

## Расчет напряженного состояния витой трубки некругового сечения на основе тензорной теории оболочек

© А.Г. Сорокина, В.А. Кирсанова, В.Ф. Фомичева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Разработан алгоритм расчета геликоидально симметричных оболочек с замкнутым контуром в косоугольных гауссовых координатах. Крутка и длина оболочки принимались неизменными. Основой метода расчета служит представление образующего контура геликоидальной поверхности дискретным набором точек с заменой дифференцирования по угловой координате конечными разностями. Неизвестными являлись векторы перемещений в указанных точках контура. Вследствие геликоидальной симметрии дифференцирование векторных величин по винтовой координате было заменено на векторное умножение. Вычисление тензора деформаций и тензора параметров изменения кривизны выполнялось с использованием набла — оператора, представленного в косоугольных гауссовых координатах. Интегрирование по контурной координате заменялось на суммирование по дискретным точкам. По найденным тензорам, характеризующим деформированное состояние, была вычислена энергия деформации одного периода геликоидальной оболочки и далее составлен полный потенциал механической системы. Неизвестные перемещения определялись минимизацией полного потенциала с учетом связей, запрещающих смещение оболочки как жесткого целого. Приведен числовой пример применения разработанного подхода.*

**Ключевые слова:** геликоидальные оболочки, тензорное исчисление, энергия деформаций, косоугольные гауссовы координаты, эквивалентные напряжения

**Введение.** Геликоидально симметричные оболочки (ГСО) встречаются в самых различных областях науки и техники: в энергетическом машиностроении (теплообменники), химической промышленности (рубашки химических реакторов), приборостроении, медицинском оборудовании и т. п. [1]. Например, геликоидальной оболочкой является винтовая манометрическая трубка с некруговым замкнутым контуром. Такие трубки используются в приборостроении для измерения давления аналогично трубкам Бурдона, но их точность гораздо выше, чем у трубок Бурдона, вследствие большей длины.

Еще одной проблемой, которую поможет разрешить применение геликоидальной оболочки, является сохранение «чистого» вакуума. Реализация работы оборудования в условиях вакуума является достаточно трудной задачей в связи с возникновением микрочастиц износа при наличии внешнего трения скольжения или качения. Можно устранить генерацию микрочастиц износа трущихся пар, только полностью исключив такие пары из конструкций механизмов. Тогда альтернативой будут системы, основанные на использовании герметич-

ных полых трубчатых элементов различного геометрического очертания, различного поперечного сечения и различным образом ориентированных относительно друг друга. Для приведения в действие приводов в каждый из них независимо друг от друга подается газобразный или жидкий энергоноситель, создающий в герметичной полости приводов необходимое давление для деформации их в упругой области. Величиной создаваемых давлений и, соответственно, деформации легко управлять [2]. При подаче избыточного давления  $p$  в геликоидальную оболочку формируется угловое перемещение (рис. 1).



Рис. 1. Спиралевидный привод с замкнутым контуром

Расчет геликоидальной оболочки является достаточно трудной задачей. Сложность расчета состоит в том, что геликоидальная симметрия приводит к уравнениям лишь немного более простым, чем уравнения общей теории оболочек. Кроме того, в общем случае винтовые линии не ортогональны к линиям замкнутого контура, из-за чего необходимо использовать косоугольные гауссовы координаты, которые значительно усложняют уравнения.

На практике, чтобы избежать громоздких аналитических вычислений, часто пользуются методом конечных элементов или специализированными нормами расчета на прочность, содержащими в себе множество полуэмпирических коэффициентов, подбираемых специально для каждого случая. Последний вариант является наиболее простым способом получения напряжений, но, разумеется, неточным, что, в свою очередь, компенсируется вводимыми коэффициентами запаса. Данный способ удобен для получения быстрых практических результатов, но не представляет собой большой научной ценности.

Существует множество работ, посвященных расчетам геликоидальных оболочек в косоугольных гауссовых координатах, однако их авторы в большинстве случаев ограничиваются выводом общих формул и дают лишь рекомендации по методам решения получившихся систем [3].

Альтернатива косоугольным координатам — переход к так называемому ортогональному (нормальному) контуру, т. е. к такому контуру, который ортогонален винтовым линиям [4]. Использование ортогонального контура в случае малых перемещений приводит к теории оболочек в ортогональных гауссовых координатах, не совпадающих с линиями кривизны [1, 3]. Такой метод удобен для ГСО открытого профиля. Для витых и винтовых трубок ортогональный

контур, как правило, является разомкнутым, поэтому применение перехода к ортогональному контуру для ГСО закрытого профиля не приводит к удобному решению.

Большой вклад в расчет геликоидальных оболочек внес профессор С.Н. Кривошапко [5, 6]. Для расчета геликоидальных оболочек он получил систему из 20 уравнений, названных уравнениями Кривошапко. Множество работ [7–14] написано об этих уравнениях и их аналогах, однако все они являются очень громоздкими, что затрудняет численный расчет ГСО.

Цель данной статьи — представить разработку алгоритма, в котором использованы подходы косоугольного тензорного исчисления для расчета ГСО, нагруженных давлением и нагрузками других видов, сохраняющими геликоидальную симметрию. Преимуществами данного алгоритма являются точность и универсальность. При его разработке не вводятся упрощающие допущения, которые могли бы повлиять на полученные результаты, однако непрерывные по контурной координате функции заменяются массивами их значений, что значительно сокращает время расчета по сравнению с МКЭ.

**Геометрия геликоидальной поверхности.** Геликоидальную поверхность (рис. 2) можно задать радиусом-вектором, зависящем от двух гауссовых координат:

$$\mathbf{r}(\alpha, s) = ks + \mathbf{L}(s) \cdot \mathbf{a}(\alpha); \quad (1)$$

где  $\mathbf{k}$  — орт оси  $z$ ;  $s = z - z_0$  — расстояние по вертикали между одинаковыми точками разных контуров;  $\mathbf{L}(s)$  — тензор (матрица) поворота вокруг оси  $z$ ;  $\mathbf{a}(\alpha)$  — векторная функция, задающая образующий контур поверхности в зависимости от гауссовой координаты  $\alpha$ .

Внутренняя геометрия поверхности, согласно [15], определяется естественным трехгранником поверхности и параметрами ее первой квадратичной формы:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}; \quad A = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right|; \quad \mathbf{t}_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}; \quad B = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right|; \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sin \chi} \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2; \quad \cos \chi = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2, \quad (2)$$

где  $A, B$  — параметры Ламе;  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n}$  — единичные векторы естественного трехгранника;  $\chi$  — угол между  $\mathbf{t}_1$  и  $\mathbf{t}_2$ .

Геликоидальная симметрия значительно упрощает вычисление производных по винтовой координате  $s$ . Производные скалярных величин, характеризующих поверхность (параметров Ламе, деформаций, напряжений и т. п.), равны нулю, так как они по этой координате не меняются. Дифференцирование единичных векторов (2) сводится к векторному умножению, так как, согласно рис. 2, эти векторы

вращаются вокруг оси  $z$ , совершая полный оборот при изменении  $s$  на один период:

$$\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial s} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{t}_1; \quad \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial s} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{t}_2; \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n};$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{2\pi}{T} \mathbf{k},$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  — вектор крутки (длиной вектора является крутка  $\Omega$  с размерностью  $\text{м}^{-1}$ );  $T$  — период винтовой поверхности (см. рис. 2).

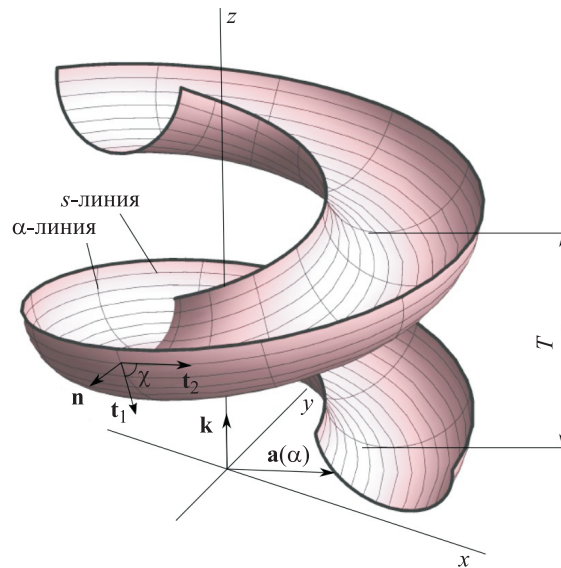


Рис. 2. Винтовая поверхность и ее элементы

Очевидно, что любой вектор  $\mathbf{f}$ , связанный с поверхностью (например, вектор перемещений контура  $\mathbf{u}$ ), будет дифференцироваться по тому же правилу, представленному выражением

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{f}. \quad (3)$$

Исключение представляет только радиус-вектор поверхности  $\mathbf{r}$ , так как, в соответствии с формулой (1), в нем присутствует не только вращательная, но и поступательная часть, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{k} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

**Реализация операций тензорного анализа на геликоидальной поверхности.** Поскольку ниже будет рассматриваться ГСО с замкнутым контуром, все величины удобно задавать в виде циклических

массивов, соответствующих дискретному набору точек контура  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ . В связи с этим дифференцирование по координате  $\alpha$  заменяется на центральные конечные разности:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta\alpha}, \quad (4)$$

где  $\Delta\alpha$  — шаг дискретного расположения точек по координате  $\alpha$ , который принимался постоянным.

Координата  $\alpha$  представляется циклическим массивом, поэтому значения производных в первой и последней точках рассчитываются особым образом по формулам

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_1 \approx \frac{f_2 - f_m}{2\Delta\alpha}; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right|_m \approx \frac{f_1 - f_{m-1}}{2\Delta\alpha}. \quad (5)$$

Безындексное (прямое) тензорное исчисление позволяет достаточно просто находить тензоры, характеризующие деформированное состояние оболочки. Основным инструментом, необходимым для работы в косоугольных гауссовых координатах, является набла — оператор поверхности, определяемый по формуле

$$\nabla_0(\dots) = \frac{\mathbf{t}_2 \times \mathbf{n}}{\sin \chi} \frac{\partial(\dots)}{\partial \alpha} + \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{t}_1}{\sin \chi} \frac{\partial(\dots)}{\partial s},$$

где дифференцирование по  $\alpha$  выполняется с помощью формул (4) и (5), а дифференцирование по  $s$  — с помощью формулы (3).

Через набла-оператор записываются градиент, дивергенция и ротор произвольного вектора  $\mathbf{f}$ :

$$\text{grad}(\mathbf{f}) = \nabla_0 \otimes \mathbf{f}; \quad \text{div}(\mathbf{f}) = \nabla_0 \cdot \mathbf{f}; \quad \text{rot}(\mathbf{f}) = \nabla_0 \times \mathbf{f}. \quad (6)$$

Следует обратить внимание, что вследствие косоугольности гауссовых координат операции (6) не являются стандартными для математических пакетов, поэтому для их реализации выполнялось дополнительное программирование.

Для вычисления тензоров, характеризующих деформированное состояние оболочки, удобны следующие вспомогательные операторы:

$$\text{Sym}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T); \quad (7)$$

$$\text{Def}(\mathbf{g}) = \text{Sym}(\text{grad}(\mathbf{g}) \cdot \mathbf{E}_0),$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{g}$  — произвольный тензор и произвольный вектор, заданные на поверхности; Sym — оператор, вычисляющий симметричную

часть тензора;  $\mathbf{E}_0$  — тензор-проектор,  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  ( $\mathbf{E}$  — единичный тензор).

Разработанные и реализованные в виде компьютерного кода пакета Wolfram Mathematica [16] операции (6) и (7) были оттестированы с помощью многочисленных тождеств векторного и тензорного анализа:

$$\operatorname{div}(\mathbf{r}) \equiv 2; \operatorname{rot}(\mathbf{r}) \equiv 0; \operatorname{div}(\mathbf{n}) \equiv \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}; \operatorname{rot}(\mathbf{n}) \equiv 0; \operatorname{Def}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}_0; \dots,$$

где  $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$  — главные кривизны, найденные по методике книги [15].

Для вычисления операций тензорной алгебры, таких как след тензора, определитель тензора, свертка двух тензоров и т. п., были использованы стандартные процедуры пакета Wolfram Mathematica.

**Напряженно-деформированное состояние оболочки.** Для полного описания деформированного состояния произвольной оболочки необходимо последовательно вычислить следующие векторы и тензоры:

$$\boldsymbol{\theta} = \left( \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{u}); \boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{Def}(\mathbf{u}); \boldsymbol{\kappa} = \operatorname{Def}(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{n}), \quad (8)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $\boldsymbol{\theta}$  — вектор поворота;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор деформаций;  $\boldsymbol{\kappa}$  — тензор параметров изменения кривизны.

Напряженное состояние оболочки характеризуется тензором мембранных усилий  $\mathbf{T}$  и тензором моментов  $\mathbf{M}$ , которые вычисляются по следующим соотношениям упругости:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ (1-\mu) \boldsymbol{\varepsilon} + \mu \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{E}_0 \right]; \\ \mathbf{M} &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left[ (1-\mu) \boldsymbol{\kappa} + \mu \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\kappa}) \mathbf{E}_0 \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $E$  — модуль упругости;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $h$  — толщина оболочки.

Тензор напряжений находится посредством линейной комбинации тензоров из (9):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{T}}{h} + \frac{12\mathbf{M}}{h^3} \zeta, \quad (10)$$

где  $\zeta$  — координата, отсчитываемая вдоль нормали от срединной поверхности оболочки.

**Полный потенциал механической системы и его минимизация.** Для вычисления неизвестных перемещений точек контура был использован принцип Лагранжа, согласно которому в положении равновесия полный потенциал механической системы принимает минимальное значение. Полный потенциал является суммой потенциальной энергии деформаций  $U$  и потенциала внешних сил  $V$ , которые вычислялись по следующим формулам:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\alpha} [\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\kappa}] AB \sin \chi d\alpha ds; \quad (11)$$

$$V = - \int_0^T \int_{\alpha} \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} AB \sin \chi d\alpha ds,$$

где  $\mathbf{q}$  — вектор распределенных нагрузок, прикладываемых к оболочке.

Поскольку в случае геликоидальной симметрии напряженно-деформированное состояние от координаты  $s$  не зависит, интегрирование по  $s$  в (11) заменялось умножением на период  $T$ . Интегрирование по координате  $\alpha$  сводится к суммированию по дискретным точкам контура. В результате оба интеграла в (11) были заменены следующими конечными суммами:

$$U = \frac{T\Delta\alpha}{2} \sum_{i=1}^m [(\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\kappa}) AB \sin \chi]_{\alpha=\alpha_i};$$

$$V = -T\Delta\alpha \sum_{i=1}^m [\mathbf{u} \cdot \mathbf{q} AB \sin \chi]_{\alpha=\alpha_i}.$$

Согласно принципу Лагранжа, неизвестные узловые перемещения  $\mathbf{u}_i$  могут быть найдены из условия минимума полного потенциала механической системы, что равносильно вариационному уравнению

$$\delta U + \delta V = 0. \quad (12)$$

Поскольку  $U$  является квадратичной формой перемещений с матрицей  $[\mathbf{K}]$ , а  $V$  — линейной формой перемещений с вектором коэффициентов  $(-\mathbf{F})$ , вариационное уравнение (12) равносильно системе алгебраических уравнений

$$[\mathbf{K}]\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (13)$$

где  $[\mathbf{K}]$  — матрица жесткости размерности  $3m \times 3m$ ;  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{F}$  — векторы перемещений и сил размерности  $3m \times 1$ .

При решении системы (13) необходимо учесть, что отсутствуют смещение контура вдоль оси  $z$  и поворот контура вокруг оси  $z$  как

жесткого целого. Эти условия были выполнены исключением соответствующих перемещений для одной из точек контура. После определения из системы (13) всех узловых перемещений  $\mathbf{u}_i$  и их подстановки в формулы (8)–(10) напряженно-деформированное состояние оболочки становится полностью известным.

Тензорный характер величин, входящих в формулы (8)–(10), позволяет найти любую компоненту напряженно-деформированного состояния в любом ортонормированном базисе, расположенном на поверхности. Однако в большинстве случаев кроме перемещений представляют интерес лишь эквивалентные напряжения, которые в случае использования энергетической теории прочности также полностью определяются тензорными операциями. Эквивалентные напряжения находились по следующей формуле, не зависящей от выбора базиса:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - (\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}))^2}.$$

**Пример.** Рассматривалась задача о расчете витой трубки с эллиптическим сечением, нагруженной внутренним давлением (рис. 3).

На оболочку наложен запрет на изменение длины и крутки. Образующим контуром оболочки является эллипс со следующими параметрами:  $b$  — малая полуось эллипса;  $a = 2b$  — большая полуось эллипса.

Для численного расчета были приняты следующие значения параметров:  $b = 10$  мм;  $T = 10b$ ;

$h = \frac{b}{20}$ ;  $\mu = 0,3$ ;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па;

$p = 10^5$  Па;  $\mathbf{q} = p\mathbf{n}$  — вектор распределенной нагрузки;  $m = 151$  — число точек контура.

Поверхность витой трубки образуется поворотом эллиптического контура на угол  $\varphi = \Omega z$  с одновременным его переносом вдоль оси  $z$ . Уравнение поверхности витой трубки в декартовых координатах может быть представлено в виде, аналогичном соотношению (1):

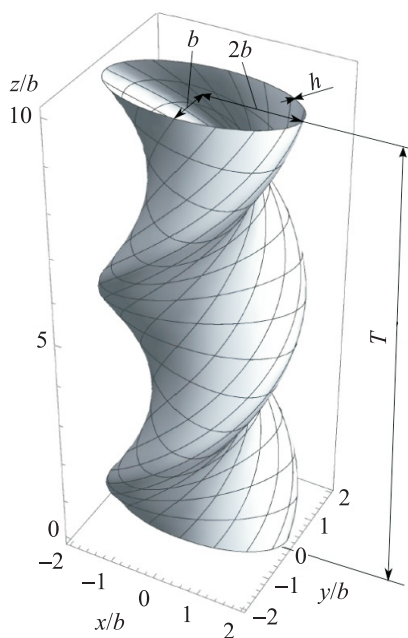


Рис. 3. Один период витой трубки



$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} s + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2b \cos \alpha \\ b \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Реализация представленной выше методики расчета ГСО приводит к следующим результатам. Получены графики параметров Ламе (рис. 4), а также график косинуса угла  $\chi$  между координатными линиями (рис. 5), на котором отражена значительная косоугольность координатной сетки, при которой угол между координатными линиями на некоторых участках приближается к  $30^\circ$ .

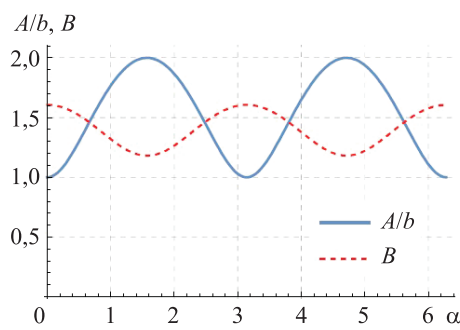


Рис. 4. Параметры Ламе

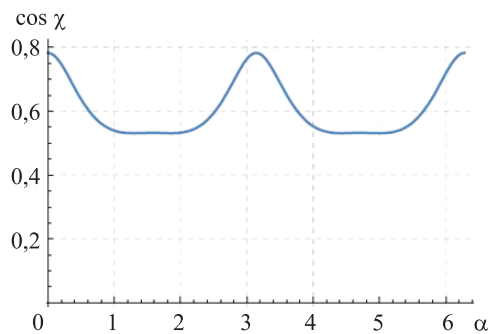


Рис. 5. Косинус угла между координатными линиями

Наибольший интерес из найденных перемещений представляют собой нормальные перемещения  $w(\alpha)$ , график которых в безразмерном виде представлен на рис. 6. При построении графика было принято характерное перемещение  $w_0 = \frac{pb^2}{Eh}$ .

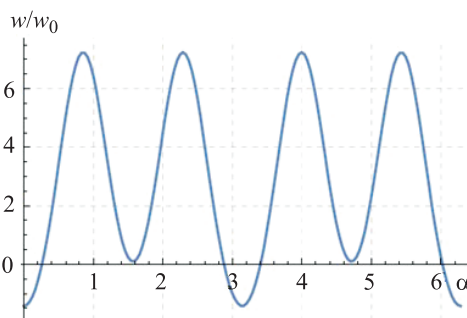


Рис. 6. Нормальные перемещения оболочки

Исходный и деформированный контуры (вид сверху) представлен на рис. 7, где перемещения были увеличены.

Эквивалентные напряжения на ограничивающих поверхностях оболочки приведены на рис. 8.

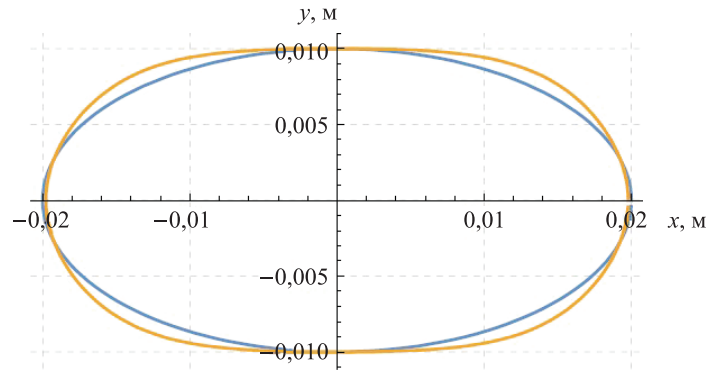


Рис. 7. Исходный и деформированный контуры оболочки

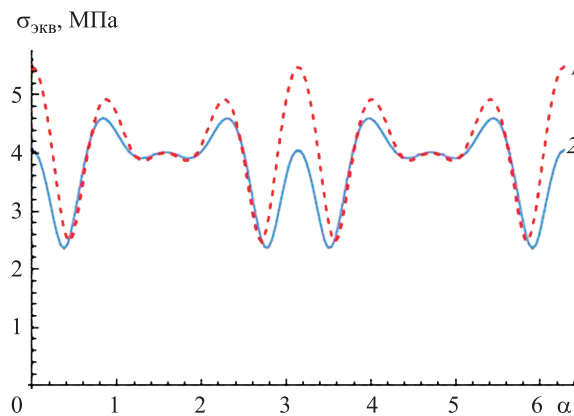


Рис. 8. Эквивалентные напряжения на внутренней (1) и наружной (2) поверхностях оболочки

**Заключение.** Операции тензорной теории оболочек в косоугольных гауссовых координатах удалось сравнительно несложно реализовать в математическом пакете за счет использования специальной формы записи набла-оператора поверхности и учета геликоидальной симметрии.

Разработан быстрый алгоритм расчета геликоидально симметричных оболочек с замкнутым контуром, основанный на использовании принципа Лагранжа в сочетании с конечными разностями.

Эффективность алгоритма продемонстрирована на примере расчета витой трубки с эллиптическим контуром, нагруженной внутренним давлением.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сорокина А.Г. Разработка и обоснование инженерной методики расчета напряженного состояния винтовых трубок, нагруженных внутренним давлением. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2017, № 10 (691), с. 10–17.
- [2] Васин В.А. Опыт создания и внедрения в промышленность полных комплексных систем вакуумного оборудования (основанных на устройствах и элементах, исключающих трение движения и предназначенных для работы в области микро- и нанoeлектроники и других высоких технологий). *Известия МГТУ МАМИ*, 2008, № 1 (5), с. 212–229.
- [3] Шевелев Л.П., Корихин Н.В., Головин А.И. Состояния поля напряжений в геликоидальной оболочке. *Строительство уникальных зданий и сооружений*, 2015, № 2 (17), с. 25–38.
- [4] Сорокина А. Г. Расчет упругой характеристики ленточной пружины (геликоидально симметричной оболочки открытого профиля) при больших перемещениях на основе теории чистого изгибания. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2012, № 7, с. 22–26.
- [5] Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. *Расчет оболочек сложной геометрии*. Монография. Москва, Изд-во УДН, 1988, с. 176.
- [6] Рекач В.Г., Кривошапко С.Н. *К вопросу расчета упругих тонких оболочек в неортогональных криволинейных координатах*. Сборник трудов. Москва, Изд-во УДН, 1977, с. 3–14.
- [7] Халаби С.М. Моментная теория тонких винтовых псевдоторсовых оболочек. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2001, № 10, с. 61–67.
- [8] Рынковская М.И. К вопросу расчета прямых геликоидальных оболочек по методу В.Г. Рекача. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2006, № 2, с. 63–66.
- [9] Рынковская М.И. Применение и расчет геликоидальных оболочек в архитектуре и строительстве. *Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования*, 2012, № 4, с. 84–90.
- [10] Рынковская М.И. К вопросу о расчете на прочность тонких линейчатых винтовых оболочек. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2015, № 6, с. 13–15.
- [11] Тупикова Е.М. Расчет тонких упругих оболочек в форме длинного косоугольного геликоида. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2015, № 3, с. 23–27.
- [12] Тупикова Е.М. Вычисление перемещений и усилий в железобетонных пандусах в форме косоугольного геликоида. *Строительная механика и расчет сооружений*, 2015, № 4, с. 24–28.
- [13] Тупикова Е.М. Анализ метода В.Г. Рекача для расчета напряженно-деформированного состояния оболочки в форме длинного пологого косоугольного геликоида. *Строительная механика и расчет сооружений*, 2016, № 1, с. 14–20.
- [14] Тупикова Е.М. Полуаналитический расчет оболочки в форме длинного пологого косоугольного геликоида в неортогональной несопряженной системе координат по моментной теории. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, 2016, № 3, с. 3–8.
- [15] Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций*. Статика. Москва, URSS; Ленанд, 2017, 485 с.

- [16] Дьяконов В.П. *Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления*. Москва, ДМК-Пресс, 2008, с. 574.

Статья поступила в редакцию 21.06.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Сорокина А.Г., Кирсанова В.А., Фомичева В.Ф. Расчет напряженного состояния витой трубки некругового сечения на основе тензорной теории оболочек. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 7.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-7-2092>

**Сорокина Анастасия Германовна** — старший преподаватель кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: sorokinaag@bmstu.ru

**Кирсанова Вера Александровна** — магистрант кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: kirsanovava@student.bmstu.ru

**Фомичева Валентина Федоровна** — доцент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: w.fomicheva@yandex.ru

## **Calculation of the stress state of a noncircular helicoidal tube based on the tensor theory of shells**

© A.G. Sorokina, V.A. Kirsanova, V.F. Fomicheva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The purpose of the study was to develop an algorithm for calculating helical-symmetric shells with a closed contour in oblique Gaussian coordinates. The twist and length of the shell were taken unchanged. The method is based on the representation of the generating contour of the helicoidal surface by a discrete set of points with the replacement of differentiation along the angular coordinate by finite differences. The unknown were the displacement vectors at the indicated points of the contour. Due to the helicoidal symmetry, the differentiation of vector quantities with respect to the helical coordinate was replaced by vector multiplication. The tensor of deformations and the tensor of the parameters of the change in curvature were calculated using the nabla operator, represented in oblique Gaussian coordinates. Integration over the contour coordinate was replaced by summation over discrete points. The tensors found, which characterize the deformed state, were used to calculate the strain energy of one period of the helicoidal shell, and then the total potential of the mechanical system was compiled. The unknown displacements were determined by minimizing the total potential, taking into account the constraints that prohibit the displacement of the shell as a rigid whole. The study gives a numerical example of the application of the developed approach.*

**Keywords:** helicoidal shells, tensor calculus, strain energy, oblique Gaussian coordinates, equivalent stresses

### REFERENCES

- [1] Sorokina A.G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2017, no. 10 (691), pp. 10–17.
- [2] Vasin V.A. *Izvestiya MGTU MAMI*, 2008, no. 1 (5), pp. 212–229.
- [3] Shevelev L.P., Korikhin N.V., Golovin A.I. *Stroitelstvo unikalnykh zdaniy i sooruzheniy — Construction of Unique Buildings and Structures*, 2015, no. 2 (17), pp. 25–38.
- [4] Sorokina A.G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie — BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2012, no. 7, pp. 22–26.
- [5] Rekach V.G., Krivoshapko S.N. *Raschet obolochek slozhno geometrii* [Calculation of shells of complex geometry]. Monograph. Moscow, UDN Publ., 1988, 176 p.
- [6] Rekach V.G., Krivoshapko S.N. *K voprosu rascheta uprugikh tonkikh obolochek v neortogonalnykh krivolinyenykh koordinatakh* [On the problem of calculating elastic thin shells in non-orthogonal curvilinear coordinates]. Collection of works. Moscow, UDN Publ., 1977, pp. 3–14.
- [7] Khalabi S.M. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy — Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2001, no. 10, pp. 61–67.
- [8] Rynkovskaya M.I. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy — Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2006, no. 2, pp. 63–66.
- [9] Rynkovskaya M.I. *Vestnik RUDN. Seriya: Inzhenernye issledovaniya — RUDN Journal of Engineering Researches*, 2012, no. 4, pp. 84–90.

- [10] Rynkovskaya M.I. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy* — *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2015, no. 6, pp. 13–15.
- [11] Tupikova E.M. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy* — *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2015, no. 3, pp. 23–27.
- [12] Tupikova E.M. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* — *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, 2015, no. 4, pp. 24–28.
- [13] Tupikova E.M. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* — *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, 2016, no. 1, pp. 14–20.
- [14] Tupikova E.M. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy* — *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2016, no. 3, pp. 3–8.
- [15] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruksiy. Statika* [Mechanics of thin-walled structures. Statics]. Moscow, URSS, Lenand Publ., 2017, 485 p.
- [16] Dyakonov V.P. *Mathematica 5.1/5.2/6. Programirovanie i matematicheskie vychisleniya* [Mathematica 5.1/5.2/6. Programming and mathematical calculations]. Moscow, DMK-Press Publ., 2008, p. 574.

**Sorokina A.G.**, Assist. Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: sorokinaag@bmstu.ru

**Kirsanova V.A.**, Master's degree student, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: kirsanovava@student.bmstu.ru

**Fomicheva V.F.**, Assoc. Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: w.fomicheva@yandex.ru