УДК 531.1

А. В. Купавцев, А. А. Томчук

АНАЛИТИЧЕСКАЯ КИНЕМАТИКА

Рассмотрены геометрический и кинематический подходы к вычислению кривизны кривой, заданной как параметрическим способом, так и в виде неявного уравнения. Приведен подробный вывод формулы для вычисления радиуса кривизны кривой, описанной обоими типами уравнений. Особое внимание уделено сравнению двух подходов и связи таких наук, как физика, дифференциальная и аналитическая геометрия.

E-mail: tomchuk-a@yandex.ru

Ключевые слова: *кривизна, радиус кривизны, кинематика.*

Подготовка инженеров-магистров как элитных специалистов, способных разрабатывать новые принципы функционирования систем и изделий, предлагать и обосновывать новые физические процессы для проектируемых объектов, производить тончайшее глубокое математическое и физическое моделирование, организовывать сложный эксперимент и на основе современных электронных методов обработки извлекать из него максимум информации, представляет новую педагогическую задачу отечественного образования [1].

Рассматривая подготовку на втором, магистерском, уровне фундаментализации образования — фундаментальном обобщении научных знаний и методов познания, выберем простейший раздел — кинематику. Для конкретного примера обобщения понятия движения в физике остановимся на вычислении радиуса кривизны траектории материальной точки.

В кинематике материальной точки существуют две основные задачи: прямая и обратная. Прямая задача состоит в том, чтобы по заданному уравнению движения точки найти такие характеристики, как скорость, ускорение, радиус кривизны траектории движения. Обратная задача заключается в получении уравнения движения по известной связи скоростей, координат и ускорений, причем эта связь дается, как правило, в виде дифференциального уравнения [2].

В данной работе рассмотрены кинематический способ вычисления радиуса кривизны кривой, при котором необходимы конкретные физические модели движения материальной точки вдоль этой кривой, и геометрический способ, основанный на использовании формул векторной алгебры, для которого физические модели не требуются.

Кинематический подход к вычислению кривизны траектории движения материальной точки. Постановка задачи. Довольно часто возникает необходимость в вычислении радиуса кривизны плоской или пространственной кривой. При традиционном физическом подходе к решению этой задачи используют известные из кинематики формулы для вычисления полного, нормального и тангенциального ускорений, причем абстрактную кривую представляют в этом случае как траекторию движения материальной точки. Приведем общий алгоритм такого подхода.

Пусть движение точки задано координатными уравнениями

$$\begin{cases} x = x\,(t)\,; \\ y = y\,(t)\,; \\ z = z\,(t)\,, \end{cases} \tag{1}$$

где x, y, z — декартовы координаты материальной точки.

Полное ускорение движения точки определяется выражением [2]

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{e}_x \ddot{x}\,(t) + \vec{e}_y \ddot{y}\,(t) + \vec{e}_z \ddot{z}\,(t)\,,$$

модуль полного ускорения

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{x}\,(t))^2 + (\ddot{y}\,(t))^2 + (\ddot{z}\,(t))^2}.$$

Ускорение $\vec{a}$ можно однозначно разложить на нормальную и тангенциальную составляющие [3, 4]:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau;$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\right|^2}{\rho}; \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d\left|\dot{\vec{r}}\right|}{dt},$$

где V — модуль скорости движения материальной точки; ρ — радиус кривизны траектории.

Ввиду ортогональности этих составляющих модуль полного ускорения вычисляют согласно соотношению

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2,$$

откуда

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{\left(\ddot{\vec{r}}\right)^2 - \left(\frac{d\left|\dot{\vec{r}}\right|}{dt}\right)^2}.$$

Окончательно получаем выражение для радиуса кривизны траектории

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{\left(\dot{\vec{r}}\right)^2}{\sqrt{\left(\ddot{\vec{r}}\right)^2 - \left(\frac{d\left|\dot{\vec{r}}\right|}{dt}\right)^2}}. \tag{2}$$

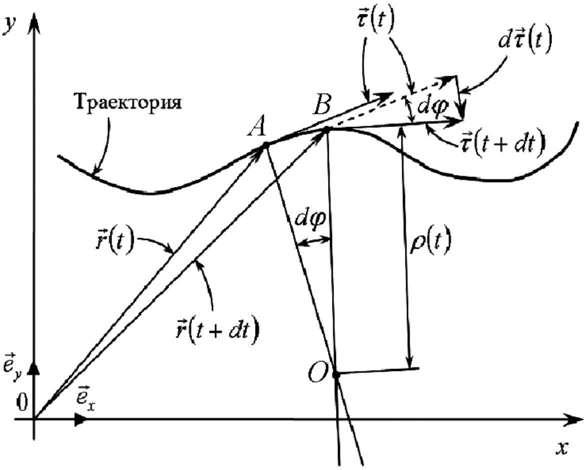

Рис. 1. Плоское движение материальной точки

Теперь рассмотрим другой подход, приводящий к такому же соотношению, но опирающийся на методы аналитической и дифференциальной геометрии (геометрический подход). Затем проведем сравнительный анализ обоих подходов (геометрического и кинематического) на примере траектории, заданной параметрическим способом и неявным уравнением.

Для простоты будем рассматривать плоское движение материальной точки, которое может быть обобщено на пространственный случай.

Вычисление кривизны кривой, заданной параметрическим способом. Пусть движение материальной точки на плоскости задано уравнением (1). Траектория ее движения показана на рис. 1.

Запишем длину ds дуги AB на малом перемещении точки $d\vec{r}$ за время dt из треугольника AOB (где O — центр кривизны траектории в точке A) через радиус кривизны в этой точке согласно следующему соотношению [5, 6]:

$$ds = \rho d\varphi. \tag{3}$$

Касательные вектора $\vec{\tau}\,(t)$, $\vec{\tau}\,(t+dt)$, которые выбираем нормированными $|\vec{\tau}\,(t)| = |\vec{\tau}\,(t+dt)| = 1$, и вектор $d\vec{\tau}\,(t) = \vec{\tau}\,(t+dt) - \vec{\tau}\,(t)$ образуют равнобедренный треугольник. Из этого треугольника получаем угол $d\varphi$ из соотношения

$$d\varphi \approx 2\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) = 2\frac{|d\vec{\tau}\,(t)|/2}{|\vec{\tau}\,(t)|} = |d\vec{\tau}\,(t)| = \left|\dot{\vec{\tau}}\,(t)\,dt\right|.$$

Подставим выражение для касательного вектора $\vec{\tau}\,(t) = \dfrac{\dot{\vec{r}}\,(t)}{\left|\dot{\vec{r}}\,(t)\right|}$, записанное через радиус-вектор

$$d\varphi = \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|} \right) dt \right| = \left| \frac{\ddot{\vec{r}}(t) \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| - \dot{\vec{r}}(t) \dfrac{d}{dt} \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|}{\left(\dot{\vec{r}}(t)\right)^2} dt \right|. \qquad (4)$$

Из уравнения (3) с учетом (4) получим

$$\rho(t) = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\, dt\right|}{d\varphi} = \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|^3}{\left|\ddot{\vec{r}}(t) \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| - \dot{\vec{r}}(t) \dfrac{d}{dt} \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|\right|}. \qquad (5)$$

Преобразуем знаменатель выражения (5) двумя способами.

Отметим, что в первом способе преобразования аналогичные вычисления справедливы и в трехмерном случае. Используем следующие обозначения декартовых координат: $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$. Вычислим производную по времени от величины $\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|$:

$$\frac{d}{dt}\left|\dot{\vec{r}}(t)\right| = \frac{d}{dt}\sqrt{\sum_{k=1}^{3} \left(\dot{x}_k(t)\right)^2} = \frac{2\sum\limits_{k=1}^{3} \dot{x}_k(t)\, \ddot{x}_k(t)}{2\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{3} \left(\dot{x}_k(t)\right)^2}} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)\, \ddot{\vec{r}}(t)}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|}.$$

Тогда

$$\rho(t) = \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|^3}{\left|\ddot{\vec{r}}(t) \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| - \dot{\vec{r}}(t) \cdot \frac{d}{dt} \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|\right|} = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\right|^4}{\left|\ddot{\vec{r}}(t) \left(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) - \dot{\vec{r}}(t) \cdot \left(\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}\right)\right|}.$$

Далее для преобразования знаменателя используем формулу двойного векторного произведения [7]:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right),$$

где $\vec{a} = \dot{\vec{r}}(t)$, $\vec{b} = \ddot{\vec{r}}(t)$, $\vec{c} = \dot{\vec{r}}(t)$.

Дополнительно получаем хорошо известную компактную формулу вычисления радиуса кривизны [7]:

$$\rho(t) = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\right|^4}{\left|\dot{\vec{r}} \times \left(\left(\ddot{\vec{r}}\right) \times \dot{\vec{r}}\right)\right|} = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\right|^4}{\left|\dot{\vec{r}}\right| \left|\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}\right|} = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}{\left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right|}.$$

С помощью второго способа преобразования в качестве проверки сведем выражение, полученное при геометрическом подходе, к выражению, полученному в результате кинематического подхода,

$$\rho(t) = \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|^3}{\left|\ddot{\vec{r}}(t)\left|\dot{\vec{r}}(t)\right| - \dot{\vec{r}}(t)\frac{d}{dt}\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|\right|} =$$

$$= \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|^3}{\sqrt{\left(\ddot{\vec{r}}(t)\left|\dot{\vec{r}}(t)\right| - \dot{\vec{r}}(t)\frac{d}{dt}\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|\right)^2}} =$$

$$= \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|^3}{\sqrt{\left(\ddot{\vec{r}}\right)^2\left|\dot{\vec{r}}\right|^2 + \left|\dot{\vec{r}}\right|^2\left(\frac{d}{dt}\left|\dot{\vec{r}}\right|\right)^2 - 2\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}\left|\dot{\vec{r}}\right|\frac{d}{dt}\left|\dot{\vec{r}}\right|}}\ .$$

Согласно кинематике,

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

Запишем $\dot{\vec{r}}$ через касательный вектор $\vec{\tau}$:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\right|}\cdot\left|\dot{\vec{r}}\right| = \vec{\tau}\left|\dot{\vec{r}}\right|.$$

Тогда

$$\rho(t) = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}{\left|\dot{\vec{r}}\right|\sqrt{\left(\ddot{\vec{r}}\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\left|\dot{\vec{r}}\right|\right)^2 - 2\left(\vec{a}_n + \vec{a}_\tau\right)\vec{\tau}\frac{d}{dt}\left|\dot{\vec{r}}\right|}}.$$

Поскольку $\vec{a}_n\cdot\vec{\tau} = 0$, $\vec{a}_\tau\cdot\vec{\tau} = a_\tau = \frac{d}{dt}\left|\dot{\vec{r}}\right|$, окончательно получим формулу (2) в виде

$$\rho(t) = \frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|^2}{\sqrt{\left(\ddot{\vec{r}}\right)^2 - \left(\frac{d}{dt}\left|\dot{\vec{r}}\right|\right)^2}}.$$

В результате видим альтернативность двух способов получения формулы кривизны траектории, причем один из способов может служить проверкой другого. Также наблюдается неразрывная связь кинематики с дифференциальной и аналитической геометрией, причем роль параметра кривой в кинематике играет время t. Важно отметить, что кинематический подход подразумевает наличие определенной модели, в данном случае просто криволинейное движение материальной точки. В геометрическом подходе какая-либо модель не используется, здесь применяются только соотношения, известные из векторной алгебры.

Приведенные выкладки, безусловно, являются довольно хорошей задачей, объединяющей такие науки, как кинематика, дифференциальная и аналитическая геометрия.

Использование уравнения векторных линий поля для вычисления скорости и ускорений движения материальной точки по кривой, заданной неявно. В случае, когда движение материальной точки задано явно уравнением $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, которое может быть интерпретировано как параметрическое уравнение траектории, вычисление скорости, ускорений и радиуса кривизны траектории, как было показано выше, не представляет особых трудностей и является в основном задачей дифференцирования по времени движения. Однако не всегда имеется возможность таким образом задавать движение. Очень часто его задают неявным уравнением траектории и зависимостью пути, пройденного материальной точкой вдоль траектории, от времени. На плоскости неявное уравнение траектории имеет вид [8]

$$F\,(x, y) = 0, \tag{6}$$

а в пространстве траекторию задают системой двух уравнений, каждое из которых описывает некоторую поверхность в пространстве [6]:

$$\begin{cases} F\,(x, y, z) = 0; \\ G\,(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Параметризировать кривую (траекторию), заданную такими уравнениями, часто очень неудобно.

В случае плоского движения представим траекторию, заданную уравнением (6) как векторную линию (рис. 2) некоторого векторного поля $\vec{U} = \vec{U}\,(\vec{r}) = \vec{e}_x \cdot U_x\,(\vec{r}) + \vec{e}_y \cdot U_y\,(\vec{r})$. Уравнение этой линии имеет вид [7]

$$\frac{dx}{U_x\,(\vec{r})} = \frac{dy}{U_y\,(\vec{r})}. \tag{7}$$

Сведем уравнение $F\,(\vec{r}) = 0$ к уравнению (7), откуда найдем компоненты U_x и U_y.

Рассмотрим точки, лежащие на кривой с радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{r} + d\vec{r}$,

$$F\,(\vec{r}) = 0; \quad F\,(\vec{r} + d\vec{r}) = 0,$$

следовательно,

$$dF\,(\vec{r}) = F\,(\vec{r} + d\vec{r}) - F\,(\vec{r}) = 0. \tag{8}$$

Введем обозначения $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$ и запишем полный дифференциал функции $F\,(\vec{r})$ через дифференциалы dx_1, dx_2, замечая, что

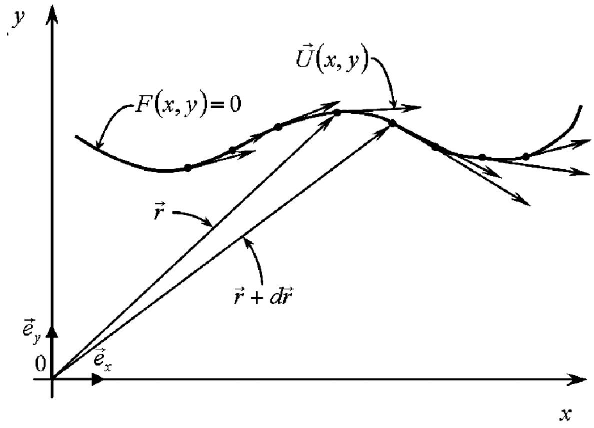

Рис. 2. Представление траектории как векторной линии поля

$d\vec{r} = \vec{e}_x dx_1 + \vec{e}_y dx_2$:

$$dF(\vec{r}) = dF(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial F(\vec{r})}{\partial x_i} dx_i = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}),$$

где $\vec{\nabla} F(\vec{r}) = \vec{e}_x \dfrac{\partial F(\vec{r})}{\partial x} + \vec{e}_y \dfrac{\partial F(\vec{r})}{\partial y}$ — двумерный градиент функции $F(\vec{r})$. Согласно равенству (8),

$$dF(\vec{r}) = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}) = 0. \tag{9}$$

В координатном виде уравнение (9) примет вид

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial F(\vec{r})}{\partial y}} = -\frac{dy}{\dfrac{\partial F(\vec{r})}{\partial x}}. \tag{10}$$

Сравнивая уравнение (7) с (10), получим компоненты векторного поля

$$U_x = \frac{\partial F(\vec{r})}{\partial y} \equiv F'_y; \quad U_y = -\frac{\partial F(\vec{r})}{\partial x} \equiv -F'_x,$$

тогда

$$\vec{U} = \vec{e}_x F'_y - \vec{e}_y F'_x \text{ или } \vec{U} = -\vec{e}_x F'_y + \vec{e}_y F'_x. \tag{11}$$

Отметим, что оба выражения (10) отличаются лишь знаками и соответствуют различным направлениям движения точки вдоль ее траектории, поэтому выберем одно из них.

В соответствии с (11) легко получить выражение для касательного вектора в точке с координатами (x, y):

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{e}_x F'_y - \vec{e}_y F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2}} = \frac{\vec{e}_x F'_y - \vec{e}_y F'_x}{\left|\vec{\nabla} F(\vec{r})\right|}. \tag{12}$$

Выражение (12) позволяет находить скорость материальной точки и ее ускорение при естественном способе задания движения:

$$\vec{V} = \vec{\tau} V(t) = \frac{\vec{e}_x F'_y - \vec{e}_y F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + \left(F'_y\right)^2}} V(t); \tag{13}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{e}_x F'_y - \vec{e}_y F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + \left(F'_y\right)^2}} V(t)\right). \tag{14}$$

Вычисление кривизны плоской кривой, заданной неявно. Получим формулу [7] для вычисления радиуса кривизны траектории, заданной уравнением (6) в точке с координатами (x, y). Применим для этого только кинематический подход:

$$\rho = \frac{|d\vec{r}|}{d\varphi} = \frac{\left((F'_x)^2 + \left(F'_y\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\left(F'_y\right)^2 F'_{xx} - 2F'_x F'_y F'_{xy} + (F'_x)^2 F'_{yy}\right|}. \tag{15}$$

Воспользуемся выражением (12) для касательного вектора. Рассмотрим следующую модель. Пусть материальная точка движется вдоль кривой с заранее заданной скоростью

$$V(t) = \alpha \left|\vec{\nabla} F(t)\right|, \tag{16}$$

где α — размерный множитель.

Такой вид зависимости скорости от времени выбираем из соображений удобства, поскольку в данном случае при сокращении на величину $\left|\vec{\nabla} F(t)\right|$ выражение для вектора скорости заметно упрощается:

$$\vec{V}(t) = \vec{\tau} V(t) = \alpha\left(\vec{e}_x F'_y - \vec{e}_y F'_x\right). \tag{17}$$

Полное ускорение движения точки находим дифференцированием выражения (17):

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}}(t) = \alpha\left(\vec{e}_x \dot{F}'_y - \vec{e}_y \dot{F}'_x\right);$$

$$a^2 = |\vec{a}|^2 = \alpha^2\left(\left(\dot{F}'_y\right)^2 + \left(\dot{F}'_x\right)^2\right) = \alpha^2\left|\vec{\nabla}\dot{F}(\vec{r}(t))\right|^2. \tag{18}$$

Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = |\vec{a}_\tau| = \frac{d}{dt}\left|\vec{V}(t)\right| = \alpha\frac{d}{dt}\left|\vec{\nabla} F\right| = \alpha\frac{\left(\vec{\nabla} F\right)\left(\vec{\nabla}\dot{F}\right)}{\left|\vec{\nabla} F\right|}. \tag{19}$$

Нормальное ускорение, выраженное через полное (18) и тангенциальное (19) ускорения:

$$a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 = \alpha^2 \left(\left| \vec{\nabla} \dot{F} \right|^2 - \frac{\left(\left(\vec{\nabla} F \right) \left(\vec{\nabla} \dot{F} \right) \right)^2}{\left| \vec{\nabla} F \right|^2} \right) =$$

$$= \alpha^2 \left(\left| \vec{\nabla} \dot{F} \right|^2 - \frac{\left| \vec{\nabla} F \right|^2 \left| \vec{\nabla} \dot{F} \right|^2 \cos^2\theta}{\left| \vec{\nabla} F \right|^2} \right) = \alpha^2 \left| \vec{\nabla} \dot{F} \right|^2 \left(1 - \cos^2\theta \right) =$$

$$= \alpha^2 \left| \vec{\nabla} \dot{F} \right|^2 \sin^2\theta = \frac{\alpha^2}{\left| \vec{\nabla} F \right|^2} \left| \vec{\nabla} F \right|^2 \left| \vec{\nabla} \dot{F} \right|^2 \sin^2\theta = \frac{\alpha^2}{\left| \vec{\nabla} F \right|^2} \left| \vec{\nabla} F \times \vec{\nabla} \dot{F} \right|^2.$$

Здесь θ — угол между векторами $\vec{\nabla} F$ и $\vec{\nabla} \dot{F}$.

Тогда окончательно нормальное ускорение определяем следующим выражением:

$$a_n = \frac{\alpha}{\left| \vec{\nabla} F \right|} \left| \vec{\nabla} F \times \vec{\nabla} \dot{F} \right| =$$

$$= \frac{\alpha}{\left| \vec{\nabla} F \right|} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ F'_x & F'_y & 0 \\ \dot{F}'_x & \dot{F}'_y & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{\alpha}{\left| \vec{\nabla} F \right|} \left| F'_x \dot{F}'_y - F'_y \dot{F}'_x \right|. \quad (20)$$

Запишем выражения для $\dot{F}'_x$ и $\dot{F}'_y$, учитывая, что $\vec{V} = \vec{e}_x \cdot \dot{x} + \vec{e}_y \cdot \dot{y}$, а в нашем случае $\vec{V}(t) = \alpha \left(\vec{e}_x F'_y - \vec{e}_y F'_x \right)$, т. е. $\dot{x} = \alpha F'_y$, $\dot{y} = -\alpha F'_x$:

$$\dot{F}'_x = \dot{F}'_x(x, y) = F'_{xx}\dot{x} + F'_{xy}\dot{y} = \alpha \left(F'_{xx} F'_y - F'_{xy} F'_x \right); \quad (21)$$

$$\dot{F}'_y = \dot{F}'_y(x, y) = F'_{yx}\dot{x} + F'_{yy}\dot{y} = \alpha \left(F'_{yx} F'_y - F'_{yy} F'_x \right). \quad (22)$$

Подставляя (21) и (22) в (20), находим величину полного ускорения

$$a_n = \frac{\alpha^2}{\left| \vec{\nabla} F \right|} \left| F'_{yx} F'_x F'_y - F'_{yy} \left(F'_x \right)^2 - F'_{xx} \left(F'_y \right)^2 + F'_{xy} F'_x F'_y \right| =$$

$$= \frac{\alpha^2}{\left| \vec{\nabla} F \right|} \left| \left(F'_y \right)^2 F'_{xx} - 2 F'_{yx} F'_x F'_y + \left(F'_x \right)^2 F'_{yy} \right|.$$

В итоге получим формулу для кривизны кривой, заданной неявно,

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{\alpha^2 \left|\vec{\nabla} F\right|^2}{\frac{\alpha^2}{\left|\vec{\nabla} F\right|} \left|\left(F'_y\right)^2 F'_{xx} - 2F'_x F'_y F'_{xy} + \left(F'_x\right)^2 F'_{yy}\right|} =$$

$$= \frac{\left(\left(F'_x\right)^2 + \left(F'_y\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\left(F'_y\right)^2 F'_{xx} - 2F'_x F'_y F'_{xy} + \left(F'_x\right)^2 F'_{yy}\right|}.$$

Приведенные подходы могут быть продемонстрированы при изучении курса механики студентам, обучающимся физико-математическим специальностям, в качестве дополнительных задач, развивающих у них, наряду с физическим подходом, навыки применения приемов векторной алгебры, дифференциального исчисления и теории поля. Приводимые в данной работе различные варианты проверки полученных результатов приучают студентов к критическому отношению при рассмотрении результатов аналитической деятельности.

Современная физика и ее преподавание должны содержать математику более высокого уровня, поскольку в таких областях, как квантовая механика, нанотехнологии и информационные технологии, уже нельзя полагаться на наглядные представления и простые модели. В этих областях требуются знания серьезного математического аппарата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров И. Б., Коршунов С. В. О ходе разработки проектов государственных образовательных стандартов бакалавров и магистров по специальности в области инженерного образования: Доклад на Координационном совете УМО и НМС. Москва,13 марта 2004 г. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 36 с.
2. Физический энциклопедический словарь / гл. ред. А.М. Прохоров; ред. кол. Д.М. Алексеев, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др. – М.: Сов. энциклопедия, 1983. – 928 с.
3. Стрелков С. П. Механика. – М.: Изд-во Наука, 1965. – 528 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: учеб. пособие: в 10 т. – Т. I. Механика. – 4-е изд., исправ. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1988. – 248 с.
5. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математике. – Киев: Наукова думка, 1973. – 743 с.
6. Математическая энциклопедия: в 5 т. / гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: Сов. энциклопедия, 1982. – Т. 3: Коо – Од. – 1184 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1984. – 831 с.
8. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М., 1980. – 336 с.

Статья поступила в редакцию 05.07.2012