

Равновесие и колебания свободной поверхности жидкого топлива в коаксиально-цилиндрических сосудах в условиях микрогравитации

© Юй Чжаокай, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Представлено решение задачи о равновесии и малых колебаниях идеальной жидкости в условиях микрогравитации. Дана количественная оценка влияния таких параметров, как угол смачивания, число Бонда, соотношение радиусов внутренней и внешней стенки сосуда, глубина жидкости в нем. Для сосудов в форме коаксиального цилиндра получены выражения потенциала скоростей жидкости и поля смещения свободной поверхности в виде ряда Бесселя. Дополнительно к аналитическим и экспериментальным данным, приведенным в литературе, доказана достоверность разработанного численного алгоритма и сделан вывод о том, что для $Bo > 5$ и $\delta > 0,2$ при неизменном физическом состоянии смачиваемой поверхности форма свободной поверхности приближается к плоской и угол смачивания мало влияет на собственные частоты колебаний свободной поверхности жидкости. Полученные результаты будут полезны при решении задач по определению гидродинамических характеристик движения жидкого топлива в условиях космического пространства.

Ключевые слова: микрогравитация, сила поверхностного натяжения, капиллярная жидкость, коаксиальный цилиндр, метод Рунге — Кутты, ряд Бесселя

Введение. В баках современных космических аппаратов содержится значительная часть жидкого топлива. При проектировании подобных транспортных средств инженерам и конструкторам полезно знать конфигурацию и поведение поверхности раздела жидкости — газа в условиях микрогравитации, для того чтобы более точно описать динамические процессы в космических аппаратах при выполнении различных маневров. Следует заметить, что плескание жидкости может приводить к изменению положения центра масс, а значит, повлиять на устойчивость передвижения космических аппаратов. В российских и зарубежных монографиях [1–3] обобщены результаты исследования статики и динамики жидкости в условиях, близких к невесомости. Анализ приведенных в статьях [4–6] методов показывает, что в современной гидромеханике невесомости недостаточно полно разработаны методы численного моделирования поведения жидкости в двухсвязных сосудах. В статьях [7–10] представлены приближенные методы вычисления частот и форм колебаний жидкости в сосудах, имеющих форму кругового цилиндра и сферы, кото-

рые часто применяются в ракетно-космической технике. Следует отметить, что в последнее время стали использовать двухсвязные топливные баки более сложной формы — в виде коаксиального цилиндра и тороидальные, однако в них поведение жидкости с учетом капиллярного эффекта еще недостаточно исследовано.

Цель настоящей работы — представить исследование равновесия и колебаний жидкости с учетом силы поверхностного натяжения в сосудах, имеющих форму коаксиального цилиндра. В статьях [11, 12] было рассмотрено решение задачи о равновесии жидкости в коаксиальном цилиндре в условиях невесомости и микрогравитации, но без учета влияния внутренней стенки сосуда, а в [13–16] приведено исследование колебаний капиллярной жидкости в круговом цилиндре на основе ряда Бесселя.

Определение форм равновесной свободной поверхности.

В условиях микрогравитации ($g = (10^{-6} - 10^{-4})g_0$) поведение жидкого топлива определяют силы поверхностного натяжения, иначе — межмолекулярные силы на границе двух фаз. Вектор ускорения \vec{g} действует параллельно продольной оси симметрии сосуда. Введем цилиндрическую систему координат $Or\theta z$, в которой будет представлено поперечное сечение сосуда (рис. 1). Используем длину дуги s в качестве переменной для описания формы свободной поверхности.

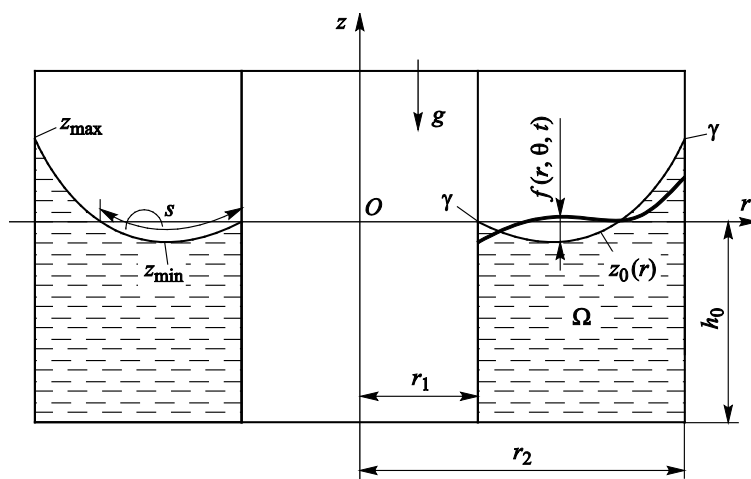


Рис. 1. Основные обозначения параметров жидкости и система координат $Or\theta z$:

z_{\min} — наименьшая высота свободной поверхности; z_{\max} — наибольшая высота свободной поверхности; $z_0(r)$ — равновесная свободная поверхность; $f(r, \theta, t)$ — отклонение возмущенной свободной поверхности от равновесной; γ — линия смачивания; Ω — область, которую занимает жидкость; r_1 — радиус внутренней стенки сосуда; r_2 — радиус внешней стенки сосуда; h_0 — глубина жидкости около внутренней стенки сосуда

Для того чтобы приступить к исследованию колебаний капиллярной жидкости, необходимо предварительно решить задачу о форме равновесной свободной поверхности. Вывод условий равновесия гидромеханической системы газ — жидкость — твердая стенка и алгоритм решения задачи подробно рассмотрены в [17].

Запишем уравнение невозмущенной свободной поверхности жидкости в безразмерной форме:

$$2H_p = \text{Bo} + C, \quad (1)$$

где $H_p = (k_1 + k_2) / 2$ — средняя кривизна равновесной свободной поверхности (k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности); $\text{Bo} = \rho g r_2^2 / \sigma$ — число Бонда, характеризующее соотношение массовой силы и силы поверхностного натяжения (ρ — плотность жидкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения раздела жидкости — газа); C — константа, определяемая физическими параметрами задачи и формой сосуда, которая зависит от начала системы координат.

В цилиндрической системе координат $Or\theta z$ средняя кривизна осесимметричной поверхности определяется выражением

$$2H_p = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r z_r}{\sqrt{1 + z_r^2}} \right) = \frac{z_s}{r} + (r_s z_{ss} - r_{ss} z_s), \quad (2)$$

где $(\)_r$ — первая производная функции по координате r ; $(\)_s$ и $(\)_{ss}$ — первая и вторая производные функции по длине дуги s .

Используя уравнения (1)–(2), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих равновесную свободную поверхность:

$$r_s = u; \quad z_s = v; \quad u_s = -v \left(\text{Bo} z + C - \frac{v}{r} \right); \quad v_s = u \left(\text{Bo} z + C - \frac{v}{r} \right). \quad (3)$$

При произвольном значении числа Bo система уравнений (3) не имеет аналитического решения и решается методом Рунге — Кутты при условиях:

$$\begin{aligned} r(0) = \delta; \quad z(0) = 0; \quad u(0) = \sin(\alpha_0); \quad v(0) = -\cos(\alpha_0); \\ r(s_0) = 1; \quad v(s_0) = \cos(\alpha_0), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\delta = r_1 / r_2$; α_0 — угол смачивания; s_0 — общая длина дуги.

При интегрировании системы уравнений (3) с граничными условиями (4) необходимо определять константу C , которая при $\text{Bo} = 0$ имеет аналитическую формулу [1] $C = 2 \cos \alpha_0 / (1 - \delta)$, а при других

числах Бонда находится методом проб. Результаты численного решения задачи (3) и (4) об определении форм равновесной свободной поверхности жидкого топлива приведены на рис. 2, 3.

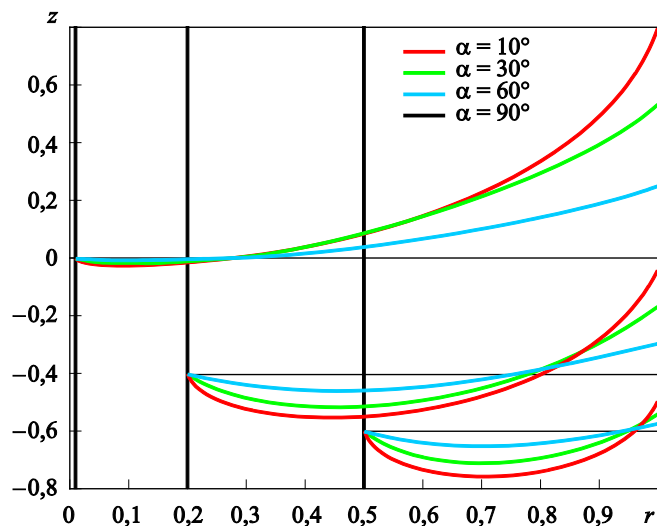


Рис. 2. Формы равновесной свободной поверхности при различных значениях угла смачивания α_0 и полной невесомости ($Bo = 0$)

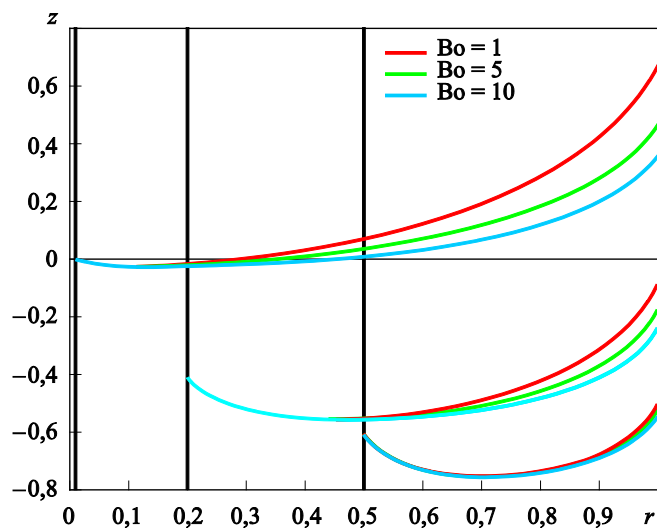


Рис. 3. Формы равновесной свободной поверхности при различных значениях числа Бонда и угле смачивания $\alpha_0 = 10^\circ$

Постановка задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости. Равновесная поверхность жидкости в неподвижном сосуде определена как $z = z_0(r)$, а жидкость, занимающая область Ω , совершает малые колебания. Они подчиняются:

уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \text{ (в области } \Omega), \quad (5)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат; Φ — потенциал скоростей жидкости; условию непротекания на смоченных поверхностях

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 \text{ (} r = r_1, r = r_2), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \text{ (} z = -h_0). \quad (6)$$

Предположим, что возмущенная свободная поверхность F будет представлена в виде

$$F(z, r, \theta, t) = z_0(r) + f(r, \theta, t) - z = 0. \quad (7)$$

Принимая во внимание, что частицы жидкости при малых колебаниях остаются на свободной поверхности, можно записать полную производную по времени функции F следующим образом:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\Phi \cdot \nabla F = 0, \quad (8)$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z + \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$ — оператор Гамильтона.

Из уравнений (7)–(8) следует, что линеаризованное кинематическое условие на свободной поверхности имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial r} \cdot \frac{dz_0}{dr} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0. \quad (9)$$

Используя интеграл Коши — Лагранжа

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gz = \frac{P_0}{\rho}, \quad (10)$$

где $P = P_{\text{ст}} + P_{\text{д}}$ — полное давление жидкости на возмущенной свободной поверхности ($P_{\text{ст}}$ — статическое давление, $P_{\text{д}}$ — динамическое давление); P_0 — статическое давление жидкости при $z = 0$, получим динамическое условие на свободной поверхности.

Из уравнения Эйлера для покоящейся жидкости определим давление на равновесной свободной поверхности:

$$P_0 - P_{\text{ст}} = \rho g z_0(r). \quad (11)$$

Далее для вычисления перепада давления газа и жидкости на возмущенной свободной поверхности используем условие Лапласа

$$P_{\Gamma} - P = 2\sigma H_{\text{в}}, \quad (12)$$

где P_{Γ} — давление газа; $H_{\text{в}}$ — кривизна, определяемая уравнением

$$2H_{\text{в}} = \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r z_{0r}}{(1 + z_{0r}^2)^{1/2}} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r f_r}{(1 + z_{0r}^2)^{3/2}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{f_{\theta}}{(1 + z_{0r}^2)^{1/2}} \right] \right\}. \quad (13)$$

С учетом условия Лапласа вычислим на равновесной свободной поверхности разность

$$P_{\Gamma} - P_{\text{ст}} = \sigma \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r z_{0r}}{(1 + z_{0r}^2)^{1/2}} \right] \right\}, \quad (14)$$

а с помощью (12)–(14) получаем выражение для динамического давления:

$$P_{\text{д}} = -\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r f_r}{(1 + z_{0r}^2)^{3/2}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{f_{\theta}}{(1 + z_{0r}^2)^{1/2}} \right] \right\}. \quad (15)$$

Из уравнений (7), (10)–(11) и (15) выведем динамическое условие на свободной поверхности с учетом влияния силы поверхностного натяжения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g f - \frac{\sigma}{\rho} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r f_r}{(1 + z_{0r}^2)^{3/2}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{f_{\theta}}{(1 + z_{0r}^2)^{1/2}} \right] \right\} = 0. \quad (16)$$

Введем характерный размер сосуда r_2 , а также характерные значения для времени t_* и потенциала Φ_* :

$$t_* = \sqrt{\rho r_2^3 / \sigma}; \quad \Phi_* = r_2^2 / t_*.$$

Подставив величины $x = r_2 \cdot \bar{x}$, $t = t_* \cdot \bar{t}$, $\Phi = \Phi_* \cdot \bar{\Phi}$ в уравнения (5)–(6), (9) и (16), получим безразмерную формулировку задачи, в которой опускаем знак « $-$ » над буквами:

$$\Delta\Phi = 0(\Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 \quad (r_1 = \delta, r_2 = 1), \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad (r_1 = \delta, r_2 = 1);$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -H), \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial r} \cdot \frac{dz_0}{dr} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = z_0(r));$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + B_0 f - \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{rf_r}{(1+z_0r^2)^{3/2}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{f_\theta}{(1+z_0r^2)^{1/2}} \right] \right\} = 0 \quad (z = z_0(r)),$$

где $H = h_0 / r_2$.

Определение собственных частот и форм колебаний. Ограничимся в настоящей статье решениями, отвечающими функции $\cos\theta$. Решение поставленной задачи для функций $\Phi(r, \theta, z, t)$ и $f(r, \theta, t)$, удовлетворяющее уравнению Лапласа и условию непротекания, можно представить в виде ряда Бесселя:

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sum_{n=1} p_n A(\zeta_n r) \frac{\cosh[\zeta_n(z+H)]}{\cosh(\zeta_n H)} \cos\theta \cos(Wt);$$

$$f(r, \theta, t) = \sum_{n=1} q_n A(\zeta_n r) \cos\theta \sin(Wt),$$

где $A(\zeta_n r) = J_1(\zeta_n r) - \frac{J_1'(\zeta_n)}{Y_1'(\zeta_n)} Y_1(\zeta_n r)$, J_1, Y_1 — функции Бесселя

первого и второго рода первого порядка; числа ζ_n для различных соотношений радиусов δ определены из трансцендентного уравнения, получаемого из условия непротекания [18]; $W = \omega(\rho r_2^3 / \sigma)^{1/2}$.

Подставив потенциал скоростей и поле смещений в кинематическое и в динамическое условие на свободной поверхности, умножим полученные выражения на функцию $rA(\zeta_m r)$ и проинтегрируем в диапазоне $[\delta, 1]$. В результате получим:

$$Wq_m = \sum_{n=1} \alpha_{mn} \zeta_n p_n;$$

$$B_0 q_m + \sum_{n=1} \beta_{mn} \zeta_n^2 q_n = W \sum_{n=1} \gamma_{mn} p_n,$$

где

$$\alpha_{mn} = \left(\int_{\delta}^1 rA(\zeta_m r) \left\{ A(\zeta_n r) \frac{\sinh[\zeta_n(z_0(r) + H)]}{\cosh(\zeta_n H)} - \right. \right. \\ \left. \left. - z_{0r} A'(\zeta_n r) \frac{\cosh[\zeta_n(z_0(r) + H)]}{\cosh(\zeta_n H)} \right\} dr \right) / \left(\int_{\delta}^1 rA^2(\zeta_m r) dr \right);$$

$$\beta_{mn} = \frac{\int_{\delta}^1 rA(\zeta_m r) \left\{ \frac{A(\zeta_n r)}{(1 + z_{0r}^2)^{3/2}} + \frac{3A'(\zeta_n r) z_{0r} z_{0rr}}{\zeta_n (1 + z_{0r}^2)^{5/2}} + \frac{A(\zeta_n r) z_{0r}^2}{\zeta_n^2 r^2 (1 + z_{0r}^2)^{3/2}} \right\} dr}{\int_{\delta}^1 rA^2(\zeta_m r) dr};$$

$$\gamma_{mn} = \frac{\int_{\delta}^1 rA(\zeta_m r) \left\{ A(\zeta_n r) \frac{\cosh[\zeta_n(z_0(r) + H)]}{\cosh(\zeta_n H)} \right\} dr}{\int_{\delta}^1 rA^2(\zeta_m r) dr}$$

(z_{0r} и z_{0rr} — первая и вторая производные функции $z_0(r)$ по r).

Исключим q и получим задачу на собственные значения в виде

$$\sum_{n=1} \left[\text{Bo} \alpha_{mn} \zeta_n + \left(\sum_{k=1} \beta_{mk} \alpha_{kn} \right) \zeta_n^3 - W^2 \gamma_{mn} \right] p_n = 0.$$

Запишем полученную задачу в матричной форме

$$(K - W^2 M) P = 0,$$

где $K = \left[\text{Bo} \alpha_{mn} \zeta_n + \left(\sum_{k=1} \beta_{mk} \alpha_{kn} \right) \zeta_n^3 \right]_{m \times n}$, $M = [\gamma_{mn}]_{m \times n}$, $P = \{p_n\}_{n \times 1}$.

Допустив $m = n = N$, можно получить собственные значения W_l^2 ($l = 1, 2, \dots, N$) и собственные векторы $\{p_n\}_{N \times 1}^l$. В дальнейшем определим размерные собственные частоты ω и поле смещения f жидкости.

Если $\alpha_0 = 90^\circ$, то равновесная свободная поверхность плоская:

$$z_0(r) = z_{0r} = z_{0rr} = 0,$$

$$\alpha_{mn} = \begin{cases} \tanh(H), & n = m; \\ 0, & n \neq m; \end{cases} \quad \beta_{mn} = \gamma_{mn} = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

а матрица K — диагональная, M — единичная матрица, и собственное значение $W_n^2 = (Bo\zeta_n + \zeta_n^3) \tanh(H)$ согласуются с аналитическими результатами для цилиндрических сосудов в [1, 2].

Обсуждение результатов. В программе MATLAB получены формы равновесия и собственные частоты колебаний капиллярной жидкости для различных практически важных ситуаций. Все формы свободной поверхности жидкости показаны для правой части поперечного сечения сосуда. На рис. 2 и 3 видно, что при увеличении угла смачивания или числа Бонда равновесная свободная поверхность приближается к плоской. Следует отметить, что наличие внутренней стенки сосуда уменьшает искривление формы свободной поверхности. Собственные частоты при полной невесомости в зависимости от углов смачивания показаны на рис. 4. Красными звездочками подчеркнуты аналитические значения для угла смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$. Видно, что численные значения очень хорошо согласуются с аналитическими и доказывается правильность разработанного алгоритма. Черной линией со звездочками показаны экспериментальные результаты при угле смачивания, близком к нулю [20].

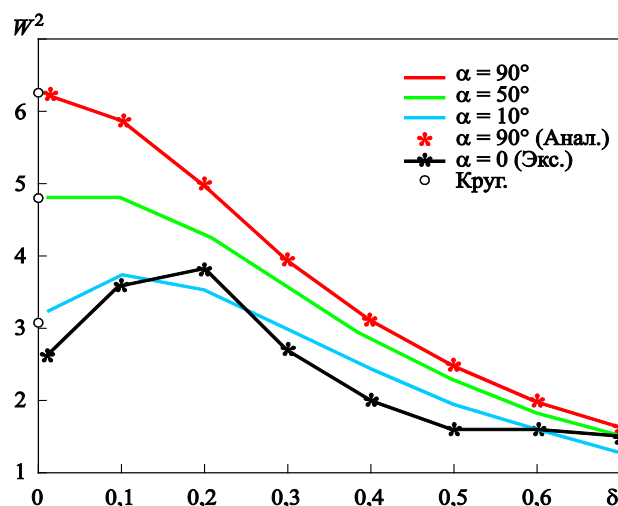


Рис. 4. Квадраты собственных частот W^2 при различных значениях угла смачивания α_0 и условиях $Bo = 0, H = 2$

Численные результаты для угла смачивания $\alpha_0 = 10^\circ$ близки к экспериментальным, и можно сделать вывод о том, что при уменьшении угла смачивания форма свободной поверхности получается более искривленной, а собственные частоты уменьшаются. Это свидетельствует о том, что собственные частоты обратно пропорциональны площади свободной поверхности [18]. Согласно представленному на рис. 5, для числа Бонда $Bo > 5$ и

$\delta > 0,2$ угол смачивания мало влияет на собственные частоты колебания, а в ракетно-космической технике данные условия часто выполняются, что позволяет оценить собственные частоты с помощью аналитической формулы. При увеличении глубины жидкости собственные частоты возрастают и приближаются к предельным значениям (рис. 6), так как на большой глубине можно исключить влияние дна сосуда на собственные частоты. Собственная форма колебания жидкости для первой частоты при полной невесомости показана на рис. 7.

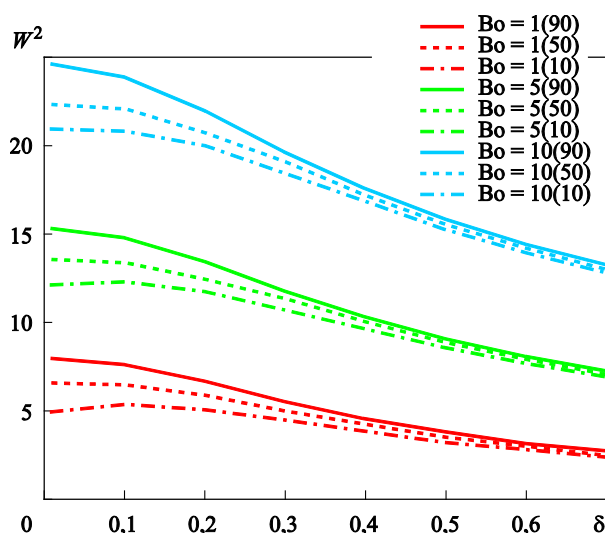


Рис. 5. Квадраты собственных частот W^2 при разных значениях числа Бонда Bo и глубине жидкости $H = 2$ (в скобках приведены значения угла смачивания)

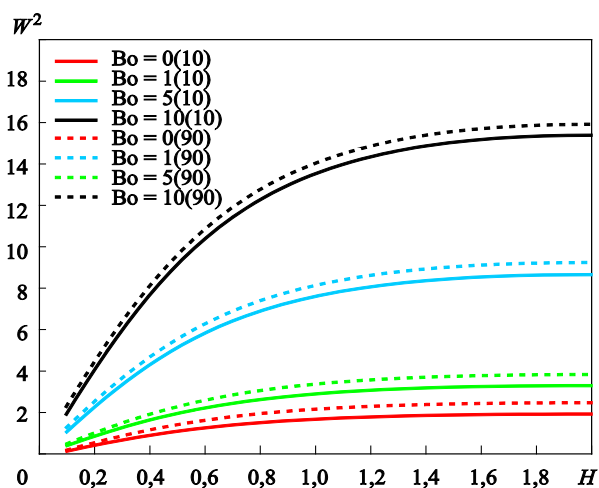


Рис. 6. Квадраты собственных частот W^2 в зависимости от глубины жидкости H при разных значениях числа Бонда и $\delta = 0,5$ (в скобках приведены значения угла смачивания)

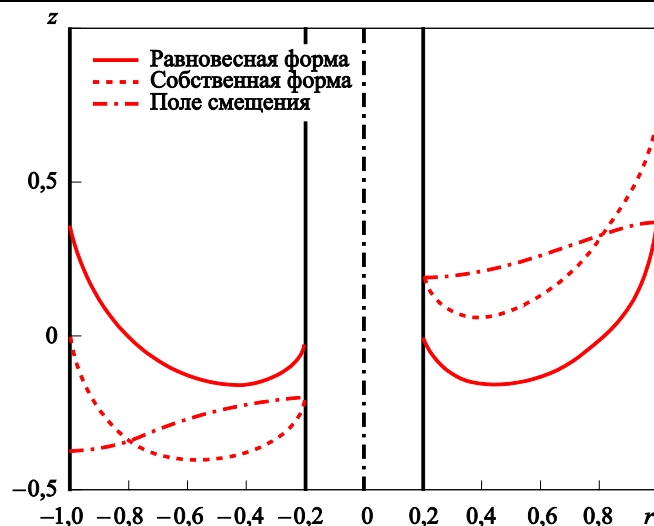


Рис. 7. Собственная форма колебания жидкости
при $Bo = 0$, $\alpha_0 = 10^\circ$, $H = 2$

Заключение. В настоящей работе численно определены формы равновесия, собственные частоты и формы колебаний свободной поверхности жидкости в условиях микрогравитации при любом соотношении радиусов стенок сосуда, имеющего форму коаксиального цилиндра. Для случая, когда допустимо отклонение свободной поверхности вдоль оси Oz , подробно приведен вывод кинематического и динамического условий на возмущенной свободной поверхности с учетом влияния силы поверхностного натяжения. Из результатов исследований следует, что угол смачивания α_0 влияет на форму равновесной свободной поверхности и, следовательно, оказывает влияние на динамические характеристики колебания жидкости. При $Bo > 5$ и $\delta > 0,2$ форма равновесия свободной поверхности становится близка к плоской, и можно проводить оценку собственных частот колебаний по аналитическими формулами, получаемыми при $\alpha_0 = 90$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. *Методы решения задачи гидромеханики для условий невесомости*. Киев, Наукова Думка, 1992, 592 с.
- [2] Dodge F.T. *The new "Dynamic behavior of liquids in moving containers"*. NASA SP-106, 2000, 202 p.
- [3] Ibrahim R.A. *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. 2nd ed. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2005, 948 p.
- [4] Полевиков В.К. О методах численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей. *Дифференциальные уравнения*, 1999, т. 35, № 7, с. 975–981.

- [5] Cheng X., Wang Z. The equation and the numerical analysis of static fluid surface in revolving symmetrical tank under low gravity. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2000, vol. 17 (3), pp. 273–279.
- [6] Yang D., Yue B., Zhu L., Song X. Solving shapes of hydrostatic surface in rectangular and revolving symmetrical tanks under microgravity using shooting method. *Chinese Journal of Space Science*, 2012, vol. 32 (1), pp. 85–91.
- [7] Chu W. Low-Gravity Fuel Sloshing in an Arbitrary Axisymmetric Rigid Tank. *ASME. J. Appl. Mech.*, 1970, vol. 37 (3), pp. 828–837. <https://doi.org/10.1115/1.3408616>
- [8] Wang Z., Deng Z. Sloshing of Liquid in Spherical Tank at Low-gravity Environments. *Chinese Journal of Space Science*, 1985, vol. 5 (4), pp. 294–302.
- [9] Wang Z., Deng Z. On the Sloshing of Liquid in a Partially Filled Rectangular Tank under Low-gravity Condition. *Journal of Tsinghua University*, 1986, vol. 26 (3), pp. 1–9.
- [10] Utsumi M. Low-gravity propellant slosh analysis using spherical coordinates. *Journal of Fluids and Structures*, 1998, vol. 12 (1), pp. 57–83. <https://doi.org/10.1006/jfls.1997.0125>
- [11] Siekmann J., Scheideler W., Tietze P. Static meniscus configurations in propellant tanks under reduced gravity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1981, vol. 28 (1), pp. 103–116.
- [12] Zhou D. The Analysis of The Interface Shape of Rotating Liquid Annular Container at Zero-gravity Environment. *Structure & Environment Engineering*, 1994, no. 2, pp. 40–44.
- [13] Dodge F.T., Garza L.R. Experimental and Theoretical Studies of Liquid Sloshing at Simulated Low Gravity. *ASME. J. Appl. Mech.*, 1967, vol. 34 (3), pp. 555–562. <https://doi.org/10.1115/1.3607743>
- [14] Wu W., Yue B. An Analytical Method for Studying the Sloshing Properties of Liquid in Cylindrical Tank under Low Gravity Environment. *Journal of Astronautics*, 2014, vol. 35 (4), pp. 397–403.
- [15] Yue B., Wu W., Yan Y. Modeling and Coupling Dynamics of the Spacecraft with Multiple Propellant Tanks. *AIAA J.*, 2016, vol. 54 (11), pp. 3608–3618. <https://doi.org/10.2514/1.J055110>
- [16] Yue B., Yu J., Wu W. Rigid and liquid coupling dynamics and hybrid control of spacecraft with multiple propellant tanks. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, vol. 49 (2), pp. 390–396. URL: <http://lxxb.cstam.org.cn/CN/10.6052/0459-1879-16-342> (дата обращения 25.04.2021).
- [17] Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в тороидальном сосуде. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 3. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-3-2060>
- [18] Моисеев Н.Н., Петров А.А. *Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости*. Москва, Вычислительный центр АН СССР, 1966, 272 с.
- [19] Labus T. *Natural frequency of liquids in annular cylinders under low gravitational conditions*. NASA TN D-5412, 1969, 28 p.

Статья поступила в редакцию 06.07.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Равновесие и колебания свободной поверхности жидкого топлива в коаксиально-цилиндрических сосудах в условиях микрогравитации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 8.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-8-2099>

Юй Чжаокай — аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yuzhaokai933@mail.ru

Темнов Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: antt45@mail.ru

Equilibrium and oscillations of liquid fuel free surface in coaxial-cylindrical vessels under microgravity conditions

© Yu Zhaokai, A.N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

In the absence of significant mass forces, the behavior of liquid fuel under microgravity conditions is determined by surface tension forces, which are intermolecular forces at the interface of two phases. The paper posed and solved the problem of equilibrium and small oscillations of an ideal liquid under microgravity conditions, and also quantified the influence of various parameters: the contact angle α_0 , the Bond number, the ratio of the radii of the inner and outer walls of the vessel and the depth of the liquid. For the coaxial-cylindrical vessels, there were obtained expressions in the form of a Bessel series for the potential of the fluid velocities and the free surface displacement field. The study relies on the analytical and experimental data available in the literature and proves the reliability of the developed numerical algorithm. Findings of research show that for $Bo > 5$ and $\delta > 0,2r$, with the physical state of the wetted surface being unchanged, the shape of the free surface tends to be flat and the contact angle has little effect on the intrinsic vibration frequency of the free surface of the liquid. The results obtained can be used to solve problems of determining the hydrodynamic characteristics of the movement of liquid fuel in outer space.

Keywords: microgravity, surface tension force, capillary fluid, coaxial cylinder, Runge — Kutta method, Bessel series

REFERENCES

- [1] Myshkis A.D., Babskiy V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevskiy N.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Metody resheniya zadachi gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Methods for solving the problems of hydromechanics for weightlessness conditions]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1992, 592 p.
- [2] Dodge F.T. *The new "Dynamic behavior of liquids in moving containers"*. NASA SP-106, 2000, 202 p.
- [3] Ibrahim R.A. *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. 2nd ed., Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2005, 948 p.
- [4] Polevikov V.K. *Differentsialnye uravneniya — Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 7, pp. 975–981.
- [5] Cheng X., Wang Z. The equation and the numerical analysis of static fluid surface in revolving symmetrical tank under low gravity. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2000, vol. 17 (3), pp. 273–279.
- [6] Yang D., Yue B., Zhu L., Song X. Solving shapes of hydrostatic surface in rectangular and revolving symmetrical tanks under microgravity using shooting method. *Chinese Journal of Space Science*, 2012, vol. 32 (1), pp. 85–91.
- [7] Chu W. Low-Gravity Fuel Sloshing in an Arbitrary Axisymmetric Rigid Tank. *ASME. J. Appl. Mech.*, 1970, vol. 37 (3), pp. 828–837. <https://doi.org/10.1115/1.3408616>
- [8] Wang Z., Deng Z. Sloshing of Liquid in Spherical Tank at Low-gravity Environments. *Chinese Journal of Space Science*, 1985, vol. 5 (4), pp. 294–302.
- [9] Wang Z., Deng Z. On the sloshing of liquid in a partially filled rectangular tank under low-gravity condition. *Journal of Tsinghua University*, 1986, vol. 26 (3), pp. 1–9.

- [10] Utsumi M. Low-gravity propellant slosh analysis using spherical coordinates. *Journal of Fluids and Structures*, 1998, vol. 12 (1), pp. 57–83. <https://doi.org/10.1006/jfls.1997.0125>
- [11] Siekmann J., Scheideler W., Tietze P. Static meniscus configurations in propellant tanks under reduced gravity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1981, vol. 28 (1), pp. 103–116.
- [12] Zhou D. The analysis of the interface shape of rotating liquid annular container at zero-gravity environment. *Structure & Environment Engineering*, 1994, no. 2, pp. 40–44.
- [13] Dodge F.T., Garza L.R. Experimental and Theoretical Studies of Liquid Sloshing at Simulated Low Gravity. *ASME. J. Appl. Mech.*, 1967, vol. 34 (3), pp. 555–562. <https://doi.org/10.1115/1.3607743>
- [14] Wu W., Yue B. An analytical method for studying the sloshing properties of liquid in cylindrical tank under low gravity environment. *Journal of Astronautics*, 2014, vol. 35 (4), pp. 397–403.
- [15] Yue B., Wu W., Yan Y. Modeling and coupling dynamics of the spacecraft with multiple propellant tanks. *AIAA J.*, 2016, vol. 54 (11), pp. 3608–3618. <https://doi.org/10.2514/1.J055110>
- [16] Yue B., Yu J., Wu W. Rigid and liquid coupling dynamics and hybrid control of spacecraft with multiple propellant tanks. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, vol. 49 (2), pp. 390–396. Available at: <http://lxxb.cstam.org.cn/CN/10.6052/0459-1879-16-342> (accessed April 25, 2021).
- [17] Yu Zhaokai, Temnov A.N. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2021, iss. 3. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-3-2060>
- [18] Moiseev N.N., Petrov A.A. *Chislennye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichennogo obema zhidkosti* [Numerical methods for calculating the natural frequencies of vibrations of a limited volume of liquid]. Moscow, Computing Center of USSR Academy of Sciences Publ., 1966, 272 p.
- [19] Labus T. *Natural frequency of liquids in annular cylinders under low gravitational conditions*. NASA TN D-5412, 1969, 28 p.

Yu Zhaokai, post-graduate student, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yuzhaokai933@mail.ru

Temnov A.N., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: antt45@mail.ru