

Е. О. Киктенко, С. М. Коротаев,  
А. К. Федоров, С. О. Юрченко

## ПРИЧИННЫЙ АНАЛИЗ ЗАПУТАННЫХ СОСТОЯНИЙ В ТОМОГРАФИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

*В основе квантового причинного анализа, являющегося эффективным методом исследования асимметричных запутанных состояний, лежит использование энтропий фон Неймана. В данной работе рассмотрено построение причинного анализа, который базируется на томографических энтропиях. Квантовые томограммы представляют собой неотрицательные функции распределения вероятностей, получаемые в ходе эксперимента. В качестве примера использования томографического квантового причинного анализа исследованы чистое максимально запутанное и смешанное асимметричное состояния. Получена связь между исходным направлением причинности и направлением квантово-томографической причинности.*

**E-mail:** akfedorov@student.bmstu.ru, st.yurchenko@bmstu.ru,  
korotaev@igemi.troitsk.ru, evgeniy.kiktenko@gmail.com

**Ключевые слова:** причинный анализ, квантовая томография, запутанные состояния.

Принцип причинности — один из основополагающих физических принципов — играет особую роль в изучении квантовых запутанных состояний. Исследование запутанности имеет большой практический интерес в связи с такими направлениями развития области квантовой информации, как квантовая криптография и квантовые компьютеры. С момента своего появления в знаменитой статье [1] феномен запутанности привлекает внимание кажущимся нарушением основного принципа теории относительности. В самом деле, квантовые корреляции осуществляются через пространственно-подобный интервал, что выполнимо именно благодаря отсутствию локальных переносчиков взаимодействия. Ситуация кажется достаточно странной, так как подобные корреляции означают возможность обращения времени. На практике данный вопрос удается обойти стороной, так как для передачи известной информации квантовый канал должен быть дополнен классическим. Таким образом, квантовые корреляции считаются беспричинными, однако это противоречит факту передачи квантовой (неизвестной) информации по каналу, имеющему вход и выход.

В работах [2–5] показано, как развивается аппарат квантового причинного анализа, основанный на использовании энтропий фон Неймана, которые вычисляют для матриц плотности двусоставной системы и составляющих ее подсистем. Такой подход дает возможность

формального определения понятий «причина» и «следствие», а также вычисления меры причинной связи. Квантовый причинный анализ оказался наиболее полезен при исследовании устойчивости запутанности квантовых состояний под воздействием окружающей среды.

Вместе с тем в последнее время особое внимание уделяется томографическому (вероятностному) представлению квантовой механики [6–14]. Квантовая томография позволяет использовать для описания состояния неотрицательные функции распределения вероятностей — квантовые томограммы, поскольку можно проводить их экспериментальные измерения [13, 14]. С точки зрения причинного анализа особенно интересна возможность вычисления энтропий квантовых систем на основе квантовых томограмм.

В общем случае получение томограммы квантового состояния, которое непосредственно связано с его измерением, приводит к изменению исходного вида матрицы плотности (что объясняется коллапсом вектора состояния в ходе измерения). Данная работа посвящена исследованию связи между исходной причинностью, вычисляемой из энтропий фон Неймана исходного состояния, и томографической причинностью, вычисляемой по результатам эксперимента.

**Квантовый причинный анализ.** Основная идея причинного анализа заключается в формализации интуитивного представления о наличии асимметрии между причиной и следствием, очевидного без измерения запаздывания (которое в классическом случае является необходимым условием причинной связи).

Причинный анализ строится на понятии функций независимости, записанных для некоторой двусоставной системы  $AB$ :

$$i_{A|B} = \frac{S_{A|B}}{S_A}; \quad i_{B|A} = \frac{S_{B|A}}{S_B}, \quad (1)$$

где  $S_{A|B} = S_{AB} - S_B$ ,  $S_{B|A} = S_{AB} - S_A$  — условные энтропии;  $S_{AB}$ ,  $S_A$  и  $S_B$  — безусловные энтропии фон Неймана для всей системы и ее подсистем соответственно (вычисляются по матрицам плотности  $\rho_X$  согласно формуле  $S_X = -\text{Tr}[\rho_X \log_2 \rho_X]$ ). Для квантовых состояний  $i_{X|Y} \in [-1, 1]$  в отличие от классических систем, для которых  $i_{X|Y} \in [0, 1]$  (используется шенноновское определение энтропии). Предельный случай  $i_{A|B} = i_{B|A} = -1$  соответствует чистым запутанным состояниям:  $i_{X|Y} = 0$  означает максимальную классическую зависимость  $X$  от  $Y$  ( $X$  является однозначной функцией от  $Y$ );  $i_{X|Y} = 1$  означает независимость  $X$  от  $Y$ . В общем случае  $i_{A|B} \neq i_{B|A}$ , что соответствует наличию причинной связи.

В качестве меры причинной связи используют величину, названную ходом времени, которую вводят как скорость необратимого потока

информации [2]:

$$c_2 = k \frac{(1 - i_{A|B})(1 - i_{B|A})}{i_{A|B} - i_{B|A}}, \quad (2)$$

где  $k = \Delta r / \delta t$ ;  $\Delta r$  — характерное расстояние между подсистемами;  $\delta t$  — время наикратчайшей эволюции [15], вычисляемое из гамильтониана взаимодействия подсистем. Вслед за предыдущими работами, посвященными квантовому причинному анализу, будем вычислять лишь безразмерную часть  $c_2$ , положив  $k = 1$  в формуле (2).

На основании величины  $c_2$  вводится формальное определение причинности: причиной  $A$  и следствием  $B$  называются переменные, для которых соблюдается неравенство  $c_2 > 0$ . При отсутствии причинной связи выполняется равенство  $i_{A|B} = i_{B|A}$  и  $c_2 \rightarrow \pm\infty$ . Таким образом, чем меньше абсолютное значение  $|c_2|$ , тем сильнее причинная связь. Отрицательные значения  $c_2$  соответствуют направлению причинности от  $B$  к  $A$ .

**Квантовая томография.** Сегодня квантовая томография представляет собой активно развивающееся направление в квантовой механике. Томограммы могут быть измерены в квантово-оптических экспериментах [13, 14]. Кроме того, томографическая формулировка эквивалентна другим известным в настоящее время формулировкам квантовой механики. Томограмма может быть как функцией непрерывных переменных (симплектическая томограмма), так и функцией дискретных переменных (спиновая томограмма, томограмма счета фотонов).

Томографическое представление квантовой механики использует линейное каноническое преобразование фазового пространства как действие симплектической группы  $SP(2, \mathbb{R})$ :

$$\begin{pmatrix} \epsilon \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \eta \\ \acute{\eta} & \acute{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $q, p$  и  $\epsilon, \sigma$  — обобщенные координаты и импульсы;  $\mu, \acute{\mu}, \eta, \acute{\eta}$  — произвольные действительные постоянные с условием  $\mu\acute{\mu} - \eta\acute{\eta} = 1$ .

Частным случаем преобразования (3) является действие матриц вращения группы  $SO(2, \mathbb{R})$ :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  — угол поворота.

В таком случае преобразование (4) представляет собой поворот фазового пространства на угол  $\theta$ , а в более общем случае (3) — это поворот фазового пространства с взаимным масштабированием по осям  $p$  и  $q$  фазового пространства.

Симплектическую томограмму  $\mathcal{T}(\epsilon, \mu, \eta)$  наблюдаемой  $\epsilon$ , которая является линейной комбинацией квадратурных компонент,

$$\widehat{\epsilon} = \mu \widehat{q} + \eta \widehat{p}$$

определяют через волновую функцию следующим образом:

$$\mathcal{T}(\epsilon, \mu, \eta) = |\widehat{\mathcal{F}}_{\mu, \eta}[\psi](\epsilon)|^2,$$

где  $\widehat{\mathcal{F}}_{\mu, \eta}$  — линейный унитарный оператор. Таким оператором является интегральный оператор дробного преобразования Фурье

$$\mathcal{T}(\epsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{2\pi|\eta|} \left| \int \psi(q) \exp\left[\frac{i\mu}{2\eta}q^2 - \frac{i\epsilon}{\eta}q\right] dq \right|^2. \quad (5)$$

В случае использования преобразования (4) томограмма называется оптической и с помощью волновой функции определяется следующим образом:

$$\mathcal{T}(\epsilon, \theta) = \frac{1}{2\pi|\sin\theta|} \left| \int \psi(q) \exp\left[\frac{i\operatorname{ctg}\theta}{2}q^2 - \frac{i\epsilon}{\sin\theta}q\right] dq \right|^2.$$

Исходя из определения (5), томограмма  $\mathcal{T}(\epsilon, \mu, \eta)$  представляет собой положительную, нормированную и однородную с порядком  $-1$  функцию:

$$\mathcal{T}(\epsilon, \mu, \eta) \geq 0; \quad \int \mathcal{T}(\epsilon, \mu, \eta) d\epsilon = 1; \quad \mathcal{T}(\epsilon, \mu, \eta) = |\lambda| \mathcal{T}(\lambda\epsilon, \lambda\mu, \lambda\eta),$$

где  $\lambda$  — произвольная постоянная.

Свойство однородности позволяет записать для томограммы уравнение Эйлера. Поэтому несмотря на то, что томограмма является функцией трех переменных, благодаря нормировке ее можно представить через функцию двух переменных (подобные функции называются томограммами Френеля).

Методы квантовой томографии находят активное применение для анализа квантовых систем, моделирования [9, 10] и в физике конденсированного состояния [8].

Рассмотрим дискретную спиновую томографию, предложенную в работе [11]. Пусть матрица плотности  $\rho^0$  частицы со спином  $1/2$  характеризует проекцию спина на определенную ось  $Oz$ . Для произвольно выбранной оси  $Oz'$ , направленной вдоль единичного вектора с координатами  $\vec{n} = \{\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta\}$ , матрица плотности примет вид

$$\rho(\vec{n}) = U(\vec{n})\rho^0U^\dagger(\vec{n}), \quad (6)$$

где  $U(\vec{n}) = U(\theta, \varphi)$  — унитарная матрица поворота,

$$U(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \exp(i\varphi/2) & \sin(\theta/2) \exp(i\varphi/2) \\ -\sin(\theta/2) \exp(-i\varphi/2) & \cos(\theta/2) \exp(-i\varphi/2) \end{pmatrix}.$$

Томограмма состояния кубита (6) задается формулой

$$\mathcal{T}(m, \vec{n}) = \begin{pmatrix} \mathcal{T}(+1/2, \vec{n}) \\ \mathcal{T}(-1/2, \vec{n}) \end{pmatrix} = \{\rho(\vec{n})\}_{mm} \quad (7)$$

с учетом того, что  $m = 1$  и  $m = 2$  согласуется проекциями спина  $|+1/2, \vec{n}\rangle$  и  $|-1/2, \vec{n}\rangle$  соответственно. Таким образом, имеем дело с диагональными элементами матрицы плотности, которые определяют вероятности получения того или иного результата измерения проекции спина на произвольную ось, задаваемую вектором  $\vec{n}$ .

Условие неотрицательности и нормировки для томограммы  $\mathcal{T}(m, U)$  можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{T}(m, \vec{n}) \geq 0, \quad \sum_m \mathcal{T}(m, \vec{n}) = 1.$$

Исследуя распределение вероятностей дискретной случайной величины, можем ввести томографическую энтропию по аналогии с определением энтропии Шеннона

$$S^t(\vec{n}) = - \sum_m \mathcal{T}(m, \vec{n}) \log_2 \mathcal{T}(m, \vec{n}). \quad (8)$$

В дальнейшем индексом  $t$  будем обозначать величины, полученные именно с помощью томограмм.

Наконец, для двусоставной системы с исходной матрицей плотности  $\rho_{AB}^0$  томограмма будет иметь вид

$$\mathcal{T}(m_1, m_2, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \{U(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \rho_{AB}^0 U^\dagger(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\}_{2m_1+m_2, 2m_1+m_2}, \quad (9)$$

где матрица  $U(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  определяется тензорным произведением двух унитарных матриц поворота

$$U(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = U(\vec{n}_1) \otimes U(\vec{n}_2).$$

Другими словами, измерения над каждой подсистемой проводят в независимых базисах, характеризуемых своими единичными векторами  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ .

**Квантово-томографический причинный анализ.** Использование аппарата квантового причинного анализа на языке томографии означает замену энтропий фон Неймана  $S_{AB}$ ,  $S_A$  и  $S_B$  в формуле (1) для функций независимости на томографические энтропии  $S_{AB}^t(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ ,  $S_A^t(\vec{n}_1)$  и  $S_B^t(\vec{n}_2)$  соответственно. После подстановки новых функций независимости в формулу для хода времени (2) получаем томографическую причинность  $c_2^t(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  (напомним, что  $k = 1$ ).

Рассмотрим ключевые отличия обычного квантового причинного анализа от квантово-томографического. Во-первых, для каждого конкретного состояния причинность  $c_2^t(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  уже является функцией от четырех параметров (каждый из векторов  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  определяется своими углами  $\theta_1, \varphi_1$  и  $\theta_2, \varphi_2$ ). Таким образом, причинность в системе будет

изменяться в зависимости от того, как смотреть на данное состояние. Такое явление объясняется необратимыми изменениями в квантовой системе при ее измерении. Связь между исходной причинностью  $c_2$  и квантово-томографической причинностью  $c_2^t(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  является основным объектом исследований данной работы.

Во-вторых, томографические энтропии как результат эксперимента удовлетворяют классическому энтропийному неравенству  $S_{AB}^t(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \geq \max(S_A^t(\vec{n}_1), S_B^t(\vec{n}_2))$ . С точки зрения причинного анализа, это означает неотрицательность функций независимости. Отметим, что несмотря на кажущуюся «классичность» распределения томографических вероятностей, томограммы могут быть использованы для доказательства неравенства типа Белла [12]. В то же время доказано, что у запутанных состояний могут быть классически положительные функции независимости [2].

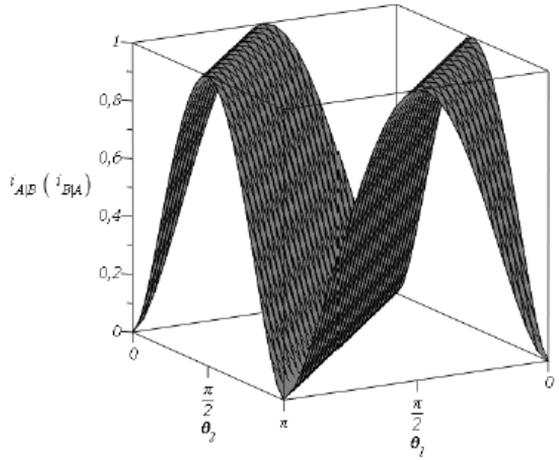
Наконец, стоит отметить связь между томографической энтропией и энтропией фон Неймана. Из определения томограммы двусоставной системы (9) следует, что томографическая энтропия будет совпадать с энтропией фон Неймана для повернутой матрицы плотности  $\rho_{AB}(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = U(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\rho_{AB}^0U^\dagger(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ , подвергшейся процессу дефазирования [16, 17]  $(\rho_{AB}^{\text{deph}})_{ij} = (\rho_{AB})_{ij} \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Таким образом, квантово-томографическая причинность — это причинность в двусоставной системе после дефазирования каждой из подсистем в своей системе отсчета.

**Анализ двухкубитных запутанных состояний.** Рассмотрим применение томографического причинного анализа к чистому максимально запутанному состоянию  $|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB})$ , где  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  означают положительные и отрицательные проекции спина на выбранную ось. Матрицы плотности данного состояния имеют вид

$$\rho_{AB}^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_A^0 = \rho_B^0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В результате имеем  $S_{AB} = 0$ ,  $S_A = S_B = 1$ , причинность отсутствует:  $i_{A|B} = i_{B|A} = -1$ ,  $|c_2| \rightarrow \infty$ . Данное состояние интересно тем, что матрицы плотности подсистем, будучи пропорциональными единичной матрице, инвариантны к операции поворота  $U(\vec{n}_1)\rho_A^0U^\dagger(\vec{n}_1) = U(\vec{n}_2)\rho_B^0U^\dagger(\vec{n}_2) = \rho_A^0 = \rho_B^0$ . Получаем  $S_A^t(\vec{n}_1) = S_B^t(\vec{n}_2) = 1$  и  $i_{A|B}^t = i_{B|A}^t$ . На рис. 1 показано влияние углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  при фиксированных величинах  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  на поведение функций независимости. Как видим, условием для максимального сохранения корреляций в системе после измерения ( $i_{A|B}^t = i_{B|A}^t = 0$ )

**Рис. 1.** Томографическая функция независимости  $i_{A|B}^t(i_{B|A}^t)$  при фиксированных углах  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  для чистого максимально запутанного состояния (10)



является использование одинакового базиса при измерениях обеих частиц ( $\theta_1 = \theta_2$ ). Вследствие равенства томографических функций независимости квантово-томографическая причинность отсутствует:  $|c_2^t(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| \rightarrow \infty$ .

Таким образом, можем сделать вывод о том, что для чистого максимально запутанного состояния результаты квантово-томографического причинного анализа полностью согласуются с результатами обычного квантового причинного анализа.

Перейдем к анализу смешанных асимметричных систем. Вслед за [18] рассмотрим следующее «квантово-классическое» состояние:

$$\rho_{AB}^0 = q|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (1 - q)|\psi_2\rangle\langle\psi_2|,$$

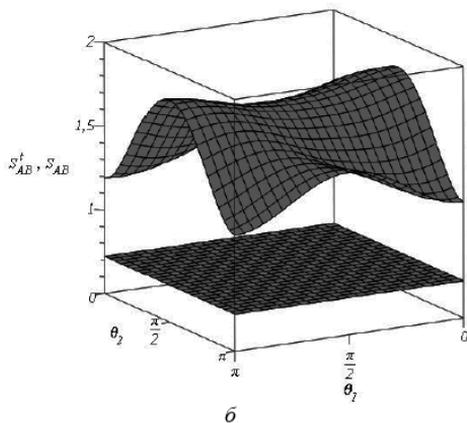
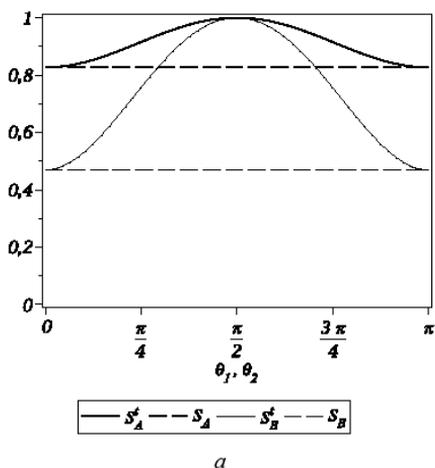
где  $|\psi_1\rangle = a|00\rangle_{AB} + \sqrt{1 - a^2}|11\rangle_{AB}$  и  $|\psi_2\rangle = a|10\rangle_{AB} + \sqrt{1 - a^2}|01\rangle_{AB}$  — чистые запутанные состояния. Согласно [18], зафиксируем значения параметров  $q = 0,2$ ,  $a^2 = 0,1$ , в результате получим следующие матрицы плотности:

$$\rho_{AB}^0 = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 36 & 18 & 0 \\ 0 & 18 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad \rho_A^0 = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 37 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\rho_B^0 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Энтропии фон Неймана принимают такие значения:  $S_{AB} \simeq 0,722$ ,  $S_A \simeq 0,827$ ,  $S_B \simeq 0,469$  (отметим, что именно вследствие выполнения неравенства  $S_B < S_{AB} < S_A$  данное состояние называется квантово-классическим). Причинность  $c_2 \simeq 1,604$ , таким образом, подсистема  $A$  является причиной, а  $B$  — следствием.

После применения операции поворота получается, что энтропии подсистем зависят только от углов  $\theta_{1(2)}$ :  $S_A^t = S_A^t(\theta_1)$ ,  $S_B^t = S_B^t(\theta_2)$ , в



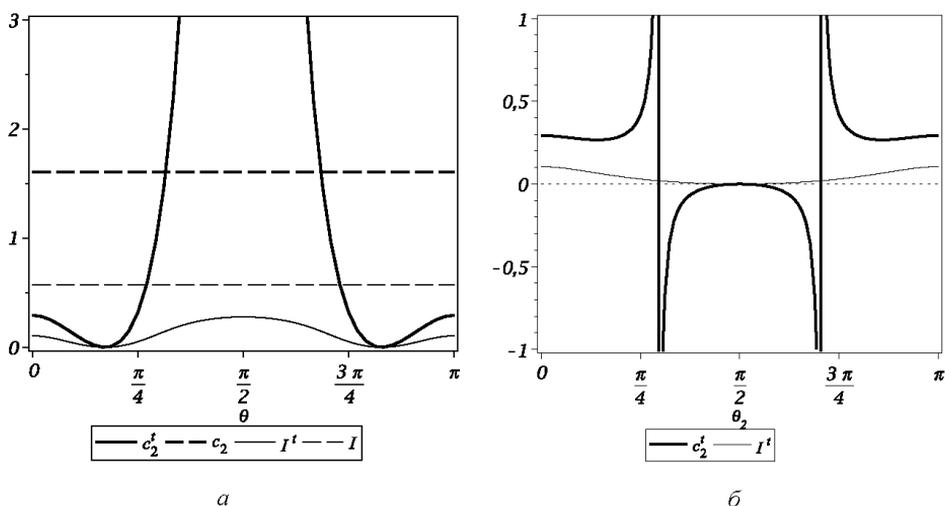
**Рис. 2.** Томографические и фон неймановские энтропии подсистем (а) и всей системы (б) для асимметричного квантово-классического состояния (11) при фиксированных углах  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

то время, как энтропия всей системы обусловлена всеми четырьмя параметрами:  $S_{AB}^t = S_{AB}^t(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = S_{AB}^t(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)$ . На рис. 2, а представлены графики энтропий  $S_A^t(\theta_1)$  и  $S_B^t(\theta_2)$  в сравнении с исходными энтропиями  $S_A$  и  $S_B$  фон Неймана. Как видим, при  $\theta_{1(2)} = 0$  значения томографических энтропий совпадают с энтропиями фон Неймана, а при  $\theta_{1(2)} = \pi$  достигают своего максимального значения, равного единице.

На рис. 2, б представлен трехмерный график функции  $S_{AB}^t(\theta_1, \varphi_1 = 0, \theta_2, \varphi_2 = 0)$  в сравнении с  $S_{AB}$ . Как видим, значение томографической энтропии для всей системы всегда выше соответствующего значения энтропии фон Неймана.

При анализе причинностей наряду с вычислением  $c_2^t(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)$  будем использовать величину информации  $I = S_A + S_B - S_{AB} \simeq 0,574$  и томографической информации  $I^t = S_A^t + S_B^t - S_{AB}^t = I^t(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)$  как меры общей корреляции между подсистемами.

Прежде всего рассмотрим величину причинности в случае, когда измерения подсистем проводят под одними и теми же углами, например, при  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  и  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Результаты вычислений представлены на рис. 3, а. В зависимости от угла  $\theta$  причинность  $c_2^t$  может принимать любые положительные значения от 0 до  $+\infty$ . Таким образом, в результате эксперимента можем получить произвольное значение величины причинной связи, однако ее направление всегда будет совпадать с исходным. Томографическая информация, как и следовало ожидать, всегда меньше фон неймановской информации ( $I^t < I$ ) и тем меньше, чем сильнее причинная связь. Максимум информации



**Рис. 3.** Обычная и квантово-томографическая причинности ( $c_2$  и  $c_2^t$ ) в сопоставлении с обычной и томографической информацией ( $I$  и  $I^t$ ) для асимметричного «квантово-классического» состояния (11) при различных вариантах измерения подсистем:

$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \theta_1 = \theta_2 = \theta$  (а);  $\varphi_1 = \varphi_2 = \theta_1 = 0$  (б)

достигают при таком способе измерения, когда томографическая причинность отсутствует ( $\theta = \pi/2$ ).

Рассмотрим случай, когда подсистемы измеряют под разными углами, например, при фиксированных  $\theta_1 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$  и изменяющемся  $\theta_2$  (рис. 3, б). В данном случае имеет место обращение направления причинной связи. Таким образом, направление квантово-томографической причинности может не совпадать с исходной причинностью. С практической точки зрения наиболее важно, что ослабление причинной связи, связанное с последующим изменением ее направления, сопровождается уменьшением информации. Исходному направлению причинной связи при изменении ее направления соответствует более высокий уровень корреляций между подсистемами.

Исследована возможность построения квантового причинного анализа, основываясь на томографических энтропиях вместо энтропий фон Неймана. Такой подход интересен тем, что используются экспериментально получаемые данные, а не теоретические матрицы плотности. На примере смешанного асимметричного состояния выявлено, что в случае измерения обеих спиновых подсистем под одними и теми же углами получаемое направление причинности всегда совпадает с исходным несмотря на то, что величина причинной связи по результатам эксперимента может быть любой. Информация между подсистемами при таком способе измерения максимальна, величина причинной связи стремится к нулю (что соответствует  $|c_2^t| \rightarrow \infty$ ).

При измерении подсистем под различными углами можно получить направление причинности, не совпадающее с исходным. Однако подобный случай легко выявить путем сравнения совместного поведения причинности и информации: в случае обращения направления причинности информация всегда убывает, исходному направлению причинности соответствует более высокий уровень информации. Данное явление полностью соответствует интуитивному представлению о деструктивном влиянии измерения, изменяющего исходное направление асимметрии, на общий уровень корреляции между подсистемами.

Таким образом, использование квантово-томографического причинного анализа представляется крайне полезным при исследовании исходной асимметрии квантовых состояний с неизвестными матрицами плотности. Появляющиеся в результате измерений искажения асимметрии поддаются учету.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 11-02-00858, 12-05-00001, 12-08-31104 мол\_а, 12-08-33112 мол\_а вед). Авторы благодарны Александру Львовскому (University of Calgary) за полезные советы при обсуждении работы.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? // Phys. Rev. – 1935. – Vol. 47. – P. 777–780.
2. К о р о т а е в С. М., К и к т е н к о Е. О. Причинный анализ квантовых запутанных состояний. Ч. 1 // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2010. – Сер. 38. – № 3. – С. 35–55.
3. К о р о т а е в С. М., К и к т е н к о Е. О. Причинный анализ квантовых запутанных состояний. Ч. 2 // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2010. – Сер. 39. – № 3. – С. 29–47.
4. К о р о т а е в С. М., К и к т е н к о Е. О. Причинность в квантовых запутанных состояниях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2011. – Сер. 42. – № 3. – С. 90–107.
5. К и к т е н к о Е. О., К о р о т а е в С. М. Causal analysis of asymmetric entangled states under decoherence // Phys. Lett. A. – 2012. – Vol. 6–7. – P. 820–823.
6. Ф е д о р о в А. К., Ю р ч е н к о С. О. Симплектические томограммы в представлении фейнмановских интегралов по траекториям // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2012. – Сер. 45. – № 2. – С. 29–37.
7. Ф е д о р о в А. К., Ю р ч е н к о С. О. Томографические методы в теории вторичного квантования // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. – 2011. – Сер. 13. – С. 62–67.
8. Ф е д о р о в А. К. Томограммы конденсата Бозе–Эйнштейна и уравнение Гросса–Питаевского // Студ. науч. вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2012. – Сер. XII–IV. – С. 168–173.
9. A r k h i r o v A. S., L o z o v i k Y u. E. Quantum tomography as a new approach to simulating quantum processes // J. Exp. Theor. Phys. – 2004. – Vol. 98. – P. 231–239.
10. A r k h i r o v A. S., L o z o v i k Y u. E. New Method of quantum dynamics simulation based on the quantum tomography // Phys. Lett. A. – 2003. – Vol. 319. – P. 217–224.

11. Манько В. И., Манько О. В., Сафонов С. С. Описание спинов с помощью функций распределения вероятностей // ТМФ. – 1998. – Сер. 115. – № 2. – С. 185–198.
12. Томография спиновых состояний, критерий перепутанности и неравенства Белла / В.А. Андреев, В.И. Манько, О.В. Манько, Е.В. Щукин // ТМФ. – 2006. – Сер. 146. – № 1. – С. 172–185.
13. Beck M., Smithy D. T., Raymer M. G. Experimental Determination of Quantum-phase Distributions Using Optical Homodyne Tomography // Phys. Rev. A. – 1993. – Vol. 48. – P. 890–893.
14. Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: application to squeezed states and the vacuum / D.T. Smithy, M. Beck, M.G. Raymer, A. Faridani // Phys. Rev. Lett. – 1993. – Vol. 70. – P. 1244–1247.
15. Quantum brachistochrone evolution of systems of two identical particles: The role of entanglement / A. Borrás, A.R. Plastino, M. Casas, A. Plastino // Phys. Rev. A. – 2008. – Vol. 78. – P. 052104.
16. Robustness of multiparty nonlocality to local decoherence / S.S. Jang, Y.W. Cheong, J. Kim, H.-W. Lee // Phys. Rev. A. – 2006. – Vol. 74. – P. 062112.
17. Song W., Chen Z.-B. Invariant information and complementarity in high-dimensional states // Phys. Rev. A. – 2007. – Vol. 76. – P. 014307.
18. Dynamics of quantum entanglement / K. Zyczkowski, P. Horodecki, M. Horodecki, R. Horodecki // Phys. Rev. A. – 2002. – Vol. 65. – P. 012101.

Статья поступила в редакцию 05.07.2012