

П. С. Т и у н о в

**РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА  
ОБРАБОТКИ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРФЕРОГРАММ  
НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТА  
ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ТРЕХМЕРНОГО  
ЭФФЕКТА ФИЗО**

*Разработан метод обработки временных интерферограмм на основе разложения Якоби–Энджера. Исследованы структуры функции ошибки, выбора оптимальных начальных приближений и скорости сходимости различных методов оптимизации. Разработанный метод обработки позволил увеличить соотношение  $S/N$  до уровня порядка  $10^5$  в эксперименте по исследованию трехмерного эффекта Физо.*

**E-mail: pavel.tiunov@gmail.com**

**Ключевые слова:** цифровая обработка сигналов, разложение Якоби–Энджера, временные измерения, опыт Физо.

Среди методов измерения сдвига интерференционной картины в настоящее время наиболее популярны пространственные методы измерения или методы измерения интенсивности бесконечно широкой интерференционной полосы. Данные методы общеприняты благодаря своей относительной простоте, но они не являются исчерпывающими. Вследствие развития информационных технологий и технологий временных измерений представляется возможным выполнять косвенные измерения сдвига интерференционной картины, основываясь на периодическом временном сигнале, получаемом в результате движения интерференционной картины в плоскости фотодетектора. Такая задача может быть решена несколькими способами.

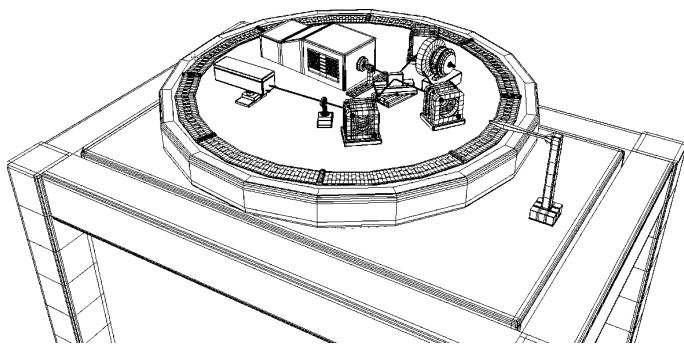
В первом приближении сдвиг интерференционной картины можно найти с помощью измерений относительного временного интервала, как это показано в работе [1]. Данный метод прост в реализации, хотя имеет ряд серьезных недостатков: зависимость от способа нахождения точки локальных экстремумов и, следовательно, зависимость от способа фильтрации сигнала; нелинейная связь сдвига интерференционной картины и относительного временного интервала. Сдвиг интерференционной картины может быть также найден по информации о форме периодического временного сигнала. Такой подход является более сложным в реализации по сравнению с методом измерения относительных временных интервалов, но использование информации о форме сигнала позволяет достичь лучшего соотношения  $S/N$  при определенных условиях.

В данной статье описывается метод измерения сдвига интерференционной полосы, который базируется на разложении Якоби–Энджера.

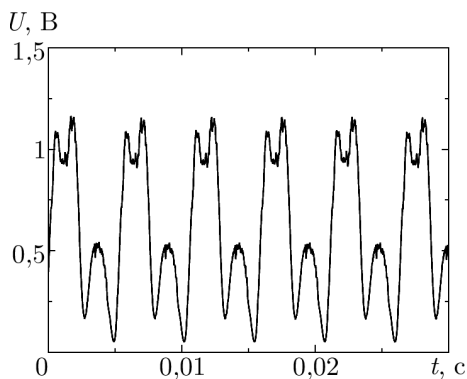
В основе данного метода лежит предположение о том, что периодическая форма временного сигнала является следствием гармонического движения интерференционной картины в плоскости фотодетектора. Метод был создан для обработки временных интерферограмм, получаемых в эксперименте по исследованию трехмерного эффекта Физо. Основным элементом экспериментальной установки по исследованию трехмерного эффекта Физо является оптический диск, имеющий клин, в результате чего интерференционная картина в плоскости фотодетектора движется по гармоническому закону с частотой, равной частоте вращения диска. Вследствие этого метод обработки, основанный на разложении Якоби – Энджера, хорошо подходит для обработки временных интерферограмм, полученных в эксперименте по исследованию трехмерного эффекта Физо.

**Обработка интерферограмм методом Якоби – Энджера.** Схема установки, на которой проводятся данные эксперименты, показана на рис. 1. Поскольку оптический диск имеет клин, то при вращении диска интерференционные полосы движутся в плоскости фотодетектора по гармоническому закону. Технические характеристики и более детальное описание экспериментальной установки по исследованию трехмерного эффекта Физо SADE (Space Anisotropy Detection Experiment) можно найти в [2].

При использовании пространственных методов измерения сдвига интерференционной картины происходит потеря контрастности интерференционной картины, обусловленная вращением диска при наличии клина. Причем клин является слабо устранимым дефектом производства диска. Вместо того чтобы стремиться к созданию идеальных дисков без клина (это является дорогостоящим процессом), диски, напротив, изготавливают с небольшим клином, который позволяет перейти от пространственных измерений сдвига интерференционной картины к временным. При более высокой разрешающей способности временных измерений относительно пространственных данных подход обеспечивает лучшее соотношение  $S/N$ .



**Рис. 1. Схема экспериментальной установки**

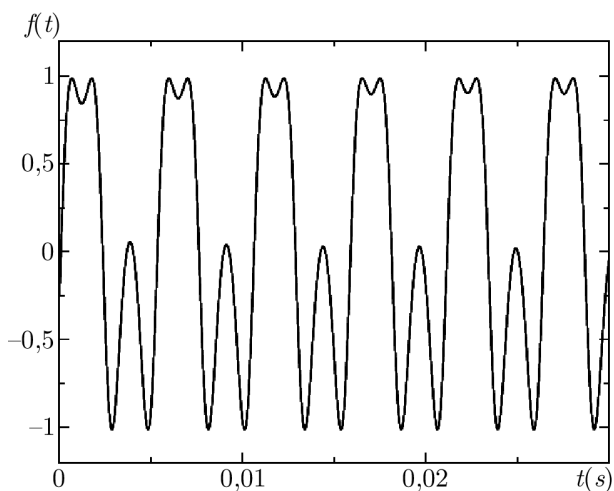


**Рис. 2.** Экспериментально полученная зависимость напряжения на фотодетекторе от времени

На рис. 2 показана периодическая зависимость напряжения на фотодетекторе от времени, полученная в ходе эксперимента. Ее периодичность равна периоду вращения диска. Каждый из периодов такой зависимости с большой точностью может быть описан аналитическим соотношением:

$$f(t) = \cos(\Omega \cos(\omega t + \varphi) + \delta). \quad (1)$$

Вид функции (1) приведен на рис. 3. По аналитической зависимости напряжения на фотодетекторе и соотношению (1) видно, что параметр  $\delta$  отвечает за сдвиг интерференционных полос. Таким образом, представляется возможным найти сдвиг интерференционных полос для каждого из периодов, решив задачу оптимизации. К сожалению, решить данную задачу общими методами (например, методом наименьших квадратов и т.п.) представляется практически невозможным вследствие зашумленности сигнала и чрезвычайной нелинейно-



**Рис. 3.** Вид аналитической зависимости напряжения на фотодетекторе от времени

сти функции ошибки, получаемой при использовании этих методов. Тем не менее данную задачу можно решить, если проводить оптимизацию не в пространстве времени, а в пространстве частот.

Разработанный метод обработки интерферограмм основывается на разложении Якоби – Энджера, которое позволяет разложить соотношение (1) в ряд Фурье, тем самым давая возможность проводить оптимизацию в частотном пространстве. Данное разложение может быть описано следующими соотношениями:

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(z) e^{in\theta}; \quad (2)$$

$$e^{iz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\theta}. \quad (3)$$

Для того чтобы воспользоваться соотношениями (2) и (3), необходимо выполнить подстановку  $\omega t = x$  в выражение (1), тогда получим

$$f(x) = \cos(\Omega \cos(x + \varphi) + \delta). \quad (4)$$

Затем подставим соотношения (2) и (3) в (4):

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{i\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\Omega \cos \varphi) e^{inx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-\Omega \sin \varphi) e^{inx} + \\ + \frac{1}{2} e^{-i\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(-\Omega \cos \varphi) e^{inx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Omega \sin \varphi) e^{inx}. \quad (5)$$

Выполнив преобразование Фурье над экспериментальным сигналом, представляется возможным решить задачу оптимизации и вычислить параметры  $\delta$ ,  $\Omega$  и  $\varphi$  с помощью выражения (5) для конкретного периода. Для этого необходимо найти период вращения диска и провести дискретное преобразование Фурье-сигнала с фотодетектора за один период с помощью соотношения

$$U_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}, \quad (6)$$

где  $u_n$  –  $n$ -й нормированный отсчет одного периода измеряемого напряжения на фотодетекторе, изменяющийся в пределах от  $-1$  до  $1$ ;  $U_k$  –  $k$ -й коэффициент разложения сигнала на фотодетекторе в ряд Фурье;  $N$  – количество отсчетов в периоде.

Нахождение периода является одним из наиболее критичных этапов обработки данных вследствие того, что ошибки определения периода порядка 0,5 % влекут за собой резкое изменение структуры локальных минимумов функции невязки и приводят к ошибкам об-

работки. Для точного поиска периода используется следующий алгоритм. Сначала находят средний период примерно за 100 периодов путем выполнения дискретного преобразования Фурье (6) и нахождения частоты первой гармоники. Затем для каждого из периодов уточняют значения найденного на предыдущем шаге периода с помощью поиска минимума автокорреляционной функции

$$R_{uu}(T) = \sum_{n=0}^{T-1} u_n u_{n+T}. \quad (7)$$

Коэффициенты разложения функции (5) в ряд Фурье найдем с помощью соотношения

$$\begin{aligned} F_k(\delta, \Omega, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{i\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\Omega \cos \varphi) J_{k-n}(-\Omega \sin \varphi) + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-i\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(-\Omega \cos \varphi) J_{k-n}(\Omega \sin \varphi). \quad (8) \end{aligned}$$

На основании метода наименьших квадратов определим функцию невязки:

$$E(\delta, \Omega, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (F_k(\delta, \Omega, \varphi) - U_k) \overline{(F_k(\delta, \Omega, \varphi) - U_k)}. \quad (9)$$

Задача оптимизации сводится к поиску минимума функции (9). Данная функция является кусочно-гладкой, но при этом обладает достаточно сложной нелинейной структурой, вследствие этого поиск ее минимума может быть выполнен с использованием исключительно численных методов оптимизации. Примерная зависимость функции ошибки (9) от  $\delta$  и  $\varphi$  при  $\Omega = \Omega_0$  представлена на рис. 4, на котором видно, что функция ошибки является периодической функцией. При фиксированных значениях  $\Omega$  период функции ошибки (9) равен  $2\pi$  по координатам  $\delta$  и  $\varphi$ . В рамках периода эта функция имеет четыре локальных минимума, два из которых являются искомыми. Эти два минимума всегда связаны соотношениями

$$\delta_1 = -\delta_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + \pi. \quad (10)$$

В этом можно легко убедиться, подставив (10) в функцию (9). Из соотношения (10) следует, что значения  $\delta$  и  $-\delta$  являются неразличимыми вследствие неопределенности начальной фазы. Поэтому начальные приближения выбирают в интервале  $\delta = 0 \dots \pi$  и  $\varphi = 0 \dots 2\pi$  с ша-

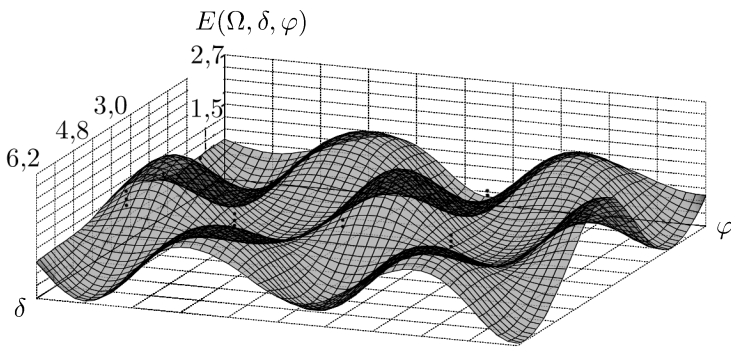


Рис. 4. Зависимость функции ошибки от  $\delta$  и  $\varphi$  при  $\Omega = \Omega_0$

гом  $\frac{\pi}{2}$  и при поиске минимума отсеивают значения  $\delta < 0$ . Начальное приближение для координаты  $\Omega$  зависит от амплитуды гармонических колебаний интерференционной картины и, следовательно, подбирается для каждого сигнала индивидуально. На рис. 4 точками отмечены исходные начальные приближения, которые используются для поиска координат минимума первого периода из серии измерений.

Для того чтобы решить задачу оптимизации, запишем необходимые условия существования минимума для функции (9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \delta} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial F_k}{\partial \delta} \overline{(F_k - U_k)} + (F_k - U_k) \overline{\frac{\partial F_k}{\partial \delta}} \right) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \Omega} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial F_k}{\partial \Omega} \overline{(F_k - U_k)} + (F_k - U_k) \overline{\frac{\partial F_k}{\partial \Omega}} \right) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial \varphi} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial F_k}{\partial \varphi} \overline{(F_k - U_k)} + (F_k - U_k) \overline{\frac{\partial F_k}{\partial \varphi}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Также запишем частные производные для функции (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial \delta} &= \frac{i}{2} e^{i\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\Omega \cos \varphi) J_{k-n}(-\Omega \sin \varphi) - \\ &\quad - \frac{i}{2} e^{-i\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(-\Omega \cos \varphi) J_{k-n}(\Omega \sin \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial \Omega} &= \\ &= \frac{1}{2} e^{i\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left( \left( -J_{n+1}(\Omega \cos \varphi) + \frac{n J_n(\Omega \cos \varphi)}{\Omega \cos \varphi} \right) \cos \varphi J_{k-n}(-\Omega \sin \varphi) + \right. \end{aligned}$$

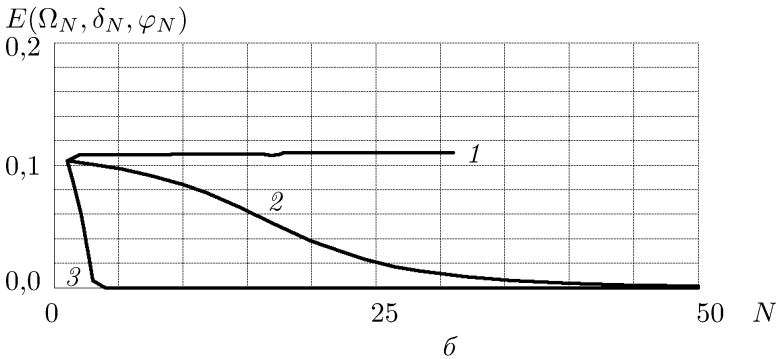
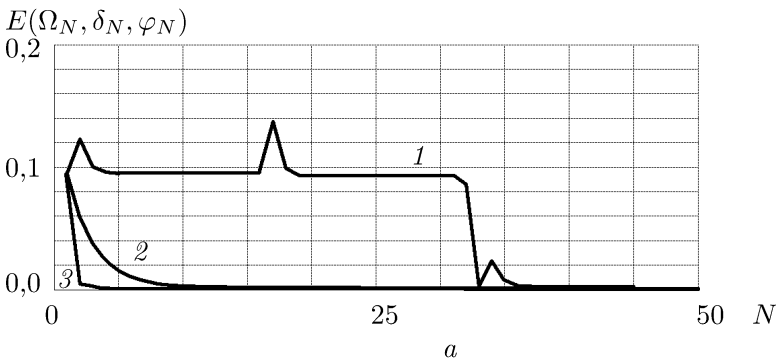
$$\begin{aligned}
& + J_n(\Omega \cos \varphi) \left( J_{k-n+1}(-\Omega \sin \varphi) + \frac{(k-n)J_{k-n}(-\Omega \sin \varphi)}{\Omega \sin \varphi} \right) \sin \varphi \Big) + \\
& + \frac{1}{2} e^{-i\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left( \left( J_{n+1}(-\Omega \cos \varphi) + \frac{nJ_n(-\Omega \cos \varphi)}{\Omega \cos \varphi} \right) \cos \varphi J_{k-n}(\Omega \sin \varphi) + \right. \\
& \left. J_n(-\Omega \cos \varphi) \left( -J_{k-n+1}(\Omega \sin \varphi) + \frac{(k-n)J_{k-n}(\Omega \sin \varphi)}{\Omega \sin \varphi} \right) \sin \varphi \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F_k}{\partial \varphi} = \\
& = \frac{1}{2} e^{i\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left( \left( -J_{n+1}(\Omega \cos \varphi) + \frac{nJ_n(\Omega \cos \varphi)}{\Omega \cos \varphi} \right) (-\Omega \sin \varphi) J_{k-n}(-\Omega \sin \varphi) + \right. \\
& \left. + J_n(\Omega \cos \varphi) \left( J_{k-n+1}(-\Omega \sin \varphi) + \frac{(k-n)J_{k-n}(-\Omega \sin \varphi)}{\Omega \sin \varphi} \right) \Omega \cos \varphi \right) + \\
& + \frac{1}{2} e^{-i\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left( \left( J_{n+1}(-\Omega \cos \varphi) + \frac{nJ_n(-\Omega \cos \varphi)}{\Omega \cos \varphi} \right) (-\Omega \sin \varphi) J_{k-n}(\Omega \sin \varphi) + \right. \\
& \left. + J_n(-\Omega \cos \varphi) \left( -J_{k-n+1}(\Omega \sin \varphi) + \frac{(k-n)J_{k-n}(\Omega \sin \varphi)}{\Omega \sin \varphi} \right) \Omega \cos \varphi \right).
\end{aligned} \tag{12}$$

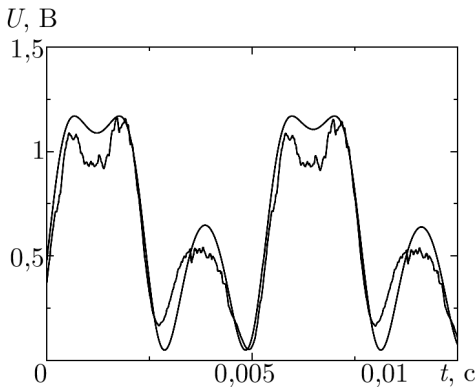
Для нахождения решения системы уравнений (11) изучена сходимость следующих методов: модифицированный для использования в  $n$ -измерениях метод половинного деления; метод градиентного спуска; метод наискорейшего градиентного спуска. Результат исследования сходимости при выборе начальных приближений  $\Omega = 2,9, \delta = 0,3, \varphi = 0,5$  и  $\Omega = 2,5, \delta = 1,5, \varphi = 1,5$  при координатах искомого минимума, равных  $\Omega = 3,0, \delta = 0,4, \varphi = 0,7$ , показан на рис. 5, на котором видно, что самой быстрой сходимостью обладает метод наискорейшего градиентного спуска. Поэтому именно этот метод используется в качестве алгоритма оптимизации в обработчике временных интерферограмм.

Пример результата решения задачи оптимизации приведен на рис. 6.

**Программно-аппаратная реализация алгоритма и быстрое действие обработчика экспериментальных данных на основе метода Якоби – Энджера.** Каждый из экспериментов по исследованию трехмерного эффекта Физо длится не менее суток. Сигнал с фотодетектора экспериментальной установки подключают к АЦП, который оцифровывает его на частоте 100 кГц. Каждые 15 с компьютер записывает 13,5 с или 5 Мб необработанного сигнала. В итоге за сутки получается 25 Гб экспериментальных данных. При этом на обработку одного эксперимента затрачивается около 80 ч машинного времени. Таким



**Рис. 5.** Зависимость значения функции ошибки от числа шагов при решении задачи оптимизации для алгоритмов при начальных приближениях  $\Omega = 2,9$ ,  $\delta = 0,3$ ,  $\varphi = 0,5$  (а);  $\Omega = 2,5$ ,  $\delta = 1,5$ ,  $\varphi = 1,5$  (б) и при координатах искомого минимума, равных  $\Omega = 3,0$ ,  $\delta = 0,4$ ,  $\varphi = 0,7$ : 1 – метод половинного деления; 2 – метод градиентного спуска; 3 – метод наискорейшего градиентного спуска



**Рис. 6.** Пример результата решения задачи оптимизации методом Якоби–Энджера

образом, появилась задача хранения большого количества экспериментальных данных, а также задача их быстрой обработки. Вторая из них особенно актуальна потому, что результат во многом зависит от параметров обработки. И нередко для того, чтобы получить удовле-



творительный результат, необходимо несколько раз проанализировать эксперимент с различными параметрами обработки.

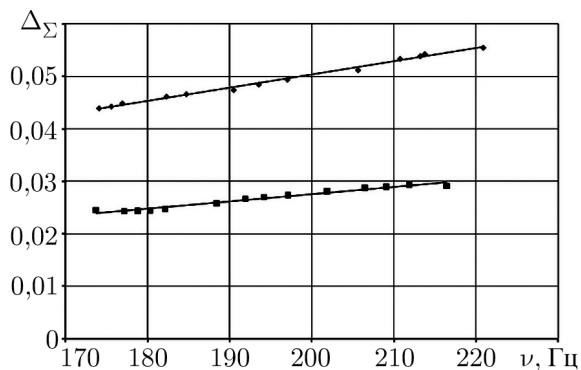
Для решения задачи быстрой обработки и хранения используется кросс-платформенная технология разработки приложений Java EE. Данная технология позволяет утилизировать различные вычислительные ресурсы для задачи обработки данных, начиная от обычных персональных компьютеров и заканчивая вычислительными кластерами. Используя облачный подход синхронизации различных вычислительных узлов, представляется возможным в реальном времени подключать и отключать вычислительные ресурсы без потери целостности исходных и обработанных данных. Встроенные технологии параллельных вычислений Java позволяют получать линейную зависимость скорости обработки экспериментальных данных от числа одновременно используемых процессорных ядер.

Таким образом, разработан метод обработки интерферограмм на основе разложения Якоби – Энджера. Данный метод может быть применен к любым оптическим системам, в которых есть движущиеся по гармоническому закону элементы. Этот метод позволяет заменить пространственные измерения сдвига интерференционных полос на временные. Вследствие того что разрешение временных измерений современных измерительных инструментов на данный момент сильно превышает пространственные, измерения с помощью рассмотренного выше метода могут оказаться экономически более выгодными, чем классические пространственные измерения. Также при наличии движущихся элементов в оптической системе данный метод может быть единственным практически применимым.

Разработанный метод обработки позволяет увеличить соотношение  $S/N$  до уровня порядка  $10^5$ . По сравнению с известными методами временного измерения сдвига интерференционных полос, основанных на измерении временных интервалов [1], метод обработки интерферограмм на основе разложения Якоби – Энджера имеет ряд преимуществ. Во-первых, он практически не зависит от амплитуды модулирующих колебаний. Во-вторых, он использует информацию о форме сигнала. В-третьих, метод не опирается на ошибочное предположение о том, что величина интервала линейно связана со сдвигом интерференционных полос. Благодаря данным преимуществам точность измерений увеличивается на порядок.

На основе разработанного метода обработаны интерферограммы, полученные на экспериментальной установке SADE. Данный набор интерферограмм записан при различных значениях скорости и направления вращения оптического диска.

Результат обработки представлен на рис. 7. Разработанный метод позволил получить отчетливую линейную зависимость эффекта Физо



**Рис. 7. Зависимость сдвига интерференционных полос для прямого и обратного направления вращения в зависимости от частоты вращения диска**

от скорости вращения диска, как предсказывает современный аппарат электродинамики.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесконтактный интерференционный профилограф / В.С. Гоняев, В.А. Фроленко, Н.П. Шестаков, А.П. Шешуков. – Автометрия. – 1987. – № 5. – С. 56.
2. <http://www.space-lab.ru>

Статья поступила в редакцию 05.07.2012