УДК 51.7+532.517

А. С. Романов, А. В. Семиколенов, А. П. Шахорин

О РОЛИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ПРИ ФОРМУЛИРОВКЕ ОБОБЩЕННОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ТУРБУЛЕНТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрены обобщения теоремы сравнения решений задачи Коши для уравнений типа турбулентной фильтрации по функциям источника и начальным данным. На примере показана нетривиальность этих обобщений. Применение указанных методов облегчает общие исследования решений дифференциальных уравнений параболического типа, возникающих в теории пограничного слоя, при описании сдвиговых течений степенных реологических жидкостей, в теории лучистого теплопереноса и др.

E-mail: rolmal@bk.ru, avsemik@mail.ru, shahorin@rambler.ru

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения параболического типа, принцип максимума, пограничный слой, теория фильтрации, лучистый перенос.*

Уравнение типа турбулентной фильтрации, записанное для плоской симметрии, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + f\left(u\right), \quad q = -\frac{\partial u^k}{\partial x}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{n-1}, \tag{1}$$

$$f\left(u\right) \in C\left(R_0\right), \quad f(0) = 0,$$

$$R_0 = \left\{x \in \mathbb{R} | \quad x \geqslant 0\right\}, \quad (x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times R_0.$$

Здесь $u(x,t) \geqslant 0$ — переносимая величина; $q(x,t)$ — поток переносимой величины; $k > 0$; $n > 0$ — константы, которые определяют интенсивность соответствующего процесса переноса; Ω — область определения.

Уравнения такого типа возникают в теории пограничного слоя, при описании сдвиговых течений степенных реологических жидкостей, в теории лучистого теплопереноса и др. Такие уравнения можно отнести к параболическим уравнениям с вырождением. Их особенность состоит в возможности вырождения, т. е. понижения порядка уравнения при $u(x,t) \to 0$ и $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| \to 0$. При вырождении дифференциальные свойства решения ухудшаются [1], а роль источника становится нетривиальной.

Назовем носителем решения $\sup p\left(u\left(x,t\right)\right)$ замыкание множества пар (x,t), таких, что $u\left(x,t\right) > 0$. Будем полагать, что множество $\sup p\left(u\left(x,t\right)\right)$ односвязное, а граница носителя $l = \partial\left(\sup p\left(u\left(x,t\right)\right)\right)$ —

кусочно-гладкая. Также предполагаем, что решение в классическом смысле удовлетворяет уравнению (1) внутри носителя $(x,t) \in \omega$ (где $\omega = \sup p(u(x,t)) \setminus l$) и что решение вместе со своим потоком непрерывно во всей области определения. В соответствии с этими предположениями будем говорить, что $u(x,t) \in \hat{H}(\Omega)$, если $u(x,t) \in C^{2,1}(\omega) \cap C(\Omega)$ и $q(x,t) \in C(\Omega)$.

Функцию $u(x,t) \in \hat{H}(\Omega)$ назовем решением задачи Коши для уравнения переноса вида (1), если выполнены:

начальные условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где

$$u_0(x) \in C(\mathbb{R}), \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\,dx = E_0 < \infty; \tag{3}$$

граничные условия

$$\text{при } |x| \to \infty \ \ u(x,t) = 0 \text{ и } q(x,t) = 0 \text{ для } t > 0; \tag{4}$$

условие ограниченности интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx < \infty \text{ для } t > 0. \tag{5}$$

Отметим, что потоковое условие в (4) является следствием приведенной формулировки задачи Коши. Однако если учесть это условие заранее (так же, как и дифференциальные свойства решения), то это существенно упростит проведение исследования.

Качественное исследование свойств обобщенных решений уравнения (1) может быть основано на теоремах сравнения, которые являются обобщением принципа максимума, сформулированного в теории уравнений математической физики для уравнений параболического типа.

На основании сказанного выше назовем функцию $\theta(x,t) \in \hat{H}(\Omega)$ суперрешением уравнения (1), если выполняется неравенство

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \geqslant \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\left(\theta^k\right)}{\partial x}\left|\frac{\partial\left(\theta^k\right)}{\partial x}\right|^{n-1} + f(\theta)\right]. \tag{6}$$

Во многих случаях суперрешение $\theta(x,t)$ удается построить в явном виде и затем использовать его для выяснения качественных особенностей решения, базируясь на теоремах сравнения по начальным данным и функциям источника $f(u)$. С различными вариантами теорем сравнения и методами доказательства можно ознакомиться в работах [2–8]. Ниже приводится формулировка теоремы сравнения, объединяющая различные ее варианты.

Теорема (сравнения) 1. Пусть функция $\theta(x,t) \in \hat{H}(\Omega)$ является суперрешением уравнения (6) с функцией источника $f_1(\theta)$, $f_1(0) = 0$, $f_1(\theta) \in C(R_0)$, для которой соблюдается одно из условий:

(i) при $z > 0$ справедливо неравенство $f_1(z) > f(z)$, причем либо $f_1(z) \in C^1(R_0)$, либо существует такая константа $a_0 > 0$, что при $z \in [0, a_0]$ выполняется неравенство $f_1(z) \leqslant 0$, т.е. функция источника непрерывная и неположительная при малых значениях переносимой величины;

(ii) при $z > 0$ выполняется равенство $f_1(z) = f(z)$, причем $f(z_1) \geqslant f(z_2)$ для $z_2 > z_1$, т.е. функция источника невозрастающая.

Тогда, если $\theta(x,0) \geqslant u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то $\theta(x,t) \geqslant u(x,t)$, $(x,t) \in \Omega$.

Представляет интерес обобщение теоремы сравнения для функции источника более общего вида.

Теорема (*сравнения*) 2. Пусть две функции $u_i(x,t) \in \hat{H}(\Omega)$, $i = 1,2$, являются решениями двух задач Коши (1)–(5), отличающихся начальными условиями $u_i(x,0) = u_{0i}(x)$, $i = 1,2$; причем $u_{01}(x) \geqslant u_{02}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда справедливо соотношение $u_1(x,t) \geqslant$ $\geqslant u_2(x,t)$ при $(x,t) \in \Omega$, если выполнены условия:

I) $f(z)$ — кусочно-монотонная функция;

II) существует такая постоянная $a_0 > 0$, что при $0 < z < a_0$ выполняется неравенство $f(z) < 0$;

III) $f(z) \in \mathrm{Lip}(R_0) \cap C^m(R_0)$, $m > 0$, причем существует такая постоянная $A > 0$, что $f_1(z) = f(z) + A \cdot z^m \in \mathrm{Lip}(R_0)$.

Пояснение: функция $f(z) \in \mathrm{Lip}(R_0)$ подчиняется условию Липшица, т. е. существует такая константа L, что выполняется неравенство $|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant L|z_2 - z_1|$ для любых $z_1, z_2 \in R_0$.

Доказательство теоремы 2 основано непосредственно на теореме 1 с учетом неравенства Гронуолла – Беллмана (например, см. [9]).

Рассмотрим две вспомогательные задачи Коши, отличающиеся от сформулированных в теореме 2, соответствующей заменой функции источника $f(u_i)$ на функции $f_{\lambda i}(u_{\lambda i}) = f(u_{\lambda i}) - \lambda u_{\lambda i}$, $i = 1,2$, где $\lambda = \mathrm{const} > 0$ и $u_{\lambda 1}(x,t)$, $u_{\lambda 2}(x,t)$ — решения полученных таким способом двух задач Коши. Из теоремы 1 следует, что при $(x,t) \in \Omega$ выполняется неравенство $u_i(x,t) \geqslant u_{\lambda i}(x,t)$, $i = 1,2$.

Обозначим $U_1 = u_1 - u_{\lambda 1}$, $U_2 = u_2 - u_{\lambda 2}$. Выберем подмножество $\Omega_1 \subset \Omega$ вида $\Omega_1 = \{(x,t) | \, x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant t \leqslant t^*\}$, где $t^* = \mathrm{const} > 0$. Если на Ω_1 проинтегрировать два уравнения (1), каждому из которых соответствует своя функция источника $f_{\lambda 1}$ и $f_{\lambda 2}$, а затем применить формулу Грина, то после вычитания получим выражение

$$\oint\limits_{\partial\Omega_1} U_i dx + \oint\limits_{\partial\Omega_1} \left[\frac{\partial\left(u_i^k\right)}{\partial x} \left| \frac{\partial\left(u_i^k\right)}{\partial x} \right|^{n-1} - \frac{\partial\left(u_{\lambda i}^k\right)}{\partial x} \left| \frac{\partial\left(u_{\lambda i}^k\right)}{\partial x} \right|^{n-1} \right] dt +$$

$$+ \lambda \iint\limits_{\Omega_1} u_{\lambda i} dxdt + \iint\limits_{\Omega_1} \left[f\left(u_i\right) - f\left(u_{\lambda i}\right) \right] dxdt = 0. \quad (7)$$

Перейдем в соотношении (7) от двойного интеграла к повторному с учетом граничных условий (4):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_i\left(x, t^*\right) dx - \int\limits_{0}^{t^*} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[f\left(u_i\right) - f\left(u_{\lambda i}\right) \right] dxdt -$$

$$- \lambda \int\limits_{0}^{t^*} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{\lambda i} dxdt = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

При $0 < m < 1$, условия I–III теоремы 2 позволяют определить функцию $\bar{f}\left(z\right) = f\left(z\right) + Az^m$ (где $A > 0$ — некоторая постоянная) такую, что $\bar{f}\left(z\right) \in \mathrm{Lip}\left(R_0\right)$. Тогда, учитывая, что функция Az^m монотонно возрастающая при $m > 0$, из равенства (8) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_i\left(x, t^*\right) dx - \int\limits_{0}^{t^*} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\bar{f}\left(u_i\right) - \bar{f}\left(u_{\lambda i}\right) \right] dxdt -$$

$$- \lambda \int\limits_{0}^{t^*} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{\lambda i} dxdt \leqslant 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Неравенство (9) будет справедливо и в случае $m \geqslant 1$, только надо принять постоянную $A = 0$, т. е. $\bar{f}\left(z\right) = f\left(z\right)$. Используем далее произвольность выбора величины $t^* > 0$ и определение функции $\bar{f}\left(z\right)$, тогда из неравенства (9) следует

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_i\left(x, t\right) dx \leqslant M \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_i\left(x, \xi\right) dxd\xi - \lambda M_1 t, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $M = \text{const} > 0$, $M_1 = \sup\limits_{t>0} \int\limits_{0}^{+\infty} u_{\lambda i} dx$ (см. условие (5)).

Из неравенства Гронуолла – Беллмана получаем оценки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_i(x,t)\,dx \leqslant \lambda M_1 \frac{\exp(M\,t)}{M}, \quad i=1,2.$$

Следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} U_i(x,t)\,dx \to 0$ при $\lambda \to 0$, $i=1,2$.

При любом $\lambda>0$ выполняются неравенства (теорема 1) $u_1(x,t) \geqslant u_{\lambda i}(x,t)$, $i=1,2$ и $u_2(x,t) \geqslant u_{\lambda 2}(x,t)$. Поэтому в силу непрерывности функций $u_i(x,t) \in C(\Omega)$, $i=1,2$, получим искомое утверждение $u_1(x,t) \geqslant u_2(x,t)$, $(x,t) \in \Omega$.

Замечание 1. В теоремах 1 и 2 предполагается ограниченность решения $u(x,t)$ во всей полуплоскости $(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times R_0$. Если для некоторого $T > 0$ решение становится неограниченным при $t > T$, то можно в качестве области определения рассматривать полосу $\Omega = \{(x,t) \mid |x| < \infty, 0 < t < T\}$. Все утверждения при этом остаются справедливыми.

Теоремы сравнения 1 и 2 позволяют эффективно исследовать качественные особенности эволюции начального распределения переносимой величины. Для примера рассмотрим возможность реализации стационарных пространственно локализованных (имеющих ограничительный носитель, или *финитных*) решений задачи Коши (1)–(5).

Стационарные пространственно локализованные решения задачи Коши существуют, если функция источника удовлетворяет условию II) теоремы 2. Эти решения могут реализовываться для всех $t > 0$ при специальном подборе начальных условий или как предел эволюции решений задачи Коши при $t \to \infty$.

Стационарное решение определяется из уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d(u_s)^k}{dx}\left|\frac{d(u_s)^k}{dx}\right|^{n-1}\right] + f(u_s) = 0, \tag{10}$$

k, $n > 0$, $f(0) = 0$, $u_s(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Граничными для уравнения (10) являются условия

$$\text{при } |x| \to \infty \quad u_s = 0, \quad q_s(x) = 0. \tag{11}$$

Не теряя общности, будем считать решения задачи (10) с граничными условиями (11) симметричными относительно плоскости $x = 0$. Тогда уравнение (10) сводится к виду

$$\frac{dw}{dx} = \left[\pm \int\limits_{w(0)}^{w} \frac{n+1}{n} f_k(\varepsilon)\, d\varepsilon \right]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{12}$$

где $w = u^k$, $f_k(w) = f(u)$. Интегрируя (12), получаем решение в квадратурах

$$x = \int\limits_{w(0)}^{w} \left[\pm \int\limits_{w(0)}^{\xi} \frac{n+1}{n} f_k(\varepsilon)\, d\varepsilon \right]^{-\frac{1}{n+1}} d\xi. \tag{13}$$

Непосредственно из уравнения (10) с учетом граничных условий (11) можно вывести условие существования стационарного решения (13), накладываемое на функцию источника. Для этого проинтегрируем уравнение (10) по независимой переменной

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_k(w)\, dx = 0,$$

откуда, используя (11), найдем

$$\int\limits_{w(0)}^{0} f_k(w) \left[\pm \int\limits_{w(0)}^{w} \frac{n+1}{n} f_k(\varepsilon)\, d\varepsilon \right]^{-\frac{1}{n+1}} dw = 0. \tag{14}$$

Из соотношения (14) после интегрирования и возвращения к переменной u получаем условие, налагаемое на функцию источника $f(u)$, которое необходимо для существования стационарного решения (13)

$$\int\limits_{0}^{u_m} u^{k-1} f(u)\, du = 0, \tag{15}$$

В этих обозначениях $w(0) = (u_m)^k$.

Пространственная локализация (ограниченность носителя, или финитность) стационарного решения (13) возникает в случае, когда выражение в правой части (13) остается ограниченным при $w \to +0$. Обозначим

$$x_{ф} = \int\limits_{(u_m)^k}^{0} \left[\int\limits_{(u_m)^k}^{\xi} \frac{n+1}{n} f_k(\varepsilon)\, d\varepsilon \right]^{-\frac{1}{n+1}} d\xi,$$

тогда решение стационарной задачи должно быть записано в составном виде

$$\begin{cases} u_s > 0, & |x| < x_{\text{ф}}, \\ u_s = 0, & |x| > x_{\text{ф}}. \end{cases}$$

Найдем условие, налагаемое на асимптотическое поведение функции источника $f(u)$ при $u \to +0$, которое необходимо для локализации стационарного решения. Предположим, что для функции источника справедливо асимптотическое представление

$$f(u) \approx -\gamma u^m \text{ при } u \to +0,$$

где $m =$ const > 0.

Асимптотическое представление решения $u_s(x)$ при $|x| \to x_{\text{ф}} - 0$ удобно искать в виде степенной зависимости

$$u_s \approx a \left(x_{\text{ф}} - |x|\right)^{\alpha},$$

где a, $\alpha =$ const > 0. Непосредственно в уравнение (10) подставим это асимптотическое представление:

$$a^{kn} n \left(k\alpha\right)^n \left(k\alpha - 1\right) \left(x_{\text{ф}} - |x|\right)^{n(k\alpha-1)} - \gamma a^m \left(x_{\text{ф}} - |x|\right)^{\alpha m} = 0.$$

Отсюда находим выражение для величин α и a:

$$\alpha = \frac{(n+1)}{(kn-m)}, \quad a = \left[\gamma^{-1} n \left(k\alpha\right)^n \left(k\alpha - 1\right)\right]^{\frac{1}{(m-kn)}}.$$

Таким образом, стационарное решение существует, если выполнено условие (15), и оно оказывается пространственно локализованным, если функция источника имеет асимптотическое представление $f(u) \approx -\gamma u^m$, причем $m < kn$.

Наличие стационарного пространственно локализованного решения еще не означает, что оно может реализовываться как результат эволюции начального распределения переносимой величины. Класс начальных условий, для которых возможно $u(x,t) \to u_s(x)$ при $t \to \infty$, достаточно узок, как это следует из приведенного ниже утверждения.

Утверждение. Пусть выполнены условия теоремы 2, накладываемые на функцию источника I–III. Также пусть задача Коши имеет локализованное стационарное решение $u_s(x)$ (см. выше), причем начальное условие $u(x,0) = u_0(x) \geqslant u_s(x)$ (либо $u_0(x) \leqslant u_s(x)$), $x \in \mathbb{R}$. Если найдется константа ε, $0 < |\varepsilon| < \infty$, такая, что справедливо неравенство $u_0(x) \geqslant u_s(x+\varepsilon)$ (либо $u_0(x) \leqslant u_s(x+\varepsilon)$), $x \in \mathbb{R}$, то стационарное локализованное решение $u_s(x)$ не может быть пределом эволюции решения $u(x,t)$, в том числе и при $t \to \infty$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы сравнения, если учесть, что функция $u_s(x+\varepsilon)$ также является стационарным решением задачи Коши. Поэтому на основании теоремы 2 одновременно $u(x,t) \geqslant u_s(x)$, $u(x,t) \geqslant u_s(x+\varepsilon)$ (либо $u(x,t) \leqslant u_s(x)$, $u(x,t) \leqslant u_s(x+\varepsilon)$), $(x,t) \in \Omega$. Откуда и следует доказываемое утверждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов К. Б., Романов А. С. Об изменении области локализации возмущений в процессах нелинейного переноса // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1980. – № 6. – С. 57–62.
2. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М: Наука, 1979. – 736 с.
3. Калашников А. С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением // ЖВММФ. – 1974. – Т. 14, № 4. – С. 891–905.
4. Покровский Л. Д., Тараненко С. Н. Пространственная локализация решений нелинейных уравнений параболического типа // Тр. МВТУ. – 1978. – № 336. – С. 69–83.
5. Павлов К. Б., Покровский Л. Д., Тараненко С. Н. О свойствах решений нелинейного уравнения переноса // Диф. ур. – 1981. – Т. 17, № 9. – С. 1661–1667.
6. Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений / В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов, А.А. Самарский // ЖВММФ. – 1979. – Т. 19, № 6. – С. 1451–1461.
7. Галактионов В. А. Два метода сравнения решений параболических уравнений // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 251, № 4. – С. 832–835.
8. Калашников А. С. Об условиях единственности обобщенного решения задачи Коши для одного класса вырождающихся уравнений // Диф. ур. – 1973. – Т. 9, № 12. – С. 2207–2212.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 400 с.

Статья поступила в редакцию 05.07.2012