УДК 539.3:624.04 DOI: 10.18698/2308-6033-2021-9-2108

# Структурный анализ траекторий случайных процессов, сформированных в нелинейных виброзащитных системах

© А.С. Гусев[1], Л.В. Зинченко[1], С.А. Стародубцева[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия
[2]Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, 111250, Россия

*В задачах проектирования технических конструкций безопасность работы их элементов является основополагающим принципом. В связи с этим актуально предложенное новое решение задачи о структурном анализе траекторий негауссовских стационарных процессов, ориентированное на получение исходной информации для расчета прочностной надежности элементов конструкций, находящихся в процессе эксплуатации под воздействием случайных нагрузок. Проанализирован подход, позволяющий решить проблему учета статистической зависимости между процессами и их производными, несмотря на явную их некоррелированность. Рассмотренный подход может найти применение при проектировании виброзащиты транспортных машин, для того чтобы вычислять вероятность пробоя амортизатора, вероятность потери контакта колеса с дорогой и др. Надежность функционирования таких систем определяется как вероятность непревышения абсолютным максимумом процесса в течение определенного интервала времени заданного нормативного уровня. Представлен расчет надежности с применением структурного анализа на примере одномерной стохастической системы.*

***Ключевые слова:*** *вероятностная характеристика, случайный процесс, прочностная надежность*

**Введение.** Решение проблемы обеспечения надежности и долговечности элементов конструкций на стадии их проектирования связано со структурным анализом траекторий случайных процессов, в результате которого определяются характеристики циклов процессов нагружения и появляется возможность проводить расчеты на усталостную долговечность и трещиностойкость [1–5]. Все эти задачи для линейных систем в целом решены, тогда как для нелинейных систем при их решении возникают трудности, которые в данной работе в определенной степени преодолены.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача о структурном анализе траекторий негауссовских случайных процессов, ориентированном на расчетное прогнозирование надежности функционирования нелинейных виброзащитных систем, которые находятся в эксплуатации под воздействием внешних случайных нагрузок. Пример такой системы с резиноподобным амортизатором хода и амортизируемой массой $m$ показан на рис. 1.

Упругая характеристика амортизатора, приведенная на рис. 2, описывается следующими соотношениями:

$$F(v) = G\frac{v}{h-v}; \tag{1}$$

$$F(u) = G\left(1-\frac{h}{u}\right), \tag{2}$$

где $G$ — вес амортизируемой массы; $u(t)$ — изменение длины упругого элемента на момент времени $t$, $u(t) = h - v(t)$.

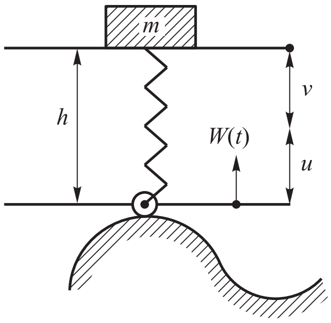


**Рис. 1.** Схема системы виброзащиты: $h$ — предельно допустимое смещение; $W(t)$ — кинематическое случайное одностороннее возмущение системы; $v$ — смещение массы $m$ вниз от положения статического равновесия

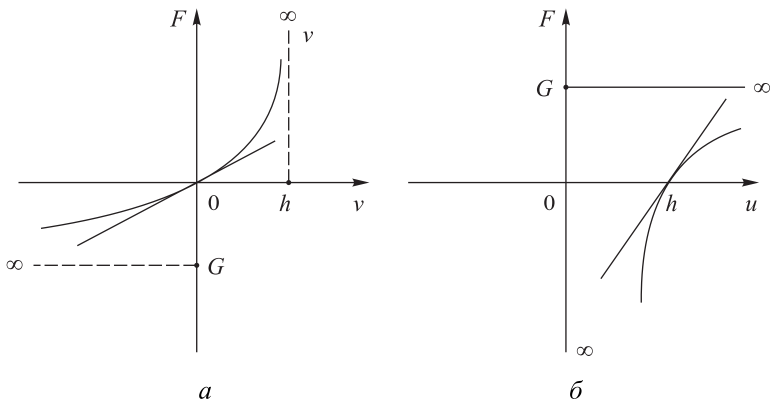


**Рис. 2.** Упругая характеристика амортизатора, соответствующая формуле (1) — *а* и формуле (2) — *б*

В положении статического равновесия $v = 0$, $u = h$. При малом ходе амортизатора ($v << h$) характеристика (1) становится линейной вида $F(v) = cv$, где $c$ — жесткость упругого элемента, $c = G/h$. При этом квадрат частоты свободных колебаний системы $\omega_0^2 = g/h$; $g = 9{,}81\ \text{м}/\text{с}^2$ [6].

**Структурный анализ траекторий случайных процессов.** При решении поставленной задачи за неизвестную целесообразно принять функцию $u(t)$, а не $v(t)$, так как $u \in (0, \infty)$, а $v \in (-\infty, \infty)$, что при расчете предпочтительнее. Эту функцию будем искать в виде нелинейного алгебраического α-преобразования гауссовского стационарного процесса $x(t)$ с дисперсией $s_x^2$, т. е. в виде

$$u(t) = \alpha(x(t)).$$

Здесь для величины $x$ плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2}\right), \tag{3}$$

α-преобразование примем в виде

$$\alpha = \eta \exp\left(\frac{x(t)}{h}\right), \tag{4}$$

где коэффициент η и дисперсия $s_x^2$ для $x(t)$ — константы, зависящие от вероятностных характеристик внешнего воздействия $f(t)$.

Из (3) и (4) следует, что среднее значение для $u$ и его плотность вероятностей можно определить по формулам:

$$\bar{u} = h \exp\left(\frac{s_x^2}{h^2}\right);$$

$$f_u(u) = \frac{h}{\sqrt{2\pi} s_x |u|} \exp\left(-\frac{h^2}{2s_x^2} \ln^2\left(\frac{u}{\eta}\right)\right). \tag{5}$$

Из условия динамического равновесия системы следует, что дифференциальное уравнение для определения функции $u(t)$ можно представить в виде

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + \varphi(u) = f(t), \tag{6}$$

где ε — коэффициент демпфирования; $\varphi(u) = \frac{1}{m} F(u)$, $f(t) = \ddot{W}(t)$ — гауссовский стационарный процесс с заданной корреляционной функцией $K_x(\tau)$ и спектральной плотностью $S_f(\omega)$.

Применив (4) и (6), получим уравнение для определения функции $x(t)$ [7, 8]:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega_*^2 x = \frac{1}{J} f(t),$$

где

$$\omega_*^2 = \frac{g}{h} \exp\left(-\frac{s_x^2}{h^2}\right); \quad J = \exp\left(\frac{s_x^2}{h^2}\right).$$

Из усреднения функции (5), т. е. из соотношения

$$\int_0^\infty \left(1-\frac{h}{u}\right) f_u(u)\, du = 0,$$

определим

$$\eta = h \exp\left(\frac{s_x^2}{2h^2}\right).$$

Передаточная функция для уравнения (5) имеет вид

$$H(i\omega) = \frac{1/J}{\omega_*^2 - \omega^2 + 2\varepsilon i\omega},$$

а искомая спектральная плотность $S_x(\omega)$ процесса $x(t)$ будет определяться по заданной спектральной плотности $S_f(\omega)$ процесса $f(t)$ по формуле Винера — Хинчина

$$S_x(\omega) = \left|H(i\omega)\right|^2 S_f(\omega).$$

Искомая дисперсия $s_x^2$ процесса $x(t)$ будет вычисляться путем решения интегрального уравнения

$$s_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega.$$

Здесь величина $s_x^2$, стоящая слева, содержится также и в функции $S_x(\omega)$, находящейся справа.

Спектральная плотность первой производной процесса $x(t)$ будет определяться по формуле

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega),$$

а дисперсия первой производной — выражением

$$s_{\dot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega)\, d\omega.$$

Дисперсия второй производной будет иметь вид

$$s_{\ddot{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_x(\omega)\, d\omega.$$

Из (4) следует, что процесс $u(t)$ будет негауссовским, поэтому проведение структурного анализа его траектории, необходимого для расчета надежности и долговечности элементов рассматриваемой механической системы, осложнено имеющимися статистическими зависимостями между ним и его производными.

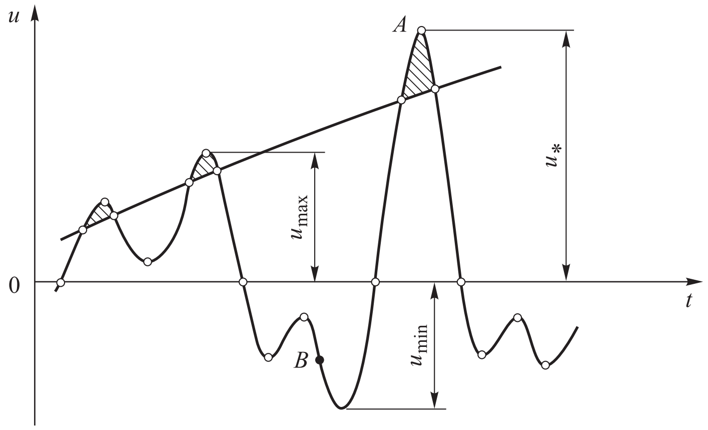


**Рис. 3.** Случайный процесс $u(t)$

При формулировке задач структурного анализа случайных процессов рассмотрим их некоторую реализацию $u(t)$ и отметим на ней характерные точки, соответствующие им значения процесса и интервалы времени между ними (рис. 3):

– точки пересечения случайного процесса со средним (нулевым) уровнем, называемые нулями процесса;

– точки, соответствующие экстремальным значениям процесса, которые называются экстремумами процесса;

– точку $A$, соответствующую наибольшему для данной реализации максимуму процесса, называемую абсолютным максимумом процесса;

– точку $B$, соответствующую перегибу траектории процесса, называемую точкой перегиба;

– точки пересечения случайного процесса с некоторым уровнем, определяющие число превышений (выбросов) за этот уровень;

– интервалы времени $\tau_0$ между двумя соседними нулями, от которых зависит частота процесса, рассчитанная по пересечениям нулевого уровня (частота по нулям);

– интервалы времени $\tau_э$, которые соответствуют двум соседним экстремумам, определяющие частоту процесса по экстремумам;

– отрезки $u_{\max}$ и $u_{\min}$ между нулевой линией и соответствующим экстремумом, называемые экстремальными значениями процесса (максимумом и минимумом);

– отрезок $u_*$ между нулевой линией и наибольшим максимумом процесса, называемый значением абсолютного максимума;

– приращение процесса $u_\text{р}$ между двумя соседними экстремумами, называемое размахом процесса.

Получение вероятностной информации о количестве указанных выше точек за некоторый промежуток времени и о величинах указанных выше отрезков по заданным вероятностным характеристикам процессов (по корреляционным функциям или энергетическим спектрам) является задачей структурного анализа случайных процессов.

Отметим некоторые вероятностные характеристики параметров процессов, которые можно определить при проведении структурного анализа:

– распределение вероятностей числа нулей, экстремумов и других точек траектории случайного процесса при его заданной длительности (частными характеристиками этих распределений являются среднее число нулей $\overline{n}_0$, среднее число экстремумов $\overline{n}_\text{э}$, среднее число точек перегиба траектории $\overline{n}_n$ в единицу времени);

– распределение вероятностей интервалов времени между соседними нулями, экстремумами и точками перегиба траектории (частными характеристиками этих распределений являются средние значения интервала времени между соседними нулями $\overline{\tau}_0$, экстремумами $\overline{\tau}_\text{э}$ и точками перегиба $\overline{\tau}_n$);

– распределение вероятностей значений процесса, соответствующих его максимумам и минимумам, т. е. распределение вероятностей максимумов и минимумов;

– распределение вероятностей приращений процесса между двумя его соседними экстремумами, т. е. распределение вероятностей размахов;

– распределение вероятностей значения процесса, соответствующего его абсолютному максимуму, т. е. распределение вероятностей абсолютного максимума.

При анализе структуры случайного процесса $u(t)$ вначале рассмотрим вычисление числа его выбросов за некоторый уровень $u_*$ на интервале $(0, t)$. Из свойств δ-функции Дирака следует, что это число можно вычислить по формуле [7]

$$n(u_*, t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left|\dot{u}(\tau)\right| \delta\left\{u(\tau) - u_*\right\} d\tau, \tag{7}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, определяемая как

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \neq 0; \\ \infty \text{ при } x = 0; \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Осредняя выражение (7) по $u$ и $\dot{u}$ и полагая $t = 1$, получаем ожидаемое число выбросов $u(t)$ за уровень $u_*$ в единицу времени, т. е. частоту появления таких выбросов:

$$\overline{n}(u_*) = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{u_*} |\dot{u}|\, \delta\{u - u_*\} f_{u\dot{u}}(u, \dot{u})\, du\, d\dot{u} = \int\limits_0^{\infty} |\dot{u}|\, f_{u\dot{u}}(u_*, \dot{u})\, d\dot{u}. \qquad (8)$$

Здесь $f_{u\dot{u}}(u, \dot{u}) \neq f_u(u) f_{\dot{u}}(\dot{u})$ — плотность совместного распределения вероятностей для негауссовских статистически зависимых (хотя и не коррелированных) между собой процессов $u(t)$ и $\dot{u}(t)$; $f_u(u)$ и $f_{\dot{u}}(\dot{u})$ — плотности вероятности для $u(t)$ и $\dot{u}(t)$,

$$f_{u\dot{u}}(u, \dot{u}) = B f_x(x) f_{\dot{x}}(\dot{x});$$

$$x(t) = \alpha^{-1}(u) = \psi\{u(t)\} = h \ln\left(\frac{u(t)}{\eta}\right); \qquad (9)$$

$$\dot{x}(t) = \psi'(t)\dot{u}(t),\ \psi'(u) = \frac{h\eta}{u};$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2}\right); \quad f_{\dot{x}}(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_{\dot{x}}} \exp\left(-\frac{\dot{x}^2}{2s_{\dot{x}}^2}\right),$$

где $B = \dfrac{dx\, d\dot{x}}{du\, d\dot{u}} = \left[\psi'(u)\right]^2$ — якобиан преобразования системы величин $(x, \dot{x})$ в систему $(u, \dot{u})$.

Подставив выражения (9) в (8), получим

$$\overline{n}(u_*) = \frac{s_{\dot{x}}}{2\pi s_x} \exp\left(-\frac{\psi^2(u_*)}{2s_x^2}\right) \equiv \overline{n}_x(\psi(u_*)). \qquad (10)$$

Отсюда следует, что число выбросов процесса $u(t)$ за уровень $u_*$ равно числу выбросов процесса $x(t)$ за уровень $x_* = \psi(u_*)$. Определение других вероятностных характеристик и законы распределения вероятностей для функции $n(u_*)$ представляет сложную и не имеющую эффективного решения задачу [7, 9].

Вместе с тем при высоком уровне $u_*$ имеем малое число выбросов $n(u_*)$, и тогда их появление можно считать редкими событиями. Значит, в соответствии с теорией редких событий, вероятностное рассеивание этой величины будет следовать экспоненциальному закону распределения вероятностей с плотностью

$$f_n(n) = \frac{1}{\overline{n}} \exp\left(-\frac{n}{\overline{n}}\right).$$

В этом случае для расчета надежности как вероятности того, что процесс $u$ на интервале времени $(0, t)$ ни разу не превысит нормативный уровень $u_*$, будет определяться как [9, 10]

$$P\{u(\tau) \le u_*,\ \tau \in (0, t)\} = \exp\left(-t\overline{n}(u_*)\right). \tag{11}$$

При соответствующем выборе величины $u_*$ можно вычислить по формуле (11) вероятность пробоя амортизатора, вероятность потери контакта колеса с дорогой и другие подобные вероятности, характеризующие надежность функционирования систем виброзащиты транспортных машин [11].

Затем найдем ожидаемое число экстремумов процесса $u(t)$ в единицу времени (частоту появления экстремумов). Поскольку при дифференцировании экстремумы функции переходят в ее нули, искомое число экстремумов в соответствии с (9) можно вычислить по формуле

$$\overline{n}_э = \int_{-\infty}^{\infty} |\ddot{u}| f_{\dot{u}\ddot{u}}(0, \ddot{u})\, d\ddot{u},$$

где $f_{\dot{u}\ddot{u}}(0, \ddot{u})$ — плотность совместного распределения вероятностей для $\dot{u}$ и $\ddot{u}$ при $\dot{u} = 0$.

Системе негауссовских случайных величин $(\dot{u}, \ddot{u})$ поставим в соответствие систему гауссовских величин $(\dot{x}, \ddot{x})$.

Из равенства вероятностей

$$f_x(x)\,dx = f_u(u)\,du;$$

$$f_{\dot{u}\ddot{u}}(\dot{u}, \ddot{u})\,d\dot{u}\,d\ddot{u} = f_{\dot{x}}(\dot{x})\, f_{\ddot{x}}(\ddot{x})\,d\dot{x}\,d\ddot{x}$$

получаем

$$f_u(u) = |\psi'(u)|\, f_u(\psi'(u));$$

$$f_{\dot{u}\ddot{u}}(\dot{u}, \ddot{u}) = B f_{\dot{x}}(\dot{x})\, f_{\ddot{x}}(\ddot{x}),$$

где $\psi(u) = \alpha^{-1}(x)$ — обратная от $x$ функция $u$; $B$ — якобиан преобразования.

В соответствии с (9) имеем

$$B = \frac{d\dot{x}\,d\ddot{x}}{d\dot{u}\,d\ddot{u}} = \begin{vmatrix} \dfrac{d\dot{x}}{d\dot{u}} & \dfrac{d\dot{x}}{d\ddot{u}} \\ \dfrac{d\ddot{x}}{d\dot{u}} & \dfrac{d\ddot{x}}{d\ddot{u}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi'(u) & 0 \\ 2\dot{u}\psi'' & \psi'(u) \end{vmatrix} = \left[\psi^{\nabla}(u)\right]^2.$$

С учетом этих соотношений и того, что

$$\ddot{u} = \frac{\ddot{x}}{\psi'(u)}; \qquad d\ddot{u} = \frac{d\ddot{x}}{\psi'(u)},$$

находим

$$\overline{n}_{э,u} = f_{\dot{x}}(0)\left|\ddot{x}\right| = \frac{s_{\ddot{x}}}{2\pi s_{\dot{x}}} \equiv n_{э,x}.$$

Это означает, что частота появления экстремумов у процессов $u(x)$ и $x(t)$ одинакова.

Использование приведенных выше соотношений предполагает возможность неоднократного дифференцирования случайных процессов. Однако зачастую приходится рассматривать именно недифференцируемые случайные процессы. Так, процессы $f(t)$ в уравнении (5), как правило, недифференцируемы. Возможность приближенного определения для них производных подробно представлена в работах [7, 12].

Здесь ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда недифференцируемый случайный процесс $x(t)$ описывается корреляционной функцией вида

$$K_x(\tau) = \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}, \tag{12}$$

где α — ожидаемая частота,
или спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Спектральную плотность первой производной процесса $x(t)$ представим в виде

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\omega^2}{\alpha^2+\omega^2} = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{i\omega}{\alpha+i\omega}\right)\left(\frac{-i\omega}{\alpha-i\omega}\right). \tag{13}$$

Здесь, для того чтобы устранить особенности на бесконечности, заменим выражения в скобках следующими:

$$\frac{i\omega}{\alpha+i\omega} - \lim_{\omega\to\infty}\frac{i\omega}{\alpha+i\omega} = \frac{i\omega}{\alpha+i\omega} - 1 = \frac{-\alpha}{\alpha+i\omega}; \tag{14}$$

$$\frac{-i\omega}{\alpha-i\omega} - \lim_{\omega\to\infty}\frac{-i\omega}{\alpha-i\omega} = \frac{-i\omega}{\alpha-i\omega} - 1 = \frac{-\alpha}{\alpha-i\omega}.$$

Подставив выражения (14) в (13), получим формулу

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \alpha^2 S_x(\omega).$$

Аналогично получим

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \alpha^2 S_{\dot{x}}(\omega); \quad S_{\dddot{x}}(\omega) = \alpha^2 S_{\ddot{x}}(\omega) \text{ и т. д.}$$

Следовательно, параметр $\alpha$ в формуле (12) имеет смысл частоты процессов $x(t)$, $\dot{x}(t), \ddot{x}(t)$, …, которая при дифференцировании не изменяется.

Для случайного процесса $x(t)$ с корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = \mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau.$$

Аналогично можно найти выражения для его производных:

$$S_{\dot{x}}(\omega) = (\alpha^2+\beta^2) S_x(\omega); \quad S_{\ddot{x}}(\omega) = (\alpha^2+\beta^2)^2 S_{\dot{x}}(\omega) \text{ и т. д.}$$

Значит, в этом случае величина $(\alpha^2+\beta^2)$ имеет смысл квадрата частоты процессов $x(t)$, $\dot{x}(t), \ddot{x}(t)$, …, которая при дифференцировании не меняется.

Рассмотрим теперь максимумы негауссовского случайного процесса $u(t)$, в которых $\dot{u} = 0$, $\ddot{u} = 0$. Плотность распределения вероятностей для максимумов можно записать в виде [7]

$$f_m(u) = \frac{1}{\overline{n}_m} \int\limits_{-\infty}^{0} |\ddot{u}| f_{u\dot{u}\ddot{u}}(u, 0, \ddot{u})\, d\ddot{u},$$

где $\overline{n}_m$ — среднее число максимумов в единицу времени; $f_{u\dot{u}\ddot{u}}(u, \dot{u}, \ddot{u})$ — плотность совместного распределения вероятностей для $u, \dot{u}, \ddot{u}$.

Из равенства вероятностей

$$f_{u\dot{u}\ddot{u}}(u, \dot{u}, \ddot{u})\, du\, d\dot{u}\, d\ddot{u} = f_{x\ddot{x}}(x, \ddot{x})\, f_{\dot{x}}(\dot{x})\, dx\, d\dot{x}\, d\ddot{x}$$

следует, что

$$f_{u\dot{u}\ddot{u}}(u, \dot{u}, \ddot{u}) = B f_{x\ddot{x}}(x, \ddot{x})\, f_{\dot{x}}(\dot{x}),$$

где якобиан преобразования в соответствии с (9) определяется как

$$B = \frac{dx\, d\dot{x}\, d\ddot{x}}{du\, d\dot{u}\, d\ddot{u}} = \left[\psi'(u)\right]^3;$$

$$f_{\dot{x}}\left(0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}s_{\dot{x}}};$$

$$f_{x\ddot{x}}\left(x,\ddot{x}\right)\frac{1}{2\pi s_x s_{\ddot{x}}\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}-\left(\frac{x^2}{s_x^2}-\frac{2rx\ddot{x}}{s_x s_{\ddot{x}}}+\frac{\ddot{x}^2}{s_{\ddot{x}}{}^2}\right)\right\},$$

где $r=r_{x\ddot{x}}=-\dfrac{s_{\dot{x}}{}^2}{s_x s_{\ddot{x}}}=-\dfrac{1}{k}$ — коэффициент корреляции между $x,\ddot{x}$ ($k$ — параметр сложности структуры случайного процесса, равный отношению числа его экстремумов к числу его нулей) [7].

Для процессов с простой структурой $k = 1$, и тогда

$$f_{x\ddot{x}}\left(x,\ddot{x}\right)=f\left(\ddot{x}\right)\delta\left\{x+\frac{s_x}{s_{\ddot{x}}}\ddot{x}\right\},$$

где $\delta\left(\cdot\right)$ — дельта-функция Дирака.

Плотность распределения вероятностей для максимумов процесса $x(t)$ будет определяться по формуле, аналогичной (15):

$$f_{mx}\left(x\right)=\frac{1}{\bar{n}_m}\int\limits_{-\infty}^{0}\left|\ddot{x}\right|f_{x\dot{x}\ddot{x}}\left(x,0,\ddot{x}\right)d\ddot{x}=$$

$$=\frac{1}{\bar{n}_m}f_{\dot{x}}\left(0\right)f_x\left(x\right)\int\limits_{-\infty}^{0}\left|\ddot{x}\right|\delta\left\{\ddot{x}+\frac{s_{\ddot{x}}}{s_x}x\right\}d\ddot{x}=\frac{x}{s_x^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2s_x^2}\right).$$

Плотность распределения вероятностей для максимумов процесса $u(t)$ получаем простым пересчетом вероятностей:

$$f_{mu}\left(u\right)=\psi'^{(u)f_{mx}(\psi(u))}=\frac{h}{us_x^2}\ln\frac{u}{h}\exp\left(-\frac{\ln^2\frac{u}{h}}{2k^2s_x^2}\right).$$

Таким образом, все основные задачи по структурному анализу рассматриваемого негауссовского случайного процесса решены, и его результаты могут быть использованы для получения соответствующих оценок надежности и усталостной долговечности элементов конструкций в нелинейных системах [8, 13, 14].

**Пример.** В качестве примера рассмотрим систему, где амортизируемая масса $m$ = 100 кг, жесткость $C$ = 500 Н/см, частота малых колебаний $\omega_0$ = 22,14 с$^{-1}$, $f(t)$ — белый шум интенсивностью $K_f$ = 1 м$^2\cdot$с, $h$ = 2 см, $s_x$ = 2 см, $\eta$ = 3,3 см.

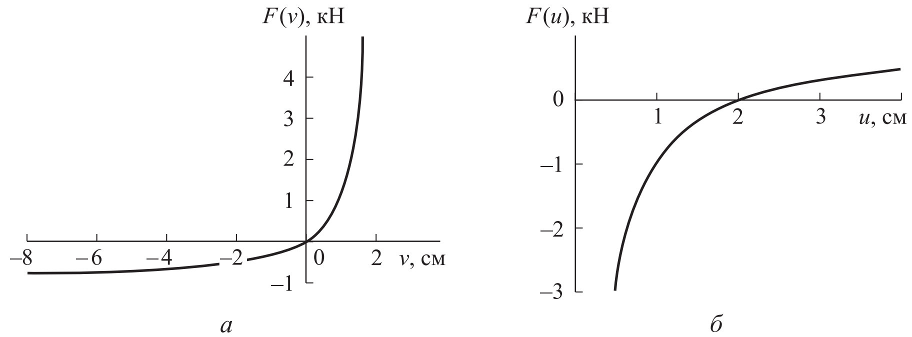


**Рис. 4.** Упругая характеристика элемента

Для этого случая на рис. 4, *а* и *б* представлены соответственно графики функций (1) и (2):

$$F(v) = \frac{v}{2-v}\ ; \quad F(u) = 1 - \frac{2}{u}.$$

Распределение плотности вероятностей $f_u(u)$ в соответствии с формулой (5) показано на рис. 5, среднее число выбросов за уровень $u_*$, определяемой по (10), — на рис. 6, функция надежности, рассчитанная по формуле (11), — на рис. 7.

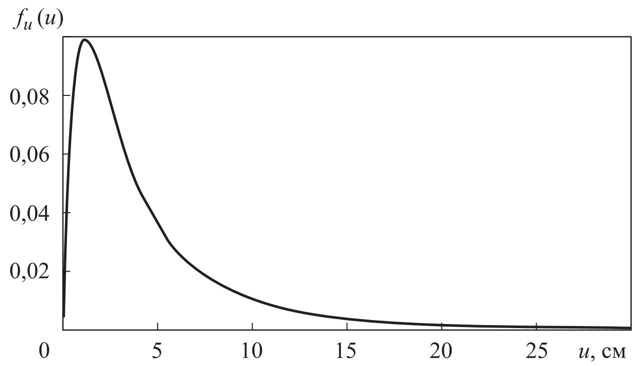


**Рис. 5.** Распределение плотности вероятностей для элемента *u*

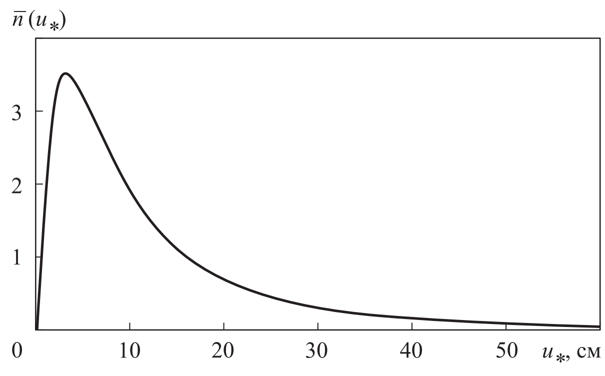


**Рис. 6.** Среднее число выбросов за уровень $u_*$

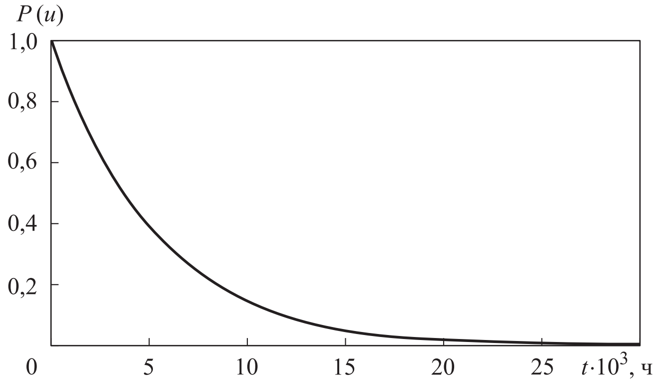


**Рис. 7.** Зависимость надежности элемента от времени

**Заключение.** Таким образом, для нелинейных систем получены расчетные формулы для определения характеристик траекторий случайных процессов нагружения, что позволяет проводить расчетное прогнозирование усталостной долговечности и живучести элементов конструкций в статистическом аспекте.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Махутов Н.А., Албагачиев А.Ю., Алексеева С.И. *Прочность, ресурс, живучесть и безопасность машин*. Махутов Н.А., ред. 2-е изд. Москва, Российская академия наук, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова, 2019, 576 с.

[2] Гусев А.С. *Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных воздействиях*. Москва, Машиностроение, 1989, 248 с.

[3] Гусев А.С., Светлицкий В.А. *Расчет конструкций при случайных воздействиях*. Москва, Машиностроение, 1984, 240 с.

[4] Гусев А.С. *Теоретические основы расчетов на сопротивление усталости*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 46 с.

[5] Гусев А.С. *Курс лекций по вероятностным методам в механике*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020, 102 с.

[6] Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. *Колебания линейных систем*. Москва, Изд-во «Спектр», 2014, 432 с.

[7] Гусев А.С. *Вероятностные методы в механике машин и конструкций*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009, 224 с.

[8] Макаров Б.П. *Нелинейные задачи статистической динамики машин и приборов*. Москва, Машиностроение, 1983, 262 с.

[9] Болотин В.В. *Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение, 1972, 352 с.

[10] Чирков В.П. *Вопросы надежности механических систем*. Москва, Изд-во «Знание», 1981, 407 с.

[11] Гусев А.С., Стародубцева С.А., Щербаков В.И. *Теория колебаний в автомобиле- и тракторостроении*. Москва, Изд-во МГТУ МАМИ, 2007, 336 с.

[12] Crandall S.H. *Random vibration*. Cambridge, Technology Press, 1963.

[13] Махутов Н.А., Лепихин А.М., Чернякова Н.А. Расчетно-экспериментальная оценка прочности, надежности и безопасности технических систем в экстремальных условиях эксплуатации. В сб.: *Безопасность и мониторинг техногенных и природных систем. Материалы и доклады*, 2018, с. 214–219.
[14] Гусев А.С., Стародубцева С.А. *Надежность механических систем и конструкций при случайных воздействиях*. Москва, Изд-во МГТУ МАМИ, 2000, 103 с.

Статья поступила в редакцию 12.05.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Гусев А.С., Зинченко Л.В., Стародубцева С.А. Структурный анализ траекторий случайных процессов, сформированных в нелинейных виброзащитных системах. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 9.
http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-9-2108

**Гусев Александр Сергеевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: dcb@bmstu.ru

**Зинченко Лариса Витальевна** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: zinlar@bmstu.ru

**Стародубцева Светлана Александровна** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Основы конструирования машин», Национальный исследовательский университет «МЭИ». e-mail: starodubtsevsa@mpei.ru

# Structural analysis of the trajectories of random processes formed in non-linear vibration isolation systems

© A.S. Gusev[1], L.V. Zinchenko[1], S.A. Starodubtseva[2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia
[2]National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, 111250, Russia

*When designing technical structures, the safety of their elements is a fundamental principle. This highlights the significance of the proposed solution to the structural analysis of the trajectories of non-Gaussian stationary processes. The solution aims to acquire source data for calculating the stress-strength reliability of structural elements operating under random loads. We analyze an approach that makes it possible to account for the statistical dependence between processes and their derivatives, despite the apparent lack of correlation between them. The considered approach can be utilized in the design of vibration protection of transport vehicles to calculate the probability of a shock absorber breakdown, the probability of loss of the road-wheel contact, etc. The operation reliability of such systems is defined as the probability that the absolute maximum of the process does not exceed the specified standard level during a certain time interval. The article presents the reliability calculation using structural analysis on the example of a one-dimensional stochastic system.*

***Keywords:*** *probabilistic characterization, random process, stress-strength reliability*

REFERENCES

[1] Makhutov N.A., Albagachiev A.Yu., Alekseeva S.I. *Prochnost, resurs, zhivuchest i bezopasnost mashin* [Durability, resource, survivability and safety of machines]. 2nd ed. Moscow, RAS, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences Publ., 2019, 576 p.

[2] Gusev A.S. *Soprotivlenie ustalosti i zhivuchest konstruktsii pri sluchaynykh vozdeystviyakh* [Fatigue resistance and survivability of structures under random influences]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 248 p.

[3] Gusev A.S., Svetlitskiy V.A. *Raschet konstruktsiy pri sluchaynykh vozdeystviyakh* [Calculation of structures under random influences]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984, 240 p.

[4] Gusev A.S. *Teoreticheskie osnovy raschetov na soprotivlenie ustalosti* [Theoretical foundations of calculations for fatigue resistance]. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 46 p.

[5] Gusev A.S. *Kurs lektsiy po veroyatnostnym metodam v mekhanike* [Course of lectures on probabilistic methods in mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2020, 102 p.

[6] Okopnyy Yu.A., Radin V.P., Chirkov V.P. *Kolebaniya lineynykh system* [Oscillations of linear systems]. Moscow, Spektr Publ., 2014, 432 p.

[7] Gusev A.S. *Veroyatnostnyye metody v mekhanike mashin i konstruktsiy* [Probabilistic methods in the mechanics of machines and structures]. Moscow, BMSTU Publ., 2009, 224p.

[8] Makarov B.P. *Nelineynye zadachi statisticheskoy dinamiki mashin i priborov* [Nonlinear problems of statistical dynamics of machines and devices]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1983, 262 p.

[9] Bolotin V.V. *Vibratsii v tekhnike: Spravochnik . V 6 t. T. 1. Kolebaniya lineynykh sistem* [Vibrations in Engineering: Handbook. In 6 vols., vol. 1. Oscillations of linear systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1972, 352 p.
[10] Chirkov V.P. *Voprosy nadezhnosti mekhanicheskikh sistem* [Mechanical system reliability issues]. Moscow, Znaniye Publ., 1981, 407 p.
[11] Gusev A.S., Starodubtseva S.A., Scherbakov V.I. *Teoriya kolebaniy v avtomobile i traktorostroyenii* [The theory of vibrations in automobile and tractor construction]. Moscow, MAMI Publ., 2007, 336 p.
[12] Crandall S.H. *Random vibration*. Cambridge, Technology Press, 1963.
[13] Makhutov N.A., Lepikhin A.M., Chernyakova N.A. Raschetno-eksperimentalnaya otsenka prochnosti, nadezhnosti i bezopasnosti tekhnicheskikh sistem v ekstremalnykh usloviyakh ekspluatatsii [Computational and experimental assessment of strength, reliability and safety of technical systems in extreme operating conditions.]. In: *Bezopasnost i monitoring tekhnogennykh i prirodnykh sistem: materialy i doklady* [Safety and monitoring of technogenic and natural systems: materials and reports]. Moscow, 2018, pp. 214–219.
[14] Gusev A.S., Starodubtseva S.A. *Nadezhnost mekhanicheskikh sistem i konstruktsiy pri sluchaynykh vozdeystviyakh* [Reliability of mechanical systems and structures under random influences]. Moscow, MAMI Publ., 2000, 103 p.

**Gusev A.S.,** Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: dcb@bmstu.ru

**Zinchenko L.V.,** Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: zinlar@bmstu.ru

**Starodubtseva S.A.,** Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Principles of Design Machine, National Research University “Moscow Power Engineering Institute”. e-mail: starodubtsevsa@mpei.ru