

## Испытание гибкого стержня на сжатие

© А.В. Егоров

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Экспериментально и теоретически исследована конструкция стального гибкого стержня на продольную устойчивость при осевом сжатии. Стержень является плоским тонкостенным элементом, шарнирно закрепленным по торцам. Экспериментальное исследование проводилось на установке Zwick/Roell Z100 с использованием специальной оснастки, моделирующей геометрические граничные условия. В процессе нагружения автоматически строилась диаграмма деформирования реального стержня, в котором существуют начальные несовершенства формы. По диаграмме деформирования определялась экспериментальная критическая сила. Эта сила сравнивалась с критическими силами, полученным из расчетов по двум схемам: по формуле Эйлера и по методологии динамического анализа. Во второй схеме, в отличие от первой, учитывалось начальное несовершенство, установленное по замерам испытываемой конструкции. Определены погрешности расчета конструкции по обеим схемам.*

**Ключевые слова:** *гибкий стальной стержень, устойчивость, испытание, расчет, начальное несовершенство формы*

**Введение.** Стержневые конструкции широко применяются в различных областях техники. Их надежность в значительной степени зависит от работоспособности составляющих конструкции стержневых элементов. Так как стержневые конструкции продолжают развиваться в связи с появлением новых материалов, технологий, новых сфер применения, например в космосе, то совершенствуются и методы их расчета и экспериментальных исследований. Основное внимание уделяется анализу деформативности отдельных стержневых элементов с учетом условий закрепления и нагружения. Изучалось деформирование стержней в статике [1–3], динамике [4, 5], с учетом больших деформаций и перемещений [6, 7], в составе конструкций [8]. Обзор литературы показывает, что мало опубликовано экспериментальных исследований и недостаточно изучено механическое поведение под нагрузкой гибких стержней, для которых параметр гибкости  $\lambda$  принимает большие значения. Особенностью гибких стержней является трудность их изготовления, поскольку сложно обеспечить идеальную геометрическую форму, заявленную в конструкторской документации. Кроме того, в готовом гибком стержне, в силу малой изгибной жесткости и пластических деформаций, может нарушаться исходная геометрическая форма в процессе подготовки производства и сборки конструкции. Несовершенство формы гибкого стержня оказывает влияние на продольную устойчивость, что снижает реальные

критические силы относительно рассчитанных по формуле Эйлера. В связи с изложенным представляет интерес экспериментальная оценка критической нагрузки на стержень и сравнение ее с упругим решением Эйлера и с более точным решением методом конечных элементов. Целью данной работы является испытание реального гибкого стержня на устойчивость и установление соответствия экспериментальной критической силы с расчетными данными.

**Экспериментальное исследование.** В качестве объекта исследования выберем плоский гибкий стержень, выполненный механообработкой стальной заготовки (пруток), размеры которого приведены ниже:

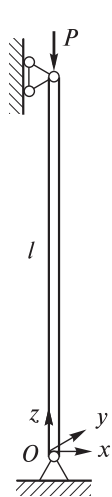
Длина $l$ , мм .....	300
Ширина $b$ , мм .....	10
Толщина $h$ , мм .....	1,2

Размеры стержня выбраны так, чтобы стержень отвечал условию гибкости и потеря устойчивости происходила в заранее заданной плоскости  $xz$  (рис. 1).

Стержень шарнирно закреплен по торцам (см. рис. 1): внизу — шарнирно неподвижная опора, вверху — шарнирно подвижная опора. Поэтому коэффициент приведения длины  $\mu = 1$ . Найдем гибкость  $\lambda$  стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 300}{0,346} = 867,$$

где  $i$  — радиус инерции поперечного сечения стержня,  $i^2 = \frac{I_y}{bh}$ ,



$$I_y = \frac{bh^3}{12}.$$

Выбранный стержень имеет высокую гибкость, он был изготовлен на высокоточном оборудовании (обрабатывающем центре с ЧПУ). Конструкция стержня усложнялась профилированием на ус (рис. 2) концевых частей длиной 5 мм для задания шарнирных креплений (см. рис. 1). Ответной деталью испытательной оснастки была толстая пластина с неглубокой продольной канавкой (см. рис. 2), в которую заходил острый по форме торец стержня. Такое конструктивное решение шарнирной опоры давало безмоментное соединение при углах поворота концов стержня  $\pm 20^\circ$ , что достаточно для получения первой формы потери устойчивости стержня.

Рис. 1. Схема закрепления и нагружения стержня

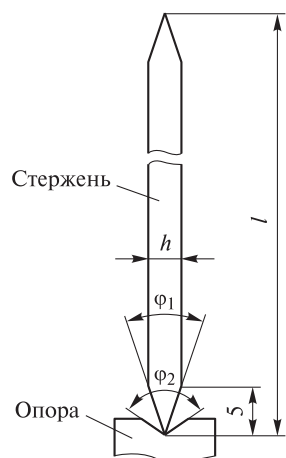


Рис. 2. Контакт стержня с технологической оснасткой

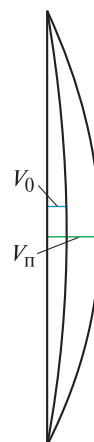


Рис. 3. Перемещения стержня с начальными несовершенствами  $V_0$  при потере устойчивости  $V_{п}$



Рис. 4. Испытание стержня на сжатие на установке Zwick/Roell Z100

Несмотря на геометрически точное изготовление стержня, после снятия технологической оснастки стержень деформируется под действием внутренних остаточных напряжений. Наибольшее искривление стержня определяли касанием его к жесткой плоскости (рис. 3). Получено, что амплитудное начальное отклонение  $V_0 = 0,35$  мм.

Испытание стержня проводилось на установке Zwick/Roell Z100 (рис. 4) кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Кинематическое нагружение осевой силой проходило со скоростью 0,5 мм/мин. Конструкция опор и плоская форма стержня однозначно задавали изгиб в плоскости  $xz$ .

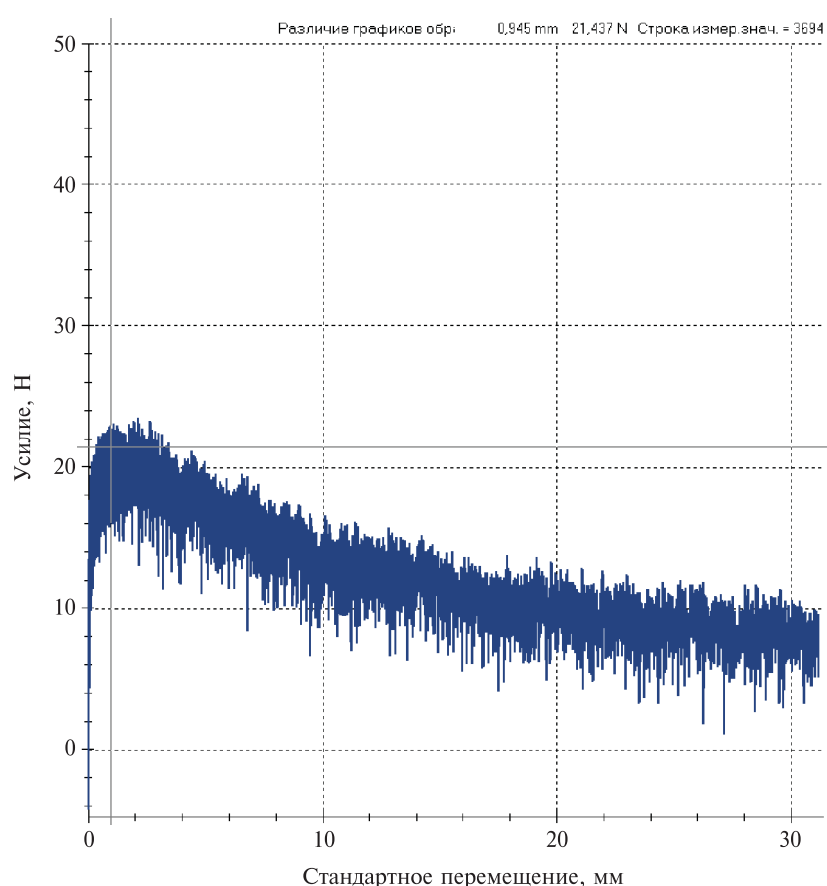


Рис. 5. Диаграмма деформирования стержня

Диаграмма деформирования стержня (рис. 5) построена автоматически в осях нагрузка — перемещение верхнего торца стержня. По диаграмме находим критическую нагрузку  $P_{кр}^{эксп} = 22$  Н. Действительно, до этого значения одновременно возрастали нагрузка и перемещение, а начиная с критической силы  $P_{кр}$ , нагрузка стала снижаться

при значительном возрастании перемещений, что свидетельствует о потере устойчивости стержня. Получено, что форма потери устойчивости стержня соответствует одной полуволне.

После демонтажа оснастки стержень сохранил свою искривленную по одной полуволне форму, что означает появление в нем остаточных пластических деформаций. Следовательно, гибкие стержни при потере устойчивости деформируются с образованием пластических деформаций, что необходимо учитывать в расчетах.

**Расчет на устойчивость.** Для расчета гибкого стального стержня (см. рис. 1) на устойчивость воспользуемся подходом Эйлера [2] и методологией динамического анализа [9]. Принимаем, что стержень изготовлен из стали с механическими характеристиками, указанными ниже:

Предел текучести $\sigma_T$ , МПа .....	1200
Предел прочности $\sigma_B$ , МПа .....	1300
Предел пропорциональности $\sigma_{пц}$ , МПа .....	900
Погрешность $\delta$ , % .....	4

Подход Эйлера правомочен [2], так как стержень имеет высокую гибкость  $\lambda$  и критическое напряжение не достигает предела текучести  $\sigma_T$  и предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$ .

Найдем критическую силу  $P_{кр}$  по формуле Эйлера

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 2,625 [\text{МПа}];$$

$$P_{кр} = \sigma_{кр} bh = 31,5 [\text{Н}],$$

в которой положим коэффициент приведения длины  $\mu = 1$ .

Отметим, что полученное значение критической силы  $P_{кр}$  по Эйлеру относится к стержню с идеальной геометрией, т. е. без начальных неправильностей формы, имеющих место в реальных гибких стержнях. Сравнение  $P_{кр}$  и  $P_{кр}^{\text{эксп}}$  дает погрешность

$$\delta_1 = \frac{P_{кр} - P_{кр}^{\text{эксп}}}{P_{кр}^{\text{эксп}}} \cdot 100 \% = 43,2 \%$$

Большая погрешность  $\delta_1$  объясняется тем, что в подходе Эйлера не учитываются начальные несовершенства формы стержня.

Определим критическую силу  $P_{кр.м}$  по методологии динамического анализа [9]. В стержне учтем пластические свойства материала и начальное несовершенство формы. Согласно методологии [10], строится 3D конечно-элементная модель стержня, расчет осуществ-

ляется в программном комплексе LS-DYNA в динамической постановке. Для того чтобы учитывать пластические свойства материала стержня, в расчетах используется диаграмма упругопластического деформирования, которая строится по заданным механическим характеристикам материала. Начальное несовершенство формы стержня, связанное с технологией производства, учитывается по известной приближенной схеме [3]. По этой схеме считается, что стержень имеет начальное искривление оси по одной полуволне с амплитудным значением  $V_0$  (см. рис. 3). После потери устойчивости стержня амплитудное отклонение возрастает до величины  $V_{\text{п}}$ . Критическую силу  $P_{\text{кр.м}}$  для стержня с начальным несовершенством формы находим по формуле [3]

$$P_{\text{кр.м}} = \left(1 + \frac{V_0}{V}\right)^{-1} P_{\text{кр}},$$

где  $P_{\text{кр}}$  — критическая сила геометрически идеального стержня;  $V$  — дополнительный прогиб,  $V = V_{\text{п}} - V_0$ .

Для рассматриваемого гибкого стержня  $V_0 = 0,35$  мм,  $V_{\text{п}} = 1,2$  мм. Величина  $V_{\text{п}}$  установлена из решения в программном комплексе LS-DYNA, в котором определяются и форма потери устойчивости, и перемещения точек стержня. Критическая сила  $P_{\text{кр}}$ , найденная в LS-DYNA, составляет 40 Н. Тогда критическая сила  $P_{\text{кр.м}}$  стержня с начальным несовершенством формы будет:

$$P_{\text{кр.м}} = \left(1 + \frac{0,35}{1,2}\right)^{-1} \cdot 40 = 28 \text{ [Н]}.$$

Погрешность  $\delta_2$  расчетной силы  $P_{\text{кр.м}}$  относительно экспериментального значения  $P_{\text{кр}}^{\text{эсп}}$  будет:

$$\delta_2 = \frac{28 - 22}{22} \cdot 100 \% = 27,3 \%.$$

Отсюда следует, что расчет стержня с учетом начального несовершенства дает меньшую погрешность, чем расчет для геометрически идеального стержня.

**Заключение.** Испытание шарнирно опертого гибкого стержня на продольную устойчивость проведено на установке Zwick/Roell Z100 с применением специальной оснастки, обеспечивающей выполнение геометрических граничных условий. Плоская форма стального стержня выбрана для однозначного задания плоскости изгиба стерж-

ня при потере устойчивости. В результате экспериментального исследования построена диаграмма деформирования реального стержня, которая важна для валидации расчетных моделей.

Проведенное испытание плоского гибкого стального стержня на осевое сжатие позволило проанализировать применяемые расчетные схемы: подхода Эйлера и методологии динамического анализа. Было получено, что оценку устойчивости реального стержня необходимо проводить с учетом начальных несовершенств.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Эйлер Л. *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле*. Москва; Ленинград, ГИТТЛ, 1934, 600 с.
- [2] Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. 16-е изд., испр. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. ISBN 978-5-7038-3874-7
- [3] Алфутов Н.А. *Основы расчета на устойчивость упругих систем*. 2-е изд., перераб. и доп. Москва, Машиностроение, 1991, 336 с.
- [4] Морозов Н.Ф., Беляев А.К., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Задача Ишлинского — Лаврентьева на начальном этапе движения. *Доклады Академии наук*, 2015, т. 463, № 5, с. 543–546. DOI: 10.7868/S0869565215230103
- [5] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при кратковременном продольном ударе. *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1*, 2013, вып. 3, с. 131–141.
- [6] Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с отдельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов. *Электронный журнал «Труды МАИ»*, 2017, вып. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832> (дата обращения 25.11.2018).
- [7] Meiera C., Wall W., Popp A. *Geometrically Exact Finite Element Formulations for Curved Slender Beams: Kirchhoff—Love Theory vs. Simo—Reissner Theory*. Cornell University Library, 2016. URL: <https://arxiv.org/abs/1609.00119> (дата обращения 19.10.2018).
- [8] Ванько В.И. *Очерки об устойчивости элементов конструкций*. 2-е изд., испр. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 223 с. ISBN 978-5-7038-4127-3
- [9] Егоров А.В. Деформирование центрально-сжатого гибкого стержня. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 4 (76). <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-4-1750>
- [10] Egorov A.V., Egorov V.N. Buckling of the flexible rod under shock loads. In: Zingoni A., ed. *Advances in Engineering Materials, Structures and Systems: Innovations, Mechanics and Applications*. London, Taylor & Francis Group, 2019, pp. 879–883. ISBN 978-1-138-38696-9

Статья поступила в редакцию 18.04.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Егоров А.В. Испытание гибкого стержня на сжатие. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 5. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-5-2079>

**Егоров Антон Витальевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители», МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: [antegor177@mail.ru](mailto:antegor177@mail.ru)  
SPIN-код 7513-3026  
ORCID iD 0000-0002-7401-5534

## Flexible bar compression test

© A.V. Egorov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The article considers experimental and theoretical research of longitudinal stability of a flexible steel bar design under axial compression. The bar is a flat thin-walled element, pivotally fixed at the ends. The experimental study was carried out on a Zwick/Roell Z100 installation using special equipment that simulates geometric boundary conditions. During the loading process, a diagram of the deformation of a real bar with initial shape imperfections was automatically constructed. The experimental critical force was determined from the deformation diagram. This force was compared with the critical forces obtained from calculations using two schemes: the Euler formula and the dynamic analysis methodology. In the second scheme, in contrast to the first one, the initial imperfection, established by the measurements of the tested structure, was taken into account. The design calculation errors for both schemes were determined.*

**Keywords:** flexible steel bar, stability, test, calculation, initial shape imperfection

### REFERENCES

- [1] Euler L. *A method for finding curved lines enjoying properties of maximum or minimum, or solution of isoperimetric problems in the broadest accepted sense.* Lausanne & Geneva. Marcum-Michaellem Bousquet Publ., Vol. 1744, pp. 1–322. [In Russ.: Euler L. Metod nakhozhdeniya krivykh liniy, obladayushchikh svoystvami maksimuma libo minimuma ili reshenie izoperimetricheskoy zadachi, vzyatoy v samom shirokom smysle. Moscow, Leningrad, GITTL Publ., 1934, 600 p.]
- [2] Feodosyev V.I. *Soprotivleniye materialov* [Strength of materials]. Moscow, BMSTU Publ., 2016. ISBN 978-5-7038-3874-7
- [3] Alfutov N.A. *Osnovy rascheta na ustoychivost uprugikh system* [The fundamentals of calculating the stability of elastic systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991, 336 p.
- [4] Morozov N.F., Belyayev A.K., Tovstik P.E., Tovstik T.P. *Doklady RAN — RAS Reports*, 2015, vol. 463, no. 5, pp. 543–546. DOI: 10.7868/S0869565215230103
- [5] Morozov N.F., Tovstik P.E. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta — Vestnik of Saint Petersburg University, Ser. 1*, 2013, no. 3, pp. 131–141.
- [6] Popov V.V., Sorokin F.D., Ivannikov V.V. *Trudy MAI – Transactions of Moscow Aviation Institute*, 2017, no. 92. Available at: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76832> (accessed November 25, 2018).
- [7] Meiera C., Wall W., Popp A. *Geometrically Exact Finite Element Formulations for Curved Slender Beams: Kirchhoff—Love Theory vs. Simo—Reissner Theory.* Cornell University Library, 2016. Available at: <https://arxiv.org/abs/1609.00119> (accessed October 19, 2018).
- [8] Vanko V.I. *Ocherki ob ustoychivosti elementov konstruktsey* [Essays on the stability of structural elements]. Moscow, BMSTU Publ., 2015, 223 p. ISBN 978-5-7038-4127-3
- [9] Egorov A.V. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, iss. 4 (76). <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-4-1750>



- [10] Egorov A.V., Egorov V.N. Buckling of the flexible rod under shock loads. In: Zingoni A., ed. *Advances in Engineering Materials, Structures and Systems: Innovations, Mechanics and Applications*. London, Taylor & Francis Group Publ., 2019, pp. 879–883. ISBN 978-1-138-38696-9

**Egorov A.V.**, Cand. Sc. (Eng), Assoc. Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: [antegor177@mail.ru](mailto:antegor177@mail.ru)  
SPIN-code 7513-3026  
ORCID iD 0000-0002-7401-5534