

Математическая модель маневрирующего наноспутника с гелиотермической двигательной установкой и маховичной системой ориентации и стабилизации

© З.С. Жумаев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена возможность использования гелиотермической двигательной установки для построения созвездий наноспутников формата CubeSat типоразмера 6U. Наличие такой двигательной установки на борту каждого спутника созвездия подразумевает прямой нагрев рабочего тела сфокусированным солнечным излучением. По сравнению с электрореактивными двигателями предлагаемый движитель имеет тягу на порядки выше, что позволяет построить созвездие наноспутников на низкой околоземной орбите менее чем за 6 суток. Если сравнивать с электротермическими двигателями, то в представленном решении достигается более высокая эффективность преобразования энергии солнечного излучения в тепловую энергию рабочего тела. Было проведено моделирование движения космического аппарата с учетом взаимного влияния работы двигательной установки, системы ориентации и стабилизации, системы электропитания, а также прохождения теневых участков орбиты, на которых происходит потеря электрической и тепловой энергии.

Ключевые слова: наноспутник, CubeSat, двигательная установка, созвездие спутников, гелиоконцентратор, система ориентации и стабилизации

Введение. В 2013–2020 гг. значительно увеличилось количество ежегодно запускаемых наноспутников типа CubeSat. Например, только за 2014–2015 гг. было запущено более 200 таких спутников. Если первоначально формат CubeSat использовался для запуска университетских космических аппаратов (КА) и отработки технологий, то в настоящее время большая часть этих спутников создается для решения коммерческих задач [1, 2].

Переход от образовательных задач к профессиональным предполагает увеличение количества группировок кубсатов. Текущие методы построения группировок пассивно летящих наноспутников неэффективны. На околоземную орбиту кубсаты выводятся преимущественно кластерными пусками или с борта Международной космической станции (МКС). Движение по орбите КА они начинают фактически из одной точки, распределение по орбите происходит только за счет незначительного разброса начальных скоростей при отделении от пускового адаптера или при различной силе аэродинамического сопротивления. Алгоритмы разведения спутников в созвездия благодаря управлению силой аэродинамического сопротивления занимают более 300 дней для достижения равномерного распределения по орбите [3].

Для повышения эффективности использования кубсатов требуется создание компактной двигательной установки, способной за короткое время развести спутники в созвездие, а также восстановить конфигурацию созвездия при выходе из строя одного из аппаратов. Двигательная установка (ДУ) должна иметь возможность значительно изменить скорость наноспутника за период времени, существенно меньший срока активного существования аппарата. Типичная тяга электрореактивных ДУ кубсатов относительно низкая: $54 \cdot 10^{-6}$ Н — для электродинамических ДУ [4–6], $45 \cdot 10^{-6}$ Н — для пульсирующих плазменных ДУ [7, 8], $54 \cdot 10^{-6}$ Н — для вакуумных электродуговых ДУ [5], $74 \cdot 10^{-6}$ Н — для электростатических ДУ [9] и $100 \cdot 10^{-6}$ Н — для ДУ, ионизирующих спрей [4]. Подобные ограничения тяги для электрореактивных ДУ делают их пригодными только для длительных перелетов или компенсации возмущений, когда время перелета слабо ограничено и требуются значительные запасы характеристической скорости [4, 10]. Двигатели на сжатом газе, имеющие запас характеристической скорости менее 5 м/с, не могут применяться для быстрого развертывания группировок [11, 12]. Использование традиционных химических ДУ на борту кубсата проблематично ввиду высоких температур и ограничений стандарта CubeSat на общий запас химической энергии, которое составляет 100 Вт·ч согласно спецификации стандарта CubeSat [13].

Термические двигатели, использующие электрическую энергию солнечных батарей (СБ), для нагрева воды или монокомпонента [14, 15] способны создать значительную тягу, но их эффективность ограничена 28 % КПД GaAs фотопреобразователей [16], а также дополнительными потерями в электронагревателях, аккумуляторах и системе управления питанием. Кроме того, двигатели, которые потребляют бортовую электроэнергию, приводят к значительному сокращению эффективного времени работы других устройств наноспутника, учитывая ограниченную среднюю орбитальную мощность кубсатов (порядка 2...8 Вт), в то время как типичное потребление термического двигателя [4, 17, 18] составляет 0,5...5,5 Вт.

Отечественными учеными был проведен теоретический обзор гелиотермических космических систем для аппаратов более тяжелого класса, чем CubeSat [19]. Предложены варианты использования солнечной энергодвигательной установки (СЭДУ) для повышения энthalпии одного из компонентов топлива химических двигательных установок, что может существенно увеличить удельный импульс и тягу жидкостного ракетного двигателя [20, 21]. В указанных работах помимо гелиоконцентратора рассматривается также преобразование

тепловой энергии солнечного излучения в электрическую посредством солнечных батарей и только потом — в тепловую энергию одного из компонентов топлива.

В данной работе предлагается СЭДУ, основанная на прямом нагреве рабочего тела сфокусированным солнечным излучением с помощью линзы Френеля.

Цель работы — разработка математической модели функционирования двух маневрирующих наноспутников, оснащенных СЭДУ, для определения пригодности СЭДУ для быстрого построения созвездия произвольной конфигурации при сохранении плоскости и высоты орбиты.

Математическая модель. Рассмотрим математическую модель спутника, включающую в себя СЭДУ (гелиоконцентратор, бак рабочего тела, клапан, сопло), маховичную систему ориентации и стабилизации (СОС), систему электропитания. Необходимость объединения нескольких подсистем в одну модель обусловлена рядом особенностей. Температура рабочего тела и, следовательно, работа ДУ зависят от точности ориентации на Солнце и скорости разворотов спутника. В то же время работа двигательной установки создает возмущающий момент, влияющий на ориентацию КА; работа ДУ влияет на расписание пролета теневых участков орбиты и смену режимов нагрева и охлаждения рабочего тела. Работа бортовых систем и смена режимов ориентации КА из солнечной в орбитальную могут приводить к разряду аккумуляторных батарей, следовательно, в общей модели необходимо учитывать и энергобаланс спутника.

Часть модели, описывающая нагрев двухфазной среды в замкнутом объеме и истечение пара из сопла, была описана ранее [22]. Ниже рассмотрим остальные составляющие математической модели.

Допущения математической модели. При расчете баллистики приняты такие допущения: космический аппарат движется в центральном сферическом поле тяготения Земли; возмущающие воздействия помимо тяги двигателя отсутствуют; тяга включается и отключается мгновенно.

Математическая модель тени Земли построена с учетом следующих допущений: угловой размер Солнца постоянен; Земля является шаром; модель тени Земли является конической; присутствуют зоны тени и полутени; единичный вектор спутник–Солнце совпадает с единичным вектором Земля–Солнце в геоцентрической инерциальной системе координат; смена режимов работы спутника происходит при достижении половины видимости Солнечного диска.

При построении математической модели гелиоконцентратора учтены следующие допущения: световое пятно либо полностью находится на приемнике излучения, либо полностью находится вне его. Переход между указанными режимами определяется предельным

углом отклонения оси гелиоконцентратора от направления на Солнце. Эффективность фокусировки и поглощения светового потока концентратором является постоянной величиной — она не зависит от малых отклонений оси гелиоконцентратора от направления на Солнце. Световой поток пропорционален доле видимой части Солнца.

Отмеченные выше допущения приняты по причине того, что режим разворота на Солнце непродолжителен, а в режиме ориентации на Солнце ось гелиоконцентратора отклоняется от направления на Солнце в малых пределах. Большую часть времени световой пучок либо расположен в центральной части приемника излучения, либо полностью находится за его пределами, что обеспечивается быстрой переориентацией в результате использования двигателей маховиков.

Возможно использование линзы как с экспоненциальным убыванием интенсивности светового потока по мере удаления от центра светового пятна, так и с равномерным распределением интенсивности в зоне светового пятна. Рассмотрение влияния размера светового пятна и характера распределения интенсивности на общую эффективность гелиоконцентратора выходит за рамки настоящей работы.

Допущения математической модели СОС: ориентация спутника всегда известна, такое допущение возможно благодаря теореме о разделении [23]; исполнительные органы точно отрабатывают требуемый момент при любой скорости вращения ниже максимальной, угловая скорость вращения маховиков всегда точно известна, маховики установлены идеально точно, момент инерции маховиков J_{gw} одинаков и точно известен; гироскопический момент маховиков не учитывается; на спутник не действуют внешние возмущающие моменты, т. е. на ориентацию спутника влияют только работа исполнительных органов СОС и возмущающий момент от неидеально центрированной ДУ.

Уравнения математической модели баллистики. Вектор ускорения спутника определяется соотношениями:

$$m_{\text{sat}} = m_{\text{sat dry mass}} + m_{\text{fuel}}; \quad \mathbf{F}_{\text{gravity}} = \frac{-GM_{\oplus}m_{\text{sat}}\mathbf{r}_{\oplus\text{sat}}}{|\mathbf{r}_{\oplus\text{sat}}|^3};$$

$$\mathbf{F}_{\Sigma} = \mathbf{F}_{\text{gravity}} + \mathbf{F}_{\text{thrust}}; \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_{\Sigma}}{m_{\text{sat}}}.$$

где m_{sat} — масса наноспутника; $m_{\text{sat dry mass}}$ — сухая масса наноспутника; m_{fuel} — масса топлива; G — гравитационная постоянная; $\mathbf{F}_{\text{gravity}}$ — вектор силы гравитационного влияния Земли на космический аппарат; M_{\oplus} — масса Земли; $\mathbf{r}_{\oplus\text{sat}}$ — вектор Земля–космический

аппарат; \mathbf{F}_Σ — вектор суммы действующих на космический аппарат сил; $\mathbf{F}_{\text{thrust}}$ — вектор равнодействующей сил тяги двигателей; \mathbf{a} — вектор ускорения космического аппарата.

Для того чтобы финальная орбита оставалась скругленной, введен закон управления включениями двигателя, который разрешает только определенные зоны орбиты для выполнения маневров. Чем выше эллиптичность орбиты, тем более узкая зона вокруг перигея и апогея считается допустимой. Например, если задачей является поднятие орбиты, то допустимая зона для работы двигателя вычисляется вокруг апогея, для того чтобы в большей степени увеличивать перигей. Допустимая угловая зона для маневров $\alpha_{\text{threshold}}$ вычисляется динамически из разницы Δr между текущими значениями радиуса перигея r_p и радиуса апогея r_a :

$$\Delta r = r_a - r_p = a(1 + e) - a(1 - e) = 2ae; \quad \alpha_{\text{threshold}} = \pi \cdot 0,6^{10^{-3}\Delta r},$$

где e — эксцентриситет эллиптической орбиты.

Числовые коэффициенты в функции подобраны эмпирически и могут быть изменены в зависимости от задач миссии.

Уравнения математической модели положения Солнца и тени Земли. Положение Солнца относительно Земли [23] определяется следующим образом: сначала определяются средняя долгота ϕ_\odot и средняя аномалия Солнца M_\odot в градусах:

$$\begin{aligned} \phi_\odot &= 280,460^\circ + 36000,771T_{UT1}; \\ M_\odot &= 357,5277233^\circ + 35999,05034T_{UT1}, \end{aligned}$$

где $T_{UT1} = \frac{JD(Y, M, D, h, m, s) - 2\,451\,545}{36\,525}$.

Для данного года Y (между 1901 и 2099 г.), месяца M , дня D , часа h , минуты m и секунды s , Юлианская дата рассчитывается следующим образом [20]:

$$\begin{aligned} JD(Y, M, D, h, m, s) &= 1\,721\,013,5 + 367Y - \text{INT} \left\{ \frac{7}{4} \left[Y + \text{INT} \left(\frac{M+9}{12} \right) \right] \right\} + \\ &+ \text{INT} \left(\frac{275M}{9} \right) + D + \frac{60h + m + s / 60^*}{1440}. \end{aligned}$$

Здесь INT обозначает целую часть; 60^* — использование 61 с для дней с дополнительной секундой.

Или если использовать время t с отсчетом времени от начала моделирования JD_{start} , то

$$JD = JD_{\text{start}} + t.$$

И ϕ_{\odot} , и M_{\odot} приводятся к диапазону от 0 до 360° , а долгота эклиптики определяется в градусах:

$$\phi_{\text{ecliptic}} = \phi_{\odot} + 1,914666471^{\circ} \sin(M_{\odot}) + 0,019994643 \sin(2M_{\odot}).$$

Наклон эклиптики вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon = 23,439291^{\circ} - 0,0130042T_{UT1}.$$

Тогда единичный вектор в направлении от Земли к Солнцу рассчитывают так:

$$\mathbf{e}_{\oplus\odot} = \left(\cos(\phi_{\text{ecliptic}}), \cos(\varepsilon)\sin(\phi_{\text{ecliptic}}), \sin(\varepsilon)\sin(\phi_{\text{ecliptic}}) \right)^T.$$

Проведем расчет видимости Солнца. Единичный вектор спутник–Солнце совпадает с единичным вектором Земля–Солнце в геоцентрической инерциальной системе координат:

$$\mathbf{e}_{\text{sat}\odot} = \mathbf{e}_{\oplus\odot}.$$

Для окружностей радиусами a и $b > a$, центры которых разделены расстоянием c (рис. 1), площадь видимой части диска [24] радиусом a рассчитываем по уравнению

$$A_{\text{vis}} = 2\Delta + a^2 \sec^{-1} \left(\frac{2ac}{b^2 - a^2 - c^2} \right) - b^2 \sec^{-1} \left(\frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} \right),$$

где $\Delta = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$.

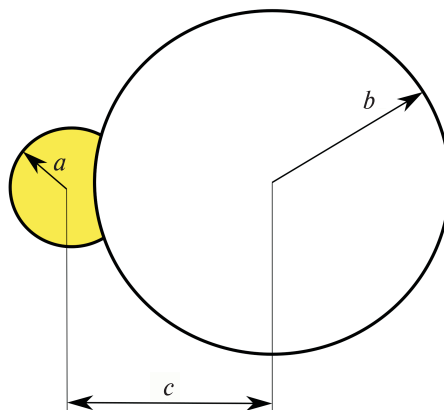


Рис. 1. Размеры, используемые для расчета видимой части Солнца

В рассматриваемом случае:

$$a = 0^{\circ}32'00'' / 2; \quad b = \arcsin\left(\frac{R_{\oplus}}{|\mathbf{r}_{\oplus\text{sat}}|}\right); \quad c = \arccos(\mathbf{r}_{\oplus\text{sat}} \cdot \mathbf{r}_{\text{sat}\odot}),$$

где a — половина углового размера Солнца (радиус); b — угловой радиус Земли; c — угловое расстояние между центром Солнца и Землей при наблюдении из центра масс (ц.м.) спутника; R_{\oplus} — радиус Земли; $\mathbf{r}_{\oplus\text{sat}}$ — вектор Земля–спутник; $\mathbf{r}_{\text{sat}\odot}$ — вектор спутник–Солнце.

При $c < (b - a)$ видимость Солнца равна 0; при $c > (b + a)$ видимость Солнца равна 1. В остальных случаях видимость Солнца равна отношению площади A_{vis} видимой части Солнца к общей площади Солнца $\left(\frac{A_{\text{vis}}}{\pi a^2}\right)$.

Уравнения математической модели гелиоконцентратора. В случае если доля видимой части Солнца больше нуля и скалярное произведение орта направления на Солнце в системе координат (с.к.) спутника и оси гелиоконцентратора (целевого направления на Солнце) больше 0,98, что соответствует предельному отклонению оси концентратора от направления на Солнце порядка 11° , то поглощенный световой поток определяется соотношением

$$W_h = 1367 f_{\text{sun}} X_c Y_c \eta,$$

где 1367 Вт/м^2 — Солнечная постоянная на околоземной орбите; f_{sun} — доля видимой части Солнечного диска; X_c ; Y_c — размеры концентратора; η — эффективность концентратора.

Уравнения математической модели СОС. Запишем Эйлерово уравнение вращения [20]:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_B^{BI} = \left(J_B^c\right)^{-1} \left[\mathbf{L}_B^c - \boldsymbol{\omega}_B^{BI} \times \left(J_B^c \boldsymbol{\omega}_B^{BI}\right) \right],$$

где J_B^c — тензор инерции спутника; \mathbf{L}_B^c — суммарный момент от действующих сил в связанной системе координат; $\boldsymbol{\omega}_B^{BI}$ — вектор угловой скорости спутника.

Сумма моментов определяется по формуле

$$\mathbf{L}_B^c = \mathbf{L}_{\text{ext}} + \mathbf{L}_{\text{rw}} + \mathbf{L}_{\text{thrust}},$$

где $\mathbf{L}_{\text{ext}} = 0$ — вектор момента от внешних возмущающих воздействий; \mathbf{L}_{rw} — вектор управляющего момента маховичной системы;

$\mathbf{L}_{\text{thrust}} = \mathbf{F}_{\text{thrust}} \times \mathbf{r}_{\text{offset}}$ — момент, вызываемый нецентральным приложением тяги двигателя, $\mathbf{r}_{\text{offset}}$ — эксцентриситет линии действия тяги относительно ц.м.

Вектор управляющего момента маховичной системы складывается из двух составляющих:

$$\mathbf{L}_{\text{rw}} = A\mathbf{m} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H},$$

где A — матрица размера 3×4 направляющих косинусов единичных векторов $\mathbf{h}_i = (h_{i1}, h_{i2}, h_{i3})$, определяющих схему установки электродвигателей-маховиков; $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ — управляющие моменты электродвигателей-маховиков; \mathbf{H} — вектор кинетического момента маховичной системы.

Вычитаемое $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}$ учитывает гироскопический момент, возникающий при вращении маховичной системы с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вместе с космическим аппаратом; в соответствии с допущениями этим слагаемым можно пренебречь. Тогда указанное соотношение можно переписать в виде

$$\mathbf{L}_{\text{rw}} = A\mathbf{m}.$$

Здесь $\mathbf{L}_{\text{rw}} = (L_{\text{rwx}}, L_{\text{rwy}}, L_{\text{rwz}})$ — управляющие моменты маховичной системы по осям стабилизации.

Задача управления маховичной системой заключается в нахождении управляющих моментов двигателей-маховиков m_i , обеспечивающих равенство вектора \mathbf{L}_{rw} требуемому вектору управляющего момента космического аппарата. Число неизвестных переменных m_i превышает число уравнений. Такая система может быть решена многими способами.

Избыточность маховичной системы позволяет оптимизировать некоторые показатели качества. Так, в качестве критерия оптимальности маховичной системы обычно используется минимум суммы квадратов управляющих моментов маховиков [25]:

$$J = \sum_{i=1}^4 m_i^2.$$

Искомое решение представляется в виде [26]

$$\mathbf{m} = A^T (AA^T)^{-1} \mathbf{L}_{\text{rw}}.$$

По известным требуемым управляющим моментам маховиков находят угловые ускорения маховиков: $\varepsilon_i = m_i / J_{\text{rw}}$.

При определении реальных угловых ускорений маховиков учитываются следующие ограничения:

управляющий момент маховика находится в диапазоне $[-m_{\max}; m_{\max}]$, т. е. если требуемый управляющий момент находится вне этого диапазона, то маховик создаст управляющий момент $\pm m_{\max}$ в соответствии с требуемым направлением;

угловая скорость маховика находится в диапазоне $[-\omega_{\max}; \omega_{\max}]$, т. е. если маховик находится на линии насыщения и требуется создать момент, который еще больше разгонит маховик, то угловое ускорение маховика ε_i будет равно нулю.

В случае использования четырех маховиков, установленных пирамидой, так что ось пирамиды совпадает с осью z спутника, а проекции осей маховиков на плоскость xy параллельны осям с.к. спутника, матрица установки маховиков будет следующей:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{\text{wheel}}) & 0 & -\cos(\alpha_{\text{wheel}}) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_{\text{wheel}}) & 0 & -\cos(\alpha_{\text{wheel}}) \\ \sin(\alpha_{\text{wheel}}) & \sin(\alpha_{\text{wheel}}) & \sin(\alpha_{\text{wheel}}) & \sin(\alpha_{\text{wheel}}) \end{bmatrix},$$

где α_{wheel} — угол между осью электрического двигателя маховика и плоскостью xy .

Требуемый управляющий момент определяется соотношением

$$\mathbf{L}_{\text{cmd}} = -K_d \cdot \boldsymbol{\omega}_B^{BI} - K_p \cdot \mathbf{q}_{\text{err}},$$

где \mathbf{q}_{err} — кватернион, определяемый из соотношения, приведенного ниже; K_d , K_p — матрицы, которые вычисляются как $k_d \cdot J_B^c$ и $k_p \cdot J_B^c$ соответственно, k_d , k_p — скалярные коэффициенты, меняющиеся в зависимости от смены режимов работы СОС.

Кватернион ошибки определяется соотношением

$$\mathbf{q}_{\text{err}} = \mathbf{q}_{\text{cmd}}^{-1} \otimes \mathbf{q}_{\text{bi}},$$

при этом если скалярное произведение, взятое по всем четырем компонентам кватернионов \mathbf{q}_{cmd} и \mathbf{q}_{bi} , отрицательное, то \mathbf{q}_{bi} необходимо предварительно поэлементно умножить на -1 .

Для обеспечения лучшей вычислительной устойчивости ориентация задается через кватернион ориентации, производная которого определяется соотношением

$$\dot{\mathbf{q}}_{BI} = \frac{1}{2} \Omega(\boldsymbol{\omega}_B^{BI}) \cdot \mathbf{q}_{BI},$$

$$\text{где } \Omega(\omega_B^{BI}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Простой случай алгоритма построения созвездия. Высота целевой орбиты совпадает с исходной. Задачу построения созвездия спутников можно свести к множеству задач фазирования двух спутников. Предельный, наиболее продолжительный маневр заключается в фазировании двух спутников на угол 2π , потому что все промежуточные углы могут быть достигнуты за меньшее время, следовательно, можно построить любую конфигурацию группировки за время меньше, чем необходимо для фазирования двух спутников с разницей в целый виток орбиты. Например, в частном случае группировка из двух спутников строится за время в 2 раза меньшее, так как фазировать нужно только на угол π , т. е. в диаметрально противоположные точки орбиты, а не на полный оборот. Для группировки из трех спутников необходимо порядка $2/3$ от времени фазирования на 2π , так как разница по фазе между лидирующим и последним спутниками составляет $2/3$ витка.

Для того чтобы быстрее накопилась разница по фазе, необходимо, чтобы максимально отличались орбитальные периоды спутников. По этой причине один из спутников следует перевести на орбиту с минимально возможной высотой, а другой — на орбиту с максимально возможной высотой, но таким образом, чтобы оставался запас топлива, требуемый для возвращения на исходную орбиту. В случае отсутствия сил атмосферного сопротивления и прочих возмущений, кроме центрального сферического поля тяготения Земли, для перехода на предельные «низкую» и «высокую» орбиты достаточно выработать половину рабочего тела, чтобы вторая половина осталась для возвращения на исходную орбиту. Такая оценка необходимого количества топлива для выполнения маневров не учитывает того, что общая масса спутника будет уменьшаться и параметры каждого следующего импульса также будут изменяться. В дальнейшем оценку потребного количества топлива для маневров можно уточнить.

Время маневрирования для перелета на промежуточные орбиты с максимальной и минимальной высотой может не совпадать, поэтому необходимо также провести моделирование свободного полета того спутника, который затратил меньше времени на маневр, чтобы свободный полет спутники на «высокой» и «низкой» орбитах начали с одного и того же момента времени.

Необходимое время свободного полета рассчитывают следующим образом. Сначала вычисляются орбитальные элементы по известным векторам положения и скорости:

$$\mu = GM_{\oplus}; \quad E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}; \quad a = -\frac{\mu}{2E},$$

где μ — гравитационный параметр; G — гравитационная постоянная; M_{\oplus} — масса Земли; E — удельная механическая энергия; v — скорость спутника; a — большая полуось эллипса орбиты.

Далее вычисляются орбитальные периоды по известным большим полуосям:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{(a_1^3/\mu)}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{(a_2^3/\mu)}.$$

Начальную разницу фаз после перелета на промежуточные орбиты рассчитывают через скалярное произведение радиус-векторов спутников:

$$\alpha_0 = \arccos \left(\frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|} \right).$$

Предположим, что длительности перелетов с начальной орбиты на орбиту фазирования и обратно совпадают для каждой из орбит в отдельности. Тогда необходимо найти время, за которое спутники накопят разницу по фазам, равную $\alpha_{\text{goal}} - 2\alpha_0$, так как изначально у спутников уже есть разница по фазе α_0 и такая же разница фаз добавится во время маневра по возвращению на исходные орбиты. Если T_{min} и T_{max} соответственно минимальные и максимальные значения орбитальных периодов, то время фазирования можно выразить через число оборотов и период обращения как для первого, так и для второго спутника:

$$\Delta t_f = T_{\text{min}} \left(n + \frac{\alpha_{\text{goal}} - 2\alpha_0}{2\pi} \right); \quad \Delta t_f = T_{\text{max}} n. \quad (2)$$

Время окончания фазирования равно сумме начального времени свободного полета t_{f0} и длительности свободного полета Δt_f :

$$t_{f1} = t_{f0} + \Delta t_f. \quad (3)$$

Из системы уравнений (2) выразим Δt_f и подставим в уравнение (3):

$$t_{f1} = t_{f0} + \left(\frac{\alpha_{\text{goal}} - 2\alpha_0}{2\pi} \right) \frac{T_{\min} T_{\max}}{T_{\max} - T_{\min}}.$$

По окончании фазы свободного полета в момент времени t_{f1} разница фаз между спутниками составит $\alpha_{\text{goal}} - \alpha_0$, и во время третьей фазы — возвращения на исходные орбиты — будет компенсирована разница α_0 в требуемой фазе, итоговая разница фаз составит требуемую величину α_{goal} .

Общий случай построения созвездия. Высота целевой орбиты отличается от исходной. Более общий случай, когда кроме фазирования необходимо перейти на орбиту другой высоты, отличается тем, что появляется дополнительный шаг. Рассмотрим это на примере финальной требуемой орбиты, радиус которой больше исходной.

Перед выполнением маневров следует определить, какой запас рабочего тела необходим для перелета на финальную орбиту. Оставшаяся часть рабочего тела делится на две части: для перелета на орбиту фазирования и для последующего возвращения на требуемую орбиту. Один из спутников использует указанную половину остатка рабочего тела для того, чтобы на первом этапе снизить свою орбиту и перейти на минимально допустимую высоту орбиты. Второй спутник на начальном этапе перейдет на финальную орбиту и дополнительно выработает еще половину остатка топлива для перехода на более высокую предельно допустимую орбиту, т. е. такую, с которой он сможет вернуться на требуемую с оставшимся топливом. После выполнения указанных перелетов схема остается такой же: тот спутник, что затратил на маневр меньшее время, моделируется в свободном полете, чтобы оба спутника продолжили свободный полет с одного момента времени. Необходимое время на свободный полет вычисляется так же. Далее оба спутника перелетают на финальную орбиту, и моделирование происходит до тех пор, пока оба спутника не достигнут фазы свободного полета с полностью выработанным топливом, чтобы можно было оценить финальную действительную разницу фаз. Ранее описанный простой случай, когда высота финальной орбиты совпадает с начальной, является частным случаем и указан для лучшего понимания общего случая.

Моделирование проводилось для следующих параметров:

начальная масса двухфазной среды вода — пар $m_0 = 0,25$ кг;

температура в начальный момент времени $T_0 = 300$ К;

объем, занимаемый двухфазной средой вода — пар, $V_{\Sigma} = 0,5$ л;

начальное давление в баке P соответствует линии насыщения;

эквивалентная масса алюминиевой конструкции СЭДУ
 $m_m = 0,3$ кг;

теплоемкость алюминия $c_m = 903$ Дж/(кг·К);

масса неотработанного рабочего тела, которое останется в системе, равна 0,05 кг;

подводимая тепловая мощность на освещенном участке орбиты соответствует тепловой мощности Солнечного излучения, равной 1367 Вт/м², снимаемой с концентратора размерами $(0,1 \times 0,3)$ м;

тепловая эффективность концентратора 0,75;

площадь приемника излучения $0,0016$ м²;

температура рабочего тела, при которой открывается отсечной клапан, $T_{\text{open}} = 450$ К;

длительность удержания клапана в открытом состоянии
 $t_{\text{open}} = 1,5$ с;

степень черноты поверхности приемника излучения $\varepsilon = 0,83$ соответствует эмали завода «Композит» [27];

диаметр критического сечения сопла 3 мм;

диаметр выходного сечения 25 мм;

суммарная сухая масса разгонного блока и спутника 7,315 кг;

требуемая точность ориентации 10° ;

требуемая точность стабилизации $1^\circ/\text{с}$;

вектор начальных угловых скоростей вращения маховиков
 $[0,00 \ 0,00 \ 0,00 \ 0,00]^T$;

угол установки маховиков $22,80^\circ$;

TLE (от англ. Two-Line Element set — двухстрочный набор элементов) элементы орбиты:

```
1 25544U 98067A 20159.17750479 -.00000282 00000-0 30238-5 0 9991
2 25544 51.6459 38.0125 0002438 28.0771 113.9243 15.49425665230468
```

Результаты моделирования. Были получены графики ключевых параметров работы спутника в зависимости от времени для всех режимов работы (рис. 2–8), а также определено время, необходимое для фазирования двух спутников в пределах исходной орбиты с разницей в целый виток (рис. 9). Время фазирования двух спутников на целый виток является верхней оценкой для построения произвольной конфигурации созвездия наноспутников в пределах исходной орбиты. Установлено, что при начальном уходе ц.м. даже на 1 мм от линии действия силы тяги маховики выходят в насыщение задолго до полной выработки рабочего тела. Необходимо использовать систему коррекции ориентации оси двигателя или систему из нескольких сопел.

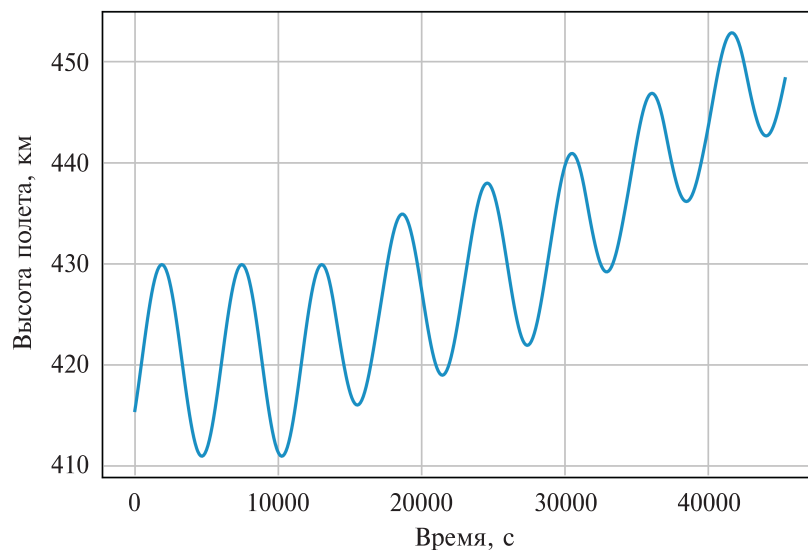


Рис. 2. Изменение высоты первого спутника на этапе перелета на орбиту фазирования

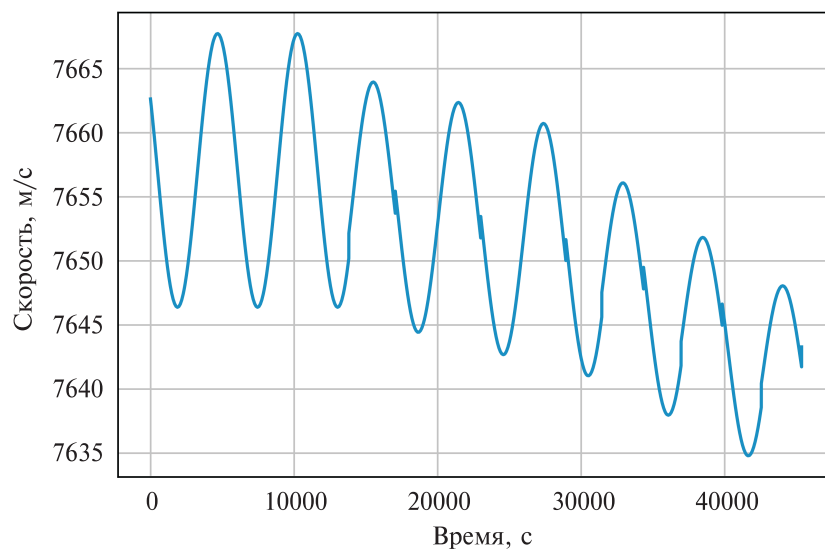


Рис. 3. Изменение скорости первого спутника на этапе перелета на орбиту фазирования

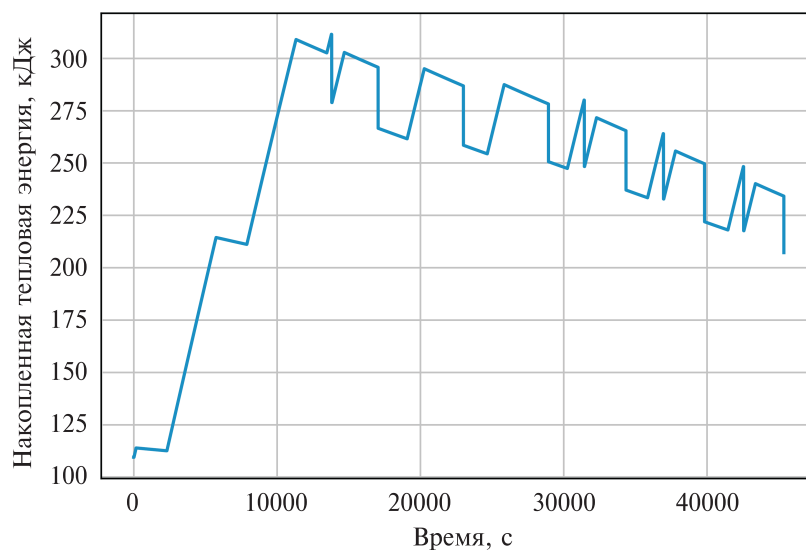


Рис. 4. Изменение тепловой энергии рабочего тела первого спутника на этапе перелета на орбиту фазирования

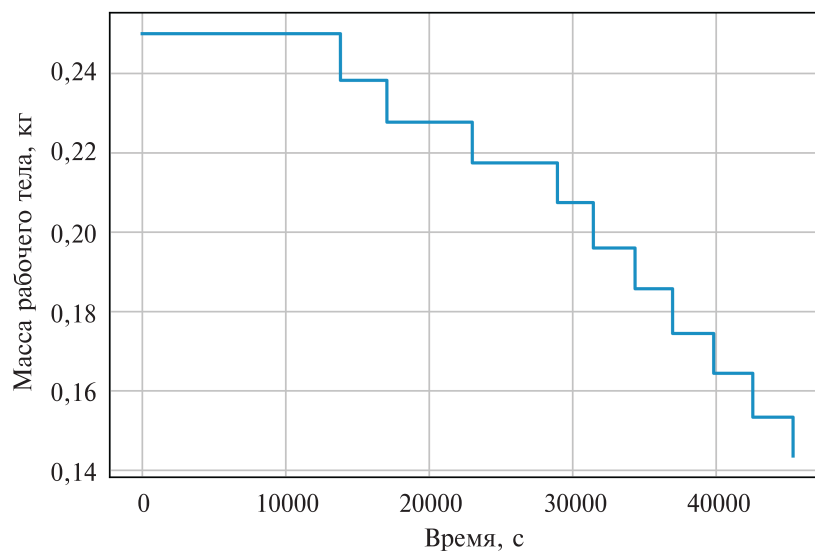


Рис. 5. Изменение запаса рабочего тела первого спутника на этапе перелета на орбиту фазирования

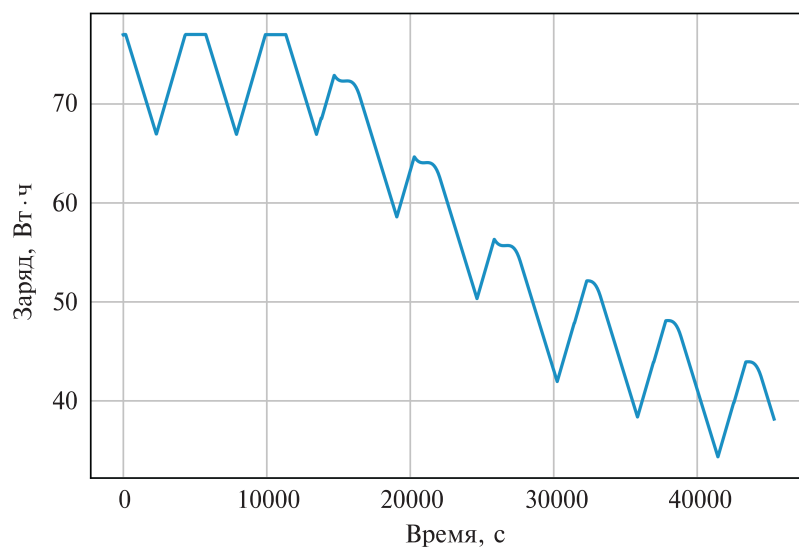


Рис. 6. Изменение заряда аккумуляторных батарей первого спутника на этапе перелета на орбиту фазирования

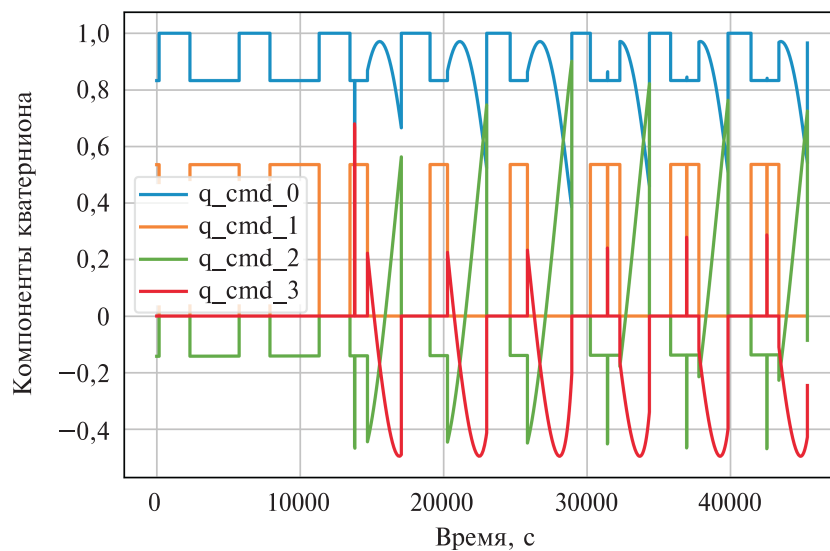


Рис. 7. Изменение составляющих командного кватерниона ориентации первого спутника на этапе перелета на орбиту фазирования

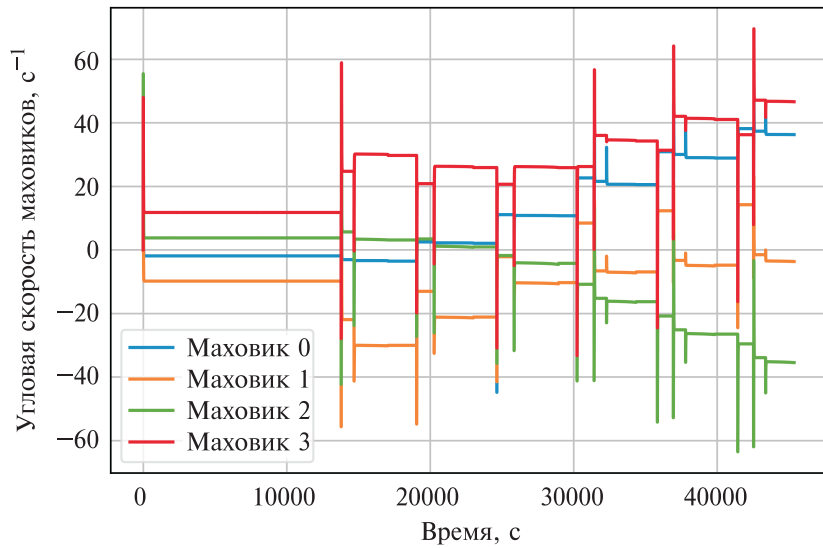


Рис. 8. Изменение угловых скоростей маховиков первого спутника на этапе перелета на орбиту фазирования

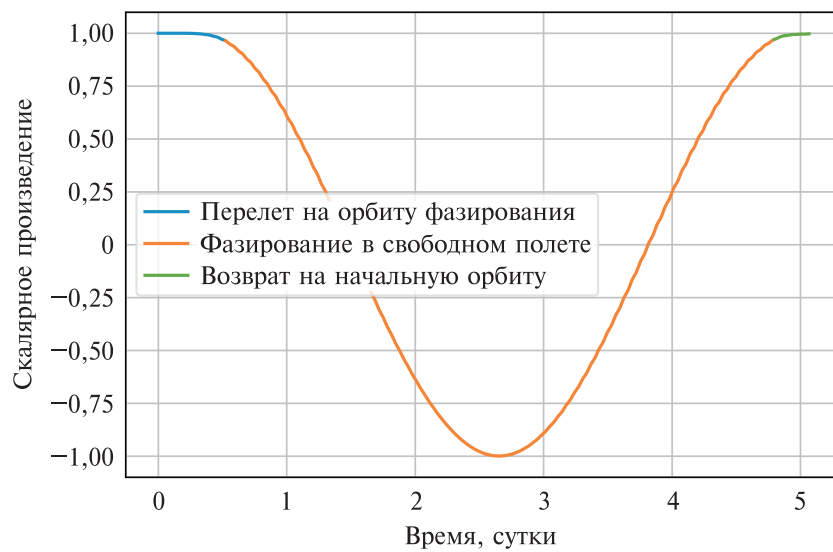


Рис. 9. График скалярного произведения нормированных радиус-векторов положений двух фазлируемых космических аппаратов

Альтернативный вариант в виде разгрузки маховиков с помощью катушек не подходит, так как во время работы двигательной установки линия действия тяги может существенно смещаться и с каждым последующим импульсом может все больше увеличиваться паразитный момент. При указанных начальных условиях не происходит разряда аккумуляторных батарей ниже критически допустимого уровня (см. рис. 6), во время фазы свободного фазирования происходит

полная зарядка аккумуляторных батарей. При активном маневрировании алгоритм управления включениями двигательной установки приводит к сокращению начальной эллиптичности орбиты, что видно по разнице между минимальной и максимальной высотами орбиты (см. рис. 2). Скачки скорости не являются мгновенными (см. рис. 3), а растянуты во времени и соответствуют длительности работы двигателя при включениях.

Заключение. Математическое моделирование показало, что любое количество наноспутников CubeSat формата 6U, оснащенных СЭДУ, могут быть фазированы в произвольную конфигурацию созвездия в той же плоскости и на той же высоте орбиты менее чем за 6 суток при средней начальной высоте круговой орбиты 420 км. Для выполнения поставленных задач был создан программный комплекс моделирования динамики наноспутника с СЭДУ, активной маховичной СОС и системой энергопитания. Исследование показало, что необходимо использовать систему динамической центровки оси двигателя или систему из нескольких сопел.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Buchen E. 2014 nano/microsatellite market assessment. *SpaceWorks Enterprises*, 2014, vol. 12. URL: <https://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3018&context=smallsat> (дата обращения 27.03.2021).
- [2] Swartwout M. The first one hundred CubeSats: A statistical look. *J. Small Satell.*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 213–233.
- [3] Foster C., Mason J., Vittaldev V., Leung L., Beukelaers V., Stepan L., Zimmerman R. Differential drag control scheme for large constellation of planet satellites and on-orbit results. *arXiv preprint*, 2018, arXiv:1806.01218. URL: <https://arxiv.org/abs/1806.01218> (дата обращения 27.03.2021).
- [4] Lemmer K. Propulsion for CubeSats. *Acta Astronautica*, 2017, vol. 134, pp. 231–243.
- [5] Rysanek F., Hartmann J., Schein J., Binder R. Microvacuum arc thruster design for a CubeSat class satellite. *16th Annual/USU Conference on Small Satellites*, 2002. SSC02-I-2. URL: https://www.researchgate.net/publication/228693381_Microvacuum_arc_thruster_design_for_a_CubeSat_class_satellite (дата обращения 27.03.2021).
- [6] Schein J., Gerhan A., Rysanek F., Krishnan M. Vacuum arc thruster for cubesat propulsion. *IEPC-0276, 28th IEPC*, 2003, vol. 100. URL: <http://electricrocket.org/IEPC/0276-0303iepc-full.pdf> (дата обращения 27.03.2021).
- [7] Guarducci F., Coletti M., Gabriel S. Design and testing of a micro pulsed plasma thruster for CubeSat application. *32nd International Electric Propulsion Conference*, 2011, pp. 2011–2239. URL: <http://electricrocket.org/IEPC/IEPC-2011-239.pdf> (дата обращения 27.03.2021).
- [8] Coletti M., Guarducci F., Gabriel S. A micro ppt for CubeSat application: Design and preliminary experimental results. *Acta Astronautica*, 2011, vol. 69, no. 3–4, pp. 200–208.
- [9] Krejci D., Mier-Hicks F., Fucetola C., Lozano P., Schouten A.H., Martel F. Design and characterization of a scalable ion electrospray propulsion system, 2015.

- Researchgate* URL: https://www.researchgate.net/profile/David-Krejci-2/publication/280098850_Design_and_Characterization_of_a_Scalable_ion_Electrospray_Propulsion_System/links/55a9135808aea3d086802b63/Design-and-Characterization-of-a-Scalable-ion-Electrospray-Propulsion-System.pdf (дата обращения 27.03.2021).
- [10] Mathur R. Low thrust trajectory design and optimization: Case study of a lunar CubeSat mission. *Proceedings of the 6th International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques*, 2016, pp. 1–11. URL: https://indico.esa.int/event/111/contributions/372/attachments/379/422/ICATT6_PAPER-Lunar_CubeSat_Trajectory_Design-Mathur.pdf (дата обращения 27.03.2021).
- [11] Imken T.K., Stevenson T.H., Lightsey E.G. Design and testing of a cold gas thruster for an interplanetary CubeSat mission. *J. Small Satell.*, 2015, vol. 4, no. 2, pp. 371–386.
- [12] Manzoni G., Brama Y.L. CubeSat micropropulsion characterization in low Earth orbit. *Proceedings of the 15th Small Satellite Conference*, 2015, vol. 4, no. 5. URL: <https://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3190&context=smallsat> (дата обращения 27.03.2021).
- [13] *CubeSat design specification* Rev. 13. California Polytechnic State University. URL: https://static1.squarespace.com/static/5418c831e4b0fa4ecac1bacd/t/56e9b62337013b6c063a655a/1458157095454/cds_rev13_final2.pdf (дата обращения 14.03.2021).
- [14] Cofer A.G., O'Neill W.J., Heister S.D., Alexeenko A., Cardiff E.H. Film-evaporation mems tunable array for low-mass smallSat propulsion: Design improvements and thrust characterization. *51st AIAA/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, 2015, paper no. 3993. <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2015-3993>
- [15] Cervone A., Zandbergen B., Guerrieri D.C., Silva M.D.A.C., Krusharev I., van Zeijl H. Green micro-resistojet research at Delft University of technology: New options for CubeSat propulsion. *CEAS Space Journal*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 111–125.
- [16] Polman A., Knight M., Garnett E.C., Ehrler B., Sinke W.C. Photovoltaic materials: Present efficiencies and future challenges Science. *American Association for the Advancement of Science*, 2016, vol. 352, no. 6283, paper no. aad4424.
- [17] Pottinger S., Krejci D., Scharlemann C. Development of a ppt for CubeSat applications. *44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, 2008, paper no. 4532. <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2008-4532>
- [18] BET-100 Busek electrospray thruster, datasheet. *Busek Co. Inc.* URL: http://www.busek.com/index_htm_files/70008516F.PDF (дата обращения 14.03.2021).
- [19] Грилихес В.А. *Космические солнечные энергостанции*. Ленинград, Наука, 1986, с. 51–61.
- [20] Финогенов С.Л., Коломенцев А.И., Кудрин О.И. Использование различных окислителей для дожигания водорода, нагреваемого в ракетном двигателе за счет солнечной энергии. *Сибирский журнал науки и технологий*, 2015, т. 16, № 3, с. 680–689.
- [21] Коротеев А.С. и др. Солнечные энергодвигательные установки — эффективный путь развития средств межорбитальной транспортировки. *Известия Российской академии наук. Энергетика*, 2004, № 5, с. 46–58.

- [22] Zhumaev Z.S., Shcheglov G.A. Operations dynamics analysis of solar thermal propulsion for CubeSats. *Advances in Space Research*, 2019, vol. 64, no. 4, pp. 815–823.
- [23] Markley F.L., Crassidis J.L. *Fundamentals of spacecraft attitude determination and control*. Springer, 2014, vol. 33, pp. 287–423.
- [24] Weisstein E.W. Lune. *Mathworld—a Wolfram web resource*. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Lune.html> (дата обращения 14.03.2021).
- [25] Беленький А., Васильев В. Управление минимально избыточной системой электродвигателей-маховиков. *Известия РАН. МТТ*, 1996, № 2, с. 75–81.
- [26] Беленький А.Д. и др. Алгоритм управления системой четырех двигателей-маховиков космических аппаратов серии МЕТЕОР-м. *Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ № 2*, 2013, т. 134, № 3. с. 9–14.
- [27] Thermal control coatings developed and made by the PJSC “Composite”. *JSC «Kompozit»*. URL: <http://kompozit-mv.ru/index.php/en/nonmetallic-materials/127-thermal-control-coatings> (дата обращения 14.03.2021).

Статья поступила в редакцию 15.03.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Жумаев З.С. Математическая модель маневрирующего наноспутника с гелиотермической двигательной установкой и маховичной системой ориентации и стабилизации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 5. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-5-2078>

Жумаев Зайнулла Серикович — инженер лаборатории приема и обработки космической информации Научно-учебного комплекса «Специальное машиностроение» МГТУ им. Н.Э. Баумана (национального исследовательского университета). e-mail: zhumaev@bmstu.ru

Mathematical model of a maneuvering nanosatellite with a heliothermal propulsion system and a flywheel orientation and stabilization system

© Z.S. Zhumaev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper considers a possibility of using a heliothermal propulsion system for constructing constellations of nanosatellites in the CubeSat format. Such a propulsion system implies direct heating of the working fluid by focused solar radiation. In comparison with electric jet engines, the proposed propulsion has orders of magnitude higher thrust, which makes it possible to build a constellation of nanosatellites in low Earth orbit in less than 6 days. In comparison with electrothermal motors, the presented solution achieves higher efficiency of converting the energy of solar radiation into the thermal energy of the working fluid. The spacecraft motion was simulated taking into account the mutual influence of the propulsion system, the orientation and stabilization system, the power supply system, as well as the passage of the shadow sections of the orbit in which there is a loss of electrical and thermal energy.

Keywords: nanosatellite, CubeSat, propulsion, constellation of satellites, helioconcentrator, attitude determination and control system

REFERENCES

- [1] Buchen E. 2014 nano/microsatellite market assessment. *SpaceWorks Enterprises*, 2014, vol. 12. Available at: <https://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3018&context=smallsat> (accessed March 27, 2021).
- [2] Swartwout M. The first one hundred cubesats: A statistical look. *J. Small Satell.*, 2013, vol. 2, no. 2. pp. 213–233.
- [3] Foster C., Mason J., Vittaldev V., Leung L., Beukelaers V., Stepan L., Zimmerman R. Differential drag control scheme for large constellation of planet satellites and on-orbit results. *arXiv preprint*, 2018, arXiv:1806.01218. Available at: <https://arxiv.org/abs/1806.01218> (accessed March 27, 2021).
- [4] Lemmer K. Propulsion for CubeSats. *Acta Astronautica*, 2017, vol. 134, pp. 231–243.
- [5] Rysanek F., Hartmann J., Schein J., Binder R. Microvacuum arc thruster design for a CubeSat class satellite. *16th Annual/USU Conference on Small Satellites*, 2002. SSC02-I-2. Available at: https://www.researchgate.net/publication/228693381_Microvacuum_arc_thruster_design_for_a_CubeSat_class_satellite (accessed March 27, 2021).
- [6] Schein J., Gerhan A., Rysanek F., Krishnan M. Vacuum arc thruster for cubesat propulsion. *IEPC-0276, 28th IEPC*, 2003, vol. 100. Available at: <http://electricrocket.org/IEPC/0276-0303iepc-full.pdf> (accessed March 27, 2021).
- [7] Guarducci F., Coletti M., Gabriel S. Design and testing of a micro pulsed plasma thruster for cubesat application. *32nd international electric propulsion conference*. 2011. pp. 2011–2239. Available at: <http://electricrocket.org/IEPC/IEPC-2011-239.pdf> (accessed March 27, 2021).
- [8] Coletti M., Guarducci F., Gabriel S. A micro ppt for cubesat application: Design and preliminary experimental results. *Acta Astronautica*, 2011, vol. 69, no. 3–4, pp. 200–208.

- [9] Krejci D., Mier-Hicks F., Fucetola C., Lozano P., Schouten A. H., Martel F. Design and characterization of a scalable ion electrospray propulsion system. 2015. *Researchgate* Available at: https://www.researchgate.net/profile/David-Krejci-2/publication/280098850_Design_and_Characterization_of_a_Scalable_ion_Electrospray_Propulsion_System/links/55a9135808aea3d086802b63/Design-and-Characterization-of-a-Scalable-ion-Electrospray-Propulsion-System.pdf (accessed March 27, 2021).
- [10] Mathur R. Low thrust trajectory design and optimization: Case study of a lunar cubesat mission. *Proceedings of the 6th international conference on astrodynamics tools and techniques*, 2016, pp. 1–11. Available at: https://indico.esa.int/event/111/contributions/372/attachments/379/422/ICATT6_PAPER-Lunar_CubeSat_Trajectory_Design-Mathur.pdf (accessed March 27, 2021).
- [11] Imken T.K., Stevenson T.H., Lightsey E.G. Design and testing of a cold gas thruster for an interplanetary cubesat mission. *J. Small Satell.*, 2015, vol. 4, no. 2, pp. 371–386.
- [12] Manzoni G., Brama Y.L. Cubesat micropropulsion characterization in low earth orbit. *Proceedings of the 15th Small Satellite Conference*, 2015, vol. 4, no. 5. Available at: <https://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3190&context=smallsat> (accessed March 27, 2021).
- [13] *CubeSat design specification* Rev. 13. California Polytechnic State University. Available at: https://static1.squarespace.com/static/5418c831e4b0fa4ecac1bacd/t/56e9b62337013b6c063a655a/1458157095454/cds_rev13_final2.pdf (accessed March 14, 2021).
- [14] Cofer A. G., O'Neill W. J., Heister S. D., Alexeenko A., Cardiff E. H. Film-evaporation mems tunable array for low-mass smallsat propulsion: Design improvements and thrust characterization. *51st AIAA/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, 2015, paper no. 3993. <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2015-3993>
- [15] Cervone A., Zandbergen B., Guerrieri D.C., e Silva M.D.A.C., Krusharev I., van Zeijl H. Green micro-resistojet research at Delft University of Technology: New options for CubeSat propulsion. *CEAS Space Journal*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 111–125.
- [16] Polman A., Knight M., Garnett E.C., Ehrler B., Sinke W.C. Photovoltaic materials: Present efficiencies and future challenges *Science. American Association for the Advancement of Science*, 2016 vol. 352, no. 6283, paper no. aad4424.
- [17] Pottinger S., Krejci D., Scharlemann C. Development of a ppt for CubeSat applications. *44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, 2008, paper no. 4532. <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2008-4532>
- [18] BET-100 Busek electrospray thruster, datasheet. *Busek Co. Inc.* Available at: http://www.busek.com/index_htm_files/70008516F.PDF (accessed March 14, 2021).
- [19] Grilikhes V.A. *Kosmicheskije solnechnyye energostantsii* [Space solar power plants]. Leningrad, Nauka, 1986, pp. 51–61.
- [20] Finogenov S.L., Kolomentsev A.I., Kudrin O.I. Use of various oxidants for the afterburning of hydrogen heated in a rocket engine by solar energy. *Siberian Journal of Science and Technology*, 2015, vol. 16, no. 3, pp. 680–689.
- [21] Koroteev A.S., et al. Solar power propulsion systems are an effective way of developing interorbital transportation means. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Energetika — Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Energy*, 2004, no. 5, pp. 46–58.

- [22] Zhumaev Z.S., Shcheglov G.A. Operations dynamics analysis of solar thermal propulsion for CubeSats. *Advances in Space Research*, 2019, vol. 64, no. 4, pp. 815–823.
- [23] Markley F.L., Crassidis J.L. *Fundamentals of spacecraft attitude determination and control*. Springer, 2014, vol. 33, pp. 287–423.
- [24] Weisstein E.W. Lune. *Mathworld—a wolfram web resource*. Available at: <https://mathworld.wolfram.com/Lune.html> (accessed March 14, 2021).
- [25] Belenky A., Vasiliev V. *Izvestiya RAS. MTT*, 1996, no. 2, pp. 75–81.
- [26] Belenky A.D., et al. Algorithm for controlling the system of four flywheel engines of METEOR-m series spacecraft. *Voprosy elektromekhaniki No. 2. Proceedings of VNIEM*, 2013, vol. 134, no. 3, pp. 9–14.
- [27] Thermal control coatings developed and made by the PJSC “Composite”. *JSC “Kompozit”*. Available at: <http://kompozit-mv.ru/index.php/en/nonmetallic-materials/127-thermal-control-coatings> (accessed March 14, 2021).

Zhumaev Zaynulla S., engineer of the mission ground control center of the research institute “Special Machinery”, Bauman Moscow State Technical University (National Research University). e-mail: zhumaev@bmstu.ru