

Анализ траектории возвращения космического аппарата с поверхности Луны в заданный район Земли

© М.С. Константинов, И.А. Николичев, Аунг Мьо Тант

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, 125993, Россия

Разработан метод проектирования траектории перелета космического аппарата с поверхности Луны в заданный район земной поверхности. Рассмотрена одноимпульсная схема перелета, при которой траектория взлетной лунной ракеты аппроксимируется одним импульсом скорости. Характеристики входа космического аппарата в атмосферу Земли выбраны так, чтобы были выполнены условия по коридору входа при баллистическом спуске и обеспечена посадка спускаемого аппарата в заданную точку поверхности Земли. Критерием оптимизации траектории возвращения космического аппарата на Землю служит импульс скорости, обеспечивающий старт космического аппарата с лунной поверхности. В основе метода лежит вспомогательная задача, решение которой позволяет проанализировать свойства исследуемого маневра и найти начальное приближение для выбираемых характеристик оптимизируемой траектории.

Ключевые слова: возвращение космического аппарата, поверхность Луны, условия коридора входа, посадка космического аппарата, заданный район Земли

Введение. В последние годы активно ведутся работы по развёртыванию программ исследования Луны возвращаемыми аппаратами. В качестве примера можно привести успешное выполнение программы доставки на Землю образцов лунного грунта, реализованное китайским космическим агентством в рамках проекта «Чанъэ-5» в декабре 2020 г. [1].

Цель настоящей работы — создание метода, позволяющего оптимизировать траекторию возвращения космического аппарата (КА) с лунной поверхности на Землю с учетом ограничений по коридору входа в атмосферу и заданных координат точки посадки КА на земную поверхность. Координаты точки старта с поверхности Луны (в селенографической системе координат) и координаты точки посадки КА на поверхность Земли считаются заданными.

Постановка задачи. Рассматривается задача определения рациональной схемы перелета КА с заданной точки поверхности Луны на Землю с входом спускаемого аппарата в атмосферу Земли и его посадкой в заданном районе. Исследуется одноимпульсная схема перелета.

Выбираются следующие характеристики схемы перелета: юлианская дата старта КА с поверхности Луны JD_0 в заданную эпоху; абсолютное значение импульса скорости ΔV и его направление; время

перелета КА до входа спускаемого аппарата в атмосферу Земли Δt . Направление импульса скорости фиксируется двумя углами: углом тангажа ϑ (угол между вектором импульса скорости и плоскостью стартового лунного горизонта) и азимутом запуска A (угол между северным направлением меридиана в точке старта и проекцией вектора импульса скорости на плоскость стартового горизонта). Рассматриваемые *выбираемые характеристики* схемы перелета позволяют обеспечить вход КА в атмосферу Земли, захват КА атмосферой, выполнение ограничений по перегрузке на спуске КА и посадку спускаемого аппарата в заданном районе земной поверхности.

Разработанный метод предполагает использование математической модели атмосферного спуска для спускаемого аппарата рассматриваемой конфигурации. Предполагаются известными четыре зависимости:

$\theta_{\min}(V_{\text{entry}}, n_{\max})$ — зависимость минимального угла входа в атмосферу от скорости входа V_{entry} и максимально допустимой осевой перегрузки n_{\max} на баллистическом спуске;

$\theta_{\max}(V_{\text{entry}})$ — зависимость максимального угла входа в атмосферу от скорости входа, при которой обеспечивается захват КА атмосферой Земли;

$t_{\text{land}}(V_{\text{entry}}, \theta_{\text{entry}})$ и $\beta_{\text{land}}(V_{\text{entry}}, \theta_{\text{entry}})$ — зависимости времени и угловой дальности спуска от скорости входа и угла входа спускаемого аппарата в атмосферу.

При разработке метода анализа и оптимизации траектории возвращения КА с поверхности Луны на Землю используется импульсная аппроксимация *единственного активного участка траектории*. Такая постановка позволяет провести анализ траектории, не привязанной к характеристикам КА и его двигателя.

Критерием оптимизации рассматривается значение импульса скорости при старте с поверхности Луны. Это значение минимизируется.

Общая характеристика разработанного метода. Важной особенностью метода оптимизации является использование вспомогательной задачи. Ее решение позволяет исследовать многие свойства траектории возвращения КА с поверхности Луны и получить оценки (начальные приближения) для характеристик схемы возвращения. Решение вспомогательной задачи основано на методе грависфер нулевой протяженности. Оно не включает численного интегрирования системы дифференциальных уравнений и итерационных алгоритмов поиска локальных экстремумов.

Оптимизация схемы перелета в рамках вспомогательной задачи сводится к нахождению безусловного экстремума функции трех аргументов. Один из этих аргументов — юлианская дата старта

с поверхности Луны JD_0 . Два других аргумента k_e и λ — параметры, характеризующие геоцентрический участок траектории перелета. Параметр k_e определяет эксцентриситет геоцентрического участка траектории; λ — долгота точки входа КА в атмосферу Земли, отсчитываемая в инерциальной геоцентрической системе координат. Диапазон изменения этих параметров известен. При этом предлагается для варьируемой даты старта анализировать значение требуемого для перелета импульса скорости как функцию двух аргументов — k_e и λ . Анализ изолиний требуемого импульса скорости на плоскости этих аргументов позволяет найти оптимальную траекторию перелета в рамках рассматриваемой математической модели.

На последующих этапах разработанного метода вся траектория перелета рассматривается в рамках ограниченной задачи четырех тел (Луна, Земля, Солнце и КА). Гравитационный потенциал Земли учитывается с точностью до второй зональной гармоники. Траектория КА рассматривается состоящей из двух участков: селено- и геоцентрического. На обоих участках учитывается гравитационное притяжение всех трех анализируемых небесных тел.

Вспомогательная задача. Анализ траектории возвращения с окололунной орбиты на Землю проводится во вспомогательной задаче в рамках метода грависфер нулевой протяженности. Вся траектория также рассматривается как состоящая из двух участков: селено- и геоцентрического. Траектория на каждом участке анализируется в рамках ограниченной задачи двух тел. Аналитическое исследование траектории на каждом участке позволяет анализировать свойства перелетной траектории возврата от Луны.

Анализ геоцентрического участка траектории в рамках вспомогательной задачи. Выбираются следующие параметры геоцентрического участка траектории: юлианская дата старта КА с поверхности Луны JD_0 и параметры k_e , λ . Дата старта определяет начальный радиус-вектор геоцентрического участка траектории (он совпадает с координатами центра масс Луны: $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{Moon}(JD_0)$ [2]).

В качестве конечной точки траектории геоцентрического перелета принимается точка входа спускаемого КА в атмосферу Земли. Длина r_3 геоцентрического радиус-вектора \mathbf{r}_3 конечной точки перелета рассматривается равной 6471 км (высота атмосферы принимается равной 100 км). На начальном этапе анализа протяженность траектории спуска КА в атмосфере не учитывается. При этом геоцентрическая широта точки входа КА в атмосферу считается равной геоцентрической широте точки посадки КА на поверхность Земли спускаемого КА. Эту широту принимают заданной (φ_{given}). Геоцентрический радиус-вектор конечной точки геоцентрической траектории можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{r}_3(\lambda) = r_{atm} \begin{pmatrix} \cos \varphi_{given} \cos \lambda \\ \cos \varphi_{given} \sin \lambda \\ \sin \varphi_{given} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Зная векторы \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_3 , можно найти орт вектора площадей геоцентрической траектории и ее угловую дальность. При этом предлагается исследовать две возможные траектории геоцентрического перелета. На одной из них угловая дальность перелета $\Phi_{geo} < \pi$ (такая траектория названа *траекторией первого типа*), на другой — $\Phi_{geo} > \pi$ (*траектория второго типа*). При проведении численного анализа не удалось натолкнуться на случай, когда траектория геоцентрического перелета второго типа оказалась лучше, чем траектория первого типа. Однако это не служит доказательством того, что траектории второго типа не могут быть рациональными. Иными словами, полностью отвергать возможность возврата КА от Луны по геоцентрической орбите с угловой дальностью, большей π , в общем случае, по-видимому, не следует. Далее будут рассматриваться траектории первого типа.

При фиксированной дате отлета от Луны траектория геоцентрического перелета определяется как функция двух аргументов (долготы λ точки входа в атмосферу и параметра k_e , определяющего эксцентриситет e_2 геоцентрического участка траектории). Если при этом на величину λ не накладывается каких-либо ограничений (ее возможный диапазон $0 \dots 360^\circ$), то область возможных значений эксцентриситета геоцентрического участка целесообразно существенно ограничить. Было решено рассматривать только эллиптические геоцентрические перелетные траектории. Анализ показал, что для фиксированной даты старта от Луны и конкретного значения долготы λ существует ограничение снизу на эксцентриситет геоцентрической траектории. Минимальное значение эксцентриситета определяется с использованием соотношения

$$e_{\min} = \frac{r_2 - r_{atm}}{c_1}, \quad (2)$$

где r_2 — модуль вектора \mathbf{r}_2 ; $r_{atm} = 6471$ км — радиус условной земной атмосферы; $c_1 = \sqrt{(r_{atm} - r_2 \cos \Phi_{geo})^2 - (r_2 \cos \Phi_{geo})^2}$.

Оказалось целесообразным определять эксцентриситет геоцентрической орбиты, используя параметр k_e , связанный с ним следующим соотношением:

$$e_2 = e_{\min} + (1 - e_{\min})k_e.$$

Тогда возможные диапазоны изменения e_2 и k_e таковы:

$$e_{\min} \leq e_2 < 1; \quad 0 \leq k_e < 1.$$

По известным значениям параметров λ и e_2 удается последовательно определить истинную аномалию точки входа КА в атмосферу, фокальный параметр геоцентрической орбиты, истинную аномалию начальной точки геоцентрической орбиты и орбитальные компоненты скорости КА в граничных точках. После этого можно анализировать условия по коридору входа КА в атмосферу и определять вектор гиперболического избытка скорости относительно Луны.

Необходимо обратить внимание на то, что описанная перелетная геоцентрическая траектория, рассматриваемая для фиксированной даты старта как функции двух параметров (λ и k_e), существует для любой пары этих параметров в рассматриваемом диапазоне их изменения. Исследование допустимой области на плоскости параметров геоцентрической траектории λ и k_e сводится к анализу ограничений типа неравенства, связанных с коридором входа в атмосферу. Проводится анализ области выбираемых параметров λ и k_e геоцентрического участка, при которых обеспечивается захват КА атмосферой и осевые перегрузки при баллистическом спуске оказываются допустимыми (меньше максимально допустимых перегрузок n_{\max}). Для параметров λ и k_e , при которых ограничения по коридору входа выполняются, вычисляется вектор $V_{\infty Moon}$ гиперболического избытка скорости относительно Луны. Этой операцией и заканчивается анализ геоцентрического участка траектории. Описанный анализ позволяет получить оценки окон старта и некоторых других характеристик траектории КА.

Анализ селеноцентрического участка траектории в рамках вспомогательной задачи. Полученный из анализа геоцентрического участка траектории вектор гиперболического избытка скорости относительно Луны с использованием матриц перехода пересчитывается в селеноцентрическую селеноэкваториальную невращающуюся систему координат: $V_{\infty Moon eq}(JD_0, \lambda, k_e)$. Входящие в матрицы характеристики (прямое восхождение и склонение северного полюса Луны) определяются на момент старта КА с поверхности Луны [3]. Орт приведенного вектора гиперболического избытка скорости обозначим $ortV_{\infty Moon eq}(JD_0, \lambda, k_e)$.

Орт радиус-вектора точки старта КА с поверхности Луны в селенографической системе координат определяется по соответствующим точкам старта (широте φ_{st} и долготе λ_{st}):

$$\mathbf{ort} \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{st} \cos \lambda_{st} \\ \cos \varphi_{st} \sin \lambda_{st} \\ \sin \varphi_{st} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Орт радиус-вектора точки старта КА в селеноцентрической невращающейся системе определяется как

$$\mathbf{ort} \mathbf{r}_{0Moon}(JD_0) = \begin{pmatrix} [\cos(W(JD_0)) \cos \lambda_{st} - \sin(W(JD_0)) \sin \lambda_{st}] \cos \varphi_{st} \\ [\cos(W(JD_0)) \sin \lambda_{st} + \sin(W(JD_0)) \cos \lambda_{st}] \cos \varphi_{st} \\ \sin \varphi_{st} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где W — угол между линией узлов лунного экватора по отношению к земному экватору и плоскостью нулевого лунного меридиана. Этот угол может быть определен по дате старта с использованием соотношения, приведенного в работе [3; см. табл. 2, с. 8].

Скорость точки старта (связанная с вращением Луны вокруг своей оси) очень слабо зависит от даты старта в рассматриваемую эпоху. Угловая скорость ω_{Moon} вращения Луны может быть рассчитана аналитическим или численным дифференцированием угла W по времени. Вектор скорости точки старта в селеноцентрической невращающейся системе координат определяется по следующему соотношению:

$$\mathbf{V}_{stMoon}(JD_0) = R_{Moon} \omega_{Moon}(JD_0) \cos \varphi_{st} \begin{pmatrix} -\sin \lambda_{st} \\ \cos \lambda_{st} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где R_{Moon} — радиус Луны.

Плоскости селеноцентрической гиперболы отлета от Луны могут принадлежать два описанных вектора: $\mathbf{ort} \mathbf{V}_{\infty Moon eq}$ — орт вектора гиперболического избытка скорости и $\mathbf{ort} \mathbf{r}_{0Moon}(JD_0)$ — орт радиус-вектора точки старта КА с поверхности Луны. Положение этой плоскости находится с использованием векторного произведения упомянутых векторов. Принципиально возможны два направления движения в этой плоскости, однако вариант, при котором угол между радиус-вектором точки старта и вектором гиперболического избытка скорости больше 180° , не может быть реализован, так как в этом случае траектория КА будет проходить через Луну. Орт вектора площадей гиперболы отлета от Луны можно найти *однозначно* так:

$$\mathbf{ort} \boldsymbol{\sigma}_{Hyp}(JD_0, \lambda, k_e) = \frac{\mathbf{ort} \mathbf{r}_{0Moon}(JD_0) \times \mathbf{ort} \mathbf{V}_{\infty Moon eq}(JD_0, \lambda, k_e)}{|\mathbf{ort} \mathbf{r}_{0Moon}(JD_0) \times \mathbf{ort} \mathbf{V}_{\infty Moon eq}(JD_0, \lambda, k_e)|}. \quad (6)$$

Зная орт вектора площадей гиперболы отлета от Луны, последовательно определяют наклонение и долготу восходящего узла гиперболы в селеноэкваториальной невращающейся системе координат. Затем находят орт линии узлов гиперболы отлета. Аргумент широты точки старта определяют с использованием скалярного произведения орта линии узлов и орта радиус-вектора точки старта. Синус и косинус угла φ между ортом радиус-вектора точки старта и ортом вектора гиперболического избытка скорости (и сам угол φ) находят с использованием скалярного произведения этих векторов:

$$\cos \varphi = (\text{ort } \sigma_{Hyp}, \text{ort } r_{0Moon}); \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}; \quad \varphi = \arccos(\cos \varphi).$$

Определение эксцентриситета гиперболы отлета связано с решением квадратного уравнения относительно $U = \sqrt{e^2 - 1}$. Дискриминант D этого уравнения положителен, и уравнение имеет единственный положительный корень, определяемый с использованием равенств

$$v = |V_{\infty Moon eq}|^2; \quad D = 0,25(v \sin \varphi)^2 + 4v(1 - \cos \varphi);$$
$$U = v \sin \varphi + \sqrt{D}; \quad e_{Hyp} = \sqrt{U^2 + 1}.$$

Истинная аномалия начальной точки гиперболы отлета от Луны находится так:

$$\upsilon_{0Hyp} = \arccos\left(\frac{-1}{e_{Hyp}}\right) - \varphi.$$

Если полученная истинная аномалия оказывается отрицательной, то траектория отбраковывается, так как она проходит через Луну.

Для того чтобы найти вектор скорости КА в начальной точке гиперболы V_{0Hyp} , последовательно определяют фокальный параметр, орбитальные компоненты вектора скорости и используется переход от орбитальной системы координат к экваториальной системе.

Требуемый импульс скорости для старта КА с поверхности Луны и перехода на гиперболу отлета от нее в селеноцентрической селеноэкваториальной невращающейся системе координат находится как разность полученных векторов:

$$\Delta V = V_{0Hyp} - V_{st Moon}.$$

Общий алгоритм решения вспомогательной задачи. Полученный вектор импульса скорости ΔV есть функция трех выбираемых характеристик схемы перелета: JD_0 , k_e и λ . Оптимизация траектории КА сводится к минимизации импульса скорости при отсутствии

ограничений типа равенства. Предлагаемый алгоритм решения данной задачи использует два цикла — внешний и внутренний. Во внешнем цикле перебираются даты старта в заданную эпоху. Во внутреннем цикле анализируется плоскость параметров k_e и λ ; для каждой пары данных параметров проверяется выполнение условий по коридору входа. Те значения параметров, при которых условия не удовлетворяются, отбраковываются. Для остальных значений анализируется селеноцентрический участок траектории. При этом проверяется знак истинной аномалии начальной точки гиперболы отлета. Если он отрицательный, то рассматриваемый набор параметров k_e и λ отбраковывается.

Предложенный алгоритм не использует никаких итерационных процедур и *локальных* условий оптимальности. Поэтому полученное решение, обеспечивающее минимальный импульс скорости, можно рассматривать как глобальный минимум.

Анализ траектории возвращения с поверхности Луны на Землю в рамках задачи четырех тел. Общая постановка задачи в рамках настоящего раздела (основные характеристики схемы перелета, ограничения и критерий оптимизации) остается неизменной. Принципиально отличается только математическая модель численного расчета траектории.

Эта математическая модель также предполагает разбиение траектории на селено- и геоцентрический участки. На этих участках учитывается гравитационное влияние трех небесных тел (Земли, Луны и Солнца). Используются селено- и геоцентрические системы координат; основная плоскость которых — геоэкваториальная. Для описания движения КА на соответствующих участках траектории используются системы дифференциальных уравнений в безразмерной форме, при этом для повышения точности интегрирования применяется разное масштабирование характеристик анализируемых участков траектории. Время движения КА на селеноцентрическом участке перелета фиксируется: его принимают равным 0,6 сут. Такое значение было выбрано исходя из условия удаления КА от Луны на расстояние, близкое к радиусу сферы действия Луны. Изменение этого времени в диапазоне 0,5...0,8 сут не влияет на точность анализируемой траектории.

Проанализируем следующую задачу математического программирования. Выбираемые параметры схемы перелета:

- дата старта в заданную эпоху JD_0 ;
- абсолютное значение ΔV вектора импульса скорости и углы его ориентации (ϑ, ξ);
- время t_2 движения КА на геоцентрическом участке перелета.

Перечисленные пять параметров схемы перелета ($JD_0, \Delta V, \vartheta, \xi, t_2$) должны быть выбраны так, чтобы выполнялись основные условия

рассматриваемой транспортной задачи. Эти условия могут быть формализованы в следующем виде:

$$r_k(JD_0, \Delta V, \vartheta, \xi, t_2) = 1,015696;$$

$$\varphi_{land}(JD_0, \Delta V, \vartheta, \xi, t_2) = \varphi_{given};$$

$$\lambda_{land}(JD_0, \Delta V, \vartheta, \xi, t_2) = \lambda_{given};$$

$$\theta_k(JD_0, \Delta V, \vartheta, \xi, t_2) \geq \theta_{\min}(V_k(JD_0, \Delta V, \vartheta, \xi, t_2), n_{\max});$$

$$\theta_k(JD_0, \Delta V, \vartheta, \xi, t_2) \leq \theta_{\max}(V_k(JD_0, \Delta V, \vartheta, \xi, t_2)),$$

где 1,015696 — безразмерный радиус земной атмосферы.

Задача заключается в нахождении таких значений выбираемых параметров схемы перелета, при которых выполнены все пять приведенных ограничений, а импульс скорости минимизирован.

Математическая модель для анализа селено- и геоцентрического участков траектории. Для описания движения КА на обоих рассматриваемых участках траектории использовались уравнения движения ограниченной задачи многих тел [3–7, 9, 10], записанные в соответствующих прямоугольных системах координат с центрами в Луне и Земле. Основная плоскость — плоскость земного экватора. На селеноцентрическом участке учитывались возмущения от Земли и Солнца, на геоцентрическом участке — возмущения от Луны, Солнца и второй зональной гармоники гравитационного потенциала Земли.

Методика решения оптимизационной проблемы. Опишем общие идеи метода решения сформулированной задачи. Выделяется основное ограничение — ограничение типа равенства, обеспечивающее вход КА в атмосферу Земли. Это ограничение удовлетворяется на начальном этапе исследования и на последующих этапах не нарушается. Используется идея поэтапного добавления ограничений с последующим решением задачи математического программирования на суженном и постепенно расширяющемся составе ограничений. Так, на первом этапе ставится задача нахождения параметров схемы перелета, при которых КА входит в атмосферу (без удовлетворения остальных ограничений). На втором этапе к основному ограничению добавляется ограничение на широте точки посадки КА на поверхность Земли, на третьем этапе — ограничение по долготе точки посадки КА на поверхность Земли. При последующем анализе решается задача с удовлетворением условий по коридору входа КА в земную атмосферу. Характер анализа, проводимого на этапах исследования, покажем на примере решения конкретной задачи.

Пример численного анализа траектории. Рассмотрим проблему оптимизации траектории перелета с поверхности Луны на Землю для следующего набора входных данных. Координаты точки старта КА с лунной поверхности в селенографической системе координат: 12° северной широты, 62° восточной долготы. Геоцентрические координаты точки посадки возвращаемого на Землю КА: северная широта $\varphi_{given} = 45^\circ$, восточная долгота — 60° . Эпоха старта КА — июль 2024 г.

Зависимость $\theta_{\max}(V_{entry})$ максимального угла входа в атмосферу, при котором обеспечивается захват спускаемого баллистического аппарата атмосферой, от скорости входа представлена линией 1 на рис. 1. Допустимая осевая перегрузка при баллистическом спуске принята равной 100. При этом зависимость минимального угла входа в атмосферу $\theta_{\min}(V_{entry})$ от скорости входа, соответствующая этой перегрузке, представлена линией 2 на рис. 1.

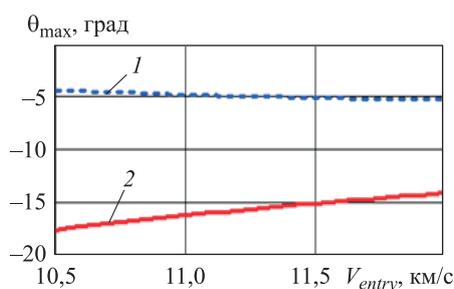


Рис. 1. Характеристики коридора входа в атмосферу:

1 — максимально допустимый угол входа в атмосферу; 2 — минимальный угол входа в атмосферу при допустимой перегрузке $n_{\max} = 100$

Результаты численного анализа траектории в рамках вспомогательной задачи. На рис. 2 приведены результаты анализа области допустимых значений параметров k_e и λ геоцентрического участка траектории для даты старта 17 июля 2024 г. На рис. 2, а темная область соответствует значениям параметров, при которых нарушаются условия захвата КА атмосферой, а на рис. 2, б — условия по допустимой перегрузке (она принята равной 100). На рис. 2, в, который представляет собой объединение рис. 2, а и б, светлая область есть область параметров, в которой удовлетворяются условия по коридору входа в атмосферу.

На рис. 3 представлена допустимая область параметров k_e и λ как функции даты старта. Эта область последовательно приводится для дат старта: 13, 15, 17, 20, 23 июля 2024 г. и 25 июля (для 0 и 12 часов) 2024 г.

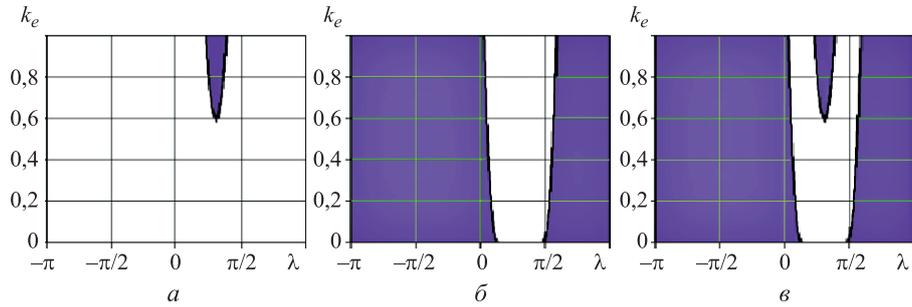


Рис. 2. Область допустимых параметров геоцентрического участка траектории КА (выделена светлым) для даты старта 17 июля 2024 г.:

a — при нарушении условий захвата КА атмосферой; $б$ — при нарушении условий по допустимой перегрузке; $в$ — при выполнении ограничений по коридору входа в атмосферу

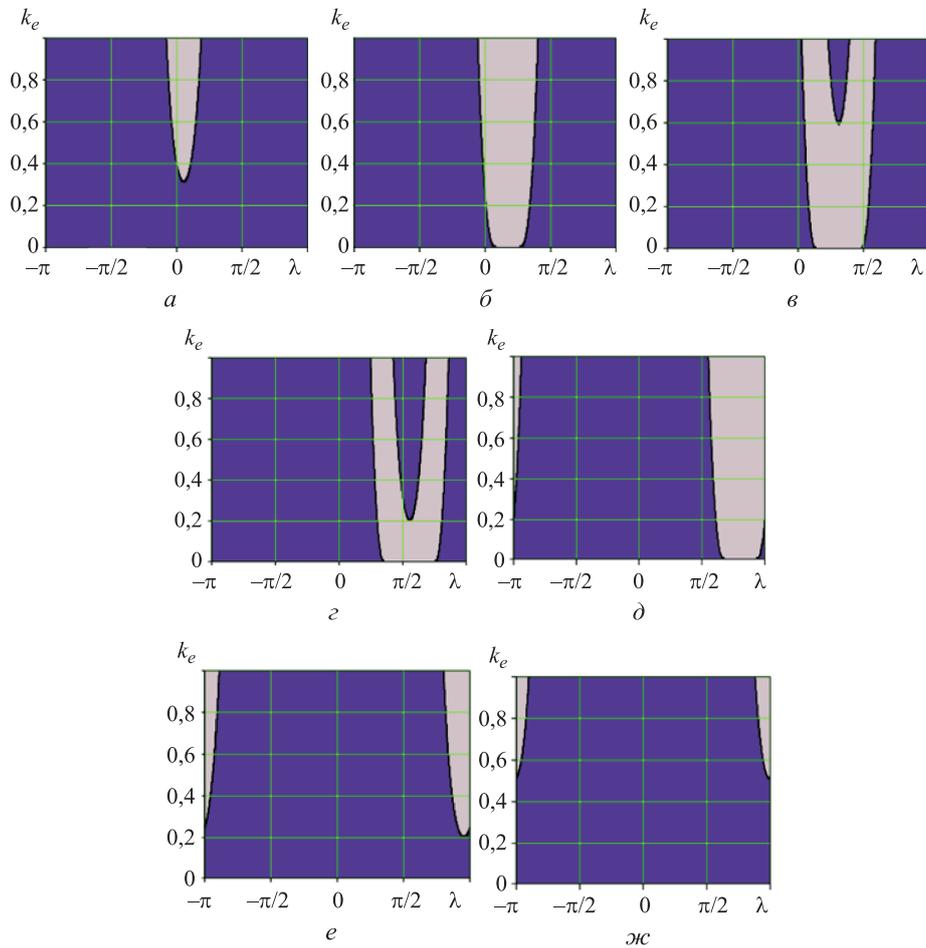


Рис. 3. Область допустимых параметров геоцентрического участка траектории, в которой удовлетворены ограничения по коридору входа в атмосферу (выделена светлым), для различных дат старта в июле 2024 г.:

a — 13.07; $б$ — 15.07; $в$ — 17.07; $г$ — 20.07; $д$ — 23.07; $е$ — 25.07 (0 часов);
 $ж$ — 25.07 (12 часов)

Как происходит деформация области допустимых параметров геоцентрического участка и изменяется ее размер, хорошо видно на рис. 3. Прежде всего отметим, что для дат старта 12 июля и 26 июля 2024 г. оказалось невозможным удовлетворить ограничения по перегрузке на спуске при рассматриваемой схеме перелета, т. е. окно запуска — 13–25 июля. На границах указанного диапазона дат старта ограничение по захвату спускаемого аппарата атмосферой удовлетворяется во всем диапазоне рассматриваемых параметров, но ограничение по допустимой перегрузке сильно сужает допустимую область этих параметров. Следует отметить, что при этом допустимая область смещается вверх. Оказывается невозможным использовать геоцентрические траектории с относительно малым эксцентриситетом (допустимые значения $k_e > 0$, на границе окон старта $k_e \gg 0$). Понятно, что это увеличивает энергетические затраты на перелет.

Для дат, принадлежащих окну старта, на достаточно мелкой сетке параметров λ и k_e геоцентрической траектории были рассчитаны все характеристики траектории возвращения КА с поверхности Луны. Среди этих траекторий были выбраны оптимальные (по минимуму требуемого импульса скорости). Характеристики этих траекторий для шести различных дат старта приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения характеристик траектории возвращения с поверхности Луны как функции даты старта в июле 2024 г.

Характеристика	13.07	16.07	19.07	20.07	22.07	25.07
Требуемый импульс скорости ΔV , км/с	3,098	2,813	2,777	2,775	2,783	3,014
Коэффициент k_e	0,317	0,0013	0,0005	0,0000	0,0000	0,0204
Инерциальная долгота точки входа КА в атмосферу λ , град	7,736	15,778	47,194	62,653	99,500	170,139
Время перелета Δt , сут	2,996	4,755	4,553	4,463	4,390	2,808
Эксцентриситет геоцентрического участка e_2	0,98098	0,97051	0,96931	0,96891	0,96821	0,97536
Наклонение геоцентрического участка i_2 , град	88,052	56,886	47,436	47,456	52,593	87,911
Угол тангажа импульса скорости ϑ , град	80,262	74,334	73,934	73,648	71,769	81,21
Азимут запуска A , град	-89,586	77,693	94,51	101,321	109,73	-138,83
Скорость входа в атмосферу V_{entry} , км/с	11,042	11,010	11,007	11,005	11,003	11,025
Угол входа в атмосферу θ_{entry} , град	-16,122	-16,200	-16,208	-16,212	-16,215	-16,164
Максимальная перегрузка на спуске n_{max}	100	100	100	100	100	100

Анализ данных табл. 1 показывает, что оптимальная дата старта в рассматриваемую эпоху есть 20 июля 2024 г. Минимальный импульс скорости равен 2775 м/с. Смещение даты старта на более раннюю или более позднюю практически одинаково увеличивает требуемый импульс скорости.

На рис. 4 представлены зависимости от даты старта значения требуемого импульса скорости и углов его ориентации: угла тангажа ϑ и азимута A .

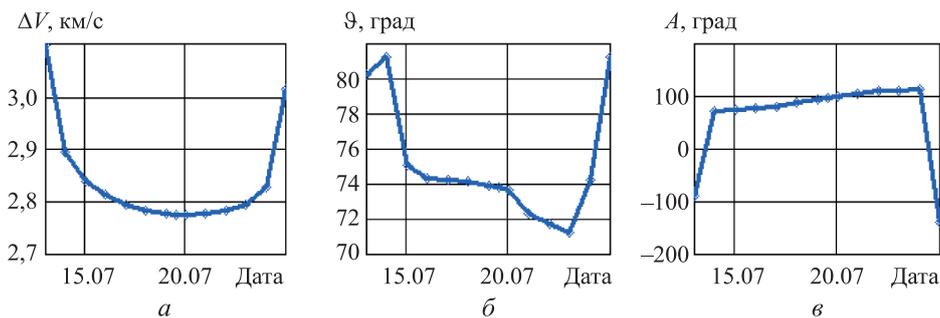


Рис. 4. Требуемый импульс скорости (а), углы тангажа (б) и азимут (в) как функции даты старта в июле 2024 г.

Анализ приведенных графиков показывает, что в непосредственной окрестности оптимальной даты старта требуемый импульс скорости изменяется незначительно. Смещение от оптимальной даты старта на ± 1 сут увеличивает требуемый импульс скорости менее чем на 2 м/с. Анализируя зависимости, приведенные на рис. 4, б и в, можно заключить, что в окрестности оптимальной даты старта углы ориентации вектора импульса скорости изменяются монотонно и относительно мало. Так, в диапазоне дат старта от 16 до 24 июля угол тангажа изменяется примерно на 3° , а азимут запуска — примерно на 20° .

Анализ показывает, что скорость входа КА в атмосферу находится в довольно узком диапазоне. Минимальное значение этой скорости 11002,6 м/с. Такая скорость оказывается оптимальной для немного более поздней даты, чем оптимальная. При дате старта 13 июля скорость входа в атмосферу максимальна для рассмотренного диапазона. Она составляет 11041,9 м/с.

Анализируя зависимость угла входа в атмосферу как функцию даты старта, можно отметить следующее. Для диапазона дат старта от 13 до 25 июля 2024 г. оптимальный угол входа в атмосферу равен его предельно допустимому значению для рассматриваемого коридора входа в атмосферу, т. е. при оптимальной траектории возвращения КА на Землю осевая перегрузка на участке спуска КА в атмосфере равна максимально допустимому значению. Таким образом, ограничение

по допустимой перегрузке можно рассматривать как ограничение типа равенства.

Параметр k_e в области оптимальной даты старта очень близок к нулю (при этом эксцентриситет геоцентрического участка траектории близок к своему минимальному значению). Для более ранних дат старта значение k_e существенно возрастает (при этом эксцентриситет геоцентрического участка значительно увеличивается).

На оптимальной траектории геоцентрическая долгота точки входа КА в атмосферу значительно изменяется при варьировании даты старта. Диапазон изменения угла λ для исследованного диапазона дат старта составляет $8 \dots 170^\circ$.

Итогом решения вспомогательной задачи можно считать анализ некоторых характеристик рациональной траектории возвращения КА с поверхности Луны на Землю и значения параметров этой траектории, которые могут рассматриваться как начальное приближение для оптимизации траектории перелета в рамках более строгой математической модели, описывающий этот перелет. К таким характеристикам отнесены: дата старта (20 июля 2024 г.), абсолютное значение и направление импульса скорости (2775 м/с, угол тангажа $73,6^\circ$, азимут старта $101,3^\circ$), время перелета до входа КА в атмосферу (4,46 сут).

Результаты численного анализа траектории КА в математической модели задачи четырех тел. На первом этапе, когда в рамках модели задачи четырех тел исследуется постановка, в которой рассматривается единственное основное ограничение (попадание КА на границу земной атмосферы) и не варьируется дата старта, были получены следующие характеристики схемы перелета: требуемый импульс скорости $\Delta V = 2640,9$ м/с; время перелета $\Delta t = 4,436$ сут. Другие характеристики траектории: скорость входа в атмосферу $V_{entry} = 11004,5$ м/с; угол входа $\theta_{entry} = -35,57^\circ$; максимальная перегрузка на спуске $n_{max} = 218,7$; геоцентрическая широта точки посадки КА на Землю $38,2^\circ$; географическая долгота точки посадки $201,0^\circ$.

Поскольку на траектории, полученной на первом этапе, нарушалось условие по допустимой перегрузке, на втором этапе вместе с удовлетворением условия по широте точки посадки было введено и условие по допустимой перегрузке на атмосферном спуске. Результат анализа этого этапа получился таким: требуемый импульс скорости оказался равен 2630,2 м/с. Компоненты этого импульса скорости в селенографической системе координат составили 514,3, 2555,3, 351,6 м/с. Время перелета 4,383 сут. Другие характеристики траектории: скорость входа в атмосферу 11001,2 м/с; угол входа в атмосферу $-16,22^\circ$. Этот угол значительно уменьшился (примерно на 20°), что обеспечило выполнение условия по допустимой на спуске перегрузке $n_{max} = 100$. Геоцентрическая широта точки посадки КА на Землю $45,0^\circ$, географическая долгота точки посадки $162,7^\circ$.

Полученные на втором этапе характеристики не только удовлетворяли основному ограничению (попаданию КА в атмосферу Земли), но и обеспечивали удовлетворение условия по коридору входа и по широте точки посадки КА на земную поверхность. Однако географическая долгота точки посадки оказалась далека от заданной долготы.

На следующем (завершающем) этапе исследования было введено в рассмотрение условие по этой долготе. В список выбираемых параметров была включена дата старта, которая вместе со временем перелета сильно влияет на «временную увязку» траектории. При этом выбор даты старта с учетом суточного вращения Земли позволяет эффективно влиять на долготу точки посадки КА на земную поверхность.

Результат анализа на последнем этапе исследования оказался таким: требуемый импульс скорости равен 2535,673 м/с; компоненты этого импульса скорости в селенографической системе координат 564,352, 2438,806, 404,191 м/с; смещение даты старта на $-0,059$ сут; время перелета 4,477 сут; геоцентрическая широта точки посадки КА на Землю 45° ; географическая долгота точки посадки с высокой точностью стала равна заданной (60°); скорость входа в атмосферу 11 003,36 м/с; угол входа в атмосферу $-16,217^\circ$; максимальная перегрузка на спуске 100.

Проекции полученной перелетной траектории на геоцентрическую экваториальную систему координат представлены на рис. 5 (штриховой линией указана орбита Луны; положение Луны отмечено в момент старта КА с ее поверхности).

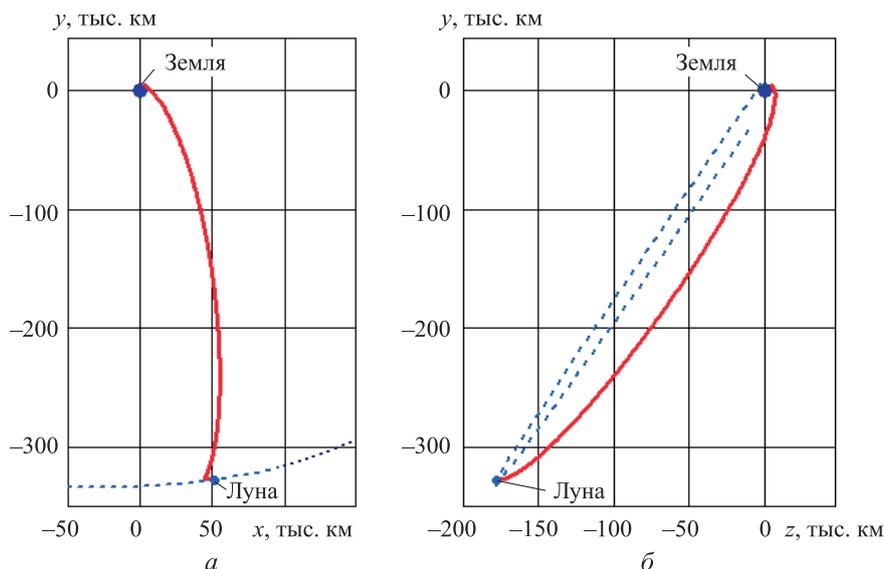


Рис. 5. Геоцентрическая перелетная траектория в проекциях на плоскость земного экватора $xу$ (а) и на плоскость $уz$ (б)

Окололунный участок перелетной траектории приведен в более крупном масштабе (рис. 6). Используются те же обозначения, что и на предыдущем рисунке (положение Луны указано в момент старта КА с ее поверхности).

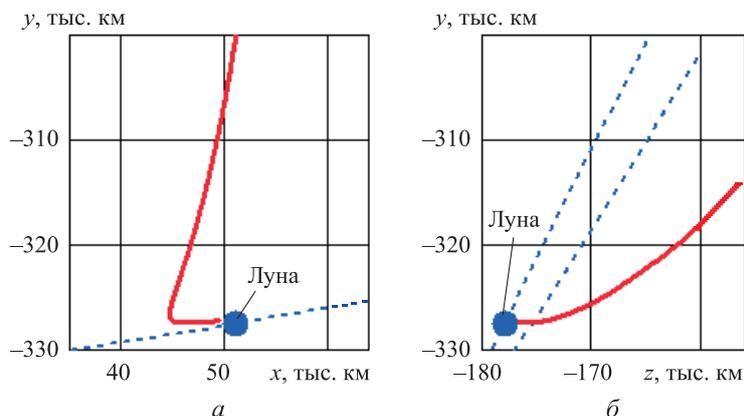


Рис. 6. Окололунный участок перелетной траектории в проекциях на плоскость земного экватора $xу$ (а) и на плоскость $зу$ (б)

Немонотонное изменение координаты x видно на рис. 6, а. Проекция геоцентрической скорости КА на ось x изменяет знак на траектории отлета от Луны.

Сравнительный анализ результатов. Характеристики траектории перелета, полученные во вспомогательной задаче и в задаче четырех тел, приведены в табл. 2. Анализ этих характеристик показывает, что существенно различаются значения только одной характеристики — требуемого импульса скорости. В задаче четырех тел он оказывается меньше импульса скорости, полученного во вспомогательной задаче, почти на 230 м/с. По-видимому, это объясняется тем, что решение, полученное в рамках задачи четырех тел, дает возможность правильно «настроить» возмущающие ускорения от Земли и Солнца на селеноцентрическом участке траектории и от Луны и Солнца на геоцентрическом участке траектории. Эти ускорения позволяют уменьшить требуемые значения энергетических характеристик рассматриваемого перелета. В связи с этим решение, полученное во вспомогательной задаче, можно использовать на начальном этапе проектно-баллистического анализа как оценку сверху характеристической скорости рассматриваемого маневра.

Было проведено сравнение результатов описанного в настоящей работе анализа траектории возвращения КА с поверхности Луны в импульсной постановке с результатом, полученным И.А. Николичевым в постановке, в которой не принималось допущение об импульс-

ной аппроксимации активного участка траектории. Все входные данные, которые использовались в настоящей работе (координаты точки старта КА с поверхности Луны, координаты точки посадки КА на поверхность Земли, допустимая перегрузка на спуске) полностью соответствуют задаче, проанализированной И.А. Николичевым. Он оптимизировал траекторию КА, возвращающегося на Землю с поверхности Луны, совместно с параметрами взлетной ракеты. В частности, была оптимизирована тяговооруженность взлетной ракеты. Характеристическая скорость маневра, рассмотренного И.А. Николичевым, оказалась равна 2,85 км/с. Потери скорости взлетной ракеты составили примерно 300 м/с. Такие характеристики с высокой точностью соответствуют результатам, описанным в настоящей работе. Все это может служить подтверждением достоверности полученного результата и корректности разработанного метода.

Таблица 2

Значения характеристик траектории перелета, полученные во вспомогательной задаче и в задаче четырех тел

Характеристика	В задаче	
	вспомогательной	четырёх тел
Требуемый импульс скорости ΔV , м/с	2775,3	2535,673
Угол тангажа импульса скорости ϑ , град	71,8	75,018
Азимут запуска A , град	109,7	99,433
Дата старта	20.07.2024 г.	19.07.2024 г. (22 ч 35 мин)
Время перелета Δt , сут	4,463	4,477
Скорость входа в атмосферу V_{entry} , м/с	11 011,20	11 003,36
Угол входа в атмосферу θ_{entry} , град	-16,218	-16,217
Максимальная перегрузка на спуске n_{max}	100	100
Время атмосферного спуска t_{land} , с	140,41	140,41
Угловая дальность атмосферного спуска β_{land} , град	2,638	2,638
Оскулирующий эксцентриситет геоцентрического участка траектории в начальной и конечной точках этого участка	0,968221	0,980112; 0,968284
Оскулирующий фокальный параметр геоцентрического участка траектории в начальной и конечной точках этого участка, км	11 726,5	7475,9; 11 727,0
Оскулирующее наклонение геоцентрического участка траектории в начальной и конечной точках этого участка, град	52,561	65,40; 48,89

Заключение. Разработанный метод проектно-баллистического анализа траектории возвращения КА с поверхности Луны опирается на решение вспомогательной задачи. Главной особенностью вспомогательной задачи является то, что решение оптимизационной проблемы не предполагает использования каких-либо методов локальной оптимизации (как в работах [8–10]). Предложенный алгоритм прост и всегда приводит к решению, которое с очень большой степенью вероятности можно рассматривать как глобальный оптимум. Последнее связано непосредственно с «построением» метода, который предполагает исследование оптимизируемой функции на полной сетке значений трех ее аргументов.

Использование вспомогательной задачи позволяет получить качественные оценки основных характеристик рассматриваемого маневра. В частности, выявить окна запуска и области поверхности Луны, старт из которых не требует больших энергозатрат. Решение вспомогательной задачи дает хорошее начальное приближение для анализа и оптимизации траектории возвращения КА с поверхности Луны на Землю с использованием математической модели, описывающей траекторию КА в рамках задачи четырех тел.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 21-19-00683.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bridges J. Chang'e 5: China launches sample return mission to the moon — is it winning the new space race? URL: <https://www.space.com/change-5-china-moon-sample-return-mission-to-the-moon-winning-new-space-race> (дата обращения 10.12.2021).
- [2] Standish E.M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*. DE405/LE405. JPL IOM 312.F-98-048. 1998.
- [3] Archinal B.A., A'Hearn M.F., Bowell E., Conrad A., Consolmagno G.J., Courtin R. *Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009*. Springer Science+Business Media B.V., 2010, 35 p. DOI: 10.1007/s10569-010-9320-4
- [4] Konstantinov M.S. Method of designing interplanetary trajectories of a SC with EP within the problem of many-bodies. *AIP Conference Proceedings*, 2021, vol. 2318, no. 1, pp. 110019-1–11019-11. <https://doi.org/10.1063/5.0035791>
- [5] Гусев Л.И. Метод определения характеристических скоростей при перелетах КА с орбиты ИСЗ на орбиты ИСЛ и обратно. *Космические исследования*, 1974, т. 12, вып. 5, с. 682–690.
- [6] Li J., Gong Sh., Wang X., Li J. Launch window for manned Moon-to-Earth trajectories. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 2012, vol. 84, no. 5, pp. 344–356. DOI: 10.1108/00022661211255520
- [7] Самотохин А.С., Тучин А.Г. Оптимизация одноимпульсных траекторий возврата с орбиты искусственного спутника Луны. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. № 56. 2016. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-56> (дата обращения 02.07.2021). DOI: 10.20948/prepr-2016-56

- [8] Fazelzadeh S.A., Varzandian G.A. Minimum time Earth-Moon and Moon-Earth orbital maneuvers using time-domain finite element method. *Acta Astronautica*, 2010, vol. 66, no. 3/4, pp. 528–538. DOI: 10.1016/j.actaastro.2009.07.021
- [9] Miele A., Mancuso S. Optimal trajectories for Earth-Moon-Earth flight. *Acta Astronautica*, 2001, vol. 49, no. 2, pp. 59–71. DOI: 10.1016/s0094-5765(01)00007-8
- [10] Ocampo C., Saudemont R.R. Initial trajectory model for a multi-maneuver Moon-to-Earth abort sequence. *J. of Guidance, Control and Dynamics*, 2010, vol. 33, no. 4, pp. 1184–1194.

Статья поступила в редакцию 07.05.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Константинов М.С., Николичев И.А., Аунг Мьо Тант. Анализ траектории возвращения космического аппарата с поверхности Луны в заданный район Земли. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 12.
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-12-2139>

Константинов Михаил Сергеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Космическая техника и ракетостроение» Московского авиационного института. Область деятельности и научных интересов: проектно-баллистический анализ, проектирование космических миссий. e-mail: mkonst@bk.ru

Николичев Илья Андреевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Космическая техника и ракетостроение» Московского авиационного института. Область деятельности и научных интересов: проектно-баллистический анализ, проектирование космических миссий. e-mail: ianikolichiev@gmail.com

Аунг Мьо Тант — аспирант Московского авиационного института. Область деятельности и научных интересов: проектно-баллистический анализ, проектирование космических миссий. e-mail: aungmyothant4696@gmail.com

Analysis of the trajectory of spacecraft return from the lunar surface to a given region of the Earth

© M.S. Konstantinov, I.A. Nikolichev, Aung Myo Thant

Moscow Aviation Institute, Moscow, 125993, Russia

The paper describes a method developed for designing the trajectory of a spacecraft flight from the lunar surface to a given area of the Earth's surface and analyzes a single-pulse flight scheme, in which the trajectory of a take-off lunar rocket is approximated by a single velocity pulse. The characteristics of the spacecraft entry into the Earth's atmosphere are chosen so as to ensure that the conditions along the entry corridor during the ballistic entry are met and to ensure the landing of the reentry vehicle at a given point on the Earth's surface. The criterion for optimizing the trajectory of the spacecraft return to the Earth is considered to be the value of the impulse that provides the spacecraft launch from the lunar surface. The method relies on the analysis of an auxiliary problem, the solution of which makes it possible to estimate the main properties of the investigated maneuver and find an initial approximation for the selected characteristics of the optimized trajectory.

Keywords: spacecraft return from the lunar surface, entry corridor conditions, spacecraft landing in a given area

This work was supported by the Russian Science Foundation grant No. 21-19-00683.

REFERENCES

- [1] Bridges J. Chang'e 5: China launches sample return mission to the moon — is it winning the new space race? Available at: <https://www.space.com/change-5-china-moon-sample-return-mission-to-the-moon-winning-new-space-race> (accessed 10 December 2021).
- [2] Standish E.M. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides*. DE405/LE405. JPL IOM 312.F-98-048. 1998.
- [3] Archinal B.A., A'Hearn M.F., Bowell E., Conrad A., Consolmagno G.J., Courtin R. *Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2009*. Springer Science+Business Media B.V., 2010, 35 p. DOI: 10.1007/s10569-010-9320-4
- [4] Konstantinov M.S. Method of designing interplanetary trajectories of a SC with EP within the problem of many-bodies. *AIP Conference Proceedings*, 2021, vol. 2318, no. 1, pp. 110019-1–11019-11. <https://doi.org/10.1063/5.0035791>
- [5] Gusev L.I. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic research*, 1974, vol. 12, no. 5, pp. 682–690.
- [6] Li J., Gong Sh., Wang X., Li J. Launch window for manned Moon-to-Earth trajectories. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 2012, vol. 84, no. 5, pp. 344–356. DOI: 10.1108/00022661211255520
- [7] Samotokhin A.S., Tuchin A.G. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha — Keldysh Institute preprints*, no. 56, 2016, 24 p. DOI: 10.20948/prepr-2016-56. Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-56> (accessed July 2, 2020).
- [8] Fazelzadeh S.A., Varzandian G.A. Minimum time Earth-Moon and Moon-to-Earth orbital maneuvers using time-domain finite element method. *Acta Astronautica*, 2010, vol. 66, no. 3/4, pp. 528–538.

- [9] Miele A., Mancuso S. Optimal trajectories for Earth-Moon-Earth flight. *Acta Astronautica*, 2001, vol. 49, no. 2, pp. 59–71.
DOI: 10.1016/s0094-5765(01)00007-8
- [10] Ocampo C., Saudemont R.R. Initial trajectory model for multi-maneuver Moon-to-Earth abort sequence. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2010, vol. 33, no. 4, pp. 1184–1194.

Konstantinov M.S., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Moscow Aviation Institute. Research interests: astrodynamics, mission design. e-mail: mkonst@bk.ru

Nikolichev I.A., Dr. Sc. (Eng.), Moscow Aviation Institute. Research interests: astrodynamics, mission design. e-mail: ianikolichev@gmail.com

Aung Myo Thant, post-graduate, Moscow Aviation Institute. Research interests: design and ballistic analysis, mission design. e-mail: aungmyothant4696@gmail.com