока на основе принципа максимума. Результаты практического применения данного подхода представлены на частном примере некомпланарного перелета между низкой опорной и геостационарной орбитами орбитального блока, включающего разгонный блок «Бриз-М» и космический аппарат, спроектированный на базе спутниковой платформы SS/L 1300. Получены четыре семейства экстремалей задачи, соответствующие «прямому» выведению и выведению «с забросом» космического аппарата за высоту геостационарной орбиты (биэллиптические траектории) с двумя и тремя перигейными активными участками работы двигательной установки разгонного блока. Приведено описание исследования влияния суммарной продолжительности некомпланарного перелета с низкой опорной орбиты на геостационарную на параметры оптимальных траекторий, в том числе на характеристики орбиты сопряжения участков работы двигательной установки разгонного блока и собственной двигательной установки космического аппарата.*

**Ключевые слова:** разгонный блок, оптимальная траектория, сквозная оптимизация, принцип максимума, многоступенчатое средство выведения, биэллиптический перелет, геостационарная орбита, многоступенчатый орбитальный блок, спутниковая платформа, дополнительный топливный бак

**Введение.** Массы полезных грузов (ПГ), выводимых на геостационарную орбиту (ГСО), постоянно растут в связи с увеличением массы бортового специализированного комплекса космических аппаратов (КА), предназначенного для решения различных задач военного, научного, социально-экономического назначения, а также увеличения сроков активного существования КА, приводящего к размещению систем резервирования различного уровня.

При этом требования к увеличению массы ПГ опережают рост энергетических возможностей существующих и вновь разрабатываемых средств выведения (СВ). В связи с обозначенными тенденциями прямое выведение КА с помощью совокупности ракеты-носителя (РН) и разгонного блока (РБ) на ГСО становится затруднительным для существующего парка СВ.

В настоящее время практически нет зарубежных космических аппаратов, доставляемых на ГСО напрямую. Наиболее распространенным является комбинированный способ выведения с использованием энергии не только последней ступени РН или РБ, но и собственных химических ракетных двигателей (ХРД) КА, входящих в состав спутниковых платформ, на базе которых разрабатываются КА. Таким образом, доставка космических аппаратов на целевую орбиту осуществляется орбитальным блоком (ОБ), состоящим из совокупности РБ и КА с собственной двигательной установкой, по схеме, предполагающей выведение ОБ на переходную орбиту с последующим довыведением на целевую. При проектировании подобных траекторий встает задача баллистического обоснования параметров орбиты сопряжения участков работы РБ и собственной двигательной установки КА с учетом массово-энергетических характеристик РБ и КА, а также накладываемого на время выведения ограничения, обусловленного особенностями состава ПГ и/или ресурсными ограничениями применяемых СВ. Данная задача сводится к задаче так называемой сквозной оптимизации траектории перелета, носящей сложный нелинейный характер и обладающей, с точки зрения применения к ней методов косвенной оптимизации, определенной спецификой: разрывными фазовыми переменными (масса) и разрывными управляющими функциями (энергетические характеристики средства выведения). Частным случаем этой задачи является задача оптимизации траектории выведения КА с применением РБ, в состав которого входит дополнительный топливный бак (ДТБ). В подобном частном случае баллистического обоснования требуются время сброса ДТБ и параметры промежуточной орбиты, формируемой к моменту выработки запаса компонентов топлива ДТБ.

Цель настоящей работы состоит в разработке алгоритма сквозной численной оптимизации траектории перелета многоступенчатого ОБ с низкой опорной орбиты (НОО) на ГСО с применением принципа максимума Л.С. Понтрягина, предусматривающего возможность расчета как «прямых» схем перелета, так и биэллиптических схем. Под «прямой» схемой подразумевается выведение «без заброса» ОБ за пределы радиуса целевой орбиты, биэллиптическая же подразумевает его наличие [1].

Решение задач оптимизации траекторий многоступенчатых средств выведения берет свое начало в работах Д.Е. Охоцимского и Т.М. Энеева [2], И. Зенгер-Бредт [3], В.А. Троицкого [4], В.А. Космодемьянского [5], задействующих методы классического вариационного исчисления.

Применение принципа максимума к задачам оптимального управления многоступенчатыми средствами выведения описывается

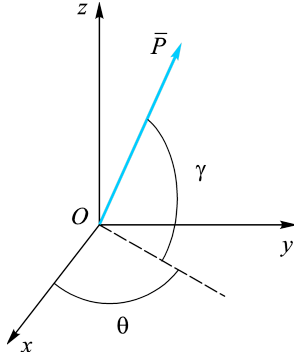
в работах В.В. Величенко [6], В.П. Моисеенко [7], Л.Т. Ащепкова [8] и других.

В работах [9–11] рассматривается оптимизация траекторий перелетов орбитального блока, в состав которого входит РБ со сбрасываемым ДТБ, с НОО на ГСО [9] и геопереходную орбиту (ГПО) [11]. В работе [11] предложен подход к решению задачи путем разбиения оптимальной траектории на последовательность активных и пассивных участков с включением в вектор-функцию невязок краевой задачи принципа максимума условий стыковки данных участков. Такой подход позволяет улучшить сходимость краевой задачи принципа максимума, однако в его рамках структура траектории является фиксированной. Участок довыведения КА с ГПО на ГСО в работе [11] не рассматривается, параметры ГПО оптимизируются исходя из условия минимизации величины импульса довыведения на геостационарную орбиту при заданной полезной массе КА.

В настоящей работе на примере запуска на ГСО спутника-ретранслятора Sirius-FM6, спроектированного на базе космической платформы SS/L 1300, демонстрируются результаты сквозной оптимизации траектории выведения с НОО на целевую орбиту с учетом ограничения на продолжительность выведения КА и проводятся анализ и сравнение возможных оптимальных схем выведения: «прямых» и биеллиптических, содержащих различное количество перигейных активных участков работы двигательной установки РБ.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача оптимального перелета многоступенчатого ОБ в центральном ньютоновском гравитационном поле Земли между некомпланарными круговыми орбитами. Аэродинамические силы, а также гравитационное влияние Солнца и Луны не учитываются. Движение центра масс ОБ описывается в абсолютной геоцентрической экваториальной системе координат (АГЭСК) Охуз системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{V}_x = \frac{\beta w}{m} \cos \theta \cos \gamma - \mu \frac{x}{r^3} \equiv a_{V_x}; \\ \dot{V}_y = \frac{\beta w}{m} \sin \theta \cos \gamma - \mu \frac{y}{r^3} \equiv a_{V_y}; \\ \dot{V}_z = \frac{\beta w}{m} \sin \gamma - \mu \frac{z}{r^3} \equiv a_{V_z}; \\ \dot{x} = V_x; \\ \dot{y} = V_y; \\ \dot{z} = V_z; \\ \dot{m} = -\beta, \end{cases} \quad (1)$$



**Рис. 1.** Ориентация вектора тяги в абсолютной геоцентрической экваториальной системе координат

где  $x, y, z$  — координаты центра масс ОБ;  $V_x, V_y, V_z$  — проекции вектора скорости ОБ на соответствующие оси АГЭСК;  $a_{V_x}, a_{V_y}, a_{V_z}$  — проекции вектора ускорения на соответствующие оси АГЭСК;  $\mu = 3,986005 \text{ м}^3/\text{с}^2$  — гравитационный параметр Земли;  $m = M/M_0$  — нормированная масса ОБ ( $M$  — масса, кг);  $w$  — скорость истечения;  $\beta$  — нормированный массовый секундный расход топлива, кг/с;  $\theta, \gamma$  — углы ориентации вектора тяги (рис. 1);  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  — модуль радиуса-вектора.

Массы рабочих запасов компонентов топлива ступеней  $m_{\text{рзт}i}$ , конечные массы ступеней  $m_{\text{к}i}$ , скорости истечения  $w_i$  и номинальные секундные расходы двигательных установок  $\beta_{i\text{max}}$  ступеней ОБ являются заданными. Принимается допущение, что сброс отработавших ступеней ОБ производится мгновенно, процессы запуска и останова двигательных установок ступеней также не учитываются.

Множество допустимых управлений задается условиями:

$$\theta \in [0, 2\pi]; \quad \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \quad \beta_i \in [0, \beta_{i\text{max}}]. \quad (2)$$

Граничные условия на левом ( $t = t_0$ ) и правом ( $t = T$ ) концах траектории имеют соответственно следующий вид:

$$|\bar{r}(t_0)| = R_3 + h, \quad |\bar{V}(t_0)| = \sqrt{\frac{\mu}{R_3 + h}}, \quad (\bar{r}(t_0), \bar{V}(t_0)) = 0, \quad i(t_0) = i_0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} |\bar{r}(T)| = R_{\text{ГСО}}, \quad |\bar{V}(T)| = \sqrt{\frac{\mu}{R_{\text{ГСО}}}}, \quad (\bar{r}(T), \bar{V}(T)) = 0, \\ z(T) = 0, \quad V_z(T) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $R_3$  — радиус Земли;  $T$  — продолжительность перелета;  $R_{\text{ГСО}}$  — радиус ГСО;  $i$  — наклонение орбиты.

Минимизируется функционал комбинированного типа

$$I = T - km(T), \quad (5)$$

где  $k$  [с] — весовой коэффициент, регулирующий компромисс между затратами массы топлива на выведение ОБ и затратами на сокращение

времени полета;  $m$  — нормированная масса орбитального блока на целевой орбите  $m(T)$  [12, 13].

Функционал (5) эквивалентен функционалу

$$I = -m(T) \quad (6)$$

в случае наличия ограничения на время перелета  $T$ , соответствующего заданному значению весового коэффициента  $k$  в функционале (5).

**Необходимые условия оптимальности.** Задачей оптимального управления в форме Понтрягина называют задачу, вид которой приведен в [14]. Решение задачи оптимального управления на основе принципа максимума сводится к решению краевой задачи. Математическая формализация с точки зрения применения принципа максимума приведена далее.

Функция Понтрягина для системы (1) имеет вид

$$H = \psi_{V_x} a_{V_x} + \psi_{V_y} a_{V_y} + \psi_{V_z} a_{V_z} + \psi_x V_x + \psi_y V_y + \psi_z V_z - \psi_m \beta; \quad (7)$$

уравнения Эйлера для сопряженных переменных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}_x = \frac{\mu}{r^5} \left[ (r^2 - 3x^2) \psi_{V_x} - 3x(y\psi_{V_y} + z\psi_{V_z}) \right]; \\ \dot{\psi}_y = \frac{\mu}{r^5} \left[ (r^2 - 3y^2) \psi_{V_y} - 3y(x\psi_{V_x} + z\psi_{V_z}) \right]; \\ \dot{\psi}_z = \frac{\mu}{r^5} \left[ (r^2 - 3z^2) \psi_{V_z} - 3z(x\psi_{V_x} + y\psi_{V_y}) \right]; \\ \dot{\psi}_{V_x} = -\psi_x; \\ \dot{\psi}_{V_y} = -\psi_y; \\ \dot{\psi}_{V_z} = -\psi_z; \\ \dot{\psi}_m = \frac{\beta w}{m^2} \left[ \psi_{V_x} \cos \theta \cos \gamma + \psi_{V_y} \sin \theta \cos \gamma + \psi_{V_z} \sin \gamma \right]. \end{array} \right. \quad (8)$$

Значимое условие трансверсальности в случае применения функционала (5)

$$\psi_m(T) = \lambda_0 k; \quad (9)$$

условие стационарности по времени  $T$

$$H(T) = \lambda_0.$$

Выделим из функции Понтрягина (7) функцию  $H_1$ , зависящую от управлений:

$$H_1 = \frac{P}{m} \Psi_V - \Psi_m \beta = \frac{P}{m} \left( \Psi_V - \frac{m \Psi_m}{w} \right) = \frac{P}{m} \rho;$$

$$\Psi_V \equiv \Psi_{V_x} \cos \theta \cos \gamma + \Psi_{V_y} \sin \theta \cos \gamma + \Psi_{V_z} \sin \gamma; \quad (10)$$

$$\rho = \Psi_V - \frac{m \Psi_m}{w}. \quad (11)$$

Функция переключения  $\rho$  (11) определяет оптимальные моменты включения и выключения двигательной установки. Для достижения минимума функционала (5) (для функционала (6) — аналогично), согласно необходимым условиям оптимальности, управления должны иметь следующий вид:

$$\beta = \begin{cases} \beta_{\max}, & \rho > 0, \\ 0, & \rho < 0, \\ [0, \beta_{\max}], & \rho = 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\cos \theta \cos \gamma = \frac{\Psi_{V_x}}{\Psi_V}, \quad \sin \theta \cos \gamma = \frac{\Psi_{V_y}}{\Psi_V}, \quad \sin \gamma = \frac{\Psi_{V_z}}{\Psi_V}, \quad (13)$$

где  $\Psi_V = \sqrt{\Psi_{V_x}^2 + \Psi_{V_y}^2 + \Psi_{V_z}^2}$ .

На точки сопряжения участков работы ступеней ОБ накладываются дополнительные условия оптимальности вида

$$\begin{aligned} \Psi_m^+(\tau_i) = & \Psi_m^-(\tau_i) + \Psi_m^-(\tau_i) \left( \frac{\beta^-(\tau_i)}{\beta^+(\tau_i)} - 1 \right) + \\ & + \frac{\Psi_V^-(\tau_i)}{\beta^+(\tau_i)} \left( \frac{n_0^+(\tau_i) g_c}{m^+(\tau_i)} - \frac{n_0^-(\tau_i) g_c}{m^-(\tau_i)} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

отвечающие разрыву переменной, сопряженной массе ОБ.

Здесь  $\tau_i$  — момент времени, соответствующий точке разделения  $i$ -й и  $(i + 1)$ -й ступеней ОБ (точке разрыва); верхним индексам «+» соответствуют значения величин в момент  $(\tau_i + 0)$ , т. е. справа от точки разделения, индексам «-» — в момент  $(\tau_i - 0)$ , т. е. слева от точки разделения;  $n_0$  — начальная тяговооруженность ОБ (нормируется относительно  $M_0$  на опорной орбите для всех ступеней);  $g_c = 9,80665 \text{ м/с}^2$  — стандартное ускорение свободного падения.

Точки разрыва  $\tau_i$  определяются достижением условий

$$m(\tau_i) = m_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где  $N$  — количество ступеней ОБ.

**Краевая задача принципа максимума.** Сформулируем краевую задачу, полученную по итогу записи необходимых условий оптимальности.

Воспользуемся свойством однородности и примем, что в начальный момент времени функция  $\psi_V(t_0) = 1$  (9). Тогда из условий (13) следует [12]:

$$\begin{aligned}\psi_{V_x}(t_0) &= \cos \theta(t_0) \cos \gamma(t_0); \\ \psi_{V_y}(t_0) &= \sin \theta(t_0) \cos \gamma(t_0); \\ \psi_{V_z}(t_0) &= \sin \gamma(t_0).\end{aligned}\tag{15}$$

Система (1), (8) имеет векторный первый интеграл [12]

$$\bar{K} = \bar{r} \times \bar{\psi}_r + \bar{V} \times \bar{\psi}_V,\tag{16}$$

где  $\bar{\psi}_r(\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ ,  $\bar{\psi}_V(\psi_{V_x}, \psi_{V_y}, \psi_{V_z})$  — векторы, сопряженные радиусу-вектору и вектору скорости соответственно;  $\bar{K}(K_1, K_2, K_3)$  — вектор констант.

Значение  $\psi_x(t_0)$  при заданных значениях  $x(t_0)$ ,  $y(t_0)$ ,  $V_x(t_0)$ ,  $V_y(t_0)$ ,  $\psi_y(t_0)$ ,  $\psi_{V_x}(t_0)$ ,  $\psi_{V_y}(t_0)$  определяется из проекции первого векторного интеграла (16) на ось  $Oz$  АГЭСК.

В качестве параметра останова численного интегрирования траекторий при рассмотрении функционала (5) может использоваться значение переменной, сопряженной массе ОБ, в конечный момент времени (9). При рассмотрении функционала (6) заданное время перелета —  $T$ .

В итоге приходим к краевой задаче размерности (5), для решения которой необходимо определить значения  $\theta(t_0)$ ,  $\gamma(t_0)$ ,  $\psi_y(t_0)$ ,  $\psi_z(t_0)$ ,  $\psi_m(t_0)$ , обеспечивающие удовлетворение условий (4).

**Алгоритм решения задачи сквозной оптимизации.** В случае решения задачи оптимального некомпланарного перелета с низкой опорной орбиты на ГСО получаемая схема перелета, в зависимости от технических ограничений, накладываемых на его продолжительность, может относиться как к классу «прямых» схем, так и к классу биэллиптических схем. Приводимый далее алгоритм получения оптимальной траектории, за исключением последнего шага (пункт 3), идентичен для обоих классов схем выведения.

Конкретизируем алгоритм для следующего расчетного случая: многоступенчатый ОБ представляет собой совокупность РБ, имеющего в своем составе ДТБ, и КА с собственной двигательной установкой, в состав которой входит маршевый ХРД с тягой, пониженной

по сравнению с тягой маршевого ХРД РБ. Число условных «ступеней» ОБ  $N = 3$ .

1. Краевая задача принципа максимума решается для схемы прямого перелета с применением только рассматриваемого РБ при значении весового коэффициента  $k \geq 10^8$  в функционале (5). Ограничение на истинную заправку компонентами топлива РБ на данном этапе игнорируется, т. е. допустим перерасход топлива, что не является принципиальным на промежуточной стадии решения задачи.

2. Производится последовательный переход к задаче с применением многоступенчатого ОБ. В качестве точек разрыва  $\tau_1, \tau_2$  на траектории устанавливаются моменты полной выработки компонентов топлива центрального и дополнительного топливных баков РБ. Первоначально устанавливается, что массово-энергетические характеристики (МЭХ) ОБ до и после точек разрыва сохраняют свои значения. Последовательным продолжением по параметрам [15, 16]  $n_0^+(\tau_i)$ ,  $\beta^+(\tau_i)$ ,  $m^+(\tau_i)$  МЭХ ОБ после  $i$ -й точки разрыва приводятся в соответствие МЭХ  $(i + 1)$ -й ступени ОБ. Операция выполняется последовательно для каждой из точек  $\tau_i$ .

По итогам выполнения п. 2 возможно получение схемы «прямого» перелета или биэллиптической схемы, что зависит от соотношения МЭХ ступеней ОБ и выбранного значения коэффициента  $k$  в функционале (5). Если получена биэллиптическая схема, в то время как требования к продолжительности полета соответствуют «прямой» схеме, то осуществляется продолжение по параметру  $k$  в сторону его уменьшения или же напрямую продолжение по параметру  $T$ , также в сторону уменьшения.

Как показали результаты обширных численных расчетов, при коэффициенте  $k \approx 10^8$  и тяговооруженности КА  $n_{03} = n_{0КА} \lesssim 0,0045$  ед., выступающего в качестве условной третьей «ступени» ОБ,  $n_0^+(\tau) \lesssim 0,0045$  переход к биэллиптической схеме перелета, как правило, осуществляется «автоматически» в процессе реализации продолжения по параметру  $n_0^+(\tau_2)$ , в силу слабой энергетики данной «ступени».

В случае если  $n_{0КА}$  выше указанной величины, может потребоваться осуществление дополнительных операций для получения траектории «с забросом»:

За. Если  $n_{0КА} \in (0,0045; 0,02]$  ед., возможно произвести переход к биэллиптической схеме перелета путем замены параметра останова численного интегрирования  $\psi_m(T)$  (9) на  $T$  и осуществления продолжения по этому параметру.

Зб. Если  $n_{0КА} > 0,02$  ед., переход к биэллиптической схеме может быть произведен в три этапа:



3б.1) осуществляется фиктивное снижение  $n_{0КА}$  путем продолжения по параметру  $n_0^+(\tau_2)$  до величины, при которой происходит «автоматический» переход к биэллиптической схеме перелета при решении краевой задачи с параметром останова  $\psi_m(T)$ ;

3б.2) краевая задача решается с параметром останова  $T$  и производится продолжение по  $T$  в сторону увеличения для возрастания продолжительности заключительного (перигейного) участка биэллиптической схемы;

3б.3) осуществляются возврат к параметру останова  $\psi_m(T)$  (9) и продолжение по параметру  $n_0^+(\tau_2)$  в сторону его увеличения вплоть до достижения исходной величины  $n_{0КА}$ .

В случае если при выполнении п. 3б.3 биэллиптическая схема вырождается в схему «прямого» выведения, необходимо осуществить возврат к п. 3б.2 и дополнительно увеличить продолжительность заключительного перигейного участка биэллиптической схемы путем увеличения параметра  $T$ .

Описанный в п. 3а, 3б подход не претендует на универсальность и во многом является эмпирическим, так как базируется на результатах обширных численных расчетов. Однако следует отметить, что прием, использующий фиктивное снижение тяговооруженности верхней ступени ОБ, описанный в п. 3б, в случае дальнейшего обобщения может представить путь для решения проблемы получения траекторий «с забросом» для способов выведения с использованием только РБ сравнительно большой тяговооруженности (по сравнению с тягой собственных ХРД КА).

**Результаты расчетов.** В качестве исходных данных для проведения численных расчетов принимались характеристики запуска коммерческого спутника-ретранслятора Sirius-FM6 на ГСО, состоявшегося в 2013 г. [17]:

Высота круговой НОО* $h_0$ , км .....	180,0
Наклонение круговой НОО $i_0$ , град .....	51,6
Стартовая тяговооруженность ОБ на НОО $n_{0РБ}$ , ед. ....	0,0844
Удельный импульс тяги ДУ РБ $I_{удРБ}$ , с .....	330,5
Нормированная масса рабочего запаса топлива ДУ РБ $m_T$ .....	0,637
Нормированная масса рабочего запаса топлива ДУ РБ, размещенных в ДТБ, $m$ .....	0,450
Нормированная конечная масса ДТБ $m_{кДТБ}$ .....	0,052
Нормированная конечная масса РБ $m_{кРБ}$ .....	0,060
Нормированная стартовая масса КА $m_{0ДТБ}$ .....	0,251
Стартовая тяговооруженность спутниковой платформы** $n_{0КА}$ , ед. ....	$2,0778 \cdot 10^{-3}$
Удельный импульс тяги маршевой ДУ спутниковой платформы $I_{удКА}$ , с .....	312,0

\* Отсчитывается относительно сферы радиусом 6371 км

\*\*Нормируется относительно массы ОБ на НОО

При выведении КА с НОО на ГСО был задействован разгонный блок «Бриз-М» и далее применен ХРД R-4D пониженной (по сравнению с двигателем РБ) тяги, входящий в состав спутниковой платформы SS/L 1300 [18], на базе которой спроектирован КА. Разгонный блок «Бриз-М» осуществлял выведение КА на геопереходную орбиту с параметрами  $h_{\text{пГПО}} = 4133$  км,  $h_{\text{аГПО}} = 35792$  км,  $i_{\text{ГПО}} = 23,18^\circ$  [17], после чего проводилось отделение КА от РБ. Дальнейший поворот плоскости орбиты и поднятие высоты перигея проводились за счет собственных энергетических возможностей КА. Участок работы РБ включал два перигейных активных участка (АУ) и один апогейный АУ, причем второй перигейный АУ реализовывался фактически посредством двух АУ, разделенных сбросом ДТБ.

При численном исследовании оптимальных траекторий в настоящей работе в качестве начального приближения использовались перенормированные результаты решения задачи выведения на геостационарную орбиту, представленные в работе [12]. Переход к структурам схем выведения, содержащим два и три перигейных АУ, от стандартной схемы с одним перигейным АУ проводился путем интегрирования в обратном времени в сочетании с методом продолжения решения краевой задачи по параметру, в соответствии с подходом, изложенным в [19].

Для удобства структура рассматриваемой схемы выведения далее будет обозначаться следующим образом: «3 П РБ — А РБ — А КА — П КА», где «А» и «П» указывают на перигейный или апогейный АУ соответственно, цифра перед данными буквами — на количество АУ данного типа (единица при обозначении опускается), обозначения «РБ» и «КА» — на отработку АУ соответствующей ДУ. Под орбитой сопряжения далее понимается орбита, получаемая в момент отделения РБ от КА.

По итогам решения поставленной задачи были рассмотрены экстремали четырех типов — четырех структур: «2 П РБ — А РБ — А КА — П КА», «3 П РБ — А РБ — А КА — П КА», «2 П РБ — А РБ — А КА», «3 П РБ — А РБ — А КА», среди которых первые две отвечают биэллиптическим траекториям. Покажем, как ограничение на полное время выведения  $T$  влияет на параметры оптимальной траектории на примере схемы «2 П РБ — А РБ — А КА — П КА».

Оптимальные параметры орбиты сопряжения (эксцентриситет  $e_{\text{OC}}$ , радиусы апогея  $R_{\text{а OC}}$  и перигея  $R_{\text{п OC}}$  и наклонение  $i_{\text{OC}}$ ) и достигаемая максимальная масса КА на ГСО для рассматриваемой схемы при различных значениях  $T$  представлены в табл. 1. Поскольку при решении задач баллистического проектирования одним из ограничений для выбора траекторий является время работы РБ, в табл. 1 приводится также продолжительность участка функционирования РБ  $T_{\text{РБ}}$ . Активный

участок РН и маневр доразгона с орбиты выведения на НОО выходят за пределы данного исследования, поэтому время  $T$  и  $T_{РБ}$ , приведенные в табл. 1, отсчитываются от условного момента старта с круговой НОО, за который принимается точка с аргументом широты  $u_0 = -45^\circ$ .

Таблица 1

**Параметры орбиты сопряжения и максимальная выводимая масса ПГ при различных продолжительностях выведения на ГСО для схемы «2 ПРБ — АРБ — АКА — ПКА»**

$T$ , ч	$T_{РБ}$ , ч	$m(T)$	$e_{ОС}$	$R_a$ ОС, км	$R_n$ ОС, км	$i_{ОС}$ , град
13,7	6,61	0,14764	0,5982	42437,3	10669,3	24,365
15,0	6,78	0,14823	0,6079	43853,5	10693,2	23,926
18,0	7,44	0,15152	0,6250	47390,4	10935,0	23,280
20,0	8,01	0,15393	0,6353	50042,7	11160,8	23,068
24,0	9,37	0,15775	0,6587	56340,5	11593,9	22,843
26,0	10,15	0,15909	0,6717	59975,9	11778,0	22,744
28,0	10,97	0,16014	0,6848	63826,5	11940,9	22,640
30,0	11,84	0,16096	0,6974	67799,0	12086,4	22,528
32,0	12,72	0,16163	0,7092	71824,5	12218,1	22,410
34,0	13,63	0,16218	0,7202	75859,2	12339,1	22,288
36,0	14,54	0,16264	0,7303	79876,7	12451,6	22,162
38,0	15,50	0,16303	0,7395	83862,2	12557,6	22,033
40,0	16,38	0,16337	0,7480	87807,0	12658,4	21,902

Масса КА на ГСО, получаемая при  $T = 13,7$  ч, практически не отличается от массы, выводимой при применении «прямой» схемы, хотя данная траектория уже качественно отличается от нее по структуре: имеет завершающий перигейный АУ. По результатам, представленным в табл. 1, можно заключить, что увеличение продолжительности выведения в 2,9 раза приводит к увеличению массы КА на ГСО на 10,6 %, что при начальной массе ОБ на НОО, равной 24 047,6 кг соответствует 378,3 кг.

Характеристические скорости  $\Delta V_{хар}$ , затрачиваемые на АУ для рассматриваемой схемы выведения при различных значениях  $T$ , представлены в табл. 2.

Чем больше длительность выведения, тем выше апогей формируемой орбиты сопряжения и тем меньше ее наклонение. В соответствии с этим по мере увеличения продолжительности выведения затраты энергетике РБ перераспределяются между перигейными и апогейным активными участками в сторону увеличения суммарных затрат на перигейных АУ. Большой высоте «заброса» соответствуют меньшие затраты топлива на уменьшение наклонения, т. е. меньшие

потери на управление, о чем свидетельствуют характеристические скорости, приведенные в табл. 2 (см. столбцы 4 и 5 соответственно), и большие затраты на завершающий перигейный АУ, обрабатываемый ХРД КА и являющийся тормозным (столбец 6 в табл. 2). Однако суммарное сокращение затрат топлива на поворот плоскости орбиты превышает увеличение затрат на осуществление тормозного АУ, а значит, повышение высоты «заброса» является с энергетической точки зрения выгодным.

Таблица 2

**Характеристические скорости, затрачиваемые на АУ,  
для схемы «2 П РБ — А РБ — А КА — П КА»**

T, ч	$\Delta V_{\text{хар}}, \text{ м/с}$						$\Sigma$
	АУ РБ			АУ КА			
	1	2	3	4	5	6	
	П1	П2.1*	П2.2*	А	А	П	
13,7	1090,3	849,5	619,7	906,8	1621,3	4,0	5091,6
15,0	1029,3	910,5	644,2	882,3	1551,8	61,4	5079,5
18,0	1002,6	937,2	697,4	829,1	1417,1	128,9	5012,3
20,0	1019,1	920,7	731,2	795,4	1332,1	165,5	4963,9
24,0	1073,0	866,8	798,6	728,0	1179,9	242,6	4888,9
26,0	1099,1	840,6	831,6	694,9	1113,5	283,2	4863,0
28,0	1121,6	818,1	863,0	663,6	1053,4	323,2	4842,9
30,0	1140,4	799,4	892,0	634,6	999,5	361,4	4827,3
32,0	1156,0	783,8	918,4	608,1	951,1	397,2	4814,6
34,0	1169,0	770,8	942,4	584,2	907,5	430,4	4804,3
36,0	1180,0	759,8	964,0	562,5	868,1	461,1	4795,5
38,0	1189,4	750,4	983,6	542,9	832,4	489,4	4788,1
40,0	1197,5	742,3	1001,4	525,1	799,8	515,5	4781,6

\* Второй перигейный АУ условно разбивается на два участка: П2.1 — до сброса ДТБ (до достижения  $\tau_1$ ); П2.2 — после сброса ДТБ (после достижения  $\tau_1$ ).

Аналогичные расчеты были проведены для схемы структуры «3 П РБ — А РБ — А КА — П КА», сравнение различных схем по энергетическим возможностям будет представлено далее на соответствующих графиках.

Для проведения сравнения биэллиптических схем с соответствующими традиционными («прямыми») схемами, имеющими структуры «2 П РБ — А РБ — А КА», «3 П РБ — А РБ — А КА», для последних приведем величины конечных масс КА на ГСО и затрачиваемые характеристические скорости в предельных случаях, когда функция переключения (11) в момент времени  $t = T$  достигает

нулевого значения и имеет отрицательную первую производную. Полученные при таком условии траектории соответствуют максимальным значениям масс, реализуемым для рассматриваемых структур традиционных схем выведения. Указанные величины представлены в табл. 3.

Таблица 3

**Конечные массы КА на ГСО и характеристические скорости, затрачиваемые на АУ, для традиционных схем выведения**

T, ч	$\Delta V_{\text{хар}}, \text{ м/с}$							m(T)
	АУ РБ				АУ КА	Σ		
	1	2	3	4	5			
	П1	П2.1*	П2.2*	А	А			
10,94	1091,0	848,8	618,4	908,2	1625,3	5091,7	0,14764	

T, ч	$\Delta V_{\text{хар}}, \text{ м/с}$							m(T)	
	АУ РБ				АУ КА		Σ		
	1	2	3	4	5	6			
	П1	П2	П3.1*	П3.2*	А	А			
13,64	694,1	814,6	431,1	585,0	941,5	1582,3	5048,6	0,14973	

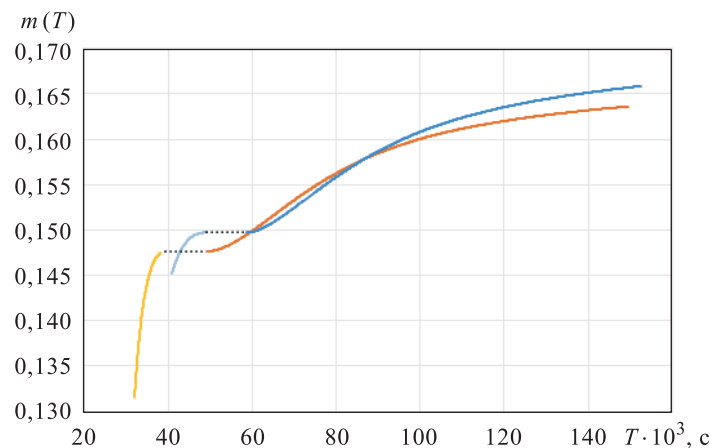
\* Последний перигейный АУ РБ условно разбивается на два участка: 2.1, 3.1 — до сброса ДТБ (до достижения  $\tau_1$ ), 2.2, 3.2 — после сброса ДТБ (после достижения  $\tau_1$ ).

Схема структуры «3 П РБ — А РБ — А КА» в предельном случае позволяет получить конечную массу КА на 50 кг больше, чем схема структуры «2 П РБ — А РБ — А КА», а также в предельном случае, при незначительном увеличении времени выведения — на 2 ч 42 мин, что обусловлено сокращением суммарных потерь на перигейных АУ при большем количестве перигейных участков работы ДУ РБ в схеме выведения и перераспределением за счет этого части энергетических возможностей РБ на апогейный участок, на котором более эффективно уменьшается наклонение переходной орбиты. Кроме того, сокращается активный (апогейный) участок собственной ДУ КА.

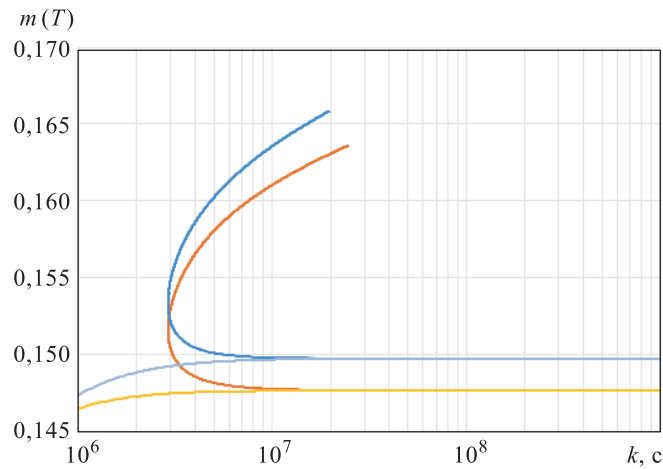
Для схемы «2 П РБ — А РБ — А КА» при  $T = 10,94$  ч, соответствующей схеме, примененной в реальном запуске КА Sirius-FM6, была получена орбита сопряжения с параметрами:  $h_{\text{птпо}} = 4293,6$  км,  $h_{\text{аппо}} = 35\,991,5$  км,  $i_{\text{птпо}} = 24,39^\circ$ . Большая полуось полученной оптимальной орбиты сопряжения близка к реализованной в пуске, однако ее наклонение больше примерно на  $1^\circ$ . Поскольку информация о массе КА на ГСО после обработки АУ ДУ КА и полной продолжительности перелета отсутствует в открытых источниках, сравнить решения по функционалу не представляется возможным.

Результаты расчетов четырех семейств траекторий с различными структурами обобщают графики зависимостей массы КА на ГСО от продолжительности выведения и коэффициента  $k$ , а также продолжительности выведения от коэффициента  $k$ , представленные на рис. 2–4 соответственно. Масштаб по оси абсцисс на рис. 3, 4 — логарифмический. На рис. 2 пунктирными линиями соответствуют участки постоянства нормированной массы КА на ГСО. Так как семейства траекторий выведения с завещающим перигейным участком и без него соответствуют непересекающимся временным интервалам, пунктирные участки отвечают траекториям, завершающимся отрезком пассивного полета по целевой орбите, продолжительность которого равна разности  $T$  и предельного времени для схемы соответствующей структуры (приведены в табл. 3).

Графики зависимости нормированной конечной массы КА на ГСО от продолжительности выведения для структур «2 П РБ — А РБ — А КА — П КА» и «3 П РБ — А РБ — А КА — П КА» пересекаются дважды (см. рис. 2). На малом интервале продолжительностей выведения, при  $T < 59600$  с, схема структуры «3 П РБ — А РБ — А КА — П КА» является более энергетически выгодной, что обусловлено наличием большего количества перигейных участков работы ДУ РБ. В интервале продолжительностей выведения от 59 600 с до 86 350 с схема выведения структуры «2 П РБ — А РБ — А КА — П КА» является более предпочтительной. При равенстве продолжительностей выведения применение схемы структуры «2 П РБ — А РБ — А КА — П КА» на указанном интервале дает не столь значительный выигрыш

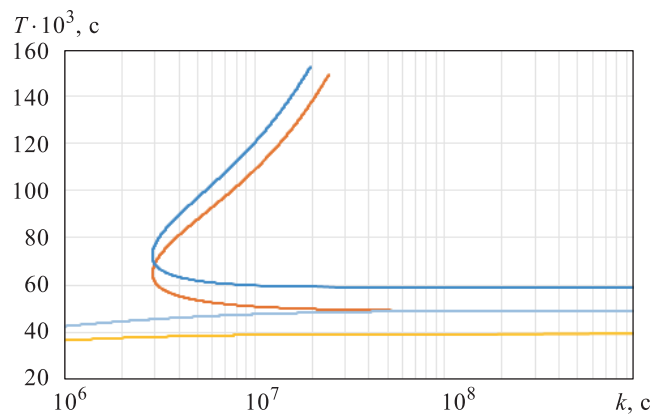


**Рис. 2.** Зависимости нормированной конечной массы КА на ГСО от продолжительности выведения для различных структур траектории выведения:  
 — 2 П РБ — А РБ — А КА — П КА; — 2 П РБ — А РБ — А КА;  
 — 3 П РБ — А РБ — А КА — П КА; — 3 П РБ — А РБ — А КА;  
 ..... —  $m(T) = \text{const}$



**Рис. 3.** Зависимости нормированной конечной массы КА на ГСО от значения коэффициента  $k$  для различных структур траектории выведения:

— 2 П РБ — А РБ — А КА — П КА; — 2 П РБ — А РБ — А КА;  
 — 3 П РБ — А РБ — А КА — П КА; — 3 П РБ — А РБ — А КА;



**Рис. 4.** Зависимости продолжительности выведения КА на ГСО от значения коэффициента  $k$  для различных структур траектории

— 2 П РБ — А РБ — А КА — П КА; — 2 П РБ — А РБ — А КА;  
 — 3 П РБ — А РБ — А КА — П КА; — 3 П РБ — А РБ — А КА;

в конечной массе КА на ГСО — не более 20...25 кг. Однако очевидно, что траекторию с меньшим количеством включений ДУ РБ легче технически реализовать, кроме того, фактический выигрыш по сравнению со схемой, содержащей три перигейных участка работы ДУ РБ, будет несколько больше вследствие меньших затрат на обеспечение запуска и на ориентацию на пассивных участках полета.

Представляют интерес зависимости нормированной конечной массы КА на ГСО и продолжительности выведения от коэффициента  $k$ , входящего в функционал задачи (5). Графики, представленные на рис. 3 и 4, иллюстрируют такую особенность решения рассматри-

ваемой задачи, как неоднозначность значений конечной массы КА на целевой орбите и продолжительности выведения при фиксированном значении коэффициента  $k$ . На представленных графиках видно, что значения конечной массы КА на целевой орбите для структур схем выведения, качественно отличающихся друг от друга наличием завершающего перигейного участка работы ДУ КА, стремятся к одному пределу при  $k \rightarrow \infty$ . При этом продолжительности выведения для различных структур при  $k \rightarrow \infty$  стремятся к разным предельным значениям, различающимся продолжительностью части витка (по причине малости тяги ДУ КА некорректно было бы рассматривать полноценный полувиток) пассивного полета по переходной орбите до отработки заключительного перигейного включения.

Описанная особенность, с одной стороны, обуславливает неудобство выполнения продолжения по параметру  $k$  для получения схемы «с забросом», с другой — позволяет сделать непрерывный переход от традиционной схемы выведения к схеме «с забросом», применяя продолжение по параметру  $T$ . Это представляется возможным, потому что области в пространстве начальных значений сопряженных переменных, отвечающие качественно отличным типам схем, близки. На данной особенности основан эмпирический алгоритм получения схем выведения с «забросом», изложенный выше.

При реализации перехода от схемы выведения структуры «N П РБ — А РБ — А КА» к схеме структуры «N П РБ — А РБ — А КА — П КА» путем продолжения по параметру  $T$ , продолжительность выведения увеличивается сначала вплоть до предельного для данной схемы значения, которому соответствуют нулевое значение функции переключения и отрицательное значение ее первой производной при  $t = T$ . Затем дальнейшему увеличению продолжительности выведения соответствует появление в его схеме завершающего пассивного участка движения по целевой орбите, так как для традиционной структуры «N П РБ — А РБ — А КА» было достигнуто насыщение. Начальные значения сопряженных переменных остаются при этом неизменными вплоть до достижения значения  $T$ , при котором в момент  $t = T$  функция переключения (11) обращается в нуль при положительном значении ее первой производной — данная точка является левой границей области существования схемы выведения структуры «N П РБ — А РБ — А КА — П КА».

**Заключение.** В работе описан подход к проведению сквозной численной оптимизации траекторий полета многоступенчатого ОБ с помощью принципа максимума и продемонстрирован пример результатов его практического применения. Проведено исследование влияния суммарной продолжительности некомпланарного перелета с низкой опорной орбиты на ГСО на параметры оптимальных траекторий,



в том числе на характеристики орбиты сопряжения и распределение затрат характеристической скорости между активными участками.

Получены семейства экстремалей, соответствующие структурам схем перелета «2 ПРБ — АРБ — АКА — ПКА», «3 ПРБ — АРБ — АКА — ПКА» и «2 ПРБ — АРБ — АКА», «3 ПРБ — АРБ — АКА». Таким образом, с помощью принципа максимума получены не только оптимальные траектории «прямого» выведения на ГСО, но и оптимальные траектории биэллиптического типа. Результаты качественно согласуются с известными результатами решения задач прямого и биэллиптического перелетов в импульсной постановке.

Проанализированы особенности применения комбинированного функционала масса–время как для традиционных схем «прямого» выведения, так и для схем выведения «с забросом». Установлена неоднозначность зависимостей конечной массы ОБ на целевой орбите и продолжительности выведения от коэффициента  $k$  комбинированного функционала. Обнаружено свойство стремления начальных значений сопряженных переменных к идентичному пределу для схем «прямого» выведения и схем «с забросом» при  $k \rightarrow \infty$ . На данном свойстве основан разработанный алгоритм регулярного получения траекторий «с забросом».

Анализ и сравнение оптимальных траекторий четырех структур при варьировании продолжительности перелета показывает, что закономерности соотношения времени выведения и конечной массы, проявляемые при дроблении перигейного участка работы РБ, наблюдаемые для «прямых» схем выведения, проявляются и при применении схем выведения «с забросом». Следовательно, при одинаковом времени выведения схема, содержащая меньшее количество перигейных АУ, может отвечать большей массе ОБ на целевой орбите, так как ограничение по времени, не являющееся жестким для схемы с меньшим количеством АУ, является достаточно критичным для схемы с большим количеством АУ ввиду наличия дополнительного витка.

Разнообразие структур оптимальных схем позволяет учесть технические ограничения, накладываемые как на суммарное время выведения, так и на время работы ДУ РБ.

Результаты работы могут быть использованы как при проведении баллистического обоснования применения средств выведения, так и при экспертизе проектных баллистических материалов. Описанный алгоритм сквозной оптимизации траекторий может в дальнейшем представить путь решения проблемы регулярного получения биэллиптических траекторий для способа выведения с низкой опорной орбиты с применением только РБ.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сихарулидзе Ю.Г. *Баллистика и наведение летательных аппаратов*. Москва, Бином, 2011, 352 с.
- [2] Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. *Успехи физических наук*, 1957, т. 63, № 1а, с. 5–32.
- [3] Зенгер-Бредт И. Исследование оптимальных условий вертикального полета ракеты с произвольным числом ступеней в поле силы тяжести. *Вопросы ракетной техники*, 1954, № 5 (23), с. 3–26.
- [4] Троицкий В.А. Об оптимальных режимах движения многоступенчатых ракет. *Космические исследования*, 1967, т. 5, № 2, с. 176–183.
- [5] Космодемьянский В.А. К методике расчета оптимальной программы ступенчатой тяги. *Механика твердого тела*, 1987, № 4, с. 17–22.
- [6] Величенко В.В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями. *Автоматика и телемеханика*, 1966, № 7, с. 20–30.
- [7] Моисеенко В.П. Оптимизация многоступенчатого аппарата. *Труды ЦАГИ*, № 1295. Жуковский, 1971.
- [8] Ащепков Л.Т. *Оптимальное управление разрывными системами*. Новосибирск, Наука. Сиб. отделение, 1987, 226 с.
- [9] Григорьев И.С., Данилина И.А. Оптимизация межорбитальных пространственных траекторий перелета ступенчатых космических аппаратов. *Автоматика и телемеханика*, 2007, № 8, с. 86–105.
- [10] Григорьев И.С., Данилина И.А. Оптимизация траекторий перелетов космических аппаратов с дополнительным топливным баком. I. *Автоматика и телемеханика*, 2017, № 12, с. 131–140.
- [11] Григорьев И.С., Данилина И.А. Оптимизация траекторий перелетов космических аппаратов с дополнительным топливным баком. II. *Автоматика и телемеханика*, 2018, № 2, с. 135–153.
- [12] Григорьев К.Г., Федьина А.В. Оптимальное пространственное выведение космического аппарата на геостационарную орбиту с орбиты искусственного спутника Земли. *Техническая кибернетика*, 1993, № 4, с. 116–126.
- [13] Григорьев К.Г. О маневрах космического аппарата при минимальных затратах массы и ограниченном времени. *Космические исследования*, 1994, т. 32, № 2, с. 45–60.
- [14] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Физматгиз, 1961, 393 с.
- [15] Кузнецов Е.Б. *Некоторые приложения метода продолжения решения по наилучшему параметру*. Москва, Изд-во МАИ, 2013, 160 с.
- [16] Allgower E.L., Georg K. *Introduction of Numerical Continuation Methods*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1990, 388 p.
- [17] *Новости космонавтики*, 2013, т. 23, № 12 (371), с. 24–25.
- [18] Maral G., Bousquet M. *Satellite communications systems. Systems, Techniques and Technologies*. UK, John Wiley & Sons Ltd, 2009, 743 p.
- [19] Кириллюк Е.В., Корянов В.В., Степанов М.Н. Минимизирующие последовательности траекторий перелета космического аппарата с низкой круговой орбиты на высокоэнергетические орбиты различных типов. *Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского*, 2017, № 656, с. 74–78.

Статья поступила в редакцию 22.06.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кирилюк Е.В.: Сквозная оптимизация траекторий выведения полезного груза на геостационарную орбиту с применением энергетических возможностей разгонного блока и собственной двигательной установки космического аппарата. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2022, вып. 2.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-2-2155>

**Кирилюк Елена Владимировна** — младший научный сотрудник НИЦ (г. Королёв) ЦНИИ ВКС Минобороны России, старший преподаватель кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область деятельности и научных интересов: баллистическое обоснование применения средств выведения, оптимизация траекторий движения летательных аппаратов. e-mail: kiriliuk\_e@bmstu.ru

## End-to-end optimization of a payload transfers into the geostationary orbit using the combination of the upper stage energy capabilities and the spacecraft own propulsion system

© E.V. Kiriluk

Central Scientific Research Institute of the Aerospace Forces,  
Ministry of Defence of Russia, Moscow Region, Korolyov town, 141092, Russia  
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article considers an approach for carrying out end-to-end flight trajectory numerical optimization of the multi stage orbital unit based on the maximum principle. The results of the practical application of this approach are presented on the example of a non-coplanar flight of an orbital unit, including the Briz-M upper stage and a spacecraft designed on the basis of the SS/L 1300 satellite platform, from a low reference orbit to a geostationary one. Four families of the problem extremals were obtained, corresponding to the “direct” launch and launch with “throw” of the spacecraft beyond the height of the geostationary orbit (bi-elliptic trajectories) with two and three perigee burns of the upper stage propulsion unit. The effect of the total duration of a non-coplanar flight from a low reference orbit to a geostationary one on the optimal trajectory parameters including the characteristics of the orbit part interfacing the sections where the upper stage propulsion system burns and the spacecraft own propulsion system burns were researched.*

**Keywords:** upper stage, optimal trajectory, end-to-end optimization, maximum principle, multistage launch vehicle, bi-elliptic transfer, geostationary orbit, multistage orbital unit, satellite bus, additional fuel tank

### REFERENCES

- [1] Sikharulidze Yu.G. *Ballistika i navedenie letatelnyh apparatov* [Aircraft ballistics and guidance]. Moscow, Binom Publ., 2011, 352 p.
- [2] Okhotsimsky D.E., Eneev T.M. *Uspekhi fizicheskikh nauk — Advances of Physical Sciences*, 1957, vol. 63, no. 1a, pp. 5–32.
- [3] Sanger-Bredt I. *Voprosy raketnoj tehniki (Rocket technology issues)*, 1954, no. 5(23), pp. 3–26.
- [4] Troitsky V.A. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 1967, vol. 5, no. 2, pp. 176–183.
- [5] Kosmodemyansky V.A. *Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 1987, no. 4, pp. 17–22.
- [6] Velichenko V.V. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 1966, no. 7, pp. 20–30.
- [7] Moiseenko V.P. *Trudy TsAGI (Tsagi Science Journal)*, no. 1295. Zhukovsky, 1971.
- [8] Ashchepkov L.T. *Optimalnoe upravlenie razryvnymi sistemami* [Optimal control of discontinuous systems]. Novosibirsk, Nauka. Sib. Otdelenie Publ., 1987, 226 p.
- [9] Grigoriev I.S., Danilina I.A. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2007, no. 8, pp. 86–105.
- [10] Grigoriev I.S., Danilina I.A. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2017, no. 12, pp. 131–140.

- [11] Grigoryev I.S., Danilina I.A. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2018, no. 2, pp. 135–153.
- [12] Grigoryev K.G., Fedyna A.V. *Tekhnicheskaya kibernetika — Technical cybernetics*, 1993, no. 4, pp. 116–126.
- [13] Grigoryev K.G. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 1994, vol. 32, no. 2, pp. 45–60.
- [14] Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F., *Matematicheskaya teoriya optimalnykh processov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 393 p.
- [15] Kuznetsov E.B. *Nekotorye prilozheniya metoda prodolzheniya resheniya po nailuchshemu parametru* [Some Applications of the Best Parameter Continuation Method]. Moscow, MAI Publ., 2013, 160 p.
- [16] Allgower E.L., Georg K. *Introduction of Numerical Continuation Methods*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 1990, 388 p.
- [17] *Novosti kosmonavтики (News of cosmonautics)*, 2013, vol. 23, no. 12 (371), pp. 24–25.
- [18] Maral G., Bousquet M. *Satellite communications systems. Systems, Techniques and Technologies*. UK, John Wiley & Sons Ltd. Publ., 2009, 743 pp.
- [19] Kiriluk E.V., Koryanov V.V., Stepanov M.N. *Trudy Voenno-kosmicheskoy akademii im. A.F. Mozhayskogo — Proceedings of the Mozhaisky Military Space Academy*, 2017, no. 656, pp. 74–78.

**Kiriluk E.V.**, Assist. Researcher, Central Scientific Research Institute of The Aerospace Forces, Ministry of Defense of Russia; Senior Lecturer, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: kiriliuk\_e@bmstu.ru