

Оптимизация наведения аэрокосмического самолета в район посадки

© А.Ю. Мельников, С.Н. Илюхин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Представлена методика построения процедуры оптимального наведения аэрокосмического самолета. В основе методики лежит адаптация принципа максимума Понтрягина для рассматриваемого класса задач. При этом точность наведения обеспечивается решением краевой задачи, которая периодически выполняется в процессе полета. Приведена разработанная процедура прогноза конечных параметров оптимального полета по упрощенной модели движения, позволяющая также определить значение фактического промаха. Для предложенной методики дано развернутое математическое описание. Реализуемость этой методики обеспечивается путем минимизации объема вычислительных операций. Эффективность алгоритмов наведения проиллюстрирована численным примером с процедурой моделирования полета с учетом всех существенных факторов. Приведены также расчетные примеры решения краевых задач и результаты моделирования оптимального наведения.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, аэрокосмический самолет, наведение с упреждением

Введение. Идея гиперзвукового аэрокосмического самолета (АКС) была воплощена в 1970–1990-е годы путем создания и эксплуатации многоразовых аэрокосмических систем типа Space Shuttle, «Буран» и ряда малых экспериментальных аппаратов научного и оборонного назначения. Спустя десятилетие ведущие космические державы возобновили гиперзвуковые проекты (X-43, HGV, WU-14) и достигли значительных успехов в области конструкционных материалов, приборов, агрегатов, компоновки и аэродинамики. Для реализации потенциальных возможностей АКС не менее важна и необходима оптимизация алгоритмов управления, поэтому эти проекты сопровождаются научно-прикладными исследованиями задач управления [1–8].

Цель настоящей работы — формирование алгоритмов оптимального управления углом крена при наведении аэрокосмического самолета в район посадки.

В близких по целям и методам решения работах были исследованы методы линеаризации и дифференцирования критериальных функционалов [9], а также получены аналитические формулы приближенно оптимального управления и конечномерной аппроксимации траектории [10].

Общие требования к управлению АКС были сформулированы в работе [4]:

- реализуемость алгоритмов в системе управления;
- выполнение технических ограничений на управление и условия полета;
- надежность, устойчивость к возмущениям и высокая точность наведения;
- эффективность использования баллистических возможностей аппарата;
- оперативность подготовки и выполнения полетов.

В некотором роде классическим инструментом для оптимизации управления является принцип максимума Понтрягина [11, 12], но его реализация предусматривает сложные алгоритмы, связанные с интегрированием сопряженного вектора и решением краевых задач.

Одной из проблем, препятствующих применению принципа максимума, была и остается ограниченность бортовых вычислительных возможностей. В последнее время эти возможности многократно возросли, что позволило существенно повысить эффективность управления, оперативность и качество выполнения полетов.

Идея предлагаемой методики состоит в том, что упрощение модели движения АКС при оптимизации наведения не приведет к существенным энергетическим потерям.

Подготовка и реализация алгоритмов наведения состоит из следующих процедур:

- формирование полетного задания;
- прогноз конечных параметров оптимального полета;
- расчет координат упрежденной точки и промаха;
- решение краевой задачи и корректировка констант наведения;
- управление тягой и углом атаки по найденным константам.

Упрощение модели и сокращение количества вычислений позволяют решать краевую задачу в процессе полета параллельно с другими бортовыми расчетами. По мере приближения к району посадки продолжительность расчета и погрешности прогноза уменьшаются. Предложенная методика может найти применение в задачах оптимизации управления тягой и углом крена после отделения от ускорителя или спуска с орбиты при выполнении АКС следующих квазигоризонтальных маневров:

- наведение в район посадки;
- выход на орбиту с заданными параметрами.

Предложенная методика может быть адаптирована не только к земным условиям, но и к другим планетам и спутникам с плотной атмосферой. При достаточных располагаемых значениях аэродина-

мического качества и запаса топлива АКС способен достичь любых требуемых низких орбит или координат поверхности планеты.

Постановка задачи прогноза оптимальных траекторий. В основу разработки алгоритмов наведения были положены приведенные ниже условия и допущения.

В качестве метода наведения выбран метод наведения в упреждающую точку [13]. Гиперзвуковой аэрокосмический самолет спускается с орбиты и выходит на квазигоризонтальные условия полета (рис. 1). Далее, путем управления тягой и углом атаки, АКС наводится в район посадки, заданный точкой прицеливания (широтой φ_k , долготой λ_k) и радиусом допустимого промаха ε_d . Дополнительным требованием к наведению является обеспечение заданной конечной скорости V_k в районе прицеливания.

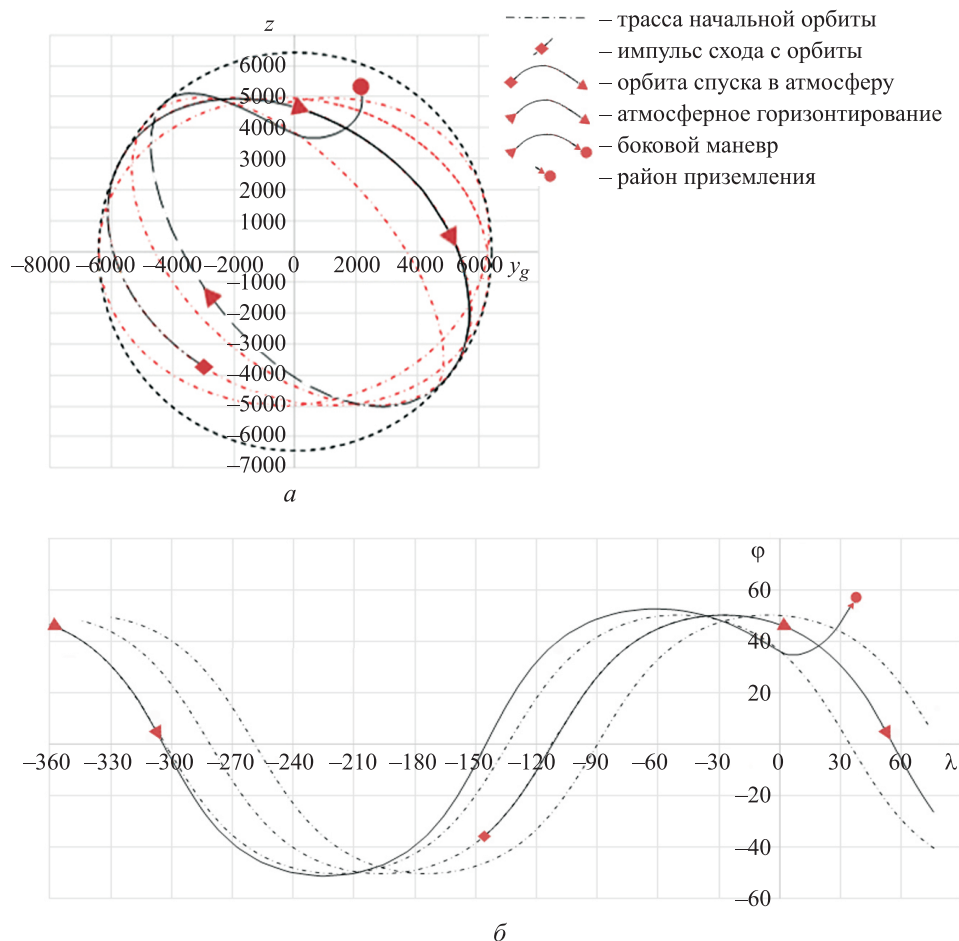


Рис. 1. Схема полета гиперзвукового аэрокосмического самолета

Полет проходит пассивно по сферической поверхности радиусом R с углом атаки максимального аэродинамического качества K . В случае избытка конечной скорости в районе посадки аэродинамическое качество снижается вследствие увеличения угла атаки и торможения щитками. Если кинетической энергии недостаточно для достижения заданных конечных параметров, то в процессе полета включается двигательная установка (ДУ).

При формировании математической модели принималось, что гравитационное поле планеты является центральным, а атмосфера — сферической и неподвижной. Колебания радиальной скорости и ветер вносят незначительные ошибки в расчет квазигоризонтальных траекторий, поэтому в данной постановке задачи не учитываются. Интегрирование системы дифференциальных уравнений проводилось методом Рунге — Кутты, решение краевой задачи выполнялось методом секущих [5].

Принятым допущениям соответствует система уравнений движения в инерциальной сферической системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{m} = [-m_c, 0]; \\ \dot{V} = \frac{V^2 - u}{KR \cos \gamma} - \frac{m W}{m}; \\ \dot{A} = \frac{(u - V^2) \operatorname{tg} \gamma + V^2 \sin A \operatorname{tg} \varphi}{R / V}; \\ \dot{\varphi} = V \cos A / R; \\ \dot{\lambda} = V \sin A / R \cos \varphi, \end{array} \right. \quad (1)$$

где m — масса АКС; m_c — расход топлива; V — скорость полета; u — потенциал гравитационного поля, $u = \mu / R$; K — аэродинамическое качество АКС; $R = \text{const}$ — суборбитальный радиус; γ — управляющий угол крена; W — скорость истечения газа ДУ; A — азимут; φ — широта; λ — долгота.

В качестве критериев оптимизации приняты:

m_{\max} — минимум расход топлива АКС для достижения заданных конечных параметров полета (максимизация конечной массы);

d_{\min} — минимум расстояния до точки прицеливания при расчете границ долготы и широты зоны посадки (минимизация промаха).

Каждому из критериев оптимальности соответствует одно из уравнений системы (1), поэтому дополнительные уравнения для критериев оптимальности не требуются.

Ограничение на управление задано константой k_V , м/с²:

$$\left| (u - V^2) \operatorname{tg} \gamma \right| \leq \frac{k_V R V_k}{V}. \quad (2)$$

Математическая модель оптимального движения. Для получения оптимальных траекторий (экстремалей) составим гамильтониан системы уравнений (1):

$$H = P_A \frac{(u - V^2) \operatorname{tg} \gamma + V^2 \sin A \operatorname{tg} \varphi}{VR} + P_\varphi \cos A \cdot \frac{V}{R} - P_v \left(\frac{u - V^2}{K R \cos \gamma} + \dot{m} \frac{W}{m} \right) + P_m \dot{m}.$$

Перегруппируем гамильтониан:

$$H = \left(\frac{u}{V} - V \right) \frac{P_A \sin \gamma - P_v \frac{V}{K}}{R \cos \gamma} + (P_A \sin A \operatorname{tg} \varphi + P_\varphi \cos A) \frac{V}{R} + \dot{m} (P_m - P_v W / m),$$

определим его частные производные по m , V , A , и φ , соответствующие сопряженным уравнениям:

$$\begin{cases} \dot{P}_m = -\dot{m} P_v W / m^2; \\ \dot{P}_v = (P_A (1 + u / V^2) \operatorname{tg} \gamma - 2P_v V / K \cos \gamma - P_A \sin A \operatorname{tg} \varphi - P_\varphi \cos A) / R; \\ \dot{P}_A = (P_\varphi \sin A - P_A \cos A \operatorname{tg} \varphi) V / R; \\ \dot{P}_\varphi = -\frac{V P_A \sin A}{R / \cos^2 \varphi}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\dot{P}_\lambda = -dH / d\lambda = 0 \Rightarrow P_\lambda = 0.$$

Определим оптимальное управление, соответствующее условиям $H(\gamma, \dot{m}) = \max$:

$$dH / d\gamma = 0 \Rightarrow P_A / V - P_v \sin \gamma / K = 0 \Rightarrow \sin \gamma = \frac{K P_A}{P_v / V}, \quad (4)$$

оптимальное управление ДУ соответствует функции переключения:

$$\begin{cases} P_v W > P_m m \Rightarrow \dot{m} = -m_c; \\ P_v W \leq P_m m \Rightarrow \dot{m} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Зададим ортодромическую СК так, чтобы ее полюс был в точке прицеливания, ось z проходила через полюс, а геоцентрическая ось x —

в плоскости меридиана с долготой λ_0 . Ось u дополняет систему до правой тройки векторов (рис. 2).

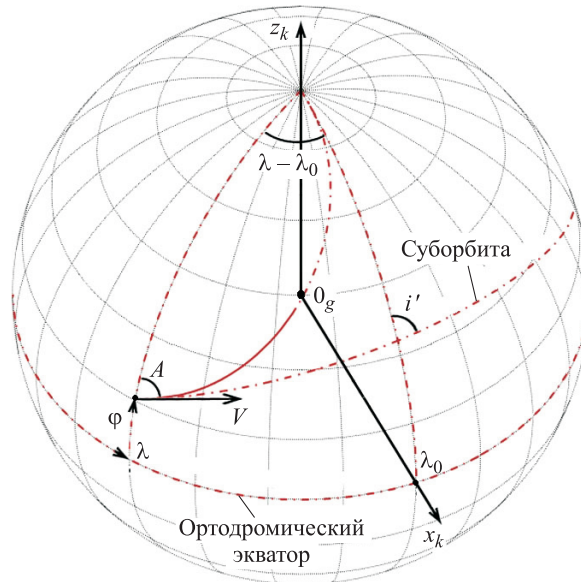


Рис. 2. Схема ортодромической системы координат

Согласно работе [9], структура уравнений (3) позволяет выразить сопряженные параметры через текущие параметры движения:

$$P_A = \sin(\lambda - \lambda_0) \cos\varphi; \quad P_\varphi = \cos(\lambda - \lambda_0). \quad (6)$$

Обоснованием достоверности полученных формул (6) является совпадение их производных с уравнениями (3):

$$\begin{aligned} \dot{P}_A &= (\sin(\lambda - \lambda_0) \cos\varphi)' = (\cos(\lambda - \lambda_0) \sin A - \sin(\lambda - \lambda_0) \cos\varphi \cos A \operatorname{tg}\varphi) V/R = \\ &= (P_\varphi \sin A - P_A \cos A \operatorname{tg}\varphi) V/R; \end{aligned}$$

$$\dot{P}_\varphi = (\cos(\lambda - \lambda_0))' = \frac{-V \sin(\lambda - \lambda_0) \sin A}{R / \cos\varphi} = -\frac{V P_A \sin A}{R / \cos^2\varphi}.$$

Часть уравнений (2, 3) можно выразить через i' — наклонение суборбиты к меридиану λ_0 :

$$\cos i' = P_A \sin A \operatorname{tg}\varphi + P_\varphi \cos A = \sin(\lambda - \lambda_0) \sin A \sin\varphi + \cos(\lambda - \lambda_0) \cos A.$$

Из условия $H = 0$ и формулы (4) определим оптимальные $\cos\gamma$ и $\operatorname{tg}\gamma$:

$$\begin{aligned}
 P_A \left(\frac{u}{V} - V \right) \operatorname{tg} \gamma - P_v \frac{(u - V^2)}{K / \cos \gamma} + V \cos i' - \dot{m} R (P_v W / m - P_m) &= 0; \\
 (u - V^2) \left(1 - \frac{K P_A \sin \gamma / V}{P_v} \right) P_v / K / \cos \gamma = V \cos i' + \dot{m} (P_m - P_v W / m); \\
 (u - V^2) P_v (1 - \sin^2 \gamma) = K \cos \gamma (V \cos i' + \dot{m} (P_m - P_v W / m)); \\
 \cos \gamma = \frac{(V \cos i' - \dot{m} (P_v W / m - P_m)) K}{P_v / (u - V^2)}; \\
 \operatorname{tg} \gamma = \frac{(u / V - V) P_A}{V \cos i' + \dot{m} (P_m - P_v W / m)}. \tag{7}
 \end{aligned}$$

В целях минимизации вычислений представим системы уравнений (1), (3) в декартовой СК (рис. 3), в которой ось x_k направлена в упреждающую точку, а ось z_k — азимутом j_0 относительно полюса планеты. Это упростит расчетные формулы и позволит заменить тригонометрические функции операциями деления и умножения.

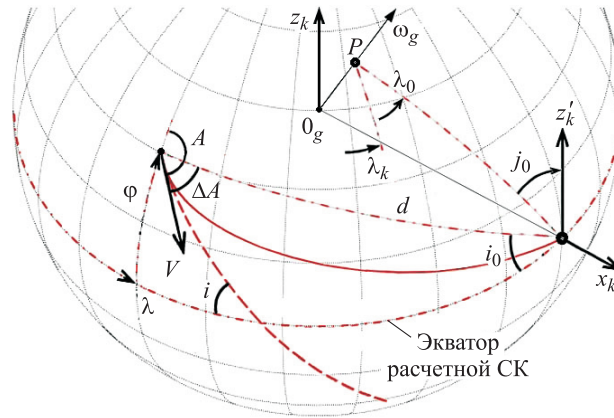


Рис. 3. Схема расчетной системы координат (P — полюс планеты)

Параметры АКС в расчетной СК. В инерциальной СК точка прицеливания движется с угловой скоростью планеты ω_g , поэтому долгота упреждающей точки λ_0 зависит от конечного времени полета t_k :

$$\lambda_0 = \lambda_k + \omega_g t_k. \tag{8}$$

В этом случае базис расчетной СК можно представить следующим образом:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos j_0 & -\sin j_0 \\ 0 & \sin j_0 & \cos j_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi_k & 0 & \sin \varphi_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_k & 0 & \cos \varphi_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda_0 & \sin \lambda_0 & 0 \\ -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Определим параметры АКС в расчетной СК:

– координаты
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [B] \cdot \bar{r}; \quad (10)$$

– долготу
$$\lambda = 2 \arctg \left(\frac{y}{x + R_\varphi} \right); \quad (11)$$

– вектор скорости

$$\begin{bmatrix} V_r \\ V_\lambda \\ V_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_\varphi & 0 & z \\ 0 & R & 0 \\ -z & 0 & R_\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot [B] \cdot \frac{\bar{V}}{R}, \quad (12)$$

где \bar{r} — радиус-вектор АКС в инерциальной СК; R_φ — проекция \bar{r} на плоскость экватора расчетной СК, $R_\varphi = \sqrt{R^2 - z^2}$; V_r , V_λ и V_φ — радиальная, восточная и северная проекции скорости.

Переведем сопряженные параметры (6) в расчетную СК:

$$P_A = -\sin i_0 \sin d_0 = -\sin \varphi, \quad P_\varphi = \cos i_0,$$

где i_0 — наклонение плоскости наведения к ортодромическому экватору.

Выразим углы и оптимальное управление (7) через проекции векторов:

$$\sin \varphi = z / R, \quad \cos \varphi = R_\varphi / R;$$

$$\sin A = V_\lambda / V, \quad \cos A = V_\varphi / V;$$

$$\cos i = \sin A \cos \varphi = \frac{V_\lambda R_\varphi}{V R};$$

$$\cos \gamma = \frac{(V \cos i + \dot{m} (P_m - P_v W / m)) K}{P_v / (u - V^2)};$$

$$P_v = \frac{KP_A}{V / \sin\gamma};$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{z(V - u / V)}{V_\lambda R_\phi + \dot{m}R(P_m - P_v W / m)}, \quad (13)$$

где i — наклонение суборбиты к ортодромическому экватору.

Зададим обобщенный параметр управления тягой:

$$P_w = R(P_m - P_v W / m);$$

$$\dot{P}_w = \frac{2P_v V / K - P_A(1 + u / V^2) \sin\gamma}{\cos\gamma + \cos i} \frac{W}{m};$$

$$\dot{P}_w = \frac{(V_\lambda R_\phi - z(C_v \operatorname{tg}\gamma + 2V \operatorname{ctg}\gamma))W / V}{m / R}. \quad (14)$$

Тогда функция переключения (5) записывается следующим образом:

$$\begin{cases} P_w < 0 & \Rightarrow \dot{m} = -m_c, \\ P_w > 0 & \Rightarrow \dot{m} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Для дополнительного снижения вычислительных затрат введем параметр C_v и составим замкнутую систему уравнений для прогноза активного движения:

$$\begin{cases} V = \sqrt{V_\lambda^2 + V_\phi^2}; \\ R_\phi = \sqrt{R^2 - z^2}; \\ C_v = V - \frac{u}{V}; \\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{z C_v}{V_\lambda R_\phi + \dot{m} P_w}; \\ \dot{V} = V C_v \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\gamma + 1}}{K / R} - \dot{m} \frac{W}{m}; \\ \dot{A} = \frac{z V_\lambda / R_\phi - C_v \operatorname{tg}\gamma}{R}; \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \dot{m} = -m_c; \\ \dot{P}_W = \frac{(V_\lambda R_\phi - z(C_V \operatorname{tg} \gamma + 2V \operatorname{ctg} \gamma))W / V}{m / R}; \\ \dot{V}_\phi = \dot{V}V_\phi / V - V_\lambda \dot{A}; \\ \dot{V}_\lambda = \dot{V}V_\lambda / V + V_\phi \dot{A}; \\ \dot{z} = V_\phi \frac{R_\phi}{R}; \\ \dot{\lambda} = V_\lambda / R_\phi, \end{cases} \quad (17)$$

Если нарушается ограничение (2), то прогнозируется предельный боковой маневр:

$$|\operatorname{tg} \gamma| = \frac{k_V V_k R}{C_V / V^2}. \quad (18)$$

Согласно принятым допущениям, начинать решение краевой задачи следует после спуска с орбиты и выхода на квазигоризонтальные условия полета: $\dot{V}_r \approx 0$ и $V_r \approx 0$. Если начальный параметр $C_V > 0$, то в процессе интегрирования $\operatorname{tg} \gamma$ пересечет нулевое значение, и возникнет ошибка в уравнении (14): $\dot{P}_W = \operatorname{ctg} \gamma$.

Экстремали с активным участком полета крайне неустойчивы относительно начального параметра управления тягой P_W . Поэтому начальная краевая задача формируется по условию пассивного планирования. В этом случае формулы (16) сокращаются:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= 0, \quad \dot{P}_W = 0; \\ \operatorname{tg} \gamma &= z C_V / (V_\lambda R_\phi); \\ \dot{V} &= V C_V \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma + 1} / (K R); \\ \dot{A} &= z (V_\lambda^2 - C_V^2) / (V_\lambda R_\phi R). \end{aligned}$$

Траектория прогнозируется по сокращенной системе уравнений пассивного движения:

$$\begin{cases} \dot{V}_\phi = \dot{V}V_\phi - V_\lambda \dot{A}; \\ \dot{V}_\lambda = \dot{V}V_\lambda + V_\phi \dot{A}; \\ \dot{z} = V_\phi R_\phi / R; \\ \dot{\lambda} = V_\lambda / R_\phi. \end{cases} \quad (19)$$

Если нарушается ограничение (2), то прогнозируется предельный боковой маневр:

$$|\operatorname{tg}\gamma| = \frac{k_V V_k R}{C_V / V^2}.$$

Решение краевой задачи на пассивном участке полета. Варьируемым параметром при решении краевой задачи является j_0 — азимут направления оси z_k расчетной СК.

Согласно методу продолжения решения по параметру, первое приближение конечного времени полета АКС t_k и аргумента j_0 задается из предыдущего решения краевой задачи. Шаг поиска задается как разность предыдущих решений:

$$\Delta j = j_{-1} - j_{-2}. \quad (20)$$

Долгота упрежденной точки и начальные параметры АКС в расчетной СК (8)–(12) определяются по текущим навигационным данным.

Процедура прогноза интегрирует систему уравнений (19) до выполнения любого из конечных условий:

$$d > 0 \text{ или } V \leq V_k, \quad (21)$$

где d — продольный промах, определяемый по формуле

$$d = \frac{V_\lambda R \lambda + V_\varphi z}{V}. \quad (22)$$

На выходе процедуры прогноза определяется боковой промах:

$$b_k = b(j_0) = \frac{V_\lambda z - V_\varphi R \lambda}{V}. \quad (23)$$

и уточняется конечное время полета АКС:

$$t_k = t_0 + \Delta t, \quad (24)$$

где t_0 — время полета на момент начала решения задачи; Δt — продолжительность полета.

Поиск j_0 осуществляется в цикле рекуррентных операций:

- 1) ввод начального промаха $b_0 = b_k$;
- 2) приращение аргумента $j_0 = j_0 + \Delta j$;
- 3) уточнение долготы упрежденной точки и начальных параметров АКС (8)–(12);
- 4) прогноз траектории и промаха (21)–(24) $b_k = b(j_0)$;

5) расчет шага аргумента поиска $\Delta j = \Delta j b_k / (b_0 - b_k)$;

6) проверка условия завершения цикла $|b_k| \leq \varepsilon_d$.

Если в результате решения получается недолет ($d < 0$), то необходим прогноз с активным участком полета.

Решение краевой задачи на активном участке полета. Прогноз активного полета возможен только после снижения скорости до $V^2 < u$. По результатам решения задачи пассивного наведения задается аргумент поиска j_0 и вычисляются начальные параметры АКС по формулам (8)–(12).

Для определения интервала активного полета введем второй аргумент поиска: V_p — значение скорости включения ДУ. Если

$$\begin{cases} V > V_p \Rightarrow \dot{m} = 0; \\ V \geq V_p \Rightarrow \dot{m} = -m_c, P_W = 0. \end{cases} \quad (25)$$

После включения ДУ прогнозируется активный полет по (16)–(19), ДУ работает до тех пор, пока $P_W \leq 0$. При достижении условия $P_W \geq 0$ ДУ выключается ($\dot{m} = 0$).

Первое приближение аргумента V_p задается из предыдущего решения краевой задачи, шаг поиска задается как разность предыдущих решений:

$$\Delta V = V_{-1} - V_{-2}.$$

Если поиск V_p проводится впервые, то задается $V_p = V_k$. В этом случае прогнозируется крайний вариант пассивного полета — параметр P_W (27) касается нуля, но в соответствии с функцией (15) ДУ не включается. Как правило, для достижения точки наведения достаточно одного интервала работы ДУ, но возможен и повторный активный участок согласно функции (15). Расчет траектории завершается по условию $|V - V_k| \leq \varepsilon_V$.

Поиск j_0 и V_p происходит в цикле рекуррентных операций:

1) прогноз начальной траектории (16)–(18) и невязок (23)–(24)

$$b_0 = b(j_0, V_p), \quad d_0 = d(j_0, V_p);$$

2) определение невязок по прогнозу с приращением Δj

$$b_j = b(j_0 + \Delta j, V_p), \quad d_j = d(j_0 + \Delta j, V_p);$$

3) определение невязок по прогнозу с приращением ΔP

$$b_p = b(j_0, V_p + \Delta V), \quad d_p = d(j_0, V_p + \Delta V);$$

4) расчет матрицы Якоби

$$J = \begin{bmatrix} (b_0 - b_j)/\Delta j; & (b_0 - b_p)/\Delta V \\ (d_0 - d_j)/\Delta j; & (d_0 - d_p)/\Delta V \end{bmatrix};$$

5) расчет шагов поиска $\begin{bmatrix} \Delta j \\ \Delta V \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} b_0 \\ d_0 \end{bmatrix};$

6) коррекция аргументов поиска $\begin{bmatrix} j_0 \\ V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_0 \\ V_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta j \\ \Delta V \end{bmatrix};$

7) уточнение координат упрежденной точки и параметров АКС по формулам (8)–(12);

8) проверка условия завершения цикла

$$\sqrt{b_0^2 + d_0^2} \leq \varepsilon_d. \quad (28)$$

Применение методики наведения в системе управления АКС.

Перед выполнением маневра в системе управления (СУ) проводятся выбор точки схода с орбиты и предварительное решение краевой задачи наведения. Тормозной импульс должен быть минимален по условию, что на высоте перицентра переходной орбиты параметры атмосферы гарантируют возможность удержания АКС от рикошета.

До начала решения краевой задачи по эллиптической теории определяются время полета t_0 , векторы радиуса и скорости в перицентре, вводится первое приближение конечного времени полета АКС и аргумента поиска:

$$t_k = t_0 + K(V^2 - V_k^2)/(2k_V V_k),$$

где t_0 — время полета на момент начала решения задачи, рассчитанное для перицентра.

Азимут оси расчетной СК вводится по условию принадлежности начального и конечного радиус-векторов АКС к плоскости экватора расчетной СК:

$$j_0 = \arctg \left(\frac{(x \cos \lambda_0 + y \sin \lambda_0) \sin \varphi_k - z \cos \varphi_k}{y \cos \lambda_0 - x \sin \lambda_0} \right).$$

По расчетным данным для перицентра определяются начальные параметры АКС по (8)–(12). Начальный шаг поиска задается по условию предельного бокового маневра ($V_\varphi = -V$, $V_\lambda = 0$):

$$\Delta j = \arctg \left(\frac{V_y \cos \lambda_0 - V_x \sin \lambda_0}{V_z \cos \varphi_k - \sin \varphi_k (V_x \cos \lambda_0 + V_y \sin \lambda_0)} \right).$$

Если краевая задача не находит решения, то, значит, дистанции наведения недостаточно для спуска по ограничению (2). В этом случае при поиске попадающей траектории задается дополнительный оборот вокруг планеты, а начальная долгота корректируется против движения:

$$\lambda = \lambda - 2\pi \operatorname{sgn}(V_\lambda).$$

До входа в атмосферу СУ стабилизирует угол атаки на максимально допустимом значении, а угол крена — на 180° . После входа в атмосферу СУ демпфирует колебания радиальной скорости, отклоняя углы атаки и крена относительно программных значений:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_k + k_\alpha (V_r \cos \gamma_p + k_A \Delta A \sin \gamma_p); \\ \gamma = \gamma_p + k_\gamma (V_r \sin \gamma_p + k_A \Delta A \cos \gamma_p), \end{cases} \quad (29)$$

где α_k — угол атаки максимального качества; γ_p — угол крена программы наведения; k_α , k_γ , k_A — коэффициенты усиления по обратной связи; $\Delta A = A_p - A_i$ — рассогласование программного и навигационного азимута.

В соответствии с предварительными значениями времени полета t_k , параметров j_0 и V_p , СУ в реальном времени интегрирует систему уравнений (16)–(18), вычисляя параметры попадающей траектории и программный азимут:

$$A_p = 2 \arctg \left(\frac{V_\lambda}{V + V_\varphi} \right).$$

По навигационным данным и формуле (11) в расчетной СК вычисляются вектор скорости \vec{V}_i и навигационный азимут:

$$A_i = 2 \arctg \left(\frac{V_{\lambda i}}{V_i + V_{\varphi i}} \right).$$

Наибольшие ошибки наведения вносят вращение атмосферы и ветер, что требует коррекции программного угла крена Y_p .

Вертикальный и широтный ветры невелики, поэтому расчетный вектор воздушной скорости учитывает только зональный ветер:

$$\bar{V}_a = \begin{bmatrix} V_r \\ V_\lambda + \Delta V_\lambda \\ V_\varphi \end{bmatrix},$$

где $\Delta V_\lambda = \omega_g R_\varphi + W_\lambda(\bar{r})$; ω_g — угловая скорость вращения планеты; $W_\lambda(\bar{r})$ — скорость струйных течений, заданная в модели ветра.

Для компенсации ветровых возмущений необходима такая коррекция угла крена, при которой боковое ускорение АКС будет равно программному значению.

С учетом отклонения воздушной скорости от траекторной определим боковую силу в траекторной СК (1):

$$F_{zk} = \frac{(\bar{V}_a \cdot \bar{V})F_z + |\bar{V}_a \times \bar{V}|F_x}{V_a / V};$$

$$F_{zk} = \frac{(V^2 + \Delta V_\lambda V_\lambda)F_z + \Delta V_\lambda V_\varphi F_x}{V_a / V}.$$

Здесь F_x , F_z — силы в скоростной СК (1):

$$\begin{cases} F_x = \dot{m}W - m(u - V^2)/(KR \cos Y_p); \\ F_z = m(u - V^2) \operatorname{tg} Y_p / R. \end{cases}$$

Согласно модели прогноза (16), программная боковая сила должна быть $F_{zk} = m(u - V^2) \operatorname{tg} \gamma / R$.

Приравняем возмущенную и программную боковые силы:

$$F_{zk} = \frac{(V^2 + \Delta V_\lambda V_\lambda)F_z + \Delta V_\lambda V_\varphi F_x}{V_a / V} = m(u - V^2) \operatorname{tg} \gamma / R,$$

вставим F_x и F_z , заменим $(V^2 - u)$ произведением $V C_V$ и упростим уравнение

$$(V^2 + \Delta V_\lambda V_\lambda) \operatorname{tg} Y_p - \Delta V_\lambda V_\varphi R \dot{m} / (m C_V) - \Delta V_\lambda V_\varphi / (K \cos Y_p) = V_a V \operatorname{tg} \gamma,$$

$$(V^2 + \Delta V_\lambda V_\lambda) \sin Y_p - \left(\frac{\Delta V_\lambda V_\varphi R \dot{m}}{m C_V} + V_a V \operatorname{tg} \gamma \right) \cos Y_p = \frac{\Delta V_\lambda V_\varphi}{K}.$$

Выполним замену переменных, используя параметр Y_W ,

$$Y_W = \operatorname{arctg} \left(\frac{\Delta V_\lambda V_\phi R \dot{m} / (m C_V) + V_a V \operatorname{tg} \gamma}{V^2 + V_\lambda \Delta V_\lambda} \right),$$

и получим уравнение

$$K (V^2 + V_\lambda \Delta V_\lambda) \sin(Y_p - Y_W) = \Delta V_\lambda V_\phi \cos Y_W. \quad (30)$$

Для определения программного угла крена решаем уравнение (30):

$$Y_p = Y_W + \arcsin \left(\frac{\Delta V_\lambda V_\phi \cos Y_W}{K (V^2 + V_\lambda \Delta V_\lambda)} \right).$$

После выхода на квазигоризонтальные условия полета в СУ проверяется рассогласование программных и навигационных параметров. В случае превышения допустимых погрешностей инициируется процедура краевой задачи, решение которой проходит с низким приоритетом и может занимать существенное время в зависимости от возможностей СУ. По мере приближения к району посадки продолжительность и погрешности прогноза уменьшаются.

В каждом очередном цикле решения краевой задачи начальные параметры АКС определяются по текущим навигационным данным (8)–(12). Начальные аргументы поиска j_0 и V_p задаются согласно методу продолжения по параметру из предыдущих решений, начальные шаги поиска задаются как разности результатов предыдущих решений.

По очередным значениям времени полета t_k , параметров j_0 и V_p система управления в реальном времени интегрирует систему уравнений (16)–(18), вычисляя параметры наведения и попадающую траекторию. СУ управляет тягой по функции (15), углами атаки и крена (29), АКС наводится в район посадки с заданной точностью.

Пример расчетной реализации методики. Для иллюстрации работы и эффективности разработанной методики и математического аппарата рассмотрим численный пример построения управления АКС.

Исходные данные для расчетного примера:

$$K = 3,5; m = 2000 \text{ кг}; \dot{m} = 0,25 \text{ кг/с}; W = 3600 \text{ м/с};$$

$$W_0 = -90^\circ; i_0 = 50^\circ; V_0 = 7800 \text{ м/с}; h_0 = 406 \text{ км};$$

$$\varphi_k = 56^\circ; \lambda_k = 34^\circ; V_k = 2500 \text{ м/с}; R = 6436 \text{ км}.$$

Результаты решения предварительной краевой задачи перед сходом с орбиты, начиная с пассивного полета и заканчивая траекторией с активным участком, представлены на рис. 4.

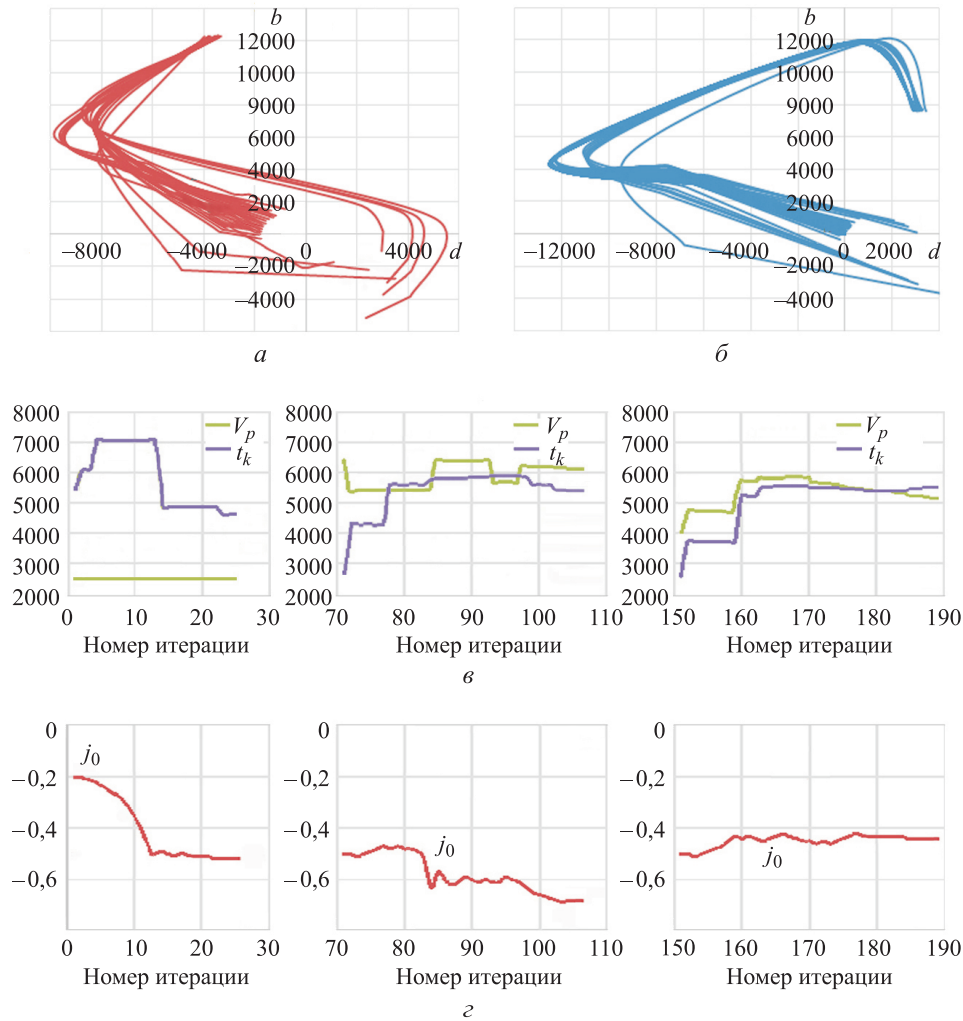


Рис. 4. Итерации поиска попадающей экстремали:

a — пассивные экстремали с недолетом (d — продольный промах, км, b — боковой промах, км); b — активные экстремали с попаданием; v — итерации поиска значения скорости V_p включения ДУ и конечного времени полета t_k ; z — итерации поиска азимута j_0 оси расчетной СК

Начальные итерации (№ 1–26) поиска пассивной траектории ($V_p = V_k$) сошлись по боковому промаху b , но получились с недолетом d (рис. 4, a).

В результате решения краевой задачи с активным участком полета (рис. 4, b) были получены параметры попадающей траектории t_k , V_p и j_0 , которые в начале, середине и при окончании процесса поиска отображены на рис. 4, v и рис. 4, z . При выполнении атмосферного маневра каждая очередная краевая задача сходится за три–пять итераций.

Параметры полета, полученные в процессе поиска попадающей траектории, представлены на рис. 5. В итерации № 26 АКС не затрачивает топлива ($m = \text{const}$) и заканчивает полет на ортодромическом экваторе ($z \sim 0$) за наименьшее время, но с недолетом по долготе. Экстремаль № 107 при снижении скорости до V_p проходит через прицельную точку, но пересекает экватор с превышением конечной скорости V_k . Продолжительность попадающей траектории № 189 наибольшая, а угол крена и необходимый расход топлива — наименьшие.

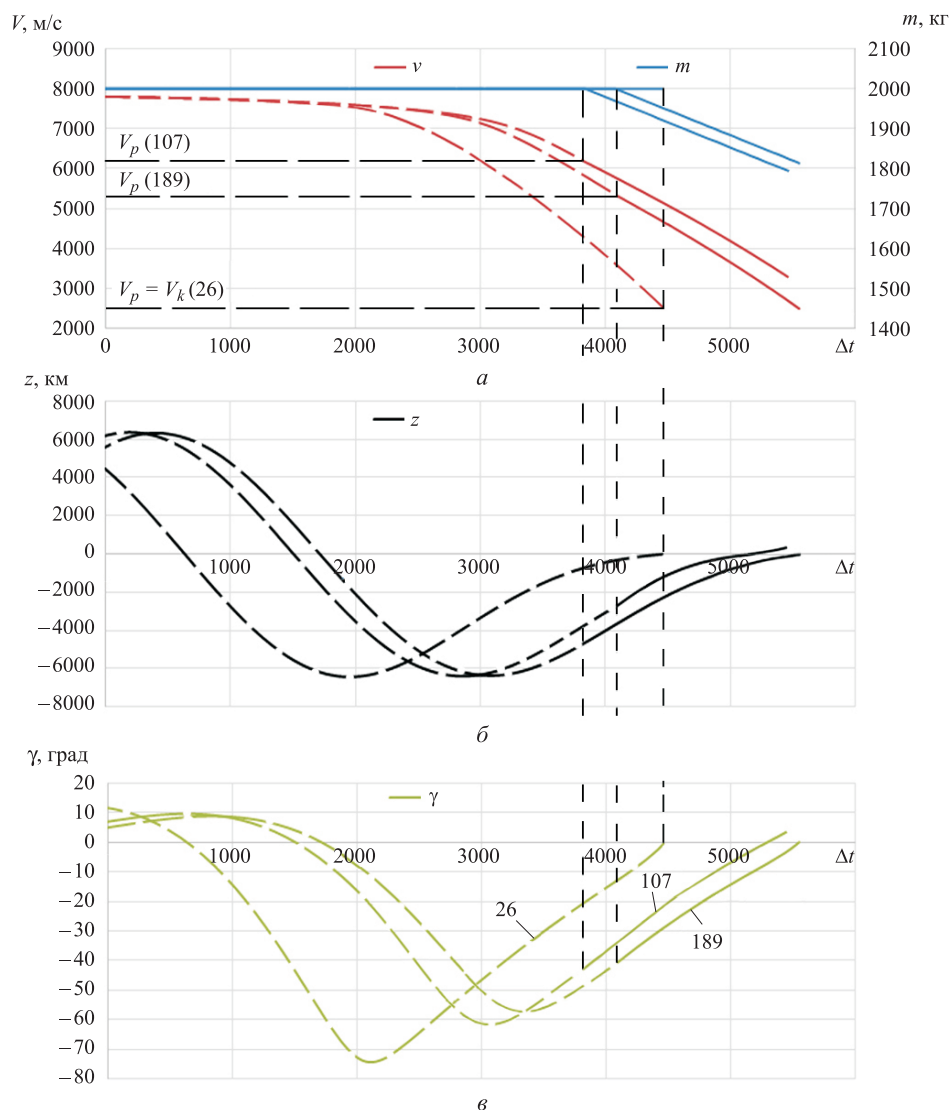


Рис. 5. Параметры полета в начале (итерация № 26), середине (№ 107) и в конце (№ 189) поиска

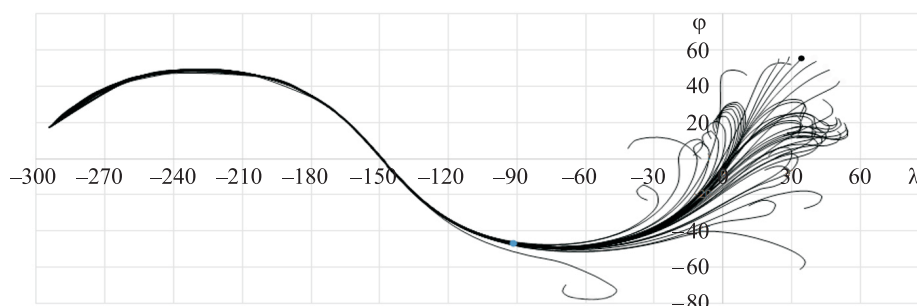


Рис. 6. Трассы полета, полученные в процессе поиска попадающей экстремали

Трассы полета, полученные в процессе поиска, представлены на рис. 6. Видно, что большинство трасс заканчиваются боковыми маневрами, так как оптимальное управление неустойчиво по координате z расчетной СК. Трасса попадающей экстремали, отмеченная черной точкой, заканчивается практически прямолинейно.

Трассы и зона возможной посадки после спуска с орбиты представлены на рис. 7, а. При изменении точки схода с орбиты зона сдвигается вдоль исходной трассы, что позволяет АКС приземлиться практически в любой точке Земли.

Семейство исходных орбит, при спуске с которых возможна посадка в заданном районе с координатами $(0, 0)$ и фиксированным азимутом (-90°) представлено на рис. 7, б. Если нет ограничений на азимут трассы приземления, то посадка в заданном районе возможна практически с любой исходной орбиты.

Зоны достижимости (рис. 8) уменьшаются по мере снижения скорости полета (голубые линии для V_0 , равной 7800, 7100, 6400, 5700, 5000, 4300, 3600, 2900 м/с). Без учета вращения Земли и ветра трассы (пунктирная кривая) и зоны достижимости симметричны относительно плоскости исходной орбиты.

Трассы и зона достижимости (рис. 9) рассчитаны с учетом вращения Земли и ветра в привязке к карте Земли для следующей исходной орбиты:

$$W_0 = -90^\circ, i_0 = 50^\circ, V_0 = 7800 \text{ м/с}, h_0 = 406 \text{ км.}$$

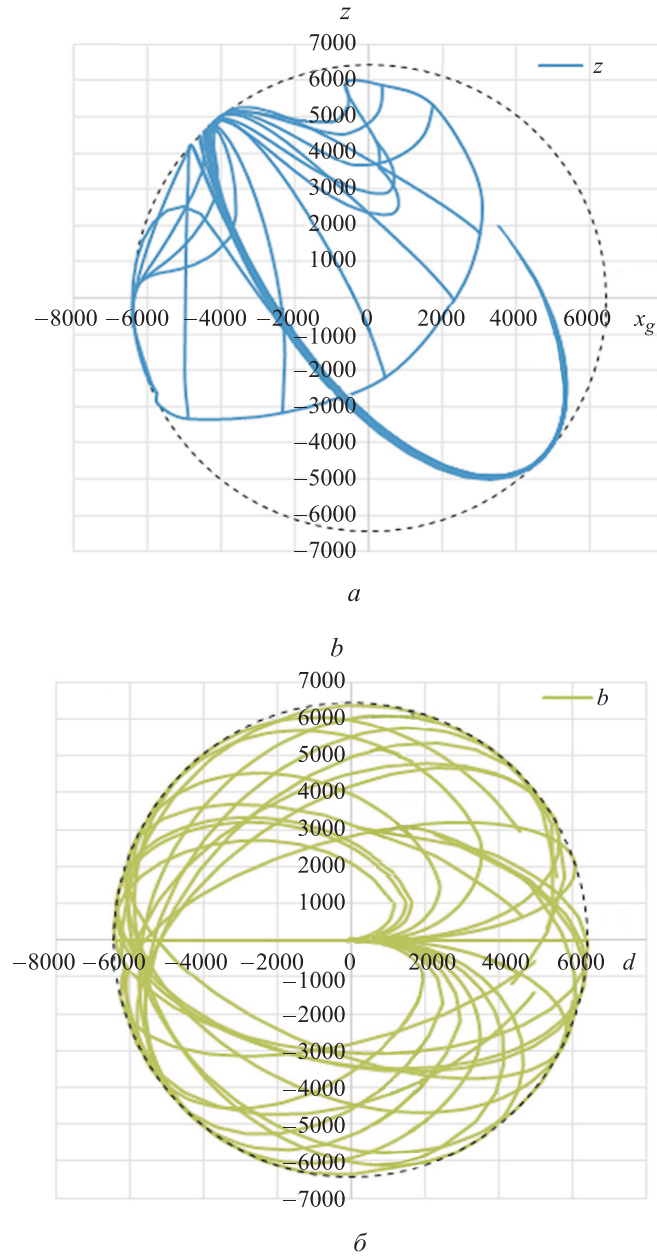


Рис. 7. Трассы и зона посадки после спуска с орбиты: *a* — зона возможной посадки после спуска с орбиты; *б* — семейство орбит, при спуске с которых возможна посадка в заданном районе

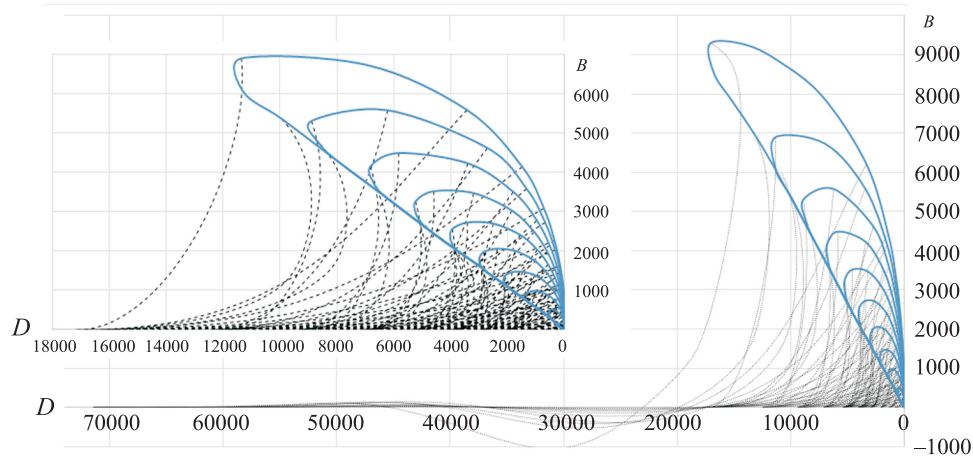


Рис. 8. Трассы и зона достижимости без учета вращения Земли и ветра — боковое отклонение (B , км) по дальности (D , км)



Рис. 9. Трассы и зона достижимости на карте Земли с учетом вращения Земли и ветра

Зона достижимости (рис. 10) с учетом ветра и вращения Земли (голубая линия) деформирована, но не уступает размерам невозмущенной зоны (красная линия).

По результатам проведенного моделирования можно сделать следующие выводы.

1. Ветер и вращение Земли искажают зону достижимости, но не снижают ее размеры.

2. Изменение точки схода с орбиты сдвигает зону достижимости вдоль исходной трассы.

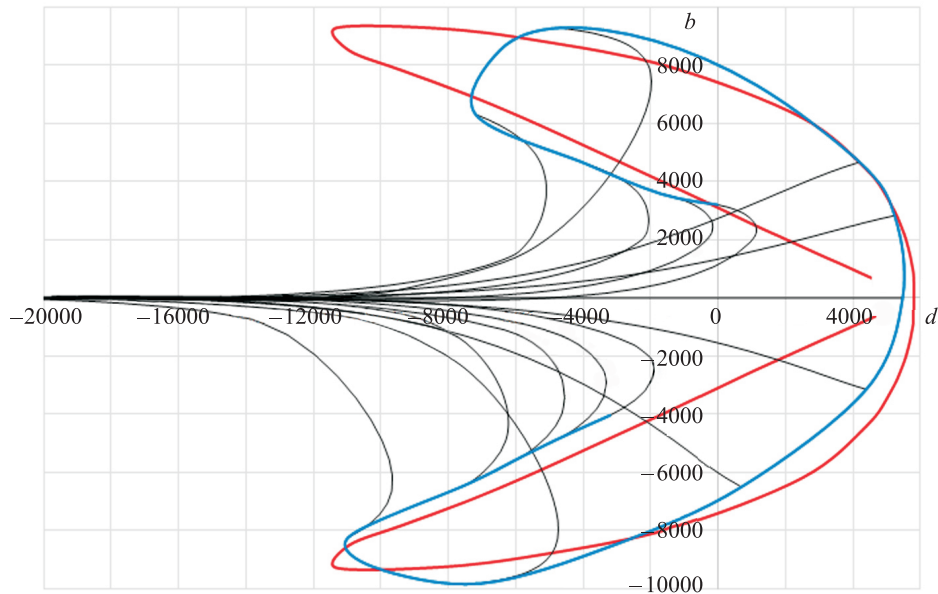


Рис. 10. Зоны достижимости с учетом без учета вращения Земли и ветра

3. При спуске с конкретной орбиты АКС способен приземлиться практически в любой точке Земли, а посадка в заданном районе возможна практически с любой исходной орбиты.

4. Расчетные характеристики АКС, включая ДУ малой тяги ($\dot{m} = 0,25$ кг/с, $W = 3600$ м/с), обеспечивают выполнение всех необходимых маневров.

5. Условия полета допустимы по теплопрочностным нагрузкам даже в предельных случаях.

Заключение. Разработанная методика открывает обширный инструментарий для исследования задач управления АКС. При ее использовании можно выделить некоторые особенности.

В условиях квазигоризонтального полета оптимальный крен зависит только от текущих параметров z , V_λ , V и P_W (при работе ДУ) и не зависит от аэродинамических характеристик АКС:

$$\operatorname{tg} \gamma = z C_V / (V_\lambda R_\phi + \dot{m} P_W).$$

Для наведения в заданный район не требуется расчет большого массива полетного задания, достаточно рассчитать всего три константы: t_k , j_0 и V_p .

В процессе полета БСУ прогнозирует траекторию и решает краевую задачу. Но при этом каждая очередная краевая задача сходится всего за 3–5 итераций, интегрируется система из 4–5 уравнений, состоящих из элементарных операций, а по мере приближения к району

посадки продолжительность расчета и погрешности прогноза уменьшаются.

Оптимальное управление неустойчиво по координате z расчетной СК, но краевые задачи сходятся во всех расчетных случаях.

Алгоритмы наведения в основном соответствуют требованиям по реализуемости, оптимальности, оперативности, надежности, устойчивости, точности и ограничениям.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бетанов В.В., Доронин Д.В., Захаров С.Е. Алгоритм оперативного прогноза траектории движения спускаемого аппарата, совершающего планирующий полет во вращающейся атмосфере. *Космические исследования*, 1999, № 4, с. 365–373.
- [2] Xu B., Shi Z. An overview on flight dynamics and control approaches for hypersonic vehicles. *Sci. China Inf. Sci.*, 2015, vol. 58, no. 7, pp. 1–19. DOI: 10.1007/s11432-014-5273-7
- [3] Корянов В.В., Казаковцев В.П. Методы расчета параметров движения спускаемых аппаратов. *Естественные и технические науки*, 2014, № 9–10, с. 179–184.
- [4] Лазарев Ю.Н. *Управление траекториями аэрокосмических аппаратов*. Самара, Самар. науч. центр РАН, 2007, 274 с.
- [5] Wang Y.-S., Chien C.-S. A two-parameter continuation method for computing numerical solutions of spin-1 Bose–Einstein condensates. *Journal of Computational Physics*, 2014, vol. 256, pp. 198–213. DOI: 10.1016/j.jcp.2013.08.056
- [6] Сихарулидзе Ю.Г. *Баллистика и наведение летательных аппаратов*. Москва, БИНОМ, 2015, 410 с.
- [7] Бузулук В.И., Михалев С.М. Разработка методики формирования облика многоразовой аэрокосмической системы, оптимизация ее проектных параметров и траекторий движения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 6 (90). DOI: 10.18698/2308-6033-2019-6-1894
- [8] Храмов А.А. Оптимизация комбинированного поворота плоскости орбиты аэрокосмического аппарата методом принципа максимума Понтрягина. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2019, т. 18, № 1, с. 140–153. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-1-140-153
- [9] Мельников А.Ю. Оптимальное управление маневрами гиперзвукового планера на основе принципа максимума Понтрягина. *Аэрокосмический научный журнал*, 2015, № 05, с. 26–37. DOI: 10.7463/aersp.0515.0821077
- [10] Мельников А.Ю. Решение задач оптимального управления аэрокосмическим самолетом. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 2 (110). DOI: 10.18698/2308-6033-2021-2-2058
- [11] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Физматгиз, 1976, 322 с.
- [12] Лысенко Л.Н., Шам Н.Ч. Анализ применимости существующих компьютерных технологий для автоматизации синтеза нечеткого управления движением легкого дистанционно пилотируемого летательного аппарата в сложных метеорологических условиях. *Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации*, 2014, № 200 (2), с. 118–125.

- [13] Клишин А.Н., Швыркина О.С. Алгоритм выбора коэффициентов пропорционального метода наведения летательного аппарата. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 9 (57).
DOI: 18698/2308-10.6033-2016-9-1534

Статья поступила в редакцию 25.06.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Мельников А.Ю., Илюхин С.Н. Оптимизация наведения аэрокосмического самолета в район посадки. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 9. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-9-2113>

Мельников Алексей Юрьевич — преподаватель кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: ayumelnikov@bmstu.ru

Илюхин Степан Николаевич — старший преподаватель кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных и научно-популярных работ в области баллистики, динамики полета, управления движением летательных аппаратов и истории оружия.
e-mail: iljuchin.stepan@bmstu.ru

Optimization of aerospace aircraft guidance to the landing area

© A.Yu. Melnikov, S.N. Ilyukhin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers a technique for constructing an optimal guidance procedure for an aerospace aircraft. The technique is based on the adaptation of the Pontryagin maximum principle for the considered class of problems. At the same time the guidance accuracy is ensured by solving a boundary value problem, which is periodically performed during the flight. The developed procedure for predicting the final parameters of the optimal flight according to a simplified motion model is presented, which also makes it possible to determine the value of the actual miss. A detailed mathematical description of the proposed technique is given. The feasibility of the proposed technique is ensured by minimizing the amount of computational operations. The guidance algorithm efficiency is illustrated by a numerical example with a flight simulation procedure taking into account all significant factors. The paper also provides examples of solving boundary value problems and the results of modeling the optimal guidance.

Keywords: Pontryagin maximum principle, aerospace aircraft, preemptive guidance

REFERENCES

- [1] Betanov V.V., Doronin D.V., Zakharov S.E. *Kosmicheskie issledovaniya — Cosmic Research*, 1999, no. 4, pp. 365–373.
- [2] Xu B., Shi Z. *Science China Information Sciences*, 2015, vol. 58, no. 7, pp. 1–19. DOI: 10.1007/s11432-014-5273-7
- [3] Koryanov V.V., Kazakovtsev V.P. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki — Natural and Technical Sciences*, 2014, no. 9–10, pp. 179–184.
- [4] Lazarev Yu.N. *Upravlenie traektoriyami aerokosmicheskikh apparatov* [Control of aerospace vehicle trajectories]. Samara, Samarskiy Scientific Center of RAS Publ., 2007, 274 p.
- [5] Wang Y.-S., Chien C.-S. *Journal of Computational Physics*, 2014, vol. 256, pp. 198–213. DOI: 10.1016/j.jcp.2013.08.056
- [6] Sikharulidze Yu.G. *Ballistika i navedenie letatelnykh apparatov* [Aircraft ballistics and guidance]. Moscow, BINOM Publ., 2015, 410 p.
- [7] Buzuluk V.I., Mikhalev S.M. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2019, iss. 6 (90). DOI: 10.18698/2308-6033-2019-6-1894
- [8] Khramov A.A. *Vestnik Samarskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika, tekhnologii i mashinostroenie — VESTNIK of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2019, vol. 18, no. 1, pp. 140–153. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-1-140-153
- [9] Melnikov A.Yu. *Aerokosmicheskiiy nauchnyy zhurnal — Aerospace Scientific Journal*, 2015, no. 05, pp. 26–37. DOI: 10.7463/aersp.0515.0821077
- [10] Melnikov A.Yu. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2021, iss. 2 (110). DOI: 10.18698/2308-6033-2021-2-2058
- [11] Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.V. *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1976, 322 p.

- [12] Lysenko L.N., Sham N.Ch. *Nauchnyy vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta grazhdanskoy aviatsii — Scientific Herald of the Moscow State Technical University of Civil Aviation*, 2014, no. 200 (2), pp. 118–125.
- [13] Klishin A.N., Shvyrkina O.S. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2016, iss. 9 (57).
DOI: 18698/2308-10.6033-2016-9-1534

Melnikov A.Yu., Lecturer, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecrafts, Bauman Moscow State Technical University.
e-mail: ayumelnikov@bmstu.ru

Ilyukhin S.N., Senior Lecturer, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecrafts, Bauman Moscow State Technical University; author of over 30 research and popular scientific publications in the field of ballistics, flight dynamics, aircraft traffic control and the history of weapons. e-mail: iljuchin.stepan@bmstu.ru