

**Исследование методом Пуанкаре
динамики релейной стабилизации с учетом
нелинейности датчика скорости, запаздываний
и постоянного возмущения**

© Р.П. Симоньянц, В.Н. Булавкин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Применением метода точечных отображений получены аналитические выражения функций последования для определения простых и сложных аттракторов в режиме стабилизации релейным регулятором общего вида с линейным формированием управляющего сигнала. Исследованы автоколебания, учитывающие влияние запаздываний исполнительных органов, зоны нечувствительности датчика скорости и действия постоянного возмущения. Показано, что зона нечувствительности датчика скорости вносит существенные изменения в поведение системы, придавая ей новые свойства. Анализ динамических процессов на трехлистной фазовой поверхности раскрыл большое разнообразие форм предельных циклов и их зависимость от параметров системы. Сложные предельные циклы представлены объединением простых циклов двух видов, что позволило применить упрощающий подход к их поиску на основе теории многомерных преобразований Ю.И. Неймарка.

Ключевые слова: отображение Пуанкаре, функция последования, диаграмма Ламера, неподвижная точка, предельный цикл, релейное управление, автоколебания

Введение. Исследуется динамика угловой стабилизации космического аппарата (КА) при управлении по алгоритму трехпозиционного релейного регулятора с линейным формированием управляющего сигнала. В [1] представлено аналитическое построение отображений Пуанкаре для нахождения предельных циклов автоколебаний при действии постоянного возмущения. С помощью теории многомерных преобразований Ю.И. Неймарка [2, 3] задача поиска сложных периодических режимов, возникающих в рассматриваемой динамической системе, сведена к поиску многократных неподвижных точек отображения Пуанкаре. В качестве дуг без контакта на фазовой плоскости выбраны линии переключения релейной функции с учетом запаздываний. Из множества возможных форм фазовых траекторий, отображающих точки на линии без контакта, выбраны незамкнутые траектории простых циклов — одно- и двухимпульсного.

Такой подход к построению точечных отображений существенно упростил задачу исследований сложных предельных циклов. При этом полученные в [1] результаты применимы к более широкому кругу задач, чем результаты, известные по ранее опубликованным литературным источникам. Например, в [2] круг задач ограничен разрывными системами, что справедливо при высоких значениях

эффективности управления, когда фазовые траектории при включенном исполнительном органе могут быть заменены прямыми, параллельными оси скорости.

Другое ограничение связано с нелинейностью характеристик датчиков угла и угловой скорости. В [1–3] принято, что они идеальны. Во многих приложениях такое допущение вполне справедливо. Однако существует большой круг задач, в которых принять линейную модель датчиков невозможно. В настоящей статье круг исследуемых задач расширяется за счет учета нелинейности — зоны нечувствительности датчика угловой скорости (ДУС). Принята кусочно-линейная статическая характеристика ДУС [4].

Цель настоящей статьи — получить аналитические выражения функций соответствия отображений Пуанкаре для отыскания параметров простых и сложных предельных циклов в нелинейной системе стабилизации с релейным регулятором общего вида с учетом влияния запаздываний исполнительных органов на включение и на выключение, зоны нечувствительности датчика скорости и действия постоянного возмущения, а также определить границы областей существования точечных отображений.

Математическая модель. С учетом допущений о малости величин углов и их производных уравнения управляемого движения КА вокруг центра масс были редуцированы и разделены на три независимые подсистемы, что позволяет рассматривать движения по каналам тангажа, курса и крена как автономные и описывать их унифицированной моделью плоского движения:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, & \frac{dy}{dt} &= g - aF_{\tau}(\sigma); \\ \sigma &= x + kv(\beta, y); \\ v(\beta, y) &= \begin{cases} 0 & \forall y \in (+\beta, -\beta); \\ y - \beta \operatorname{sgn}(y), & \forall |y| \geq \beta; \end{cases} \\ F(\sigma) &= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{sgn}(\sigma - \alpha + hF^{-\varepsilon}) + \operatorname{sgn}(\sigma + \alpha + hF^{-\varepsilon}) \right\}; & (1) \\ F^{-\varepsilon}(t) &= F(t - \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0; \\ F_{\tau}(\sigma(t)) &= F(\sigma(t - \tau)); \\ \tau &\in \{\tau_1, \tau_2\}, \quad \tau_1 \forall F = \pm 1, \quad \tau_2 \forall F = 0. \end{aligned}$$

Здесь x, y — измеряемые величины угла и угловой скорости КА; a — эффективность управления (ускорение, создаваемое исполнительным органом (ИО) системы управления); g — эффективность

возмущения; $F(\sigma)$ — релейная функция управления; σ — управляющий сигнал; v — сигнал ДУС; $v(\beta, y)$ — статическая характеристика ДУС; β — зона нечувствительности ДУС; k — коэффициент усиления сигнала скорости; α — порог срабатывания релейного регулятора; h — ширина петли гистерезиса; F_τ — релейная функция запаздывающего аргумента; τ — запаздывание; $F^{-\varepsilon}(t)$ — предыстория состояния ИО.

Система (1) описывает возможные изменения параметров состояния КА в плоском (одноосном) движении вокруг центра масс. Функция $F(\sigma)$ принимает значения $\{+1, 0, -1\}$, определяя состояние ИО. Управляющие воздействия создают ускорения $\{+a, 0, -a\}$, изменяющиеся скачком с задержкой τ_1 при включении и τ_2 при выключении, что описывается функцией запаздывающего аргумента $F_\tau(\sigma(t)) = F(\sigma(t - \tau))$, $\tau = \{\tau_1, \tau_2\}$.

Закон управления $F(\sigma)$ представляет собой релейную функцию общего вида, аргумент которой, т. е. управляющий сигнал σ , формируется как обратная связь в виде линейной комбинации сигналов, поступающих от измерителей угла и угловой скорости. В рассматриваемой задаче принято, что измеритель угла — идеальный датчик. Поэтому измеренное значение x совпадает с истинным его значением.

Релейная функция $F(\sigma)$ имеет неоднозначность, обусловленную петлей гистерезиса h , поэтому доопределяется функцией предыстории:

$$\forall \sigma(t) \in \{\sigma: |\sigma| > \alpha - h; |\sigma| \leq \alpha\} \Rightarrow F^{-\varepsilon}(t) = F(t - \varepsilon).$$

Функция $F(t)$ определяет свое текущее состояние тем положением, в котором она находилась в предшествующий момент $(t - \varepsilon)$, где $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассматриваемая динамическая модель имеет нелинейные характеристики в виде кусочно-линейных и кусочно-постоянных функций. Движения системы представим на трехлистных фазовых поверхностях и исследуем периодические режимы методом точечных отображений Пуанкаре. Метод был развит и широко применялся во второй половине XX в. отечественными учеными А.А. Андроновым, Ю.И. Неймарком, Э.В. Гаушусом [2, 3] и другими. Он нашел применение в теории нелинейных колебаний технических [5–9] и биологических [10–13] систем.

В [1] дано построение точечных отображений Пуанкаре в релейной динамической системе с учетом запаздывания ИО и постоянного возмущения, но при идеальных датчиках. В настоящей статье метод

распространяется на случай нелинейного датчика скорости — зоны нечувствительности β . Ставится задача построения отображений Пуанкаре для отыскания простых и сложных аттракторов.

Фазовая поверхность и ее структура. Движения системы (1) представим на трех листах фазовой поверхности (ФП). Ее структуру можно вычислить с помощью функции управления $F(\sigma)$, разделяющей всю поверхность на листы F^+, F^-, F^0 :

$$\begin{cases} F^+ = \{(x, y) : |\sigma| \geq \alpha - h\}, \\ F^0 = \{(x, y) : \sigma \in (-\alpha, +\alpha)\}, \\ F^- = \{(x, y) : |\sigma| \leq -\alpha + h\}. \end{cases}$$

Границы листов — четыре линии переключений L_i , которые определяются значениями c_i порога срабатывания релейного регулятора:

$$\begin{aligned} L_i : x + kv(y) = c_i, \quad i = \overline{1, 4}; \\ \{c_1 = \alpha, \quad c_2 = \alpha - h, \quad c_3 = -\alpha, \quad c_4 = -\alpha + h\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Статическую структуру ФП найдем, используя характеристику нелинейного датчика скорости $v(y)$ (1), разделяющую ось Oy и все листы ФП на три области:

$$\begin{cases} Y^0 = \{(x, y) : y \in (-\beta, +\beta)\}, \\ Y^- = \{(x, y) : y \leq -\beta\}, \\ Y^+ = \{(x, y) : y \geq +\beta\}. \end{cases} \quad (3)$$

В соответствии с (3) линии $L_i, i = \overline{1, 4}$ делятся на отрезки:

$$\begin{cases} L_i = L_i^+ \cup L_i^0 \cup L_i^-, \\ L_i^+ \forall y \in Y^+; \quad L_i^0 \forall y \in Y^0; \quad L_i^- \forall y \in Y^-. \end{cases}$$

Кусочно-непрерывные линии L_i (2) образуют границы листов ФП. При этом отрезки L_i^+ с отрезками L_i^0 соединены в узловых точках $A_i^{+\beta}$, а L_i^0 с L_i^- — в $A_i^{-\beta}$, $i = \overline{1, 4}$. Здесь и далее верхний индекс узловой точки $A_i^{+\beta}$ или $A_i^{-\beta}$ указывает на то, что точка принадлежит верхней или нижней границе области Y^0 , обусловленной зоной

нечувствительности датчика угловой скорости $y = +\beta$ или $y = -\beta$ соответственно.

Уравнения отрезков линий статической структуры получаем в виде

$$L_i : \begin{cases} x + k(y - \beta) = c_i, & \forall y \in Y^+, \\ x = c_i, & \forall |y| \in Y^0, \\ x + k(y + \beta) = c_i, & \forall y \in Y^-. \end{cases} \quad (4)$$

Каждый из листов ФП заполнен семействами фазовых траекторий:

$$\begin{cases} \Gamma^0 : y^2 - 2gx = 2E^0, & \forall (x, y) \in F^0; \\ \Gamma^+ : y^2 - 2(a - g)x = 2E^+, & \forall (x, y) \in F^+; \\ \Gamma^- : y^2 + 2(a + g)x = 2E^-, & \forall (x, y) \in F^-, \end{cases} \quad (5)$$

где E^0, E^+, E^- — константы, определяемые начальными условиями.

Динамическую структуру фазовой поверхности определяют линии $L_{i,\tau}$, $i = \overline{1,4}$ как геометрическое место точек истинного переключения ИО спустя $\tau = \{\tau_1, \tau_2\}$ после переключения функции управления $F(\sigma(t))$. Отсчет времени задержки наступает в момент, когда фазовая траектория (5) пересекает статическую линию переключения L_i (4). Динамическая граница $L_{i,\tau}$ относительно статической L_i оказывается смещенной на то расстояние, которое изображающая точка пройдет на ФП за время τ . Следовательно, динамическую линию $L_{i,\tau}$ можно получить применением к статическим линиям L_i (4) операции точечного отображения сдвига T_τ :

$$L_{i,\tau} = T_\tau L_i, \quad i = \overline{1,4}.$$

Оператор T_τ [3] непосредственно определяется из общего решения дифференциального уравнения движения на соответствующем листе ФП.

Построения начнем с определения координат узловых точек статической структуры:

$$\begin{cases} A_1^{+\beta} (x = +\alpha, y = +\beta), & A_3^{+\beta} (x = -\alpha, y = +\beta), \\ A_1^{-\beta} (x = +\alpha, y = -\beta); & A_3^{-\beta} (x = -\alpha, y = -\beta); \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2^{+\beta} (x = +\alpha - h, y = +\beta), \\ A_2^{-\beta} (x = +\alpha - h, y = -\beta); \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A_4^{+\beta} (x = -\alpha + h, y = +\beta), \\ A_4^{-\beta} (x = -\alpha + h, y = -\beta). \end{array} \right.$$

Координаты отображенных оператором сдвига узловых точек можно определить по формулам

$$A_{i,\tau}^{\pm\beta} \cdot \begin{cases} y_{i,\tau}^{\pm\beta} = y_i^{\pm\beta} - (aF - g)\tau, \\ x_{i,\tau}^{\pm\beta} = x_i^{\pm\beta} + y_i^{\pm\beta}\tau - \frac{1}{2}(aF - g)\tau^2. \end{cases}$$

Здесь $x_i^{\pm\beta}$, $y_i^{\pm\beta}$ — соответствующие координаты точек $A_i^{\pm\beta}$.

Для $i = 1$ и $i = 3$ имеем $F = 0$, $\tau = \tau_1$; для $i = 2$: $F = +1$, $\tau = \tau_2$; для $i = 4$: $F = -1$, $\tau = \tau_2$. Для сокращения записи в приведенных формулах использован двойной верхний индекс $\pm\beta$. При этом следует понимать, что рассмотрены две узловые точки: $A_{i,\tau}^{+\beta}$ и $A_{i,\tau}^{-\beta}$.

Используя (4), отображение сдвига и координаты узловых точек, можем получить уравнения динамических линий переключения:

$$L_{1,\tau} \cdot \begin{cases} L_{1,\tau}^+ : \begin{aligned} x + y(k - \tau_1) &= \\ &= \alpha + k\beta - \frac{1}{2}g\tau_1^2 + kg\tau_1, \quad \forall y > y_{1,\tau}^{+\beta}; \end{aligned} \\ L_{1,\tau}^0 : x = \alpha + y\tau_1 - \frac{1}{2}g\tau_1^2, \quad \forall y \in [y_{1,\tau}^{-\beta}, y_{1,\tau}^{+\beta}]; \\ L_{1,\tau}^- : \begin{aligned} x + y(k - \tau_1) &= \\ &= \alpha - k\beta - \frac{1}{2}g\tau_1^2 + kg\tau_1, \quad \forall y < y_{1,\tau}^{-\beta}; \end{aligned} \end{cases} \quad (6)$$

$$L_{2,\tau} \cdot \begin{cases} L_{2,\tau}^+ : \begin{aligned} x + y(k - \tau_2) &= \\ &= \alpha + k\beta - h + \frac{1}{2}(a - g)\tau_2^2 - k(a - g)\tau_2, \quad \forall y > y_{2,\tau}^{+\beta}; \end{aligned} \\ L_{2,\tau}^0 = \emptyset; \\ L_{2,\tau}^- : \begin{aligned} x + y(k - \tau_2) &= \\ &= \alpha - k\beta - h + \frac{1}{2}(a - g)\tau_2^2 - k(a - g)\tau_2, \quad \forall y < y_{2,\tau}^{-\beta}; \end{aligned} \end{cases} \quad (7)$$

$$L_{3,\tau} : \left\{ \begin{array}{l} L_{3,\tau}^+ : x + y(k - \tau_1) = \\ \quad = -\alpha + k\beta - \frac{1}{2}g\tau_1^2 + kg\tau_1, \quad \forall y > y_{3,\tau}^{+\beta}; \\ L_{3,\tau}^0 : x = -\alpha + y\tau_1 - \frac{1}{2}g\tau_1^2, \quad \forall y \in [y_{3,\tau}^{-\beta}, y_{3,\tau}^{+\beta}]; \\ L_{3,\tau}^- : x + y(k - \tau_1) = \\ \quad = -\alpha - k\beta - \frac{1}{2}g\tau_1^2 + kg\tau_1, \quad \forall y < y_{3,\tau}^{-\beta}; \end{array} \right. \quad (8)$$

$$L_{4,\tau} : \left\{ \begin{array}{l} L_{4,\tau}^+ : x + y(k - \tau_2) = \\ \quad = -\alpha + h + k\beta + \frac{1}{2}(a + g)\tau_2^2 - k(a + g)\tau_2, \quad \forall y > y_{4,\tau}^{+\beta}; \\ L_{4,\tau}^0 : L_{4,\tau}^0 = \emptyset; \\ L_{4,\tau}^- : x + y(k - \tau_2) = \\ \quad = -\alpha + h - k\beta + \frac{1}{2}(a + g)\tau_2^2 - k(a + g)\tau_2, \quad \forall y < y_{4,\tau}^{-\beta}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Геометрический смысл обозначений в формулах (6)–(9) можно понять из приведенных на рис. 1 построений.

Не все участки линий переключения статической структуры могут иметь физически реализуемое отображение сдвига T_τ . Как показано в [1], на линиях L_i существуют теневые участки, которые не пересекает ни одна из фазовых траекторий соответствующего листа ФП. К таким участкам относятся и отрезки L_2^0 и L_4^0 , обусловленные наличием зоны нечувствительности ДУС. Действительно, потоки фазовых траекторий Γ^+ и Γ^- не облучают отрезки L_2^0, L_4^0 , поэтому в уравнениях (7) и (9) отображения $L_{2,\tau}^0$ и $L_{4,\tau}^0$ суть пустые множества. Но Γ^+ и Γ^0 отображают их концы — узловые точки $A_2^{+\beta}, A_2^{-\beta}, A_4^{+\beta}, A_4^{-\beta}$.

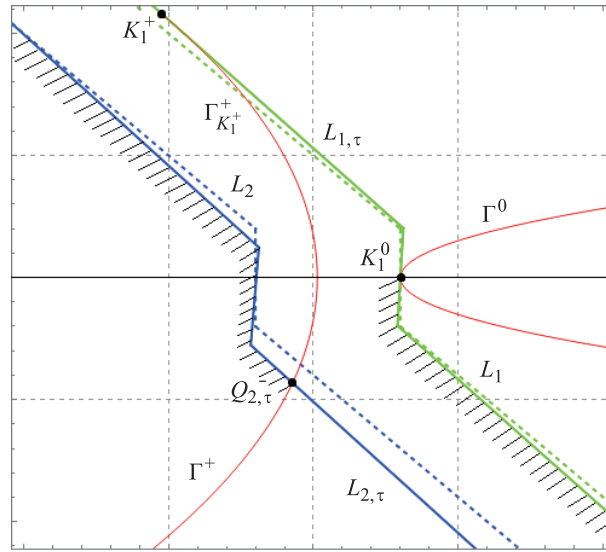


Рис. 1. Фрагмент ФП, поясняющий построение областей существования отображений сдвига T_τ

На тневых участках L_i переключение релейного элемента неосуществимо. Линии динамической структуры (6)–(9) могут содержать в себе и другие тневые участки, для выявления которых необходимо выполнить более глубокий анализ топологии ФП.

Области существования отображений сдвига. Рассмотрим границы области существования отображений сдвига T_τ на примере линий $L_{1,\tau}$ и $L_{2,\tau}$. На рис. 1 представлен соответствующий фрагмент ФП.

Линии L_1 и L_2 статической структуры показаны штрихпунктирными линиями зеленого и синего цвета соответственно. Аналогичные линии динамической структуры $L_{1,\tau}$, $L_{2,\tau}$ показаны сплошными цветными линиями: зеленой и синей. Сплошной линией со штриховкой — тневые участки, без штриховки — участки, облучаемые потоком фазовых траекторий Γ^0 . Нижняя граница области существования отображения сдвига $L_{1,\tau}$ обозначена K_1^0 . Она определяется как точка, в которой фазовая траектория Γ^0 касается линии L_1 .

При движении по траектории Γ^0 на листе F^0 из малой окрестности L_1 возможны два варианта касания линии L_1 : $K_1^0 \in L_1^0$ и $K_1^0 \in L_1^-$. Рассмотрим первый наиболее простой вариант. Возьмем в окрестности линии L_1 , слева, точку $(x, y) \in F^0 \forall y < 0$. Движение из каждой такой точки всегда направлено в сторону от линии L_1 . Точка

будет удаляться от L_1 , пока не сменится знак скорости. Если в своем движении по траектории Γ^0 точка не достигнет противоположной границы L_3 листа F^0 , то после смены знака скорости она пойдет навстречу L_1 и пересечет ее в верхней полуплоскости. Таким образом, ниже точки касания K_1^0 линия L_1 тневая, а в верхней — облучается потоком траекторий Γ^0 .

Верхнюю границу $Q_{2,\tau}^-$ области существования отображения $L_{2,\tau}^- = T_\tau L_2^-$ определяет точка K_1^+ , в которой фазовая траектория $\Gamma_{K_1^+}^+ \in \Gamma^+$ касается L_1 . Через K_1^+ проходит левая граница потока траекторий Γ^+ , облучающих линию L_2 , фазовая траектория $\Gamma_{K_1^+}^+$.

О возможных формах предельных циклов. В рассматриваемой системе, как и в случае [1], может существовать множество предельных циклов Γ_n^* , замкнутая фазовая траектория каждого из которых — образ автоколебательного состояния системы. За один период в режиме Γ_n^* ИО реализуют n управляющих импульсов. В системе с линейными датчиками [1] могут существовать только два простых ($n = 1, 2$) и неограниченное множество сложных ($n = 3, 5, 7, 9, 11, \dots$) предельных циклов. При этом число управляющих импульсов за период в режимах сложных ($n \geq 3$) автоколебаний — нечетное натуральное число.

Наличие зоны нечувствительности β вносит изменения в поведение системы, придает ей новые свойства. Как показывают результаты численного моделирования (1), если ДУС имеет зону нечувствительности β , а ИО — запаздывания $\tau \neq 0$, в системе возможны простые и сложные предельные циклы как с нечетным, так и с четным числом импульсов управления за период.

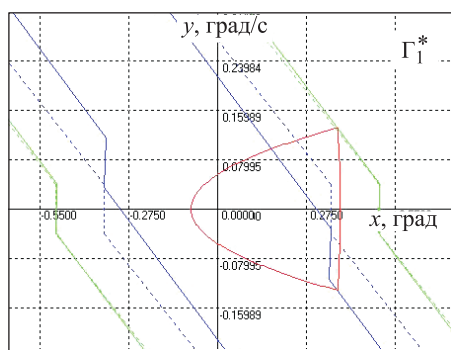
Результаты предварительного анализа периодических режимов для исходных данных, приведенных в таблице, представлены на рис. 2.

Варианты I и III иллюстрируют формы простых предельных циклов Γ_1^* и Γ_2^* , которые возможны и при $\beta = 0$, и при $\beta \neq 0$. Варианты II и IV демонстрируют формы предельных циклов, существование которых при $\beta = 0$ невозможно. Отметим, что исходные данные вариантов I и II одинаковы, т. е. рассматривается одна и та же динамическая система. Но в ней устанавливаются различные предельные циклы: Γ_1^* — обычный одноимпульсный и $(\Gamma_1^*)^2$ — двукратный

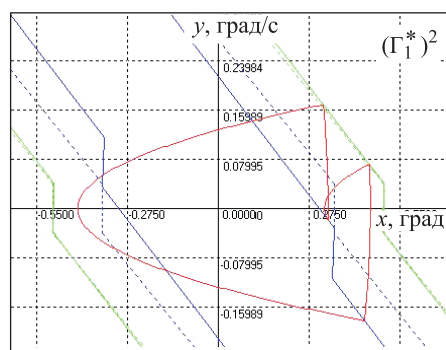
одноимпульсный. У каждого из них своя область притяжения. В этом проявляется свойство неоднозначности релейного регулятора с петлей гистерезиса. Это же относится и к вариантам III и IV, V и VI, VII и VIII.

Результаты предварительного анализа периодических режимов для исходных данных

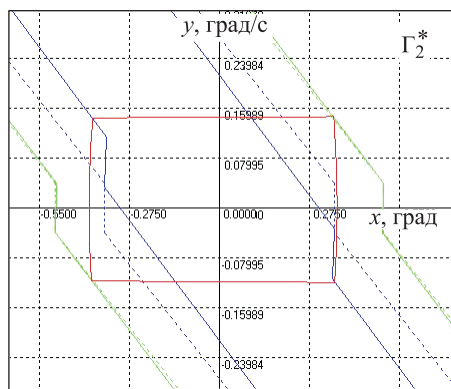
Вариант	a , рад/с ²	g , рад/с ²	α , град	h , град	k , с	τ_1 , с	τ_2 , с	β , град/с
I и II	0,01745	0,00033200	0,5	0,15	1,5	0,05	0,07	0,04
III и IV		0,00000690						
V и VI		0,00016300						
VII и VIII		0,00009442						



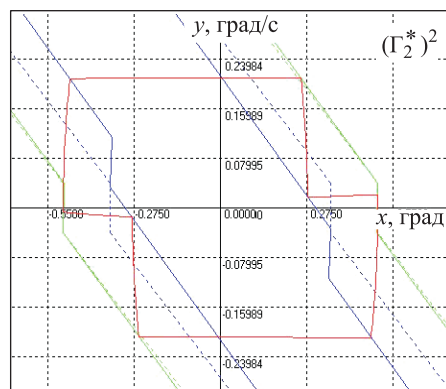
I вариант



III вариант



III вариант



IV вариант

Рис. 2 (начало). Возможные формы предельных циклов для вариантов исходных данных I–VIII, представленных в таблице

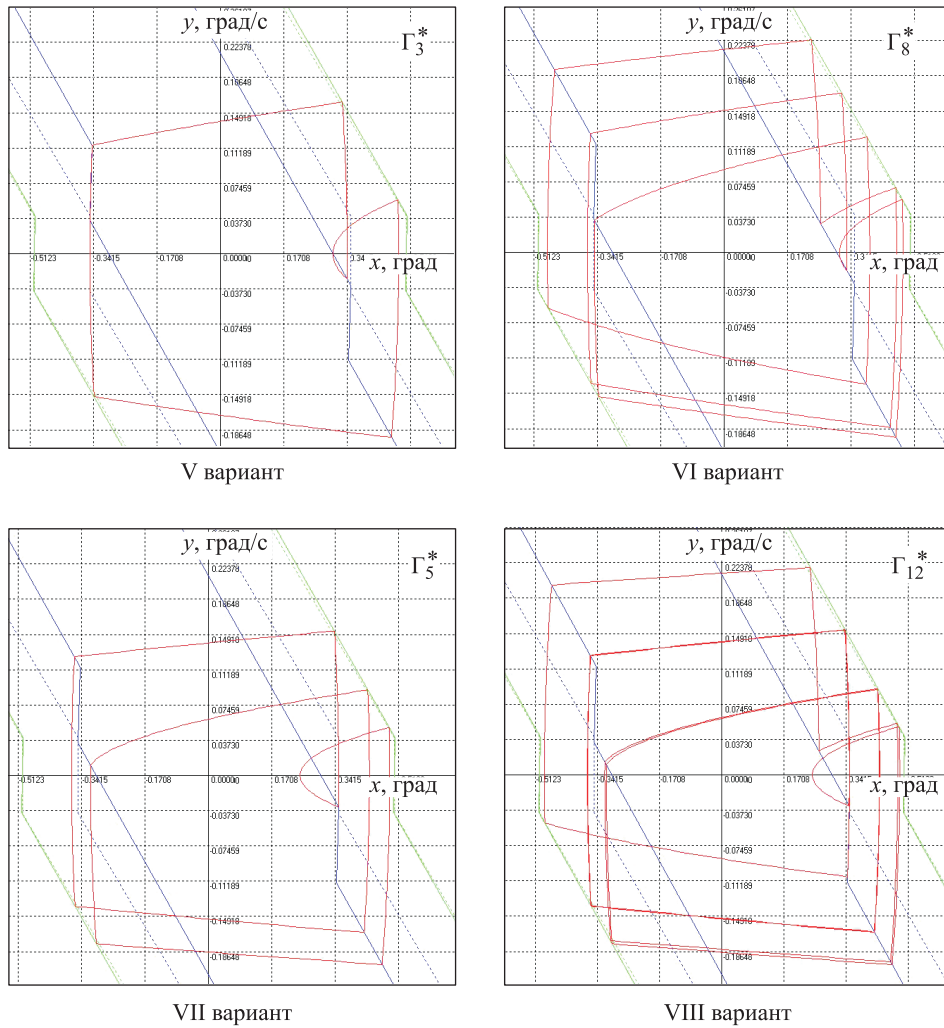


Рис. 2 (окончание). Возможные формы предельных циклов для вариантов исходных данных I–VIII, представленных в таблице

Вариант III — простой двухимпульсный предельный цикл Γ_2^* с двумя управляющими импульсами разных знаков. Вариант IV демонстрирует случай, когда при $\beta \neq 0$ и $\tau \neq 0$ в системе может существовать не только простой Γ_2^* , но и двукратный предельный цикл $(\Gamma_2^*)^2$ с четырьмя импульсами за период.

Варианты V–VIII демонстрируют формы траекторий сложных предельных циклов Γ_n^* , $n \geq 3$. При этом варианты V и VII соответствуют обычным при $\beta = 0$ формам предельных циклов с нечетным числом импульсов управления Γ_3^* , Γ_5^* . Варианты VI и VIII, напротив,

свидетельствуют о возможности существования сложных предельных циклов с четным числом управляющих импульсов за период, если $\beta \neq 0$ и $\tau \neq 0$. Такие режимы невозможны при $\beta = 0$ и/или $\tau = 0$.

Проведенный анализ форм предельных циклов, которые могут существовать в рассматриваемой релейной системе, указывает на большое их разнообразие и зависимость от параметров системы. Для решения задач синтеза управления и выбора проектных параметров объекта необходимо выполнить большой объем исследований динамических режимов управляемого движения. Для таких исследований наиболее подходящим инструментом является метод точечных отображений [2, 3].

Отображения Пуанкаре. Согласно теории точечных отображений, для исследования динамики автоколебаний в случае сложного предельного цикла Γ_n^* необходимо осуществить построение точечного отображения линии без контакта самой в себя, осуществляемое разомкнутой фазовой траекторией Γ_n , по форме подобной замкнутой траектории Γ_n^* . В качестве линии без контакта при $g > 0$ может быть использована динамическая граница $L_{1,\tau}$ листа F^0 . Основная трудность построения отображения обусловлена сложностью формы разомкнутой траектории Γ_n .

Однако, как показал предварительный анализ динамических процессов на ФП, сложные предельные циклы Γ_n^* , $n \in \mathbb{N}$, можно представить объединением определенного числа простых циклов двух видов Γ_1^* и Γ_2^* . Это позволяет воспользоваться тем же упрощающим подходом к поиску сложных предельных циклов, что и тот, который использован в [1]. Такой подход основан на теории многомерных преобразований Ю.И. Неймарка [2, 3].

Таким образом, задача исследования простых и сложных предельных циклов Γ_n^* , $n \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq 3$ может быть сведена к ограниченной задаче построения отображений Пуанкаре линии $L_{1,\tau}$ в себя фрагментами фазовых траекторий простых циклов Γ_1 и Γ_2 , являющихся элементами переходных процессов в окрестности Γ_n^* , $n \in \{1, 2\}$.

Если из предварительного анализа траекторий на ФП установлена возможность существования предельного цикла конкретного вида Γ_n^* , то для его исследования всегда может быть найден такой отрезок без контакта на линии $L_{1,\tau}$, каждая точка-прообраз которого

$(x_{1,\tau}, y_{1,\tau}) \in L_{1,\tau}$ незамкнутыми траекториями Γ_n будет переводиться в точку-образ того же отрезка $(\bar{x}_{1,\tau}, \bar{y}_{1,\tau}) \in L_{1,\tau}$. Оператор этого преобразования записывается в виде: $T_n : L_{1,\tau} \xrightarrow{\Gamma_n} L_{1,\tau}$. Количественную зависимость точки-образа и точки-прообраза отображения линии $L_{i,\tau}$ в себя устанавливает функция последования $\bar{y}_{1,\tau} = f_n(y_{1,\tau})$.

Предельному циклу Γ_n^* отвечают неподвижные точки преобразования $(\bar{x}_{1,\tau}, \bar{y}_{1,\tau}) = (x_{1,\tau}, y_{1,\tau}) \rightarrow (x_{1,\tau}^*, y_{1,\tau}^*)$, которые отображаются сами в себя (образ совпадает с прообразом). Неподвижные точки ищут как корни функции последования:

$$y_{1,\tau}^* - f_n(y_{1,\tau}^*) = 0.$$

Обычно это трансцендентное уравнение решают методом итерации, представив его в виде

$$\begin{cases} \bar{y}_{1,\tau} - f_n(y_{1,\tau}) = 0, \\ \bar{y}_{1,\tau} = y_{1,\tau}. \end{cases} \quad (10)$$

Отображение T_1 можно получить с помощью промежуточных преобразований. При этом предельный цикл Γ_1^* трактуется как замыкание на отрезке $L_{1,\tau}$ кусочно-непрерывной фазовой траектории Γ_1 , состоящей из двух кусков: $\Gamma_{1,\tau 2,\tau}^+ \in \Gamma^+$ и $\Gamma_{2,\tau 1,\tau}^0 \in \Gamma^0$ (при $g > 0$):

$$\begin{cases} T_1 : L_{i,\tau} \xrightarrow{\Gamma_1} L_{i,\tau}, \\ \Gamma_1 = \Gamma_{1,\tau 2,\tau}^+ \cup \Gamma_{2,\tau 1,\tau}^0, \\ \bar{y}_{1,\tau} = f_1(y_{1,\tau}), \end{cases} \quad (11)$$

Аналогично строится точечное отображение T_2 . Предельный цикл Γ_2^* представляем как замыкание на $L_{1,\tau}$ кусочно-непрерывной траектории Γ_2 :

$$\begin{cases} T_2 : L_{i,\tau} \xrightarrow{\Gamma_2} L_{i,\tau}, \\ \Gamma_2 = \Gamma_{1,2}^+ \cup \Gamma_{2,3}^0 \cup \Gamma_{3,4}^- \cup \Gamma_{4,1}^0, \\ \bar{y}_{1,\tau} = f_2(y_{1,\tau}). \end{cases} \quad (12)$$

На диаграмме Ламерея простым предельным циклом Γ_n^* , $n = 1, 2$ соответствует неподвижная точка как графическое решение (10). Неподвижная точка предельного цикла Γ_1^* определяется пересечением с биссектрисой графика функции (11), а неподвижная точка Γ_2^* — это функции (12). Сложные предельные циклы Γ_n^* имеют определенные количества циклов Γ_2^* и Γ_1 , например:

$$\begin{aligned} \Gamma_3^* &= \Gamma_2 \cup \Gamma_1; \\ \Gamma_5^* &= (\Gamma_2 \cup \Gamma_2) \cup \Gamma_1 = (\cup_2 \Gamma_2) \cup \Gamma_1; \\ \Gamma_7^* &= (\Gamma_2 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_2) \cup \Gamma_1 = (\cup_3 \Gamma_2) \cup \Gamma_1; \\ &\dots \end{aligned} \quad (13)$$

Используя теорию многомерных точечных преобразований Ю.И. Неймарка, можно свести рассматриваемую задачу к поиску многократной неподвижной точки. На диаграмме Ламерея такая точка представляет собой замкнутый контур лестницы Ламерея, т. е. контур, состоящий из горизонтальных и вертикальных отрезков прямых. Кратность определяется количеством циклов в объединении (13) или числом вершин замкнутого контура лестницы Ламерея, лежащих на кривых, заданных функциями (11) и (12).

Функции последования точечных отображений T_1 и T_2 . Для построения отображения T_1 и $T_2 \quad \forall g > 0$ используем промежуточные точечные отображения, аналогично тому, как это сделано в [1]. Аналитическое выражение для функции соответствия получаем из совместного решения уравнений, определяющих отрезки $L_{i,\tau}$, $i = \overline{1,4}$ (6)–(9) и уравнений фазовых траекторий (5). При этом лишние корни, обусловленные пересечением траектории с той частью линии без контакта, которая не реализуется, отбрасываются.

Для отображений T_1 и T_2 выполним элементарные преобразования функций соответствия отображений T_{12} , T_{23} , T_{34} , T_{41} , T_{21} и представим в следующем виде:

$$T_2 : \begin{cases} T_{12} : y_{2,\tau} = b(k - \tau_2) - \sqrt{(y_{1,\tau} - bk)^2 + 2b \cdot \tau_1 \cdot y_{1,\tau} + 2bh + \xi_1}; \\ T_{23} : y_{3,\tau} = -g(k - \tau_1) - \sqrt{(y_2 + gk)^2 - 2g\tau_2 y_{2,\tau} + 2g(h - 2\alpha) + \xi_2}; \\ T_{34} : y_{4,\tau} = -d(k - \tau_2) + \sqrt{(y_{3,\tau} + kd)^2 - 2d\tau_1 y_{3,\tau} + 2dh + \xi_3 + 4dk\beta}; \\ T_{41} : y_{1,\tau} = -g(k - \tau_1) + \sqrt{(y_{4,\tau} + kg)^2 - 2g\tau_2 y_{4,\tau} - 2g(h - 2\alpha) + \xi_4}. \end{cases} \quad (14)$$

$$T_1 : \begin{cases} T_{12} : y_{2,\tau} = b(k - \tau_2) - \sqrt{(y_{1,\tau} - bk)^2 + 2b\tau_1 y_{1,\tau} + 2bh + \xi_1}; \\ T_{21}^{-1,+1} : y_{1,\tau} = -g(k - \tau_1) + \sqrt{(y_{2,\tau} + kg)^2 - 2g\tau_2 y_{2,\tau} + 2gh + 4gk\beta + \xi_2}. \end{cases} \quad (15)$$

где $b = a - g$; $d = a + g$; $\xi_1 = bg\tau_1(2k - \tau_1)$; $\xi_2 = bg\tau_2(2k - \tau_2)$; $\xi_3 = -dg\tau_1(2k - \tau_1)$; $\xi_4 = -dg\tau_2(2k - \tau_2)$.

Найденные точечные отображения представляют собой более полный результат по сравнению с известными из литературных источников. Используя их, можно исследовать динамические свойства системы (1) с учетом запаздываний ИО и зоны нечувствительности ДУС $\beta \neq 0$. В частном случае $\beta = 0$ получаем результат, полностью совпадающий с результатом работы [1].

Области определения отображений T_1 и T_2 . Множество фазовых траекторий Γ^+ на листе F^+ , порождаемых линией $L_{1,\tau}$, представим как поток, который облучает линию $L_{2,\tau}$, порождая на листе F^0 поток Γ^0 , который разделяется на две части. Первая часть, не достигнув линии L_3 , возвращается к листу F^+ , облучает линию $L_{1,\tau}$ и вновь порождает поток Γ^+ . Вторая часть потока Γ^0 , дойдя до линии L_3 , переходит на лист F^- , порождая поток Γ^- .

Критическая траектория $\Gamma_{K_3}^0 \in \Gamma^0$, разделяющая поток Γ^0 на две части, определяет границу между областями определения отображе-

ний T_1 и T_2 . Найдем ее попятным движением по траектории $\Gamma_{K_3}^0$ в направлении от точки K_3 к точке $2_{K_3} \in L_{2,\tau}$. Затем по траектории $\Gamma_{K_3}^+$ от точки 2_{K_3} приходим к точке $1_{K_3} \in L_{1,\tau}$, являющейся границей раздела областей определения отображений T_1 и T_2 . Данный алгоритм показан на рис. 3.

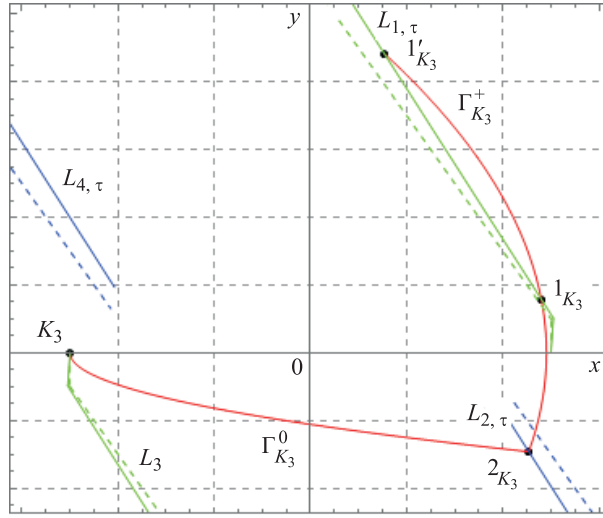


Рис. 3. Геометрическая интерпретация контакта, порождающего границы области существования функции последования

Пересечение траектории $\Gamma_{K_3}^+$ с линией $L_{1,\tau}$ в общем случае происходит в двух точках: $1_{K_3} \in L_{1,\tau}$ и $1'_{K_3} \in L_{1,\tau}$ (рис. 4):

$$\begin{cases} (y)_{1'_{K_3}} = b(k - \tau_1) + \sqrt{A + B + D_1^\tau + 2a(k - \tau_2)\sqrt{C + D_2^\tau}}; \\ (y)_{1_{K_3}} = b(k - \tau_1) - \sqrt{A + B + D_1^\tau + 2a(k - \tau_2)\sqrt{C + D_2^\tau}}, \end{cases} \quad (16)$$

где $A = k^2(g^2 + a^2) - 2k\beta b - 2ah$; $B = 4g\alpha - 2k\beta a$; $C = k^2g^2 - 2g \times (h - 2\alpha + k\beta)$, $D_1^\tau = -a\tau_1 b(2k - \tau_1) - a\tau_2 d(2k - \tau_2)$, $D_2^\tau = -a\tau_2 g(2k - \tau_2)$.

Отрезок $[1_{K_3}, 1'_{K_3}] \in L_{1,\tau}$ — область определения отображения T_1 , за его пределами — область определения отображения T_2 .

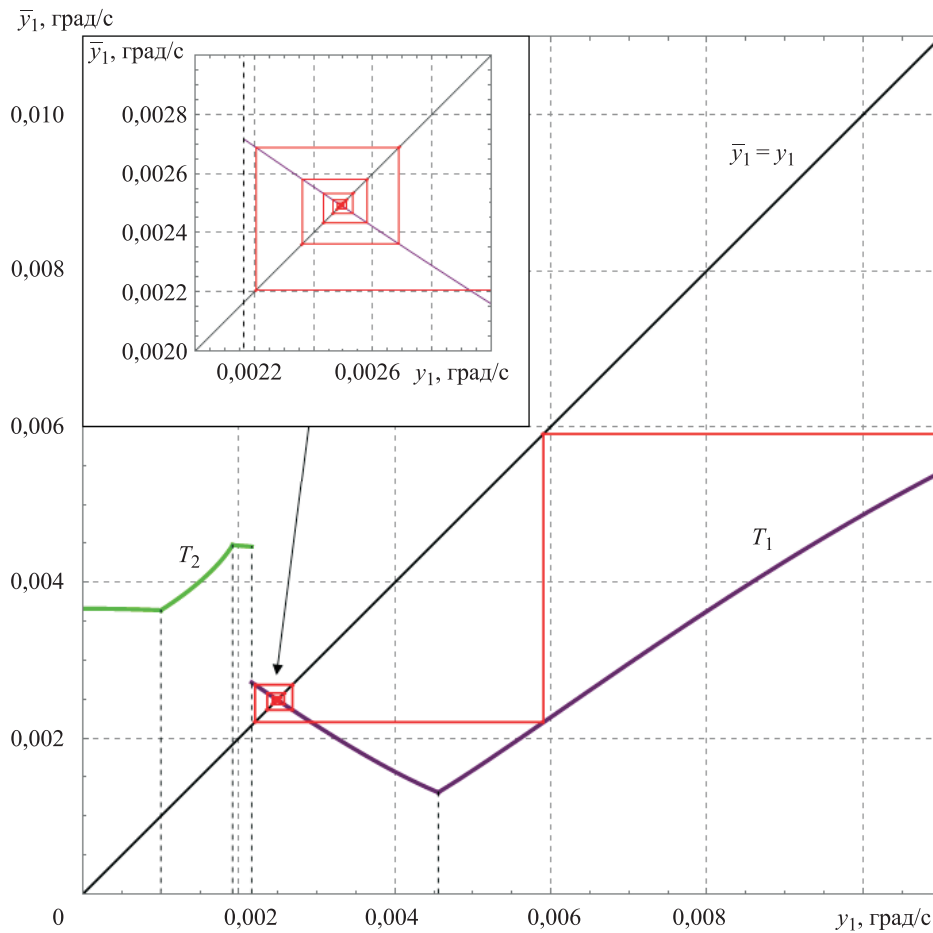


Рис. 4. Диаграмма Ламерея, неподвижная точка предельного цикла Γ_1^*

Автоматизация отображений Пуанкаре. В системе компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* реализуем автоматизированную технологию построения отображений Пуанкаре на основе функций соответствия (14), (15), учитывая области существования отображений T_1 и T_2 . Применим алгоритм итерационного решения трансцендентных уравнений, включающий в себя следующие этапы:

- 1) ввод исходных данных $\{h, k, \beta, \tau_1, \tau_2, a, g\}$;
- 2) задание функции последования отображений T_1 и T_2 ;
- 3) вычисление констант;
- 4) определение границ области существования;
- 5) выбор начального значения y_0 в области определения T_1 или T_2 ;
- 6) определение координат последующих точек;
- 7) построение диаграммы Ламерея.

Пример диаграммы Ламерея, приведенный на рис. 4, построен по изложенному выше алгоритму для исходных данных:

$$\left\{ \alpha = 0,1^\circ; h = 0,02^\circ; k = 8 \text{ с}; \beta = 0,001 \text{ град/с}; \tau_1 = 0,05 \text{ с}; \right. \\ \left. \tau_2 = 0,07 \text{ с}; a = 4,543 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}^2; g = 3,417 \cdot 10^{-7} \text{ рад/с}^2 \right\}.$$

Пример построения диаграммы Ламерея для отыскания сложных предельных циклов представлен на рис. 5. Итерационный процесс привел к двукратной неподвижной точке предельного цикла Γ_3^* .

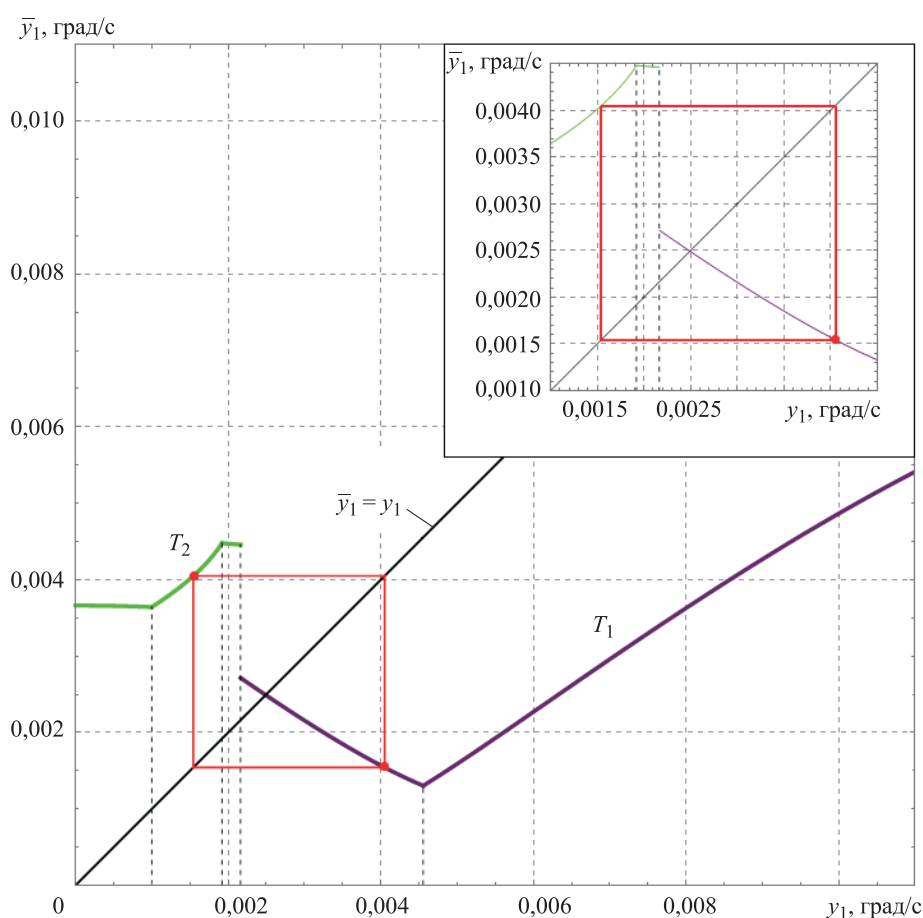


Рис. 5. Двукратная неподвижная точка на диаграмме Ламерея

Диаграмма на рис. 5 разделена граничным значением y_{1K_3} на две области существования отображений: T_2 — слева и T_1 — справа. Из начального состояния итерационный процесс в виде лестницы Ламерея стягивается к простой неподвижной точке одноимпульсного предельного цикла Γ_1^* .

Результаты подтверждены численным моделированием на ПЭВМ с применением программы Model [14]. Координаты неподвижной точки, полученные численным моделированием и на диаграмме Ламерея, совпадают: $y^* = 0,0025$ град/с.

Заключение. Получены аналитические выражения функций соответствия отображений Пуанкаре для отыскания параметров простых и сложных предельных циклов автоколебаний в нелинейной системе стабилизации (1) с релейным регулятором общего вида при учете влияния запаздываний исполнительных органов на включение и выключение, зоны нечувствительности датчика скорости и действия постоянного возмущения. Определены границы областей существования точечных отображений.

Показано, что наличие зоны нечувствительности датчика скорости вносит существенные изменения в поведение системы, придавая ей новые свойства.

Благодаря использованию теории многомерных точечных преобразований Ю.И. Неймарка задача определения сложных предельных циклов сведена к поиску многократной неподвижной точки на диаграмме Ламерея.

Предложена автоматизированная технология построения отображений Пуанкаре на основе соотношений (14)–(16).

Результаты аналитических исследований подтверждены численным моделированием динамических процессов на ПЭВМ.

Полученные результаты могут найти практическое применение, например, при выборе основных проектных параметров космического аппарата с реактивной системой управления.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Симоньянц Р.П., Булавкин В.Н. Аналитическое построение точечных отображений релейной динамической системы с учетом запаздываний. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 12 (96). <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-11-1944>
- [2] Гаушус Э.В. *Исследование динамических систем методом точечных преобразований*. Москва, Наука, 1976, 368 с.
- [3] Неймарк Ю.И. *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*. Москва, Наука, 1972, 472 с.
- [4] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. *Управление ориентацией космических аппаратов*. Москва, Наука, 1974, с. 269–270.
- [5] Нгуен Ч.К. Влияние люфта и сухого трения на устойчивость мехатронного привода (аналитическое исследование). *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2006, № 28, с. 157–162.
- [6] Любимцева О.Л. Исследование периодических движений и структуры фазового пространства фрикционных автоколебаний методом точечных отображений. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2011, № 4-1, с. 156–159.

- [7] Guan Y., et al. Nonlinear time-series analysis of thermoacoustic oscillations in a solid rocket motor. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2018, vol. 98, pp. 217–226.
- [8] Симоньянц Р.П., Худайбергенов Б.Р. Устойчивость релейной динамической системы с нелинейным датчиком скорости и запаздыванием при действии постоянного возмущения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 3. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-3-1966>
- [9] Краснощеченко В.И. Стабилизация неустойчивого предельного цикла релейной хаотической системы. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 2 (6), с. 87–104.
- [10] Tang S., Tang B., Wang A., Xiao Y. Holling II predator–prey impulsive semi-dynamic model with complex Poincaré map. *Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 81 (3). DOI: 10.1007/s11071-015-2092-3
- [11] Wang Y., Cheng H., Li Q. Dynamic analysis of wild and sterile mosquito release model with Poincaré map. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2019, vol. 16, no. 6, pp. 7688–7706.
- [12] Shi Z., Li Q., Li W., Cheng H. Poincaré Map Approach to Global Dynamics of the Integrated Pest Management Prey-Predator Model. *Complexity*, 2020, vol. 2020. DOI: 10.1155/2020/2376374
- [13] Yoon Y.E., Johnson E.N. Determination of Limit Cycle Oscillation Frequency in Linear Systems with Relay Feedback. *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. January 8–12, 2018, United States, Florida, Kissimmee, AIAA*. USA, VA, Reston, American Institute of Aeronautics and Astronautics Publ., 2018, pp. 178–196.
- [14] Симоньянц Р.П., Будыка С.М. Компьютерная модель нелинейной динамики угловой стабилизации космического аппарата. *Всероссийская научно-техническая конференция «Аэрокосмические технологии»: тр. Р.П. Симоньянц, ред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, с. 197–204.*

Статья поступила в редакцию 30.06.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Симоньянц Р.П., Булавкин В.Н. Исследование методом Пуанкаре динамики релейной стабилизации с учетом нелинейности датчика скорости, запаздываний и постоянного возмущения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 8. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-8-2104>

Симоньянц Ростислав Петрович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана, декан аэрокосмического факультета МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: rps@bmstu.ru

Булавкин Владимир Николаевич — студент аэрокосмического факультета кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: bulavkin_98@mail.ru

Point mapping method in investigating the dynamics of relay stabilization with account for nonlinearity of the speed sensor, delays, and time-independent perturbation

© R.P. Simonyants, V.N. Bulavkin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

Using the point mapping method, we obtained analytical expressions for the first return functions for determining simple and complex attractors in the stabilization mode by a general-purpose relay controller with the linear formation of the control signal. We investigated self-oscillations with account for the operating members' aftereffect, the dead zone of the speed sensor, and the time-independent perturbation action. The study shows that the dead zone of the speed sensor introduces significant changes in the behavior of the system, giving it new properties. The analysis of dynamic processes on a three-sheet phase surface revealed a wide variety of limit cycles and their dependence on the system's parameters. Complex limit cycles are represented by combining simple cycles of two types, which allowed for a simplifying approach to their search based on the theory of multidimensional transformations of Yu.I. Neymark. A more complete result was obtained in comparison with the well-known literary sources.

Keywords: Poincaré mapping, first return function, Lamerey diagram, fixed point, limit cycle, relay control, self-oscillations

REFERENCES

- [1] Simonyants R.P., Bulavkin V.N. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2019, iss. 12 (96). <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-11-1944>
- [2] Gaushus E.V. *Issledovanie dinamicheskikh sistem metodom tochechnykh preobrazovaniy* [Investigation of dynamic systems by the method of point transformations]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 368 p.
- [3] Neymark Yu.I. *Metod tochechnykh otobrazheniy v teorii nelineynykh kolebaniy* [The method of point mappings in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 472 p.
- [4] Raushenbakh B.V., Tokar E.N. *Upravlenie orientatsiy kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft attitude control]. Moscow, Nauka Publ., 1974, pp. 269–270.
- [5] Nguen Ch.K. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki — Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2006, no. 28, pp. 157–162.
- [6] Lyubimtseva O.L. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo — Vestnik of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod*, 2011, no. 4-1, pp. 156–159.
- [7] Guan Y., et al. Nonlinear time-series analysis of thermoacoustic oscillations in a solid rocket motor. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2018, vol. 98, pp. 217–226.
- [8] Simonyants R.P., Khudaybergenov B.R. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, iss. 3. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-3-1966>
- [9] Krasnoshechenko V.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 2 (6), pp. 87–104.

- [10] Tang S. et al Holling II predator–prey impulsive semi-dynamic model with complex Poincaré map. *Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 81 (3). DOI: 10.1007/s11071-015-2092-3
- [11] Wang Y., Cheng H., Li Q. Dynamic analysis of wild and sterile mosquito release model with Poincaré map. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2019, vol. 16, no. 6, pp. 7688–7706.
- [12] Shi Z., et al. Poincaré Map Approach to Global Dynamics of the Integrated Pest Management Prey-Predator Model. *Complexity*, 2020, vol. 2020. DOI: 10.1155/2020/2376374
- [13] Yoon Y.E., Johnson E.N. Determination of Limit Cycle Oscillation Frequency in Linear Systems with Relay Feedback. *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. January 8–12, 2018, United States, Florida, Kissimmee, AIAA*. USA, VA, Reston, American Institute of Aeronautics and Astronautics Publ., 2018, pp. 178–196.
- [14] Simonyants R.P., Budyka S.M. *Vserossiyskaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Aerokosmicheskie tekhnologii»: tr.* [Proceedings of All-Russian Scientific and Technical Conference “Aerospace Technologies”]. Moscow, BMSTU Publ., 2003, pp. 197–204.

Simonyants R.P., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Aerospace Systems, Dean of the Aerospace Faculty, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: attitude control and spacecraft stabilization. e-mail: rps@bmstu.ru

Bulavkin V.N., student, Department of Aerospace Systems, Aerospace Faculty, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: bulavkin_98@mail.ru