УДК 531.38 DOI: 10.18698/2308-6033-2021-5-2076

Нелинейные колебания поверхности раздела двух жидкостей при угловых колебаниях бака

© Вин Ко Ко, Ян Наинг У

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Развитие ракетно-космической техники привело к широкому использованию криогенных жидкостей, вследствие чего было предложено создать некоторый запас криопродукта, одновременно находящегося в двухфазном или трехфазовом состоянии, образуя при этом слои жидкости, для увеличения их срока хранения на борту космических аппаратов или в танкерах будущих космических заправочных станций. Рассмотрена задача в нелинейной постановке о колебаниях поверхности раздела двухслойной жидкости в произвольной осесимметричной полости твердого тела, совершающего угловые колебания вокруг горизонтальной оси. Для рассматриваемого класса полостей с произвольным дном и крышкой нелинейная задача сведена к последовательному решению линейных краевых задач. Получены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие колебания поверхности раздела двух жидкостей в окрестности основного резонанса. В случае круговой цилиндрической полости с плоскими днищами решения краевых задач в виде цилиндрических функций использовали для вычисления линейных и нелинейных гидродинамических коэффициентов в зависимости от глубины и плотности верхней жидкости.

Ключевые слова: *механическая система, цилиндрическая полость, гидродинамические коэффициенты, основной резонанс, возмущенная поверхность, вращательное движение.*

Введение. Нелинейные задачи динамики ограниченного объема слоистых жидкостей с поверхностью раздела представляют значительный прикладной и теоретический интерес. Подобным задачам посвящено большое число работ, опубликованных в XX и XXI вв.

Из основных работ прошлого столетия отметим основополагающие труды Л.Н. Сретенского [1], Л.Д. Ландау [2], в которых изложены основные сведения и методы исследования колебаний двух жидкостей, и [3, 4], где исследуется задача о колебаниях двухслойной жидкости. В [3] рассмотрена новая нелинейная задача о распространении волновых пакетов в системе «жидкий слой с твердым дном — жидкий слой со свободной поверхностью» и получены решения первых двух линейных приближений, а также условия разрешимости второго и третьего линейных приближений. В [4] теоретически и экспериментально исследованы поверхностные и внутренние сейши в прямоугольном наклонном бассейне, заполненном двухслойной жидкостью. В рамках линейной теории мелкой воды выполнены расчеты в одномерной постановке в предположении длинного и узкого водоема.

Среди современных работ отметим те, что опубликованы в российских источниках [5–10]. Так, в [5] приведено экспериментальное изучение динамики границы раздела двух несмешивающихся жидкостей различной плотности в горизонтальной цилиндрической полости при вращении. В [6] анализируется задача о малых движениях и нормальных колебаниях системы из двух тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, частично заполняющих неподвижный сосуд. В [7] рассмотрен эффект влияния верхнего слоя вязкой жидкости на колебания двухслойной жидкости в прямоугольном сосуде.

В [8] выведены частотные уравнения собственных колебаний двухслойной жидкости в прямом круговом цилиндре с мембранами, расположенными на свободной и внутренних поверхностях жидкости. В [9, 10] исследованы проблемы течений стратифицированных и вращающихся жидкостей и регуляризация баротропных гравитационных волн в двухслойной жидкости в прямоугольном сосуде. В работах [11–13] представлены малые колебания двух- и трехслойных жидкостей в полостях различной формы для случаев подвижного и неподвижного твердого тела. При проведении экспериментов с жидкостями, полностью заполняющими круглый цилиндрический бак, вблизи основного резонанса было замечено вращательное движение слоев жидкостей, подобное движению свободной поверхности однородной жидкости.

Особенности нелинейных колебаний однородной жидкости, частично заполняющей полость подвижного и неподвижного твердого тела, показаны в [14–16]. В случае полного заполнения полости одной однородной идеальной несжимаемой жидкостью фундаментальные результаты получены Н.Е. Жуковским [17]. В [18] исследуются нелинейные задачи динамики жидкости в резервуарах нецилиндрической формы.

Из примыкающих к рассматриваемой задаче работ, опубликованных за рубежом, отметим статьи по нелинейным колебаниям двухслойной жидкости [19–24], в которых проведено теоретическое и экспериментальное исследование плесканий двух жидкостей при наличии свободной поверхности и без свободной поверхности.

В [25, 26] были изучены нелинейные эффекты колебания двухслойной жидкости, полностью заполняющей ограниченный объем, и в результате построены области неустойчивости вынужденных колебаний двухслойной жидкости в цилиндрическом баке.

Цель настоящей статьи — получить и провести анализ нелинейных уравнений движения поверхности раздела двух жидкостей, заполняющих полностью осесимметричную полость твердого тела, совершающего угловые колебания вокруг неподвижной оси. Краткое содержание работы изложено в тезисах докладов 11-й Международной конференции «Волны и вихри в сложных средах».

Постановка задачи. Рассмотрена произвольная осесимметричная полость твердого тела, полностью заполненная двумя несмешивающимися жидкостями, которая совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси. Считаем, что форма области, занимаемой жидкостями в районе невозмущенной цилиндрической поверхности раздела, близка к цилиндрической. К этому классу полостей можно отнести все цилиндрические баки с коническими, эллиптическими, сферическими, плоскими и другими днищами. Движение твердого тела вокруг горизонтальной оси зададим с помощью угловой координаты θ, а вектор угловой скорости вращения $\vec{\omega}_2$ относительно оси представим в виде $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}\vec{e}_2$, $\theta(t) = \theta_0 \cos pt$, где $\vec{e}$ — единичный вектор соответствующей оси (OX, OY, OZ).

Введем систему координат $Oxyz$, в которой поле массовых сил, действующих на твердое тело с двумя жидкостями, имеет потенциальную функцию

$$U = -\vec{g}\,\vec{r}, \;\; \vec{R} = H\,\vec{e}_1 + \vec{r},$$

где H — расстояние от оси вращения до невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0; $\vec{g}$ — вектор ускорения свободного падения (рис. 1).

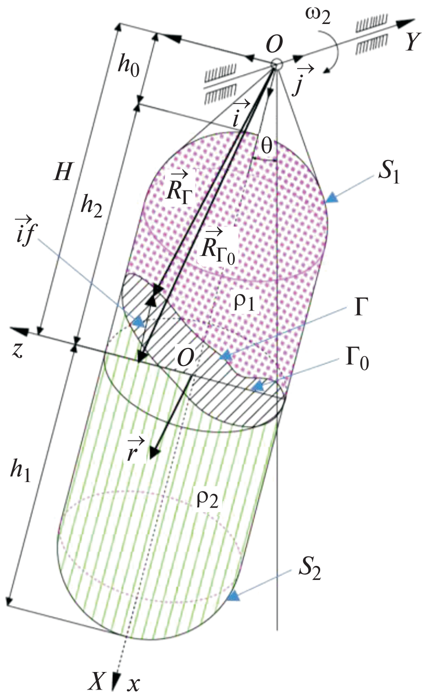

Рис. 1. Системы координат и основные обозначения для движущегося тела с двухслойной жидкостью:
$\vec{i}$, $\vec{j}$ — единичные векторы для осей OX и OY соответственно; f — функция (отклонение поверхности раздела); h_0, h_1, h_2 — расстояния вращения твердого тела

Рассматриваемую задачу удобно решать в цилиндрической системе координат x, r, η, связанной с декартовой x, y, z следующими формулами:

$$X = H + x, \quad y = r\cos\eta, \quad z = r\sin\eta.$$

Жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 предполагаются идеальными и несжимаемыми. Смоченные поверхности полости обозначены через $S^{(k)}(k = 1, 2)$, где k — количество жидкостей; возмущенная поверхность раздела жидкостей обозначена через Γ (см. рис. 1).

Движения каждой жидкости — потенциальные и удовлетворяющие уравнениям Лапласа:

$$\nabla^2\Phi^{(1)} = 0 \text{ в } \tau_1, \; \nabla^2\Phi^{(2)} = 0 \text{ в } \tau_2. \tag{1}$$

Потенциалы скоростей $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ должны также удовлетворять следующим граничным условиям:

а) условиям непротекания на смачиваемых поверхностях S_1, S_2

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{d\nu} = \vec{\omega}_2(\vec{R}\vec{\nu}) \text{ для } S_1, \; \frac{d\Phi^{(2)}}{d\nu} = \vec{\omega}_2(\vec{R}\vec{\nu}) \text{ для } S_2; \tag{2}$$

б) кинематическим условиям на поверхности раздела

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{d\nu} = \frac{d\Phi^{(2)}}{d\nu} = \vec{\omega}_2(\vec{R}\vec{\nu}) + \frac{1}{N}\frac{\partial f}{\partial t} \text{ при } x = 0 \text{ на } \Gamma;$$

в) динамическим условиям на возмущенной поверхности раздела для Γ

$$\left(\rho_2\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial t} - \rho_1\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\left[\rho_2(\nabla\Phi^{(2)})^2 - \rho_1(\nabla\Phi^{(1)})^2\right] - \\ - \left[\rho_2\nabla\Phi^{(2)}(\vec{\omega}_2\vec{R}) - \rho_1\nabla\Phi^{(1)}(\vec{\omega}_2\vec{R})\right] = (\rho_1 - \rho_2)\vec{g}\vec{r}. \tag{3}$$

Здесь $\vec{R}\big|_{\Gamma} = \vec{R}\big|_{\Gamma_0} + \vec{i}_x f$; $\vec{r}\big|_{\Gamma} = \vec{r}\big|_{\Gamma_0} + \vec{i}_x f$, $f = f(y, z)$ — отклонение поверхности раздела; $\vec{i}_x$ — единичный вектор для *x*; ∇ — градиент функции $f(y, z)$; ν — внешняя нормаль, соответствующая границе области, занимаемой жидкостями; $\vec{\nu}$ — вектор внешней нормали, соответствующей границе области, занимаемой жидкостями; $N = \sqrt{1 + (\nabla f)^2}$, $|\nabla f|$ — модуль градиента функции $f(y, z)$.

Представление решения. Представим потенциалы скоростей каждой жидкости в виде следующей суммы:

$$\Phi^{(k)}(x, r, \eta, t) = \omega_2 A^{(k)}(x, r, \eta) + \sum_{i=1}^{\infty}\dot{\alpha}_i(t)B_i^{(k)}(x, r, \eta), \quad k = 1, 2, \tag{4}$$

где $\Phi^{(k)}$ — потенциалы скоростей верхней и нижней жидкости; $A^{(k)}$ — гармонические скалярные функции; $B_i^{(k)}$ — функции координат верхней и нижней жидкости; $\dot{\alpha}_i$ — обобщенные координаты волновых движений жидкостей i-й гармоники на поверхности раздела.

Здесь и в дальнейшем суммирование по i проводится по натуральному ряду чисел от единицы до бесконечности. Верхние индексы параметров (1) и (2) относятся к верхней и нижней жидкости соответственно.

Решение поставленной нелинейной задачи в значительной степени опирается на разложение функций в ряд Тейлора и использование значений функций и ее нормальных производных на невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0. Для любой гладкой функции $F(x, r, \eta, t)$, определенной на отклоненной возмущенной поверхности раздела жидкостей Γ, имеем

$$F\big|_{\Gamma} = F\big|_{\Gamma_0} + \frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{\Gamma_0} f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\bigg|_{\Gamma_0} f^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\bigg|_{\Gamma_0} f^3 + \dots .$$

Представим функции $A^{(k)}$ и $B_i^{(k)}$ в виде разложения по параметрам α_i до второго порядка включительно [14, 15]:

$$A^{(k)} = A_0^{(k)} + \sum_i \alpha_i A_i^{(k)} + \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j A_{ij}^{(k)} + \dots ; \tag{5}$$

$$B_i^{(k)} = B_{i0}^{(k)} + \sum_j \alpha_j B_{ij}^{(k)} + \sum_j \sum_k \alpha_j \alpha_k B_{ijk}^{(k)} + \dots . \tag{6}$$

Здесь функции $A_0^{(k)}$, $A_i^{(k)}$, $A_{ij}^{(k)}$, $B_{i0}^{(k)}$, $B_{ij}^{(k)}$, $B_{ijk}^{(k)}$ зависят только от пространственных координат и не зависят от времени.

Подставляя разложения (5), (6) в (4) и приравнивая выражения при одинаковых степенях параметров $\alpha_i(t)$, после некоторых преобразований получим шесть линейных краевых задач:

$$\nabla^2 A_0^{(k)} = 0, \ \frac{dA_0^{(k)}}{d\nu}\bigg|_{S_k + \Gamma_0} = (\vec{R}\vec{\nu})\vec{j}; \tag{7}$$

$$\nabla^2 A_i^{(k)} = 0, \ \frac{dA_i^{(k)}}{d\nu}\bigg|_{S_k} = 0;$$

$$\left.\frac{dA_i^{(1)}}{d\nu}\right|_{\Gamma_0}=\left.\frac{dA_i^{(2)}}{d\nu}\right|_{\Gamma_0}=-[(R\nabla f_i)+\nabla'(f_i\nabla' A_0^{(k)})]\vec{j};\qquad(8)$$

$$\nabla^2 A_{ij}^{(k)}=0,\ \left.\frac{dA_{ij}^{(k)}}{d\nu}\right|_{S_k}=0,\ \left.\frac{dA_{ij}^{(1)}}{d\nu}\right|_{\Gamma_0}=\left.\frac{dA_{ij}^{(2)}}{d\nu}\right|_{\Gamma_0};\qquad(9)$$

$$\left.\frac{dA_{ij}^{(1)}}{d\nu}\right|_{\Gamma_0}=[-\frac{1}{2}\vec{i}_x\nabla(f_i\ f_j)+\frac{1}{2}\nabla'(f_j\nabla' A_i^{(k)}+f_i\ \nabla' A_j^{(k)})+$$
$$+\frac{1}{2}\nabla'(f_i\ f_j\nabla'\frac{\partial A_0^{(k)}}{\partial x})]\vec{j};\qquad(10)$$

$$\nabla^2 B_{i0}^{(k)}=0\ \text{в}\ \tau_k;\ \frac{dB_{i0}^{(k)}}{d\nu}=0\ \text{на}\ S_k;\ \frac{dB_{i0}^{(1)}}{d\nu}=\frac{dB_{i0}^{(2)}}{d\nu}=f_i\ \text{ на}\ \Gamma_0;\qquad(11)$$

$$\nabla^2 B_{ij}^{(k)}=0\ \text{в}\ \tau_k;\ \frac{dB_{ij}^{(k)}}{d\nu}=0\ \text{на}\ S_k;\qquad(12)$$

$$\frac{dB_{ij}^{(1)}}{d\nu}=\frac{dB_{ij}^{(2)}}{d\nu}=\nabla'(f_j\ \nabla' B_{i0}^{(1)})=\nabla'(f_j\ \nabla' B_{i0}^{(2)})\ \text{на}\ \Gamma_0;\qquad(13)$$

$$\nabla^2 B_{ijk}^{(k)}=0\ \text{в}\ \tau_k;\ \frac{dB_{ijk}^{(k)}}{d\nu}=0\ \text{на}\ S_k;\qquad(14)$$

$$\frac{dB_{ijk}^{(1)}}{d\nu}=\frac{dB_{ijk}^{(2)}}{d\nu}=\frac{1}{2}\nabla'(f_j\ \nabla' B_{ik}^{(k)}+f_k\ \nabla' B_{ij}^{(k)})+\frac{1}{2}\nabla'(f_j\ f_k\ \nabla'\frac{\partial B_{i0}^{(k)}}{\partial x_1})\ \text{на}\ \Gamma_0.\qquad(15)$$

Здесь ∇' — оператор, означающий неполный градиент по координатам y и z:

$$\nabla'=i_y\frac{\partial}{\partial y}+i_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Из краевых задач (9)–(17) можно сделать вывод о симметрии функций:

$$A_{ij}^{(k)}=A_{ji}^{(k)},\ B_{ijk}^{(k)}=B_{ikj}^{(k)}.$$

Уравнения нелинейных колебаний поверхности раздела жидкостей в осесимметричной полости. Для составления уравнений, определяющих изменение формы поверхности раздела жидкостей, используем условие равенства давлений на поверхности раздела жидкостей (3). Выражая все функции, входящие в это выражение, с помощью формулы Тейлора через их значения на невозмущенной поверхности раздела и умножая затем на f_i, после интегрирования по $d\Gamma_0$ получим

$$\left(\rho_2 \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} f_i \, d\Gamma_0 - \rho_1 \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} f_i \, d\Gamma_0 \right) +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\rho_2 \int\limits_{\Gamma_0} \left((\nabla\Phi^{(2)})^2 f_i \, d\Gamma_0 - \rho_1 \int\limits_{\Gamma_0} (\nabla\Phi^{(1)})^2 \right) f_i \, d\Gamma_0 \right] - \qquad (16)$$
$$-\left[\rho_2 \int\limits_{\Gamma_0} \nabla\Phi^{(2)}(\omega_2 R) f_i \, d\Gamma_0 - \rho_1 \int\limits_{\Gamma_0} \nabla\Phi^{(1)}(\omega_2 R) f_i \, d\Gamma_0 \right] =$$
$$= \int\limits_{\Gamma_0} (\rho_1 - \rho_2) \vec{g}\, \vec{r} f_i \, d\Gamma_0.$$

Подставляя потенциалы скоростей $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ в уравнение (16) и преобразуя некоторые интегралы, получим бесконечную систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений для обобщенных координат α_i:

$$\mu_i \frac{d^2\alpha_i}{dt^2} + gN_i^2\alpha_i + \lambda_{0i}\frac{d\omega_2}{dt} + \sum_j \sum_k \mu_{jik}\alpha_k \frac{d^2\alpha_j}{dt^2} + \sum_j \sum_k N_{jik}\frac{d\alpha_j}{dt}\frac{d\alpha_k}{dt} +$$
$$+ \sum_j \sum_k \sum_l \mu_{jikl}\alpha_k\alpha_l \frac{d^2\alpha_j}{dt^2} + \sum_j \sum_k \sum_l N_{jikl}\alpha_l \frac{d\alpha_j}{dt}\frac{d\alpha_k}{dt} +$$
$$+ \sum_j \lambda_{ij}\frac{d\omega_2}{dt}\alpha_j + \sum_j D_{ij}\omega_2 \frac{d\alpha_j}{dt} + \omega_2 F_i \omega_2 + \sum_j \sum_k \lambda_{ijk}\frac{d\omega_2}{dt}\alpha_j\alpha_k +$$
$$+ \sum_j \sum_k D_{ijk}\omega_2\alpha_k \frac{d\alpha_j}{dt} + \sum_j \omega_2 F_{ij}\omega_2\alpha_j = 0 \ \ (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

где l — индекс, обозначающий l-ю форму тона колебаний на поверхности раздела жидкости; $\mu_i = (\mu_i^{(2)} - \mu_i^{(1)})$; $N_i^2 = (N_i^{(2)2} - N_i^{(1)2})$; $\lambda_i = (\lambda_i^{(2)} - \lambda_i^{(1)})$; $\lambda_{0i} = (\lambda_{0i}^{(2)} - \lambda_{0i}^{(1)})$; $\mu_{jik} = (\mu_{jik}^{(2)} - \mu_{jik}^{(1)})$; $N_{jik} = (N_{jik}^{(2)} - N_{jik}^{(1)})$; $\mu_{jikl} = (\mu_{jikl}^{(2)} - \mu_{jikl}^{(1)})$; $N_{jikl} = (N_{jikl}^{(2)} - N_{jikl}^{(1)})$; $\lambda_{ij} = (\lambda_{ij}^{(2)} - \lambda_{ij}^{(1)})$; $D_{ij} = (D_{ij}^{(2)} - D_{ij}^{(1)})$; $F_i = (F_i^{(2)} - F_i^{(1)})$;

$$\lambda_{ijk} = (\lambda_{ijk}^{(2)} - \lambda_{ijk}^{(1)});\ D_{ijk} = (D_{ijk}^{(2)} - D_{ijk}^{(1)});\ F_{ij} = (F_{ij}^{(2)} - F_{ij}^{(1)});$$

$$\mu_i^{(k)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} B_i^{(k)} f_i \, d\Gamma_0;\ N_i^{(k)2} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} (f_i)^2 d\Gamma_0;$$

$$\mu_{jik}^{(k)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} \left(B_{ik}^{(k)} + f_k \frac{\partial B_{i0}^{(k)}}{\partial x} \right) f_j \, d\Gamma_0;$$

$$\mu_{jikl}^{(k)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} \left[B_{j0}^{(k)} \frac{\partial B_{ikl}^{(k)}}{\partial x} + \left(\frac{\partial B_{ik}^{(k)}}{\partial x} + \frac{1}{2} f_k \frac{\partial^2 B_{i0}^{(k)}}{\partial x^2} \right) f_i \, f_j \right] d\Gamma_0;$$

$$N_{jik}^{(k)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} \left(B_{jk}^{(k)} + \frac{1}{2} \nabla B_{j0}^{(k)} \nabla B_{k0}^{(k)} \right) f_i^{(k)} d\Gamma_0;$$

$$N_{jikl}^{(k)} = \rho_k \left\{ \int\limits_{\Gamma_0} \begin{matrix} [2B_{ikl}^{(k)} + f_l \dfrac{\partial B_{jk}^{(k)}}{\partial x} + \nabla B_{jk}^{(k)} \nabla B_{kl}^{(k)} + \nabla B_{k0}^{(k)} \nabla B_{jl}^{(k)} + \\ + \dfrac{1}{2} f_l \dfrac{\partial}{\partial x} (\nabla B_{j0}^{(k)} \nabla B_{k0}^{(k)}) f_i \;] d\Gamma_0 \end{matrix} \right\};$$

$$\lambda_{0i}^{(k)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} A_0^{(k)} f_i d\Gamma_0; \;\; \lambda_i^{(k)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} R f_i d\Gamma_0;$$

$$\lambda_{ij}^{(k)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} \left(A_j^{(k)} + f_j \frac{dA_0^{(k)}}{dx} \right) f_i d\Gamma_0;$$

$$\lambda_{ijk}^{(k)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} \left(A_{jk}^{(k)} + f_k \frac{dA_j^{(k)}}{dx} + \frac{1}{2} f_j f_k \frac{\partial^2 A_0^{(k)}}{\partial x^2} \right) f_i d\Gamma_0;$$

$$D_{ij}^{(kn)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} \left[A_j^{(kn)} + \nabla A_0^{(kn)} \nabla B_{j0}^{(k)} - \left(R \nabla B_{j0}^{(kn)} \right) \right] f_i d\Gamma_0;$$

$$D_{ijk}^{(kn)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} \begin{matrix} \{2A_{jk}^{(kn)} + f_k \dfrac{\partial A_j^{(kn)}}{\partial x} + \nabla A_k^{(kn)} \nabla B_{j0}^{(k)} + \nabla A_0^{(kn)} \nabla B_{jk}^{(k)} - \\ - (R \nabla B_{jk}^{(kn)}) - f_k \dfrac{\partial}{\partial x} [\Delta A_0^{(kn)} \nabla B_{j0}^{(k)} - (R \nabla B_{j0}^{(kn)})]\} f_i \, d\Gamma_0, \end{matrix}$$

$$F_i^{(knm)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} \left[\frac{1}{2} \nabla A_0^{(kn)} \nabla A_0^{(km)} - \left(R \nabla A_0^{(km)} \right)^{(n)} \right] f_i d\Gamma_0;$$

$$F_{ij}^{(knm)} = \rho_k \int\limits_{\Gamma_0} \begin{matrix} \{\nabla A_0^{(kn)} \nabla A_j^{(km)} - (R \nabla A_j^{(km)})^{(n)} + \\ + f_i \dfrac{\partial}{\partial x} [\dfrac{1}{2} \nabla A_0^{(kn)} \nabla A_0^{(km)} - (R \nabla A_0^{(km)})^{(n)}]\} f_i d\Gamma_0. \end{matrix}$$

Здесь n, m — индексы чисел корней колебаний.

Рассмотрим далее решение краевых задач.

Решение краевых задач и определение гидродинамических коэффициентов уравнений движения для цилиндрической полости с плоскими днищами. Выделим две основные несимметричные гармоники, возбуждаемые в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и определяемые обобщенными координатами α_i и формами f_i $(i=1,2)$. Введем обозначения $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\beta$, $f_1=f_\alpha=\varphi(r)\sin\eta$, $f_2=f_\beta=\varphi(r)\cos\eta$, где f_α, f_β — формы основного тона колебаний поверхности раздела жидкостей (рис. 2); φ — функция, которой принадлежит радиус r [15].

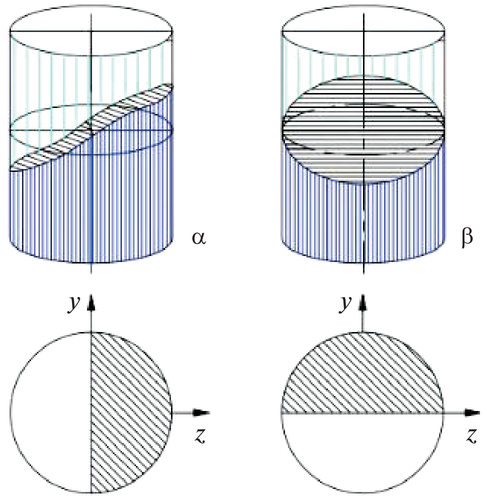

Рис. 2. Формы поверхностей раздела при возбуждении основных гармоник α,β

Искомые функции $A_0^{(k)}, B_{i0}^{(k)}$ в относительной центральной оси Oy можно представить в виде

$$A_0^{(k)}=-F^{(k)}(x,r)\sin\eta,$$

$$B_{\alpha 0}^{(k)}=\psi^{(k)}(x,r)\sin\eta;\ B_{\beta 0}^{(k)}=\psi^{(k)}(x,r)\cos\eta.$$

Здесь φ — функция, которой принадлежат координаты x и радиус r.

Краевую задачу (7)–(10) в цилиндрической системе координат можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F^{(k)}}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}F^{(k)}=0 \text{ в } \tau_k;$$

$$\left.\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=h_1}=\left.\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\right|_{x=-h_2}=-r;\;\left.\frac{\partial F^{(1)}}{\partial r}\right|_{r=r_0}=H+x,$$

$$\left.\frac{\partial F^{(2)}}{\partial r}\right|_{r=r_0}=H-x.$$

Неизвестную функцию $F^{(k)}(x,r)$ можно выразить как

$$F^{(k)}(x,r)=(H\pm x)r-\sum_n 2d_{nm}Z_{nm}^{(k)}(x)Y_{nm}(r);$$

$$Y_{nm}(r)=\frac{J_m(k_{nm}r)}{J_m(k_{nm}r_0)};$$

$$Z_{nm}^{(1)}(x)=\frac{\operatorname{sh}\left(k_{nm}(x-(h_1/2))\right)}{k_{nm}\operatorname{ch}(k_{nm}(h_1/2))};\;Z_{nm}^{(2)}(x)=\frac{\operatorname{sh}\left(k_{nm}(x+(h_2/2))\right)}{k_{nm}\operatorname{ch}(k_{nm}(h_2/2))};$$

$$Z_{nm}^{(1)\prime}(h_1)=Z_{nm}^{(1)\prime}(0)=Z_{nm}^{(2)\prime}(0)=Z_{nm}^{(2)\prime}(-h_2)=1.$$

Здесь Y_{nm} — функция Бесселя первого рода; $k_{nm}=\xi_{nm}/r_0$, (ξ_{nm} — n-й корень производной от функции Бесселя m-го порядка); индексы n, m принимают значения 1, 1; 1, 0; 1, 2.

Краевая задача (11)–(15) в цилиндрической системе координат примет вид

$$\frac{\partial^2\psi_{nm}^{(k)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_{nm}^{(k)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_{nm}^{(k)}}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}\psi_{nm}^{(k)}=0 \text{ в } \tau_k;$$

$$\left.\frac{\partial\psi_{nm}^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\psi_{nm}^{(2)}}{\partial x}\right|_{x=0};\;\left.\frac{\partial\psi_{nm}^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=h_1}=0;\;\left.\frac{\partial\psi_{nm}^{(k)}}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0;\;\left.\frac{\partial\psi_{nm}^{(2)}}{\partial x}\right|_{x=-h_2}=0.$$

Представим ее решение в виде произведения

$$\psi_{nm}^{(k)}(x,r)=X_{nm}^{(k)}(x)Y_{nm}(r),$$

где введенные функции в силу краевых условий и условия нормировки должны удовлетворять следующим равенствам:

$$X_{nm}^{(1)\prime}(x=h_1)=0;\;X_{nm}^{(1)\prime}(x=0)=1,\;X_{nm}^{(2)\prime}(x=0)=1;\;X_{nm}^{(2)\prime}(x=-h_2)=0,$$

$$Y'_{nm}(r=r_0)=0;\;Y_{nm}(r=r_0)=1.$$

Функция $Y_{nm}(r)$ имеет одинаковый вид для верхней и для нижней жидкости.

Гармоники свободных линейных колебаний жидкостей определяются функциями

$$X_{nm}^{(1)}(x) = -\frac{\mathrm{ch}(k_{nm}(x-h_1))}{k_{nm}\mathrm{sh}(k_{nm}h_1)};\ X_{nm}^{(2)}(x) = \frac{\mathrm{ch}(k_{nm}(x+h_2))}{k_{nm}\mathrm{sh}(k_{nm}h_2)}.$$

Постоянные d_{nm} представляют собой коэффициенты разложения в ряде Фурье координаты r по функциям Бесселя:

$$d_{nm} = \frac{E_{nm}}{\delta_{nm}};\ E_{nm} = \int_0^{r_0} r^2 Y_{nm} dr = \frac{r_0^3}{\xi_{nm}^2};\ \delta_{nm} = \int_0^{r_0} r Y_{nm}^2 dr = \frac{r_0^2(\xi_{nm}^2 - 1)}{2\xi_{nm}^2}.$$

Здесь ξ_{nm} — корень цилиндрической формы сосуда, значения которой зависят от n и m.

Имея решения краевых задач нетрудно вычислить гидродинамические коэффициенты линейных уравнений движения тела с жидкостями, которые соответствуют случаю малых перемещений частиц тела и жидкостей при $n = m = 1$:

$$\lambda^{(k)} = \rho_k \pi \int_0^{r_0} r^2 Y_{11} dr = \rho_k r_0^3 \frac{\pi}{\xi_{11}^2};\ Z_{11}^{(1)}(h_1) = \frac{\tan h(k_{11}h_1/2)}{k_{11}} = \frac{1}{\varepsilon_{11}^{(1)}};$$

$$Z_{11}^{(2)}(0) = \frac{\mathrm{tg}\, h(k_{11}h_2/2)}{k_{11}} = \frac{1}{\varepsilon_{11}^{(2)}};\ Z_{11}^{(1)}(0) = -\frac{\mathrm{tg}\, h(k_{11}h_1/2)}{k_{11}} = -\frac{1}{\varepsilon_{11}^{(1)}};$$

$$Z_{11}^{(2)}(-h_2) = \frac{\mathrm{tg}\, h(k_{11}h_2/2)}{k_{11}} = -\frac{1}{\varepsilon_{11}^{(2)}};$$

$$N_{11}^{(1)2} = \rho_1\delta_{11};\ N_{11}^{(2)2} = \rho_2\delta_{11};\ \mu_0{}^{(1)} = \rho_1\frac{\delta_{11}}{\ell_{11}^{(1)}};\ \delta_{11} = \pi\frac{r_0{}^2(\xi_{11}^2 - 1)}{2\xi_{11}^2};$$

$$\mu_0{}^{(2)} = \rho_2\frac{\delta_{11}}{\ell_{11}^{(2)}};\ \delta_{11} = \pi\frac{r_0{}^2(\xi_{11}^2 - 1)}{2\xi_{11}^2};$$

$$\ell_{11}^{(1)} = -k_{11}\,\mathrm{th}\left(k_{11}h_1\right);\ \ell_{11}^{(2)} = k_{11}\,\mathrm{th}\left(k_{11}h_2\right);$$

$$\lambda_0^{(1)} = \rho_1 r_0^3 \frac{\pi}{\xi_{11}^2}\left[\left(h_0 + h_2\right) + \frac{2r_0}{\xi_{11}}\mathrm{th}\left(k_{11}h_1/2\right)\right];$$

$$\lambda_0^{(2)} = \rho_2 r_0^3 \frac{\pi}{\xi_{11}^2}\left[\left(h_0 + h_2\right) - \frac{2r_0}{\xi_{11}} \operatorname{th}\left(k_{11} h_2 / 2\right)\right].$$

Уравнения для обобщенных координат α и β, характеризующих нелинейные движения поверхности раздела жидкостей в круговой цилиндрической полости, запишутся в следующем виде:

$$\begin{gathered}\mu\ddot{\alpha} + gN^2\alpha - \lambda_0\dot{\omega}_2 + \mu_1\left(\alpha^2\ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2\alpha + \alpha\beta\ddot{\beta} + \alpha\dot{\beta}^2\right) + \\ + \mu_2\left(\beta^2\ddot{\alpha} + 2\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - \alpha\beta\ddot{\beta} - 2\alpha\dot{\beta}^2\right) + \left(\lambda_1\alpha^2 - \lambda_2\beta^2\right)\dot{\omega}_2 - \\ - \left(\lambda_1 + 3\lambda_2\right)\omega_2\beta\dot{\beta} - J_1\omega_2^2\alpha = 0;\end{gathered} \qquad (17)$$

$$\begin{gathered}\mu\ddot{\beta} + gN^2\beta + \lambda\dot{\omega}_2 + \mu_1\left(\beta^2\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2\beta + \alpha\beta\ddot{\alpha} + \beta\dot{\beta}^2\right) + \\ + \mu_2\left(\alpha^2\ddot{\beta} + 2\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta} - \alpha\beta\ddot{\alpha} - 2\beta\dot{\alpha}^2\right) + \left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\alpha\beta\dot{\omega}_2 + \\ + \left(\lambda_1 + 3\lambda_2\right)\omega_2\beta\alpha - J_2\omega_2^2\beta = 0.\end{gathered} \qquad (18)$$

Как следует из уравнений (17) и (18), нелинейные движения поверхности раздела жидкостей описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Вычислим параметры, определяющие нелинейность волновых движений поверхности раздела жидкостей, связывающих вращательное движение тела и деформацию объемов жидкостей:

$$\begin{gathered}\mu_1^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4\ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \{[6Y_{11}'^2 + \left(\frac{2}{r^2} - 3k_{11}^2\right) Y_{11}^2] Y_{11} + \sum_n \frac{4c_{n0}^{(k)}}{\ell_{n0}^{(k)}}\left(Y_{n0}' Y_{11}' - k_{n0}^2 Y_{n0} Y_{11}\right) + \\ + \sum_n \frac{2c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}}[Y_{n2}' Y_{11}' + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2\right) Y_{n2} Y_{11}]\} Y_{11} r dr;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mu_2^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4\ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \{[2Y_{11}'^2 - \left(\frac{2}{r^2} + k_{11}^2\right) Y_{11}^2] Y_{11} + \sum_n \frac{2c_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}}\,[Y_{n2}' Y_{11}' + \\ + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2\right) Y_{n2} Y_{11}]\} Y_{11} r dr;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\lambda_1^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4\ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \left\{\sum_n \frac{d_{n1}\left(\varepsilon_{n1}^{(k)} + \ell_{11}^{(k)}\right)}{\varepsilon_{n1}^{(k)}}\left[6Y_{11}'^2 + \left(\frac{2}{r^2} - 3k_{11}^2\right) Y_{11}^2\right] Y_{11} + \right. \\ \left. + \sum_n \frac{4d_{n0}^{(k)}}{\ell_{n0}^{(k)}}\left(Y_{n0}' Y_{11}' - k_{n0}^2 Y_{n0} Y_{11}\right) - \sum_n \frac{2d_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}}\left[Y_{n2}' Y_{11}' + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2\right) Y_{n2} Y_{11}\right]\right\} Y_{11} r dr;\end{gathered}$$

$$\lambda_2^{(k)} = \rho_k \frac{\pi}{4\ell_{11}^{(k)}} \int_0^{r_0} \left\{ \sum_n \frac{d_{n1}\left(\varepsilon_{n1}^{(k)} + \ell_{11}^{(k)}\right)}{\varepsilon_{n1}^{(k)}} \left[-2Y_{11}'^2 + \left(\frac{2}{r^2} + k_{11}^2 \right) Y_{11}^2 \right] Y_{11} + \right.$$

$$\left. + \sum_n \frac{2d_{n2}^{(k)}}{\ell_{n2}^{(k)}} \left[Y_{n2}' Y_{11}' + \left(\frac{2}{r^2} - k_{n2}^2 \right) Y_{n2} Y_{11} \right] \right\} Y_{11} r dr.$$

Численные расчеты гидродинамических коэффициентов (линейных μ, λ_0, λ и нелинейных μ_1, μ_2, λ_1, λ_2) в зависимости от толщины слоя h_1 и плотности ρ_1 верхней жидкости приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Гидродинамические коэффициенты в зависимости от толщины слоя h_1 верхней жидкости

h_1, м	Линейные гидродинамические коэффициенты		Нелинейные гидродинамические коэффициенты			
	μ	λ_0	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2
0	∞	0	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞
0,2	1,456	–0,122	4,977	–3,228	–0,879	1,543
0,4	1,082	–0,208	1,104	–1,452	–0,863	1,555
0,6	0,977	–0,283	0,679	–1,087	–0,869	1,590
0,8	0,936	–0,346	0,569	–0,961	–0,873	1,612
1,0	0,919	–0,396	0,529	–0,908	–0,875	1,623
1,2	0,91	–0,434	0,513	–0,885	–0,876	1,628
1,4	0,906	–0,463	0,505	–0,874	–0,876	1,631
1,6	0,905	–0,484	0,502	–0,869	–0,876	1,632
1,8	0,904	–0,499	0,5	–0,866	–0,876	1,633
2,0	0,903	–0,509	0,499	–0,865	–0,876	1,633

Таблица 2

Гидродинамические коэффициенты в зависимости от плотности ρ_1 верхней жидкости

ρ_1, $\times 10^3$ кг/м^3	Линейные гидродинамические коэффициенты			Нелинейные гидродинамические коэффициенты			
	μ	λ_0	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2	μ
0	0,602	0,896	0,927	0,333	–0,257	–1,048	2,033
0,1	0,662	0,615	0,834	0,366	–0,378	–1,014	1,953
0,2	0,723	0,334	0,741	0,400	–0,500	–0,979	1,873
0,3	0,783	0,053	0,649	0,433	–0,622	–0,945	1,793
0,4	0,843	–0,228	0,556	0,466	–0,743	–0,91	1,713

Окончание табл. 2

$\rho_1, \times 10^3$ кг/м^3	Линейные гидродинамические коэффициенты			Нелинейные гидродинамические коэффициенты			
	μ	λ_0	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2	μ
0,5	0,903	–0,509	0,463	0,499	–0,865	–0,876	1,633
0,6	0,964	–0,790	0,371	0,533	–0,987	–0,841	1,553
0,7	1,024	–1,071	0,278	0,566	–1,108	–0,807	1,473
0,8	1,084	–1,352	0,185	0,599	–1,230	–0,772	1,393
0,9	1,144	–1,633	0,093	0,633	–1,352	–0,738	1,313

В табл. 1 и 2 приведены расчетные данные при следующих известных значениях параметров:

$$h_0 = 0,\ h_2 = 2\text{ м},\ r_0 = 1\text{ м},\ \rho_2 = 1\cdot 10^3,\ \rho_1 = 0{,}5\cdot 10^3 \text{ (см. табл. 1.)};$$

$$h_0 = 0,\ h_1 = 2\text{ м},\ h_2 = 2\text{ м},\ r_0 = 1\text{ м},\ \rho_2 = 1\cdot 10^3 \text{ (см. табл. 2.)}.$$

Заключение. В настоящей работе получены нелинейные уравнения движения поверхности раздела двух жидкостей, заполняющих полностью осесимметричную полость твердого тела, совершающего угловые колебания вокруг неподвижной оси. Для полости с круговым поперечным сечением представлены решения краевых задач и определены коэффициенты нелинейных уравнений. Приведенные численные результаты гидродинамических коэффициентов дифференциальных уравнений нелинейных колебаний двух жидкостей могут быть использованы в будущих проектах космической техники, в области динамики морских транспортных систем криогенных жидкостей, в системах хранения сжиженного природного газа, в динамике химических реакторов, при взрывных и сейсмических воздействиях.

Благодарность. Авторы выражают благодарность канд. физ.-мат. наук А.Н. Темнову за помощь в формулировке постановки задачи и плодотворные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. Москва, Наука, 1977, 815 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. VI: Гидродинамика*. Москва, Наука, 1986, 735 с.

[3] Селезов И.Т., Авраменко О.В., Нарадовый В.В. Особенности распространения слабонелинейных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью. *Динамические системы*, 2011, т. 1 (29), № 1, с. 53–68.

[4] Букреев В.И., Стурова И.В., Чеботников А.В. Сейшевые колебания в бассейне, заполненном двухслойной жидкостью. *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2014, № 3, с. 110–118.

[5] Козлов Н.В., Шувалова Д.А. Экспериментальное измерение инерционных колебаний границы раздела несмешивающихся жидкостей в горизонталь-

ной цилиндрической полости при вращении. *Современные проблемы науки и образования*, 2014, № 6.
URL: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=16669 (дата обращения 03.03.2021).

[6] Газиев Э.Л. Моделирование собственных колебаний системы «идеальная капиллярная жидкость — баротропный газ» в цилиндрическом контейнере. *Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference* (*CIMC-2003*). Симферополь, КНЦ НАНУ, 2013, т. 3, с. 51–52.

[7] Kalinichenko V.A. Effect of an upper layer of viscous liquid on breaking surface gravity waves. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1301, paper no. 012017.

[8] Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения. *Инженерный журнал: наука и инновация*, 2013, № 12 (24). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1147

[9] Чашечкин Ю.Д., Байдулов В.Г., Бардаков Р.Н. и др. *Моделирование течений стратифицированных и вращающихся жидкостей.* Москва, Наука, 2010, 349 с.

[10] Kalinichenko V.A. Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid. *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, no. 6, pp. 761–773.

[11] Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде, совершающем плоское движение. *Наука и образование, МГТУ им. Н. Э. Баумана*, 2016, № 10, с. 85–101.
DOI: 10.7463/1016.0847158

[12] Win Ko Ko, Temnov A.N. Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2018, vol. 468, paper no. 012031.

[13] Win Ko Ko, Temnov A.N. Research of amplitude-frequency characteristics of nonlinear oscillations of the interface of two-layered liquid. *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*, 2020, vol. 14, no. 1, pp. 7–13.

[14] Луковский И.А. *Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкостью*. Киев, Наукова думка, 1990, 296 с.

[15] Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. *Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью*. Москва, Машиностроение, 1977, 208 с.

[16] Микишев. Г.Н, Рабинович Б.И. *Динамика тврдого тела с полостями, частично заполненными жидкость*. Москва, Машиностроение, 1968, 532 с.

[17] Жуковский Н.Е. *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью*. Москва, Гостехиздат, 1948, 143 с.

[18] Лимарченко О.С. *Нелинейные задачи динамики жидкости в резервуарах нецилиндрической формы*. Киев, Адверта, 2017, 130 с.

[19] Liska R. Nonhydrostatic two-layer models of incompressible flow. *Computers & Mathematics with Applications*, 1995, vol. 29, no. 9, pp. 25–37.

[20] Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, no. 396, pp. 1–36.

[21] Barannyk L.L., Papageorgiou D.T. Fully nonlinear gravity-capillary solitary waves in a two-fluid system of finite depth. *Journal of Engineering Mathematics*, 2002, vol. 42, pp. 321–339.

[22] Rocca M. La, Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface. *Physics of Fluids*, 2005, no. 17, paper no. 062101.

[23] Rocca M. La, Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. Interfacial gravity waves in a two-fluid system. *Fluid Dynamics Research*, 2002, no. 30, pp. 31–66.

[24] Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C. Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, 2018, vol. 4, pp. 243–257.

[25] Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в ограниченном объеме. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 2021, № 69, с. 97–113. DOI: 10.17223/19988621/69/8

[26] Win Ko Ko, Temnov A.N. Effects of oscillations of a two-layer liquid in an axisymmetric vessel. *AIP Conference Proceedings*, 2021, vol. 2318, paper no. 020004. https://doi.org/10.1063/5.0035840

Статья поступила в редакцию 19.04.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Вин Ко Ко, Ян Наинг У. Нелинейные колебания поверхности раздела двух жидкостей при угловых колебаниях бака. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 5. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-5-2076

Вин Ко Ко — стажер-исследователь кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: win.c.latt@gmail.com

Ян Наинг У — аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yannaingoo.64528@gmail.com

Nonlinear oscillations of the interface of two liquids at the angular oscillations of the tank

© Win Ko Ko, Yan Naing Oo

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The development of rocket and space technology in recent years has led to the widespread use of various cryogenic liquids. To increase the shelf life of cryo-products on board spacecraft or in tankers of future space filling stations, it is proposed to create a certain stock of cryo-product, which is simultaneously in a two-phase or three-phase state and forms layers of liquid. The paper considers the problem in a nonlinear formulation about the oscillations of the interface of a two-layer liquid in an arbitrary axisymmetric cavity of a solid body performing angular oscillations around a horizontal axis. For the considered class of cavities with an arbitrary bottom and a lid, the nonlinear problem is reduced to the sequential solution of linear boundary value problems. Nonlinear differential equations describing the oscillations of the interface between two liquids in the vicinity of the main resonance are obtained. In the case of a circular cylindrical cavity with flat bottoms, solutions of boundary value problems in the form of cylindrical functions were used to calculate linear and nonlinear hydrodynamic coefficients depending on the depth and density of the upper liquid.

Keywords: *mechanical system, cylindrical cavity, hydrodynamic coefficients, basic resonance, perturbed surface, rotational motion*

REFERENCES

[1] Sretensky L.N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [Theory of wave motions of liquid]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 815 p.

[2] Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. VI: Gidrodinamika* [Theoretical physics.Vol. VI: Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 735 p.

[3] Selezov I.T., Avramenko O.V., Naradovy V.V. *Dinamicheskie sistemy — Dynamical Systems*, 2011, vol. 1 (29), no. 1, pp. 53–68.

[4] Bukreev V.I., Sturova I.V., Chebotnikov A.V. *Izv. RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza — Fluid Dynamics,* 2014, no. 3, pp. 110–118.

[5] Kozlov N.V., Shuvalova D.A. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya — Modern Problems of Science and Education. Surgery*, 2014, no. 6. Available at: http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=16669 (accessed March 3, 2021).

[6] Gaziev E.L. Modelirovanie sobstvennykh kolebaniy sistemy «idealnaya kapillyarnaia zhidkost-barotropny gaz» v tsilindricheskom konteynere [Modeling of natural oscillations of the system “ideal capillary liquid-barotropic gas” in a cylindrical container]. *Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference (CIMC-2003).* Simferopol, KNTs NANU Publ., 2013, vol. 3, pp. 51–52.

[7] Kalinichenko V.A. Effect of an upper layer of viscous liquid on breaking surface gravity waves. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, 1301, paper no. 012017.

[8] Pozhalostin A.A., Goncharov D.A. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, iss. 12 (24). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1147

[9] Chashechkin Yu.D., Baydulov V.G., Bardakov R.N., Vasilev A.Yu., Gorodtsov V.A., Kistovich A.V., Stepanova E.V., Chaplina T.O. *Modelirovanie techeniy stratifitsirovannykh i vrashchayuschikhsya zhidkostey* [Modeling of flows of stratified and rotating fluids]. Moscow, Nauka Publ., 2010, 349 p. ISBN: 978-5-02-037459-1

[10] Kalinichenko V.A. Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid. *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, no. 6, pp. 761–773.

[11] Win Ko Ko, Temnov A.N. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana — Science & Education, Bauman Moscow State Technical University*, 2016, no. 10, pp. 85–101. DOI: 10.7463/1016.0847158

[12] Win Ko Ko, Temnov A.N. Experimental and theoretical studies of oscillations of stratified fluid. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering,* 2018, no. 468, paper no. 012031.

[13] Win Ko Ko, Temnov A.N. Research of amplitude-frequency characteristics of nonlinear oscillations of the interface of two-layered liquid. *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*, 2020, vol. 14, no. 1, pp. 7–13.

[14] Lukovskiy I.A. *Vvedenie v nelineynuyu dinamiku tverdogo tela s polostyami, soderzhaschimi zhidkost* [Introduction to nonlinear dynamics of a rigid body with cavities containing a liquid]. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1990, 296 p. ISBN: 5-12-001308-2

[15] Narimanov G.S., Dokuchaev L.V., Lukovskiy I.A. *Nelineynaya dinamika letatelnogo apparata s zhidkostyu* [Nonlinear dynamics of an aircraft with a liquid]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 208 p.

[16] Mikishev G.N, Rabinovich B.I. *Dinamika tvrdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost* [Dynamics of a rigid body with cavities partially filled with liquid]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968, 532 p.

[17] Zhukovskiy N.E. *O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoy kapelnoy zhidkostyu* [On the motion of a rigid body with cavities filled with a homogeneous dropping liquid]. Moscow, Gostekhizdat. Publ., 1948, 143 p.

[18] Limarchenko O.S. *Nelineynye zadachi dinamiki zhidkosti v rezervuarakh netsilindricheskoy formy* [Nonlinear problems of fluid dynamics in noncylindrical reservoirs]. Kiev, Adverta Publ., 2017, 130 p.

[19] Liska R. Nonhydrostatic two-layer models of incompressible flow. *Computer Math. Applic.*, 1995, vol. 29, no. 9, pp. 25–37.

[20] Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. *J. Fluid Mech.*, 1999, no. 396, pp. 1–36.

[21] Barannyk L.L., Papageorgiou D.T. Fully nonlinear gravity-capillary solitary waves in a two-fluid system of finite depth. *Journal of Engineering Mathematics*, 2002, vol. 42, pp. 321–339.

[22] Rocca M. La, Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface. *Physics of Fluid*, 2005, no. 17, paper no. 062101.

[23] Rocca M. La, Sciortino G., Adduce C., Boniforti M.A. Interfacial gravity waves in a two-fluid system. *Fluid Dynamics Research*, 2002, no. 30, pp. 31–66.

[24] Camassa R., Hurley M.W., McLaughlin R.M., Passaggia P.-Y., Thomson C.F.C. Experimental investigation of nonlinear internal waves in deep water with miscible fluids. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, 2018, vol. 4, pp. 243–257.

[25] Win Ko Ko, Temnov A.N. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2021, no. 69. DOI: 10.17223/19988621/69/8

[26] Win Ko Ko, Temnov A.N. Effects of oscillations of a two-layer liquid in an axisymmetric vessel. *AIP Conference Proceedings,* 2021, no. 2318, paper no. 020004. https://doi.org/10.1063/5.0035840

Win Ko Ko, Research Assistant, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: win.c.latt@gmail.com

Yan Naing Oo, post-graduate student, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yannaingoo.64528@gmail.com