

Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», Москва, 2–4 декабря 2020 г. Материалы конференции. Часть 2. П. М. Шкапов, М.И. Дьяченко, составители.  
*Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 4. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-4-2068>

**Международная научная конференция  
«ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ  
ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ»**

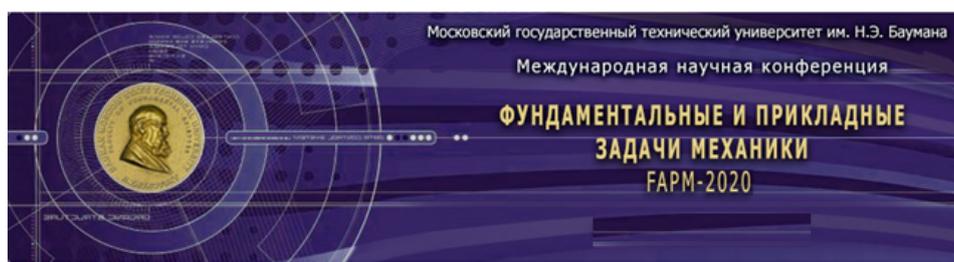
Москва, 2–4 декабря 2020 г.

**МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ**

*В двух частях*

*Часть 2*

*Составители:* П.М. Шкапов, М.И. Дьяченко



**International Scientific Conference  
FUNDAMENTAL AND APPLIED PROBLEMS  
OF MECHANICS (FARM-2020)**

Moscow, 2–4 December, 2020

**THE MATERIALS OF THE CONFERENCE**

*In two parts*

*Part 2*

*Compiled by* P.M. Shkapov, M.I. Dyachenko



Москва  
ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МГТУ им. Н.Э. Баумана  
2021

**Международные научные конференции «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ» (Fundamental and applied problems of mechanics — FAPM)** с 2012 г. регулярно проводятся в МГТУ им. Н.Э. Баумана на базе Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» и кафедры «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского с участием ученых из научных учреждений РАН, университетов РФ, известных зарубежных ученых-механиков.

Основной целью конференции является представление новых результатов исследований по различным направлениям механики, проводимых в российских и зарубежных научных и образовательных учреждениях.

Очередная конференция проходила в год 190-летия со дня основания МГТУ им. Н.Э. Баумана — одного из ведущих технических университетов России, давшего начало многим высшим техническим учебным заведениям, научным и научно-педагогическим школам в области техники и технологий.

В 2020 г. открытие конференции и первое пленарное заседание прошли в очно-дистанционном режиме в конференц-зале Молодежного космического научного центра МГТУ им. Н.Э. Баумана с трансляцией для участников через платформу Zoom. Заседания секций проводились только в дистанционном формате.

Рабочие языки конференции: русский и английский.

Материалы к докладам конференции публикуются в двух частях в авторской редакции. В часть 1 вошли пленарные доклады и материалы секций 1 и 2. В части 2 представлены материалы секций 3–5.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие сведения о конференции

Пленарные доклады

### **Секция 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

1.1. Математическое моделирование механических систем, управление движением

1.2. Математическое моделирование физических процессов

1.3. Математическое моделирование и анализ

### **Секция 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА**

2.1. Теоретическая механика

2.2. Небесная механика

### **Секция 3. АЭРО- И ГИДРОМЕХАНИКА**

### **Секция 4. ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

### **Секция 5. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ И ИСТОРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ**

## Организаторы конференции

Министерство науки и высшего образования РФ  
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной  
механике  
Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН  
Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора  
Н.Е. Жуковского  
Научно-методический совет по теоретической механике при Минобрнауки РФ

## Международный организационный комитет

Проф. А.А. Александров (председатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва,  
Россия  
Проф. В.О. Гладышев (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва,  
Россия  
Проф. П.М. Шкапов (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва,  
Россия  
Astronom C. Bizouard (Co-Chairman), Observatoire de Paris, France  
Prof. K. Matsumoto, RISE Project, National Astronomical Observatory of Japan,  
Japan  
Проф. В.С. Асланов, Самарский университет, г. Самара, Россия  
Проф. Б.С. Бардин, МАИ (НИУ), Москва, Россия  
Проф. В.Д. Бертяев, ТулГУ, г. Тула, Россия  
Проф. С.А. Берестова, УрФУ, г. Екатеринбург, Россия  
Проф. И.Г. Благовещенский, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. Ю.И. Димитриенко, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. В.В. Ивашкин, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
Проф. В.Т. Калугин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. В.А. Калининченко, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия  
Проф. Г.Н. Кувыркин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Д-р физ.-мат. наук М.Х. Магомедов, ООО НПФ «Сауно», г. Махачкала,  
Дагестан, Россия  
Проф. В.И. Майорова, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. С.Н. Саяпин, ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия  
Проф. Н.И. Сидняев, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. Ю.П. Улыбышев, РКК «Энергия», г. Королёв, Россия  
Проф. Ю.Д. Чашечкин, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия  
Проф. В.Н. Чубариков, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
Проф. А.О. Шимановский, БГУТ, г. Гомель, Республика Беларусь  
  
Ученый секретарь — М.И. Дьяченко, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва,  
Россия

### **Академический программный комитет**

- Проф. В.О. Гладышев (председатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. В.Н. Зимин (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. П.М. Шапов (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Prof. H. Hanada (Co-Chairman), director of RISE Project, NAO of Japan, Japan
- Astronom C. Bizouard (Co-Chairman), Observatoire de Paris, France
- Prof. Shuanggen Jin, Chinese Academy of Sciences, China
- Академик РАН Р.Ф. Ганиев, ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
- Академик РАН И.Г. Горячева, РНКТПИМ, Москва, Россия
- Академик РАН В.Ф. Журавлёв, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
- Академик РАН С.Т. Суржиков, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
- Академик РАН Д.В. Трещёв, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- Академик РАН С.Л. Чернышев, ЦАГИ, г. Жуковский, Россия
- Чл.-корр. РАН А.П. Крищенко, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Чл.-корр. РАН И.И. Липатов, ЦАГИ, г. Жуковский, Россия
- Чл.-корр. РАН А.Н. Морозов, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Чл.-корр. РАН О.С. Нарайкин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Чл.-корр. РАН В.А. Соловьёв, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. М.М. Благовещенская, МГУПП, Москва, Россия
- Проф. В.С. Зарубин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. Т.А. Исмаилов, ДГТУ, г. Махачкала, Дагестан, Россия
- Проф. В.В. Сазонов, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
- Проф. В.А. Самсонов, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- Проф. А.М. Цирлин, ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский, Россия
- Проф. В.И. Щербаков, ВКА им. А.Ф. Можайского, С.-Петербург, Россия
- Ученый секретарь — канд. физ.-мат. наук, доц. Е.В. Мелкумова, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

### **СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ**

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА
3. АЭРО- и ГИДРОМЕХАНИКА
4. ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
5. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ И ИСТОРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ

#### **Сайт конференции:**

<http://fn.bmstu.ru/coferences-sec-fs/item/1011-fapm-2020>

e-mail: [fapm2020@mail.ru](mailto:fapm2020@mail.ru)

## СЕКЦИЯ 3. АЭРО- И ГИДРОМЕХАНИКА

*Руководители:* д-р техн. наук, проф. В.Т. Калугин,  
д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Калиниченко

### Аналитический подход к исследованию задач динамики экзотермических газовых сред

© А.Н. Богданов

НИИ механики МГУ, Москва, Россия  
E-mail: bogdanov@imec.msu.ru

**Аннотация.** Предложен асимптотический метод аналитического исследования течений газовой среды с тепловыделением. Приводятся результаты применения метода в ряде задач газодинамики внутренних и внешних течений.

**Ключевые слова:** газовая динамика, аэромеханика, экзотермические среды, асимптотические методы.

Аналитическое исследование стационарных неоднородных экзотермических течений можно проводить, используя асимптотические разложения по малому параметру, выбрав за него малое отклонение текущего значения числа Маха от единицы. Пригодность метода разложений по введенному таким образом малому параметру для широкого круга задач подсказывается анализом явления, известного как «тепловой кризис» (запирание потока) [1]. В одномерном дозвуковом течении газа во избежание теплового кризиса изменение безразмерной скорости потока теоретически должно находиться в пределах  $0,58 \leq u \leq 1$  [2].

В ряде задач аэродинамики этот метод позволяет получить качественно принципиально новые результаты по сравнению с классической газовой динамикой обычных сред. Организуя тепловыделение в окружающей летательный аппарат среде, можно изменять его аэродинамические характеристики [3]. Расчеты показывают [4], что клонение движения аппарата от прямолинейного в экзотермической среде приведет к его опрокидыванию под действием поперечной силы, отсутствующей в обычных условиях. Тело, обладающее минимальным волновым сопротивлением, в экзотермической среде имеет качественно иную форму, нежели в обычной газовой динамике [5] или в среде, релаксирующей с поглощением энергии [6], что объясняется

инным характером развития вызываемых движением тела возмущений в обтекающем аппаратом потоке.

Предложенный метод пригоден для исследования задач теории стационарных неоднородных течений иной природы.

*Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ (тема АААА-А19-119012990113-1) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00793).*

## **Литература**

1. Черный Г.Г. *Газовая динамика*. Москва, Наука, 1988.
2. Богданов А.Н., Куликовский В.А. Стационарные сверхзвуковые течения колебательно-возбужденного газа около тонких тел. *ПМТФ*, 1993, № 1.
3. Георгиевский П.Ю., Левин В.А. Управление обтеканием различных тел с помощью локализованного подвода энергии в сверхзвуковой набегающий поток. *Изв. РАН. МЖГ*, 2003, № 5.
4. Богданов А.Н., Куликовский В.А. Обтекание тонкого тела вращения под малым углом атаки стационарным сверхзвуковым потоком колебательно-возбужденного газа. *ПМТФ*, 1993, № 3.
5. Миеле А., ред. *Теория оптимальных аэродинамических форм*. Москва, Мир, 1969.
6. Ткаленко Р.А. О тонких телах вращения наименьшего волнового сопротивления в неравновесном сверхзвуковом потоке. *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1969, № 6.

## **Внутренние гравитационные волны в стратифицированных средах с течениями**

© В.В. Булатов\*, Ю.В. Владимиров

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

\*E-mail: internalwave@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрена задача о поле внутренних гравитационных волн в стратифицированной среде конечной глубины для модельных распределений фоновых сдвиговых течений. Для аналитического решения задачи использовано постоянное распределение частоты плавучести и различные линейные зависимости фонового сдвигового течения от глубины. Получены дисперсионные зависимости, которые выражаются через модифицированную функцию Бесселя мнимого индекса. При выполнении условия устойчивости Майлса и больших числах Ричардсона для построения аналитических решений были использованы дебаевские асимптотики модифицированной функции Бесселя мнимого индекса. Изучены свойства дисперсионного уравнения и исследованы основные аналитические характеристики дисперсионных кривых в зависимости от параметров фоновых сдви-

говых течений. Численно рассчитаны фазовые картины возбуждаемых полей для различных моделей волновой генерации.

**Ключевые слова:** *внутренние гравитационные волны, стратифицированная среда, сдвиговые течения, волновая динамика, асимптотики.*

Среди большого многообразия наблюдаемых волновых процессов различной физической природы в океане и атмосфере Земли особое место вызывает взаимодействие возбуждаемых волн с гидродинамическими потоками. Движение стратифицированной среды является одним из основных факторов, влияющих на динамику внутренних гравитационных волн как в естественных условиях, так и в технических устройствах. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей внутренних гравитационных волн основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и их асимптотическом анализе. В реальных океанических условиях необходимо рассматривать внутренние гравитационные волны, распространяющиеся на фоне средних течений с вертикальным сдвигом скорости, причем вариация скорости по вертикали составляет десятки сантиметров в секунду и метров в секунду, т. е. имеет тот же порядок, что и максимальные скорости внутренних гравитационных волн. Такие течения должны существенно сказываться на распространении внутренних гравитационных волн. Для моделирования генерации внутренних гравитационных волн точечным источником в реальном океане можно считать крутой склон поперечного хребта в проливах, который обтекается сдвиговым течением и периодическим приливным течением. Если масштаб изменения течений по горизонтали много больше длин внутренних гравитационных волн, а масштаб временной изменчивости много больше периодов внутренних волн, то естественной математической моделью является случай стационарных и горизонтальных однородных сдвиговых течений. Точечным нестационарным источником генерации в реальном океане можно считать крутой склон поперечного хребта в проливах, который обтекается сдвиговым течением и периодическим приливным течением. Такой подход является физически обоснованным для решения многих задач моделирования генерации внутренних гравитационных волн в океане с учетом сдвиговых течений. Целью настоящей работы является построение аналитических решений, описывающих поля внутренних гравитационных волн от осциллирующего источника возмущений в стратифицированной среде с учетом сдвиговых течений. Для решения задачи использованы постоянное распределение частоты плавучести и линейная зависимость сдвигового течения от глубины. Получены аналитические выражения, описывающие дисперсионные зависимости, которые выражаются через модифицированную функцию Бесселя

мнимого индекса. При выполнении условия устойчивости Майлса и больших числах Ричардсона для построения аналитических решений были использованы дебаевские асимптотики модифицированной функции Бесселя мнимого индекса. Изучены свойства дисперсионного уравнения и исследованы основные аналитические свойства дисперсионных кривых. В приближении стационарной фазы построены интегральные представления решений для дальних волновых полей. Численно рассчитаны фазовые картины возбуждаемых полей внутренних гравитационных волн для данной модели волновой генерации. Полученные результаты показывают значительную зависимость фазовой структуры возбуждаемых волновых полей от соотношения амплитуд придонного и приповерхностного течений для различных гидрологических моделей. Качественная картина дисперсионных кривых и соответствующих им фазовых картин определяется свойствами фоновых сдвиговых течений. При относительно малых вертикальных градиентах фоновых сдвиговых течений (течения на поверхности и дне различны по амплитуде, но однонаправлены) волновая картина представляет собой систему как клиновидных (продольных), так и кольцевых (поперечных) волн. При больших вертикальных градиентах фоновых сдвиговых течений (сдвиговые течения на поверхности и дне разнонаправлены) волновая картина состоит только из кольцевых (поперечных) волн, при этом соотношение амплитуд придонного и приповерхностного течений определяет степень асимметрии генерируемых волновых картин.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-01-00111А.*

## **Internal gravity waves in stratified medium with shear flows**

© V.V. Bulatov\*, Yu.V. Vladimirov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

\*E-mail: [internalwave@mail.ru](mailto:internalwave@mail.ru)

**Abstract.** The problem of the internal gravity fields in a stratified medium of finite depth for model distributions of shear flows is considered. For the analytical solution of the problem, a constant distribution of the buoyancy frequency and various linear dependences of the shear flow on depth were used. Dispersion dependences are obtained, which are expressed through a modified Bessel function of an imaginary index. Under the Miles-Howard stability condition and large Richardson numbers, the Debye asymptotics of the imaginary index modified Bessel functions were used to construct analytical solutions. The properties of the dispersion equation are studied and the main analytical properties of the dispersion

curves are investigated. The phase patterns of the excited fields are calculated numerically for various wave generation models.

**Keywords:** *internal gravity waves, stratified medium, shear flows, wave dynamics, asymptotics.*

Among the wide variety of observed wave processes of different physical nature in the ocean and atmosphere of the Earth, a special place is caused by the interaction of excited waves with hydrodynamic flows. The movement of a stratified medium is one of the main factors influencing the dynamics of internal gravity waves, both in natural conditions and in technical devices. In the linear approximation, the existing approaches to the description of the wave pattern of the excited fields of internal gravity waves are based on the representation of wave fields by Fourier integrals and their asymptotic analysis. In real oceanic conditions, it is necessary to consider internal gravitational waves propagating against the background of medium currents with a vertical shear of speed, and the vertical speed variation is tens of cm / s and m / s, that is, it has the same order as the maximum velocities of internal gravitational waves. Such currents should significantly affect the propagation of internal gravity waves. To simulate the generation of internal gravity waves, the steep slope of the transverse ridge in the straits, which is flown around by a shear current and a periodic tidal current, can be considered a point source in the real ocean. If the scale of changes in currents horizontally is much larger than the lengths of internal gravity waves, and the scale of temporal variability is much larger than the periods of internal waves, then the natural mathematical model is the case of stationary and horizontal homogeneous shear flows. A point unsteady source of generation in the real ocean can be considered a steep slope of a transverse ridge in the straits, which is flowed around by a shear current and a periodic tidal current. This approach is physically justified for solving many problems of modeling the generation of internal gravity waves in the ocean, taking into account shear currents. The aim of this work is to construct analytical solutions describing the fields of internal gravity waves from an oscillating source of disturbances in a stratified medium, taking into account shear flows. To solve the problem, a constant distribution of the buoyancy frequency and a linear dependence of the shear current on depth were used. Analytical expressions are obtained that describe the dispersion dependences, which are expressed through the modified Bessel function of the imaginary index. Under the Miles stability condition and large Richardson numbers, the Debye asymptotics of the modified Bessel function of the imaginary index were used to construct analytical solutions. The properties of the dispersion equation are studied, and the main analytical properties of the dispersion curves are investigated. Integral representations of solutions for far wave fields are constructed

in the stationary phase approximation. The phase pictures of the excited fields of internal gravity waves are numerically calculated for the given model of wave generation. The results obtained show a significant dependence of the phase structure of the excited wave fields on the ratio of the amplitudes of the bottom and near-surface currents for various hydrological models. Analytical representations of dispersion relations make it possible to study the IGW dynamics in a stratified medium with flows and slowly varying parameters. Horizontal heterogeneity and non-stationarity have a significant impact on the internal gravity waves propagation in the world ocean. If the ocean depth, its density, shear flows are changing slowly as compared to the characteristic length (period) of internal gravity waves, which is well done in the real ocean, then for solving the mathematical modeling of wave dynamics, we may use the WKBJ method (geometrical optics method) and its generalizations. Then, the asymptotic solution can be represented as a sum of wave packets. The phase structure of each wave packet is determined by the analytical properties of the dispersion curves. The phase functions (model integrals) of asymptotic solutions are expressed in terms of various special functions: Fresnel integrals, Airy functions, Pearcey integrals, and others. The specific choice of the phase function (model integrals) is completely determined by the analytical properties of the dispersion relations. The obtained analytical solutions of dispersion relations allow one to efficiently calculate the main phase characteristics of the excited fields of internal gravity waves and, in addition, to qualitatively analyze the obtained solutions, which is important for the correct statement of more complicated mathematical models of wave dynamics in real natural stratified media (ocean, Earth's atmosphere).

*This work was supported by the grant RFBR no. 20-01-00111A.*

## **Выбор способа определения касательных напряжений на поверхности при обтекании потоком газа**

© С.А. Бурцев, Д.Г. Хрулев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

**Аннотация.** При проведении экспериментального исследования процессов теплообмена на поверхностях с регулярным рельефом обычно необходимо с высокой точностью определять касательные напряжения, возникающие при взаимодействии потока с поверхностью. Существуют два принципиально разных подхода для определения этого параметра. Первый основан на получении профиля скорости с помощью анемометрии, PIV-метода или барометрии и дальнейшем пересчете касательных напряжений или коэффициента

сопротивления, второй — на прямом взвешивании модельной пластины (тензометрии). Анализ преимуществ и недостатков этих методов измерения и выбор рационального приведен в данной статье.

**Ключевые слова:** касательные напряжения, регулярный рельеф, анемометрия, тензометрия, PIV-метод, барометрия.

**Введение.** В рамках газовой динамики и теории тепломассообмена часто рассматриваются задачи, связанные с повышением (или понижением) интенсивности процессов переноса теплоты, сопровождаемых изменением количества движения.

Частым инженерным решением таких задач оказываются использование поверхностей с интенсификаторами. Однако при их применении оказывается, что с ростом интенсификации теплообмена растут также и гидравлические сопротивления, причем скорость роста потерь обычно значительно выше. Большинство таких поверхностей лежит в области кривой Нуннера [1], где относительное число Нуссельта растет пропорционально квадратному корню относительного роста коэффициента сопротивления. Часть поверхностей соответствуют аналогии Рейнольдса, и лишь малая доля оказывается более эффективной. С точки зрения простоты технологии изготовления наиболее интересными оказываются поверхности с регулярным рельефом (лунками) [2, 3].

Для расчета теплогидравлических характеристик таких поверхностей необходимо не только определять число Нуссельта (которое достаточно точно можно получить методом нестационарного теплообмена [4]), но и коэффициент гидравлического сопротивления (касательные напряжения на поверхности). Существуют два принципиально разных подхода к его определению. Первый основан на получении профиля скорости с помощью анемометрии, PIV-метода или барометрии и дальнейшем пересчете касательных напряжений, второй — на прямом взвешивании модельной пластины, причем обычно определяют интегральный коэффициент сопротивления.

**Непрямой метод.** Рассмотрим первый метод. Для его реализации сначала по продольной координате  $x$  вычисляют число Рейнольдса:

$$\text{Re}_x = \frac{Vxp}{\mu} = \frac{Vxp}{\mu RT},$$

где  $V$  — продольная скорость;  $p$  — статическое давление;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $R$  — газовая постоянная;  $T$  — статическая температура.

В эксперименте необходимо измерить скорость в ядре потока, продольную координату, статическое давление в ядре потока, динамическую вязкость газа и его статическую температуру. Все эти

измерения имеют определенную точность, и можно вычислить относительную погрешность определения числа Рейнольдса как косвенного измерения:

$$\overline{\Delta Re_x} = \sqrt{(\overline{\Delta V})^2 + (\overline{\Delta x})^2 + (\overline{\Delta p})^2 + (\overline{\Delta \mu})^2 + (\overline{\Delta T})^2}, \quad (1)$$

где  $\overline{\Delta Re_x}$  — относительная погрешность в определении числа  $Re_x$ ;  $\overline{\Delta V}$ ,  $\overline{\Delta x}$ ,  $\overline{\Delta p}$ ,  $\overline{\Delta \mu}$ ,  $\overline{\Delta T}$  — относительные погрешности в определении скорости, продольной координаты, статического давления, динамической вязкости и температуры соответственно.

Оценка составляющих формулы (1) в области наиболее характерных значений измеряемых в экспериментах величин (скорость потока — до 100 м/с, статическая температура потока — от 273 К до 373 К) представлена в таблице.

**Точность методов измерения**

Параметр	Метод	Относительная погрешность, %
$V$	Анемометрический (по данным производителей термоанемометров: ЭКСИС, Fluke, Testo)	1–5
	Барометрический (по данным [5])	3–5
	SIV/PIV (SIV — по данным [6], PIV — системы производства ПОЛИС)	1–3
$T$	Измерение термопарой (по ГОСТ Р 8.585–2001)	1–2,5
	Термография (по данным производителей тепловизоров: Fluke, FLIR, Infratec)	1–2
$P$	Измерение датчиком давления (по данным [7])	1–2,5

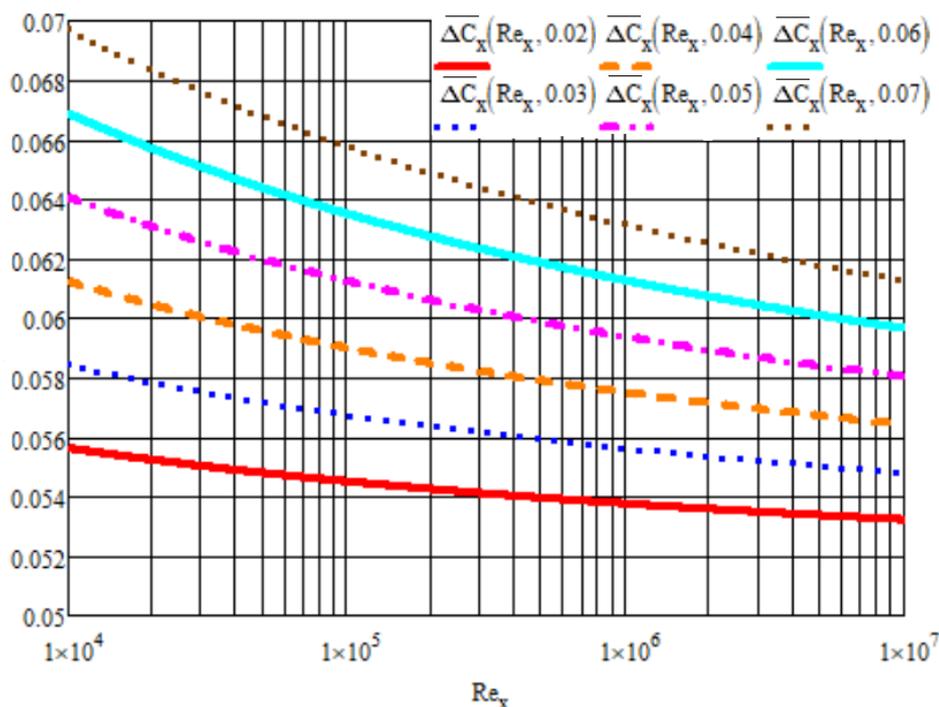
Динамическую вязкость можно определить с относительной погрешностью до 1 % по степенным аппроксимациям вида [8]:

$$\mu = (4,031 + 0,0551T - 2,2 \cdot 10^{-5}T^2 + 5,43 \cdot 10^{-9}T^3) \cdot 10^{-6}.$$

Принимая относительную погрешность определения температуры от 1,0 до 2,5 % (согласно таблице), определим относительную погрешность измерения динамической вязкости как погрешность косвенных измерений. Она лежит в пределах от 1,5 до 3 %.

Относительная погрешность определения продольной координаты не превышает 0,1 %, поэтому ее в силу малости можем не учитывать. Таким образом, можно оценить относительную погрешность определения числа Рейнольдса согласно формуле (1). Она лежит в пределах от 2,3 до 6,8 %.

Для оценки погрешности определения коэффициента сопротивления может быть использована формула Прандтля — Шлихтинга (погрешность не превышает 5 % в области  $Re_x > 10^4$  [9]). Тогда погрешность определения коэффициента сопротивления есть функция от  $Re_x$  и  $\overline{\Delta Re_x}$ . Расчеты в определенных выше пределах представлены на рисунке.



$\overline{\Delta C_x}$  — Погрешность определения коэффициента сопротивления  
 ( $\overline{\Delta C_x}$  — относительная погрешность коэффициента сопротивления)

Согласно данным, приведенным на рисунке, в области чисел Рейнольдса от  $10^4$  до  $10^7$  и при погрешности его определения от 2 до 7 % относительная погрешность коэффициента сопротивления составляет от 5,3 до 7,0 %.

Кроме того, относительную погрешность измерения коэффициента сопротивления при применении данного метода увеличивает необходимость поиска средних параметров в ядре потока, а также пренебрежение степенью турбулентности потока, сопротивлением остальных стенок канала и наличием вторичных течений. Для поверхности с лунками этот подход дает значительно большую погрешность в связи с искажением формы и взаимодействием вихревых структур над ней.

**Прямой метод.** Рассмотрим второй метод определения коэффициента сопротивления, использующий однокомпонентные тензометрические весы.

Одна из возможных конструкций упругого элемента представляет собой сдвоенный параллелограмм, на каждую половину которого может быть установлена либо гладкая, либо исследуемая рельефная поверхность, а центральная часть жестко крепится к основанию [7]. Каждая исследуемая поверхность закреплена на горизонтальной консольной двухопорной балке, которая может воспринимать деформации только в одном направлении. Тензодатчики наклеены в местах наибольших деформаций каждого параллелограмма, при этом два датчика работают на растяжение, два на сжатие, тем самым образуя полный измерительный мост.

По данным работы [7], относительная погрешность тензометрического метода при определении коэффициента сопротивления не превышает 7 %. Однако данная работа была проведена на сверхзвуковых скоростях, не была учтена разность давлений на торцах пластины, а также присутствовали существенные внешние вибрации. По данным работы [10], при скоростях до 120 м/с относительная погрешность метода не превосходит 5 %.

Из преимуществ тензометрического метода можно отметить его независимость от эмпирических соотношений и отсутствие существенного влияния формы поверхности на результат измерений. К недостаткам можно отнести следующие: в связи с особенностью работы тензодатчиков необходимо (по возможности) исключить вибрации; ввиду малости деформаций приходится использовать преобразователи с высоким коэффициентом усиления, что увеличивает погрешность.

**Заключение.** При экспериментальном определении интегрального коэффициента сопротивления тензометрический метод дает меньшую относительную погрешность, которая не возрастает при изменении поверхности пластины. Таким образом, для определения коэффициента трения на поверхностях, покрытых регулярным рельефом, целесообразнее использовать именно этот метод.

## **Литература**

1. Бурцев С.А. и др. Экспериментальное исследование характеристик поверхностей, покрытых регулярным рельефом. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.*, 2013, № 1, с. 263–290.
2. Дзюбенко Б.В., Кузма-Китча Ю.А., Леонтьев А.И., Федин И.И., Холпанов Л.П. *Интенсификация тепло- и массообмена на макро-, микро- и наномасштабах*. Москва, ФГУП ЦНИИАТОМинформ, 2008, 532 с.
3. Халатов А.А. Новые вихревые технологии аэротермодинамики в энергетическом газотурбостроении. Часть 3. Совершенствование термогазодинамических процессов. *Промышленная теплотехника*, 2008, № 6, с. 5–19.

4. Leontiev A.I., et al. Experimental investigation of heat transfer and drag on surfaces coated with dimples of different. *International Journal of Thermal Sciences*, 2017, vol. 118, pp. 152–167.
5. Leontiev A.I., et al. Experimental investigation of heat transfer and drag on surfaces with spherical dimples. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2016, vol. 79, pp. 74–84.
6. Dushin N.S., et al. Effect of camera quantization error on flow velocity measured by Smoke Image Velocimetry. *Trans. of Academenergo*, 2016, no. 4, pp. 23–31.
7. Titov A.A., et al. Experimental investigation of skin friction drag and heat transfer on the surfaces with concavities in compressible fluid flow. *International Heat Transfer Conference*, 2010, vol. 49378, pp. 597–601.
8. Сайт Службы стандартных справочных данных в области использования атомной энергии. URL: <https://gsssd-rosatom.mephi.ru/DB-tp-02/Air.php>
9. Повх И.Л. *Техническая гидромеханика*. Москва, Машиностроение, 1964.
10. Бурцев С.А., Киселёв Н.А., Леонтьев А.И. Особенности исследования тепло-гидравлических характеристик рельефных поверхностей. *Теплофизика высоких температур*, 2014, т. 52, № 6, с. 895–898.

## О колебаниях твердого тела с двумя жидкостями вокруг горизонтальной оси

© Вин Ко Ко\*, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): win.c.latt@gmail.com

**Аннотация.** В нелинейной постановке рассмотрена задача о колебаниях твердого тела с цилиндрической полостью, совершающего угловые движения вокруг горизонтальной оси  $OY$  и полностью заполненной двумя идеальными и несжимаемыми жидкостями. Получены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие колебания поверхности раздела двух жидкостей в окрестности основного резонанса. Для сосуда круглой цилиндрической формы нелинейная задача сведена к последовательному решению линейных краевых задач. Полученные решения краевых задач в виде цилиндрических функций использовались для вычисления линейных и нелинейных гидродинамических коэффициентов в зависимости от глубины и плотности верхней жидкости.

**Ключевые слова:** механическая система, цилиндрическая полость, гидродинамические коэффициенты, основной резонанс, возмущенная поверхность, вращательное движение.

**Постановка задачи.** Особенности линейных и нелинейных колебаний однородной жидкости, частично заполняющей полость подвижного и неподвижного твердого тела, приведены в книгах [1, 2]. Рассматривается круглый цилиндрический сосуд, полностью запол-

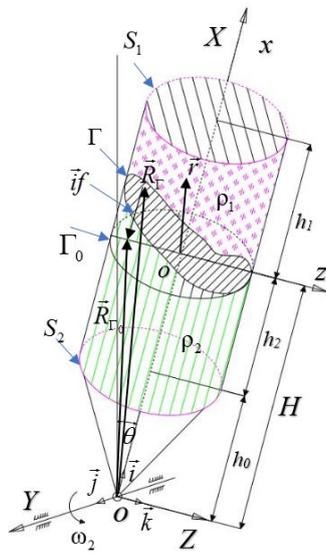


Рис. 1. Системы координат и основные обозначения

ненный двумя несмешивающимися идеальными несжимаемыми жидкостями, который совершает малые колебания вокруг неподвижной оси  $OY$ . Движение твердого тела вокруг оси  $OY$  будем определять с помощью угловой координаты  $\theta$ ,  $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}\vec{e}_2$ ,  $\theta(t) = \theta_0 \sin pt$ .

Введем систему координат  $oxuz$ , в которой поле массовых сил, смоченные поверхности полости обозначим через  $S^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ), а возмущенную поверхность раздела жидкостей — через  $\Gamma$  (рис. 1).

Движение каждой жидкости будем считать потенциальным и удовлетворяющим уравнениям Лапласа,

$$\nabla^2\Phi^{(1)} = 0 \text{ в } \tau_1; \quad \nabla^2\Phi^{(2)} = 0, \text{ в } \tau_2. \quad (1)$$

Потенциалы скоростей  $\Phi^{(1)}$  и  $\Phi^{(2)}$  удовлетворяют условиям непротекания на смачиваемых поверхностях, а также кинематическим и динамическим условиям на поверхности раздела:

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{dv} = \frac{d\Phi^{(2)}}{dv} \text{ при } x = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (2)$$

$$\left( \rho_2 \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left[ \rho_2 (\nabla\Phi^{(2)})^2 - \rho_1 (\nabla\Phi^{(1)})^2 \right] - \left[ \rho_2 \nabla\Phi^{(2)} \cdot (\vec{\omega}_2 \times \vec{R}) - \rho_1 \nabla\Phi^{(1)} \cdot (\vec{\omega}_2 \times \vec{R}) \right] = (\rho_1 - \rho_2) \vec{g} \cdot \vec{r}, \quad (3)$$

где  $\vec{R}|_{\Gamma} = \vec{R}|_{\Gamma_0} + \vec{i}_x f$ ,  $\vec{r}|_{\Gamma} = \vec{r}|_{\Gamma_0} + \vec{i}_x f$ .

Представим потенциалы скоростей каждой жидкости в виде следующей суммы:

$$\Phi^{(k)}(x, r, \eta, t) = \omega_2 A^{(k)}(x, r, \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) B_i^{(k)}(x, r, \eta), \quad (k = 1, 2). \quad (4)$$

Здесь  $\Phi^{(k)}$  — потенциалы скоростей верхней и нижней жидкостей;  $A^{(k)}$  — гармонические скалярные функции;  $B_i^{(k)}$  — функции координат верхней и нижней жидкостей;  $\alpha_i$  — обобщенные координаты волновых движений  $i$ -й гармоники на поверхности раздела.

Поставленная задача решается с применением разложения функций в ряд Тейлора и использованием значения функций и ее нормальных производных на невозмущенной поверхности раздела жидкостей  $\Gamma_0$ . Представим функции  $A^{(k)}$  и  $B_i^{(k)}$  в виде разложения по параметрам  $\alpha_i$  до второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= A_0^{(k)} + \sum_i \alpha_i A_i^{(k)} + \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j A_{ij}^{(k)} + \dots; \quad B_i^{(k)} = \\ &= B_{i0}^{(k)} + \sum_j \alpha_j B_{ij}^{(k)} + \sum_j \sum_k \alpha_j \alpha_k B_{ijk}^{(k)} + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где функции  $A_0^{(k)}$ ,  $A_i^{(k)}$ ,  $A_{ij}^{(k)}$ ,  $B_{i0}^{(k)}$ ,  $B_{ij}^{(k)}$ ,  $B_{ijk}^{(k)}$  зависят только от пространственных координат и не зависят от времени.

Выделим две основные несимметричные гармоники, возбуждаемые в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и определяемые обобщенными координатами и формами  $\alpha_i = \alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ):  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = \beta$ ,  $f_1 = f_\alpha = \varphi(r) \sin \eta$ ,  $f_2 = f_\beta = \varphi(r) \cos \eta$ ,  $f_\alpha$ ,  $f_\beta$ . Это формы основного тона колебаний поверхности раздела жидкостей.

Уравнения для обобщенных координат  $\alpha$  и  $\beta$  на поверхности раздела жидкостей получаются в следующем виде:

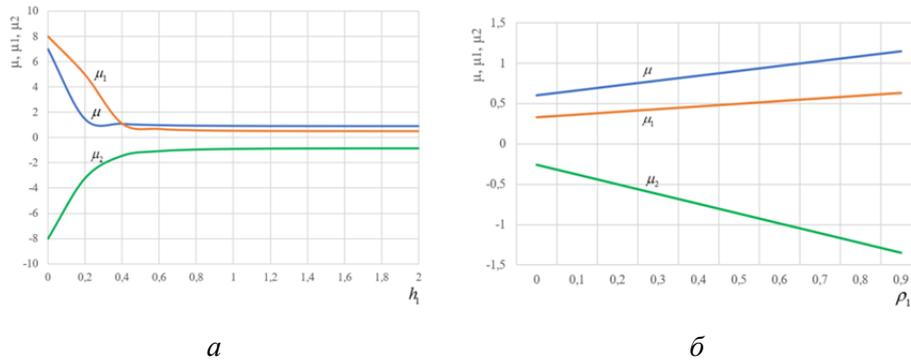
$$\begin{aligned} \mu \ddot{\alpha} + gN^2 \alpha - \lambda_0 \dot{\omega}_2 + \mu_1 \left( \alpha^2 \ddot{\alpha} + \alpha^2 \dot{\alpha} + \alpha \beta \ddot{\beta} + \alpha \beta^2 \dot{\beta} \right) + (\lambda_1 \alpha^2 - \lambda_2 \beta^2) \dot{\omega}_2 + \\ + \mu_2 \left( \beta^2 \ddot{\alpha} + 2\beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2\alpha \beta^2 \dot{\beta} \right) - (\lambda_1 + 3\lambda_2) \omega_2 \beta \dot{\beta} - J_1 \omega_2^2 \alpha = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mu \ddot{\beta} + gN^2 \beta + \mu_1 \left( \beta^2 \ddot{\beta} + \alpha^2 \dot{\beta} + \alpha \beta \ddot{\alpha} + \beta \beta^2 \dot{\alpha} \right) + (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha \beta \dot{\omega}_2 + \\ + \mu_2 \left( \beta^2 \ddot{\beta} + 2\alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2\beta \alpha^2 \dot{\alpha} \right) + (\lambda_1 + 3\lambda_2) \omega_2 \beta \dot{\alpha} - J_2 \omega_2^2 \beta = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (J_{0y} + J) \dot{\omega}_2 + \lambda g \alpha - \lambda_0 \ddot{\alpha} + (\lambda_1 \alpha^2 - \lambda_2 \beta^2) \ddot{\alpha} + 2\lambda_1 \alpha \dot{\alpha} + \\ + (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha \left( \beta \ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 \right) + (\lambda_1 - \lambda_2) \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} + \frac{d}{dt} \left[ (J_1 \alpha^2 + J_2 \beta^2) \omega_2 \right] = M_e. \end{aligned} \quad (8)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений описывает эффект вращательного движения поверхности раздела жидкостей в около резонансном диапазоне основного тона колебаний. В работе

также приведены вычисленные параметры, определяющие нелинейность волновых движений поверхности раздела жидкостей и связывающие вращательное движение тела и деформацию объема жидкостей (рис. 2).



**Рис. 2.** Зависимость гидродинамических коэффициентов  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  от отношения глубины заполнения верхней жидкости  $h_1$  (*a*) и плотности верхней жидкости  $\rho_1$  (*б*)

**Заключение.** Полученные дифференциальные нелинейные уравнения колебаний поверхности жидкости могут быть полезны для использования в будущих проектах космической техники, в области динамики морских транспортных систем криогенных жидкостей, в системах хранения сжиженного природного газа, в динамике химических реакторов, при взрывных и сейсмических воздействиях.

### Литература

1. Жуковский Н.Е. *О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью*. Москва, Гостехиздат, 1948, 143 с.
2. Луковский И.А. *Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость*; отв. ред. В.А. Троценко; АН УССР. Ин-т математики. Киев, Наук. думка, 1990, 296 с. ISBN 5-12-001308-2.

## Vibrations of a solid body with two liquids around a horizontal axis

© Win Ko Ko\*, Temnov A.H.

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): win.c.latt@gmail.com

**Abstract.** In this paper, we consider a problem in the nonlinear formulation of vibrations of a solid with a cylindrical cavity that performs angular movements around the horizontal axis  $OY$  and is completely filled with two ideal and incompressible fluids. Nonlinear differential equations describing the vibrations of the interface between two liquids in the vicini-

ty of the main resonance are obtained. For a round cylindrical vessel, the nonlinear problem is reduced to a sequential solution of linear boundary value problems. The obtained solutions of boundary value problems in the form of cylindrical functions were used to calculate linear and nonlinear hydrodynamic coefficients depending on the depth and density of the upper liquid.

**Keywords:** *mechanical system, cylindrical cavity, hydrodynamic coefficients, basic resonance, perturbed surface, rotational motion.*

**Problem statement.** The features of linear and nonlinear vibrations of a homogeneous liquid partially filling the cavity of a mobile and stationary solid are considered in books [1, 2].

We consider a round cylindrical vessel completely filled with two immiscible ideal incompressible liquids, which performs small vibrations around the fixed axis OY. The motion of a solid body around the axis OY will be determined using the angular coordinate  $\theta$ ,  $\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}\vec{e}_2$ ,  $\theta(t) = \theta_0 \sin pt$ .

Enter the coordinate system  $oxyz$ , in which the field of mass forces, the moistened surfaces of the cavity are denoted by  $S^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ), and the perturbed interface of liquids-through (fig. 1).

We will consider the motion of each fluid as potential and satisfying the Laplace equations,

$$\nabla^2\Phi^{(1)} = 0, \text{ в } \tau_1; \nabla^2\Phi^{(2)} = 0, \text{ в } \tau_2. \quad (1)$$

The velocity potentials  $\Phi^{(1)}$  and  $\Phi^{(2)}$  meet non-flow conditions on wetted surfaces, as well as kinematic and dynamic conditions on the interface

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{dv} = \frac{d\Phi^{(2)}}{dv} \text{ by } x = 0 \text{ on } \Gamma, \quad (2)$$

$$\left( \rho_2 \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left[ \rho_2 (\nabla\Phi^{(2)})^2 - \rho_1 (\nabla\Phi^{(1)})^2 \right] - \left[ \rho_2 \nabla\Phi^{(2)} \cdot (\vec{\omega}_2 \times \vec{R}) - \rho_1 \nabla\Phi^{(1)} \cdot (\vec{\omega}_2 \times \vec{R}) \right] = (\rho_1 - \rho_2) \vec{g} \cdot \vec{r}, \quad (3)$$

where  $\vec{R}|_{\Gamma} = \vec{R}|_{\Gamma_0} + \vec{i}_x f$ ,  $\vec{r}|_{\Gamma} = \vec{r}|_{\Gamma_0} + \vec{i}_x f$ .

Let's represent the velocity potentials of each fluid as the following sum:

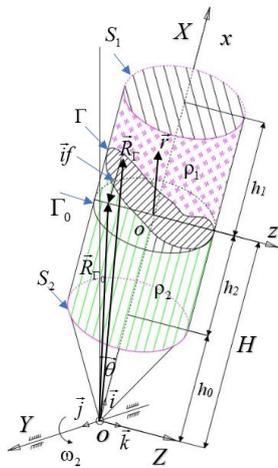


Fig. 1. Coordinate system and main notations

$$\begin{aligned} \Phi^{(k)}(x, r, \eta, t) = \\ = \omega_2 \cdot A^{(k)}(x, r, \eta) + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\alpha}_i(t) B_i^{(k)}(x, r, \eta), \\ (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (4)$$

where  $\Phi^{(k)}$  — velocity potentials of upper and lower fluids;  $A^{(k)}$  — harmonic scalar functions;  $B_i^{(k)}$  — functions of coordinates of upper and lower liquids;  $\alpha_i$  — the generalized coordinates of the wave movements  $i$ -th harmonics on the interface. Problem is solved by applying the Taylor series expansion of functions and using the values of functions and their normal derivatives on the unperturbed interface of liquids  $\Gamma_0$ .

Let's imagine the functions  $A^{(k)}$  and  $B_i^{(k)}$  in the form of expansion options  $\alpha_i$  up to and including the second order

$$\begin{aligned} A^{(k)} = A_0^{(k)} + \sum_i \alpha_i A_i^{(k)} + \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j A_{ij}^{(k)} + \dots; B_i^{(k)} = \\ = B_{i0}^{(k)} + \sum_j \alpha_j B_{ij}^{(k)} + \sum_j \sum_k \alpha_j \alpha_k B_{ijk}^{(k)} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Where functions  $A_0^{(k)}$ ,  $A_i^{(k)}$ ,  $A_{ij}^{(k)}$ ,  $B_{i0}^{(k)}$ ,  $B_{ij}^{(k)}$ ,  $B_{ijk}^{(k)}$  they depend only on spatial coordinates and do not depend on time.

We distinguish two main asymmetric harmonics excited in two mutually perpendicular planes and defined by generalized coordinates and shapes  $\alpha_i = \alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ):  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = \beta$ ,  $f_1 = f_\alpha = \varphi(r) \sin \eta$ ,  $f_2 = f_\beta = \varphi(r) \cos \eta$ ,  $f_\alpha$ ,  $f_\beta$ . These are forms of the basic tone of vibrations of the interface of liquids.

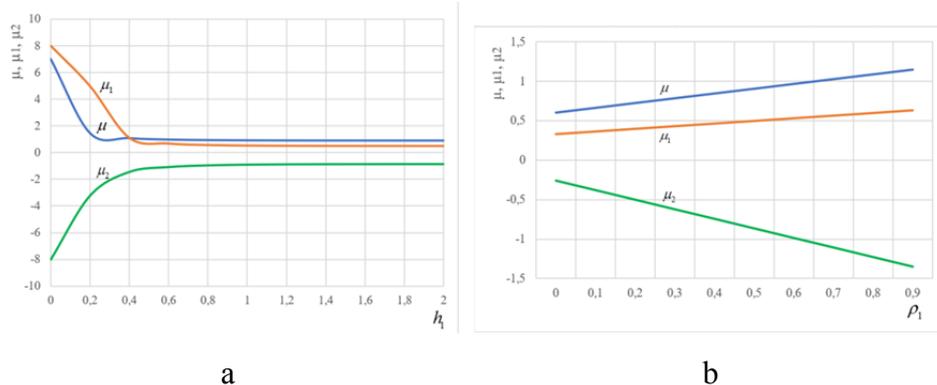
Equations for generalized coordinates  $\alpha$  and  $\beta$  on the interface of liquids are obtained in the following form

$$\begin{aligned} \mu \ddot{\alpha} + gN^2 \alpha - \lambda_0 \dot{\omega}_2 + \mu_1 \left( \alpha^2 \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 \alpha + \alpha \beta \ddot{\beta} + \alpha \dot{\beta}^2 \right) + (\lambda_1 \alpha^2 - \lambda_2 \beta^2) \dot{\omega}_2 + \\ + \mu_2 \left( \beta^2 \ddot{\alpha} + 2\beta \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2\alpha \dot{\beta}^2 \right) - (\lambda_1 + 3\lambda_2) \omega_2 \dot{\beta} - J_1 \omega_2^2 \alpha = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \mu \ddot{\beta} + gN^2\beta + \mu_1 \left( \beta^2 \ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \dot{\beta} + \alpha \beta \ddot{\alpha} + \beta \dot{\beta}^2 \right) + (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha \beta \dot{\omega}_2 + \\ & + \mu_2 \left( \beta^2 \ddot{\beta} + 2\alpha \dot{\alpha} \dot{\beta} - \alpha \beta \ddot{\alpha} - 2\beta \dot{\alpha}^2 \right) + (\lambda_1 + 3\lambda_2) \omega_2 \beta \dot{\alpha} - J_2 \omega_2^2 \beta = 0; \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (J_{0y} + J) \dot{\omega}_2 + \lambda g \alpha - \lambda_0 \ddot{\alpha} + (\lambda_1 \alpha^2 - \lambda_2 \beta^2) \ddot{\alpha} + 2\lambda_1 \alpha \dot{\alpha}^2 + \\ & + (\lambda_1 + \lambda_2) \alpha \left( \beta \ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 \right) + (\lambda_1 - \lambda_2) \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} + \frac{d}{dt} \left[ (J_1 \alpha^2 + J_2 \beta^2) \omega_2 \right] = M_e. \quad (8) \end{aligned}$$

A system of nonlinear differential equations describes the effect of rotational motion of the liquid interface in the near-resonant range of the fundamental vibration tone. The paper also presents calculated parameters that determine the nonlinearity of the wave motions of the liquid interface and relate the rotational motion of the body and the deformation of the volume of liquids (fig. 2).



**Fig. 2.** The dependence of the hydrodynamic coefficients  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  from the ratio of the top liquid filling depth  $h_1$  (a) and from the ratio of the density of the upper liquid  $\rho_1$  (b)

**Conclusion.** The obtained differential nonlinear equations of liquid surface vibrations can be useful for use in future space technology projects, in the field of dynamics of marine transport systems for cryogenic liquids, in storage systems for liquefied natural gas, in the dynamics of chemical reactors, in explosive and seismic impacts.

## References

1. Zhukovsky N.E. *On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous drop liquid*. Moscow, Gostekhizdat, 1948, 143 p.
2. Lukovsky I.A. *Introduction to nonlinear dynamics of a solid body with cavities containing a liquid*. V.A. Trotsenko, ed.; as of the USSR Institute of mathematics. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1990, 296 p. ISBN 5-12-001308-2

## **Моделирование динамических процессов в нефтепроводном транспорте с помощью методов нелинейных главных компонент и нейронных сетей**

© Н.Т. Габдрахманова\*, У.А. Алероев\*, В.Д. Федин

РУДН, Математический институт им. С.М. Никольского, Москва, Россия

\*E-mail: nelli.gabdr@mail.ru, ualeroev@bk.ru

**Аннотация.** Работа посвящена развитию методов построения моделей идентификации динамических систем по эмпирическим данным. Предложен и реализован гибридный метод на основе методов нелинейных главных компонент и нейронных сетей. Машинное обучение ставит своей задачей выявление закономерностей в эмпирических данных. Хорошее качество объяснения имеющихся данных еще не гарантирует соответствующее качество прогнозирования. Нахождение устойчивых решений подразумевает процедуру регуляризации — ограничения класса допустимых решений. Работа направлена на решение данной актуальной проблемы. Задача решена на данных показателей перекачки нефти одного линейного участка нефтепровода за 5 лет.

**Ключевые слова:** динамическая система, машинное обучение, устойчивость решений.

Целью работы является создание методов моделирования динамических сложных систем на основе данных измерений, нейронных сетей (НС) и методов нелинейных главных компонент. Проблема управления сложными динамическими системами в условиях неопределенности является важной в теории и практике управления, ее решению посвящено много работ [1–4]. Основной особенностью этих задач, как правило, является невозможность проведения экспериментов над реальной системой. Современный этап моделирования сложных систем характеризуется построением нейросетевых моделей по данным наблюдений за некоторый период времени  $T$ . Например, при моделировании динамических систем хорошо показали себя рекуррентные НС [3]. Как правило, данные в реальных задачах содержат искажения. Современные методы машинного обучения и НС довольно хорошо справляются с этой проблемой. Проблема возникает, когда данные содержат выбросы — существенные отклонения от «нормальных» значений. Для решения вопроса адекватности НС моделей предлагается использовать геометрические свойства области точек данных. Задача решена и апробирована на данных одного участка нефтепроводного транспорта.

Трубопроводный транспорт нефти является одним из значительных потребителей электроэнергии. В настоящее время сформирован единый рынок электроэнергии, обеспечивающий жесткий контроль за ее потреблением. В связи с чем актуальным показателем стала точность планирования затрат электроэнергии на транспорт нефти.

Сформулирована следующая математическая постановка.

Весь информационный массив, на основе которого строится прогноз, обозначен:

$$\{R\} = \{P\} \cdot \{X^{t+1}\},$$

где  $P = \langle X, Y \rangle = \langle X(i), Y(i), i = 1, \dots, N \rangle$ ;  $X(i)$  — вектор объясняющих переменных (вектор входных переменных) в точке  $i$ ;  $Y(i)$  — результирующий вектор (выходной вектор) в точке  $i$ ;  $N$  — число точек наблюдения;  $X^{t+1} = \{X(i), i = N+1, \dots, N+T\}$  — вектор объясняющих переменных прогнозного периода (планируемые переменные).

В качестве входных переменных для модели выбраны объем перекачки, реологические параметры нефти и др. В качестве выходной переменной принят расход электроэнергии.

Необходимо построить математическую модель идентификации для прогноза расхода электроэнергии при известных прогнозируемых входных данных:

$$Y^* = F(X),$$

где  $Y^*$  — вычисленное значение расхода электроэнергии;  $X$  — вектор входных данных;  $F$  — оператор нейросетевого моделирования, удовлетворяющий критерию пригодности  $H$ .

По эмпирическим данным эксплуатации выбранного объекта за пять лет была построена НС модель. Результат построения НС модели по всей выборке исходных данных оказался удовлетворительным по критерию пригодности не во всей области построения.

Для коррекции и анализа полученных решений предлагается использовать подходы геометрического анализа данных.

С помощью метода главных кривых [3, 4] для эмпирических данных построен неориентированный примитивный граф  $G(V, E)$ , где  $V$  — вершины графа;  $E$  — ребра графа. Для полученного графа  $G$  построено отображение  $\varphi: V \rightarrow R^m$ , где  $m$  — размерность пространства облака точек. Замечательно то, что отображение  $\varphi$  является вложением  $V$  в  $R^m$ .

Подпространство, натянутое на главные кривые, обладает свойством «минимума остаточной дисперсии» — средний квадрат расстояния от точек данных до этого подпространства минимален среди всех других нелинейных подпространств размерности  $m'$ . В работе задача построения нелинейного многообразия сведена к задаче мно-

гокритериальной оптимизации. Один из критериев оптимизации имеет вид

$$MSD(X, Y) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{dist}^2(X^i, P(X^i, Y))} \rightarrow \min,$$

где  $P(X, Y) = \arg \min_{y \in Y} \text{dist}(X, y)$ ;  $\text{dist}(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x^i - y^i)^2}$ .

Для решения задачи реализованы программы на языке Python.

На основе решений, полученных НС и методом нелинейных главных компонент, построен алгоритм принятия управленческих решений.

**Вывод.** Непрерывные многообразия, построенные с помощью главных кривых, могут выступать как корректоры нейросетевых моделей, построенных по «зашумленным» данным. Полученные результаты являются важными при использовании нейросетевых моделей в управленческих задачах на реальных объектах.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-08-000261.*

## Литература

1. Gabdrakhmanova N. Forecasting time series using topological data analysis. *ITISE 2018 International Conference on Time Series and Forecasting Proceedings of Papers*. 19–21 September 2018, Granada (Spain). Pp. 1367–1374.
2. Габдрахманова Н. Нейросетевые модели для решения управленческих задач на магистральном нефтепроводе. *XVII Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика–2015»: Сб. науч. тр. Ч. 1*. Москва, НИЯМИ МИФИ, 2015, с. 172–181.
3. Schaefer A.M., Udluft S., Zimmermann H.G. Learning Long-term dependencies with recurrent neural network. *Neurocomputing*, 2008, vol. 71, no. 13–15, pp. 2481–2488.
4. Gorban A.N., Zinovyev A.Y. Principal Graphs and Manifolds. In: *Handbook of Research on Machine Learning Applications and Trends: Algorithms, Methods and Techniques*. Olivas E.S., Guererro J.D.M., Sober M.M., Benedito J.R.M., Lopes A.J.S., eds. Information Science Reference, 2009, pp. 28–60.
5. Hastie T., Stuetzle W. Principal curves. *Journal of the American Statistical Association*, 1989, vol. 84 (406), pp. 502–516.

## Modeling dynamic processes in oil pipeline transport using methods of nonlinear main components and neural networks the report

© N.T. Gabdrakhmanova\*, U.A. Aleroev\*, V.D. Vedin

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

\* E-mail (speaker): nelli.gabdr@mail.ru

**Abstract.** The work is devoted to the development of methods for building models of identification of dynamic systems using empirical data. A hybrid method based on methods of nonlinear main components and neural networks is proposed and implemented. Machine learning sets itself the task of identifying regularities in empirical data. Good quality of explanation of available data does not guarantee the appropriate quality of forecasting yet. Finding sustainable solutions implies a regularization procedure - limiting the class of acceptable solutions. The work is aimed at solving this actual problem. The problem has been solved on these indicators of oil pumping of one linear pipeline section for 5 years.

**Keywords:** *dynamic system, machine learning, solution stability.*

*This work was supported by the grant no. 19-08-000261.*

## References

1. Gabdrakhmanova N. Forecasting time series using topological data analysis. *ITISE 2018 International Conference on Time Series and Forecasting Proceedings of Papers*. 19–21 September 2018, Granada (Spain). Pp. 1367–1374.
2. Gabdrakhmanova N. Neural network models for solving managerial problems on the main oil pipeline. *XVII All-Russian scientific and technical conference "Neuroinformatics-2015": Collection of scientific papers. Part I*. Moscow, 2015, pp. 172–181.
3. Schaefer A.M., Udluft S., Zimmermann H.G. Learning Long-term dependencies with recurrent neural network. *Neurocomputing*, 2008, vol. 71, no. 13–15, pp. 2481–2488.
4. Gorban A.N., and Zinovyev A.Y. Principal Graphs and Manifolds. In: *Handbook of Research on Machine Learning Applications and Trends: Algorithms, Methods and Techniques*. Olivas E.S., Guerro J.D.M., Sober M.M., Benedito J.R.M., Lopes A.J.S., eds. Information Science Reference, 2009, pp. 28–60.
5. Hastie T., Stuetzle W. Principal curves. *Journal of the American Statistical Association*, 1989, vol. 84 (406), pp. 502–516.

## Определение критического числа Тейлора для движения между вращающимися коаксиальными цилиндрами

© А.В. Дмитренко<sup>1,2</sup>, М.А. Колосова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,  
Москва, Россия

<sup>2</sup>Российский университет транспорта «МИИТ», Москва, Россия  
E-mail: AVDmitrenko@mephi.ru, ammsv@yandex.ru

**Аннотация.** Представлено аналитическое решение для критического числа Тейлора в случае движения между вращающимися коаксиальными цилиндрами на основе теории стохастических уравнений континуальных законов и эквивалентности мер между случайными

и детерминированными движениями. Результат решения показывает удовлетворительное соответствие полученной аналитической зависимости для критических чисел Тейлора ( $Ta$ ) экспериментальным данным.

**Ключевые слова:** стохастические уравнения, эквивалентность мер, критическое число Тейлора, турбулентность.

**Введение.** Различные идеи теории турбулентности представлены в работах [1–18]. Стохастическая теория турбулентности, основанная на стохастических уравнениях и теории эквивалентных мер, позволяет получить аналитические зависимости для первого и второго критических чисел Рейнольдса в случаях изотермического и неизоотермического течений на гладкой плоской пластине и в круглой трубе [19–27]. Развитие этой теории дает новый метод определения аналитических зависимостей для профилей усредненных полей скорости и температуры [28], коэффициентов трения и теплоотдачи [29, 30], корреляций второго порядка [28–33], корреляционной размерности аттрактора в пограничном слое [34, 35], теоретических решений спектральной функции турбулентного потока среды [36, 37], формула по аналогии Рейнольдса [38]. В результате было определено, что спектр  $E(k)_j$  находится в зависимости от волновых чисел  $k$  для интервала генерации турбулентности в виде  $E(k)_j \sim k^n$ ,  $n = -1, 2, \dots, -1, 5$ . Эта формула была названа отношением неопределенности при генерации турбулентности [39]. Здесь представлено решение для критического числа Тейлора для движения между вращающимися коаксиальными цилиндрами.

**Результаты.** Применив систему стохастических уравнений [19–27], выведена следующая аналитическая формула:

$$Ta = \left( \frac{r_1 \omega_1 d}{\nu} \right) \sqrt{\frac{d}{r_1}} = f \left[ \left( m \sqrt{\frac{r_1}{d}} \left( \frac{L}{r_1} \right) \right)^k \left( \frac{r_1 \omega_1}{\sqrt{E_{st} / \rho}} \right)^n \right]. \quad (1)$$

Здесь  $r_1$ ,  $\omega_1$ ,  $d$  — радиус и скорость вращения первого цилиндра, расстояние между цилиндрами соответственно;  $(E_{st})$  — стохастическая (индекс «st») компонента поля энергии  $E$ ;  $L$  — линейный масштаб возмущения (турбулентности);  $\rho$ ,  $\nu$  — плотность, кинематическая вязкость среды;  $m$ ,  $k$ ,  $n$  — константы.

**Заключение.** Представлена аналитическая формула (1) для критического числа Тейлора для движения между вращающимися коаксиальными цилиндрами, основанная на теории стохастических уравнений континуальных законов и эквивалентности мер между случайными и детерминированными движениями. Результаты расче-

тов критических чисел Тейлора по аналитической зависимости (1) показывают удовлетворительное соответствие экспериментальным данным [40].

### Литература

1. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности. *ДАН СССР*, 1944, т. 44, № 8, с. 339–342.
2. Колмогоров А.Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега. *ДАН СССР*, 1958, т. 119, № 5, с. 861–864.
3. Колмогоров А.Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов. *ДАН СССР*, 1959, т. 124, № 4, с. 754–755.
4. Колмогоров А.Н. Математические модели турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости. *УМН*, 2004, т. 59, вып. 1 (355), с. 5–10.
5. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1963, vol. 20, pp. 130–141. DOI: 10.1175/1520-0469
6. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. *Comm. Math. Phys.*, 1971, vol. 20, pp. 167–192; vol. 23, pp. 343–344. <http://dx.doi.org/10.1007/bf01646553>
7. Feigenbaum M. The transition to aperiodic behavior in turbulent systems. *Comm. Math. Phys.*, 1980, vol. 77, no. 1, pp. 65–86.
8. Рабинович М.И. Стохастические автоколебания и турбулентность. *УФН*, 1978, т. 125, № 1, с. 123–168.
9. Монин А.С. О природе турбулентности. *УФН*, 1978, т. 125, № 1, с. 97–122.
10. Рабинович М.И., Сущик М.М. Когерентные структуры в турбулентных течениях. *Нелинейные волны. Самоорганизация*. А.В. Гапонов, М.И. Рабинович, ред. Москва, Наука, 1983, с. 58–84.
11. Заславский Г.М. *Стохастичность динамических систем*. Москва, Наука, 1984.
12. Струминский В.В. Возникновение турбулентности. *ДАН СССР*, 1989, т. 307, № 3, с. 564–567.
13. Самарский А.А., Мажукин В.И., Матус П.П., Михайлик И.А. Z/2-консервативные схемы для уравнения Кортевега-Фриса. *ДАН*, 1997, т. 357, № 4, с. 458–461.
14. Климонтович Ю.Л. Проблемы статистической теории открытых систем: критерии относительной степени упорядоченности состояний в процессах самоорганизации. *УФН*, 1989, т. 158, вып. 1, с. 59–91. DOI: 10.1070/pu1999v042n01abeh000445
15. Sreenivasan K.R. Fractals and multifractals in fluid turbulence. *Ann. Rev. Fluid-Mech.*, 1991, vol. 23, pp. 539–600.
16. Orzag S.A., Kells L.C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 1980, vol. 96, no. 1, pp. 159–205. <http://dx.doi.org/10.1017/s0022112080002066/>
17. Priymak V.G. Splitting dynamics of coherent structures in a transitional round-pipe flow. *Dokl. Phys.*, 2013, vol. 58, no. 10, pp. 457–465.
18. Фурсиков А.В. Моментная теория для уравнений Навье — Стокса со случайной правой частью. *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1992, т. 56, № 6, с. 1273–1315.
19. Дмитренко А.В. Эквивалентность мер и стохастические уравнения для турбулентных потоков. *ДАН*, 2013, т. 450, № 6, с. 651–658. <http://dx.doi.org/10.1134/s1028335813060098>
20. Dmitrenko A.V. Equivalent measures and stochastic equations for determination of the turbulent velocity fields and correlation moments of the second order. *Abstr. Int.*

- Conf. "Turbulence and Wave Processes". Lomonosov Moscow State University, November 26–28, 2013. Moscow, 2013, pp. 39–40.  
<http://www.dubrovinlab.msu.ru/turbulencemdm100ru>
21. Дмитренко А.В. Теория эквивалентных мер и множеств с повторяющимися, счетными фрактальными элементами. *Стохастическая термодинамика и турбулентность. Коррелятор детерминированность — случайность*. Москва, Галлея-принт, 2013. <http://search.rsl.ru/ru/catalog/record/6633402>
  22. Дмитренко А.В. Закономерная связь между детерминированным (ламинарным) и хаотическим (турбулентным) движениями — эквивалентность мер. Диплом на научное открытие № 458, регистрационный № 583 от 2 декабря 2013 г.
  23. Dmitrenko A.V. Some analytical results of the theory of equivalence measures and stochastic theory of turbulence for non-isothermal flows. *Advanced Studies in Theoretical Physics*, 2014. vol. 8, no. 25, pp. 1101–1111.  
<https://doi.org/10.12988/astp.2014.49131>
  24. Dmitrenko A.V. Analytical estimation of velocity and temperature fields in a circular tube on the basis of stochastic equations and equivalence of measures. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2015, vol. 88 (6), pp. 1569–1576.  
<https://doi.org/10.1007/s10891-015-1344-x>
  25. Dmitrenko A.V. Determination of critical Reynolds numbers for non-isothermal flows with using stochastic theories of turbulence and equivalent measures. *Heat Transf. Res.*, 2015, vol. 46, iss. 12, pp. 1102–1112.  
DOI: 10.1615/HeatTransRes.2015014191  
<http://dl.begellhouse.com/journals/46784ef93dddff27,forthcoming.html>
  26. Dmitrenko A.V. Determination of critical Reynolds numbers for nonisothermal flows using stochastic theories of turbulence and equivalent measures. *Heat Transf. Res.*, 2016, vol. 47 (1), pp. 41–48. <https://doi.org/10.1615/HeatTransRes>
  27. Dmitrenko A.V. The theory of equivalence measures and stochastic theory of turbulence for non-isothermal flow on the flat plate. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 2016, FMR-15458, vol. 43, iss. 2, pp. 182–187.  
DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v43.i2.10
  28. Dmitrenko A.V. Turbulent velocity field and the correlation moments of the second order determined by stochastic equations. Fractal equation of Landau. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 2016, FMR-15893, vol. 43, iss. 3, pp. 271–280.  
DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v43.i3.10
  29. Dmitrenko A.V. Stochastic equations for continuum and determination of hydraulic drag coefficients for smooth flat plate and smooth round tube with taking into account intensity and scale of turbulent flow. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 2017, vol. 29 (1), pp. 1–9. <https://doi.org/10.1007/s00161-016-0514-1>
  30. Dmitrenko A.V. Analytical determination of the heat transfer coefficient for gas, liquid and liquid metal flows in the tube based on stochastic equations and equivalence of measures for continuum. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 2017, vol. 29 (6), pp. 1197–1205. <https://doi.org/10.1007/s00161-017-0566-x>
  31. Dmitrenko A.V. Determination of the coefficients of heat transfer and friction in supercritical-pressure nuclear reactors with account of the intensity and scale of flow turbulence on the basis of the theory of stochastic equations and equivalence of measures. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2017, vol. 90 (6), pp. 1288–1294.  
<https://doi.org/10.1007/s10891-017-1685-8>
  32. Dmitrenko A.V. Results of investigations of non-isothermal turbulent flows based on stochastic equations of the continuum and equivalence of measures. *IOP Conf. Series: J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 1009, art. ID 012017.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1009/1/012017>

33. Dmitrenko A.V. The stochastic theory of the turbulence. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2018, vol. 468, art. ID 012021. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/468/1/012021>
34. Dmitrenko A.V. Determination of the correlation dimension of an attractor in a pipe based on the theory of stochastic equations and equivalence of measures. *2019 J. of Phys.: Conf. Series*, vol. 1291. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1291/1/012001>
35. Dmitrenko A.V. The correlation dimension of an attractor determined on the base of the theory of equivalence of measures and stochastic equations for continuum. *2019 Contin. Mechan. and Thermod.* <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00784-0>
36. Dmitrenko A.V. Formation of a Turbulence Spectrum in the Inertial Interval on the Basis of the Theory of Stochastic Equations and Equivalence of Measures. *J. of Eng. Phys. and Thermophys.*, 2015, vol. 88 (6), art. ID 1569. DOI: 10.1007/s10891-015-1344-x
37. Dmitrenko A.V. Theoretical solutions for spectral function of the turbulent medium based on the stochastic equations and equivalence of measures. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00890-4>
38. Dmitrenko A.V. The possibility of using low-potential heat based on the organic Rankine cycle and determination of hydraulic characteristics of industrial units based on the theory of stochastic equations. *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 125–132, 39. Dmitrenko A.V. Uncertainty relation in turbulent shear flow based on stochastic equations of the continuum and the equivalence of measures. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 32, no. 1, pp. 161–171. DOI: 10.1007/s00161-019-0566-x
39. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. Москва, Наука, 1969, 743 с.

## Присоединенная масса в вязкой несжимаемой жидкости при граничных условиях прилипания и частичного скольжения

© Г.Я. Дынникова

НИИ механики МГУ, Москва, Россия  
E-mail: dyn@imec.msu.ru

**Аннотация.** Доказано, что в вязкой несжимаемой жидкости при граничных условиях частичного скольжения и прилипания гидродинамическая сила равна сумме двух сил, одна из которых зависит только от скорости тела и распределения скорости в пространстве течения, а вторая равна произведению тензора присоединенных масс на вектор ускорения. При этом коэффициенты присоединенных масс не зависят от вязкости и коэффициента скольжения и совпадают с коэффициентами, вычисленными для потенциальных течений идеальной жидкости.

**Ключевые слова:** присоединенная масса, частичное скольжение, вязкая несжимаемая жидкость

В работе [1] доказана теорема о присоединенных массах в вязкой несжимаемой жидкости при условии прилипания на поверхности тела. Показано, что коэффициенты присоединенных масс не зависят

от вязкости, а только от геометрии тел и совпадают с коэффициентами, вычисленными для потенциальных течений идеальной жидкости. В данной работе эта теорема обобщена на случай граничного условия частичного скольжения.

При доказательстве использовано разложение Гельмгольца векторной функции  $\mathbf{G} = \nabla p$ , согласно которому любая непрерывная кусочно-гладкая векторная функция, определенная в области  $V_f$ , может быть выражена через ее ротор  $\mathbf{R}$ , дивергенцию  $H$  и значения на границах области  $S$ .

$$\left. \begin{aligned} &\mathbf{G}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in V_f \\ &\alpha \mathbf{G}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S \\ &0, \mathbf{r} \notin V_f \cup S \end{aligned} \right\} = \int_{V_f} \mathbf{R}(\mathbf{r}') \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV + \int_{V_f} H(\mathbf{r}') \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV + \\ + \int_S (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{G}(\mathbf{r}')) \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS + \int_S (\mathbf{G}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}')) \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS; \quad (1)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2^{\kappa-1} \pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{\kappa}}; \quad \mathbf{r}' \in V_f \cup S.$$

Коэффициент  $\alpha$  на гладкой поверхности равен  $1/2$ , нормаль  $\mathbf{n}$  направлена внутрь области  $V_f$ .

Ротор градиента давления равен нулю, а дивергенция выражается из уравнения Навье — Стокса. Проекция уравнения (1) на поверхность  $S$  представляет собой интегральное уравнение, определяющее функцию  $\Psi = \mathbf{n} \times \mathbf{G} = \mathbf{n} \times \nabla p$  на поверхности. Показано, что эта функция может быть представлена как сумма  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ , где функция  $\Psi_1$  зависит от скорости движения тела и мгновенного распределения скорости в пространстве течения, но не зависит от ускорения, а функция  $\Psi_2$  зависит только от ускорений (поступательного и углового), геометрии тела и границ течения. Причем зависимость от ускорений является линейной.

В [2, 3] доказаны тождества, справедливые для любой непрерывной кусочно-гладкой функции  $p$  на замкнутой поверхности  $S$ :

$$\mathbf{F}_p \equiv - \oint_{S_b} p \mathbf{n} dS = \frac{1}{\kappa-1} \oint_{S_b} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \nabla p) dS; \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_p \equiv \oint_{S_b} p \mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dS = - \frac{1}{2} \oint_{S_b} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 (\mathbf{n} \times \nabla p) dS.$$

Следовательно, силы давления могут быть представлены в виде суммы:

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_p^{stat} + \mathbf{F}^{ad}, \quad \mathbf{F}_p^{stat} = \frac{1}{\kappa - 1} \oint_{S_b} \mathbf{r} \times \Psi_1 \, ds,$$

$$\mathbf{F}^{ad} = \frac{1}{\kappa - 1} \oint_{S_b} \mathbf{r} \times \Psi_2 \, ds; \quad \mathbf{M}_p = \mathbf{M}_p^{stat} + \mathbf{M}^{ad},$$

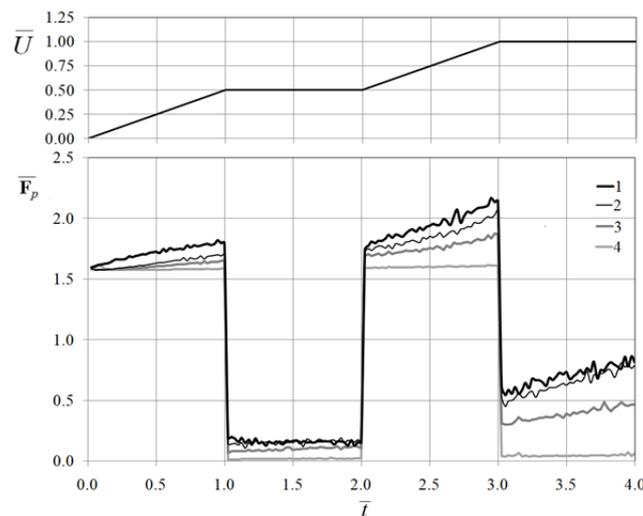
$$\mathbf{M}_p^{stat} = -\frac{1}{2} \oint_{S_b} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \Psi_1 \, ds, \quad \mathbf{M}^{ad} = -\frac{1}{2} \oint_{S_b} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \Psi_2 \, ds.$$

Здесь  $\mathbf{F}^{ad}$ ,  $\mathbf{M}^{ad}$  — сила и момент присоединенных масс, линейно зависящие от ускорений и не зависящие ни от вязкости, ни от коэффициента скольжения, ни от предыстории течения, причем коэффициенты при компонентах ускорения равны коэффициентам присоединенных масс для потенциальных течений.

Доказанная теорема иллюстрируется на примере расчета силы давления, действующей на цилиндр радиуса  $R$ , который начинает движение при  $t = 0$  в покоящейся жидкости в направлении, перпендикулярном своей оси, с переменной скоростью  $U$ ,

$$\bar{U} = \frac{U}{U_0} = \begin{cases} 0,5\bar{t}, & \bar{t} \leq 1; \\ 0,5, & 1 < \bar{t} \leq 2; \\ 0,5\bar{t} - 0,5, & 2 < \bar{t} \leq 3; \\ 1, & \bar{t} > 3, \end{cases}$$

где  $\bar{t} = tU_0/R$  — безразмерное время.



Сила давления, действующая на цилиндр при движении с переменной скоростью

На поверхности цилиндра ставится условие частичного скольжения. Расчеты выполнены бессеточным методом вязких вихревых доменов (ВВД) [4]. Выбрана модель скольжения, при которой поток завихренности  $\sigma$  пропорционален скачку тангенциальной скорости  $\Delta u$  на поверхности тела  $\sigma = \Delta u / \tau$ , так как эта модель наиболее удобна при решении задачи методом ВВД. На рисунке показаны зависимости безразмерной погонной силы  $\bar{F}_p = F_p / (\rho U_0^2 R)$  при  $Re = U_0 R / \nu = 250$  и разных значениях  $\bar{\tau} = \tau U_0 / R$ . Кривая 1 соответствует условию прилипания ( $\bar{\tau} = 0$ ), значения  $\bar{\tau}$  для кривых 2, 3 и 4 равны 0,5; 1, и 5 соответственно.

По графикам видно, что в моменты отключения и включения ускорения сила давления во всех случаях претерпевает скачок, равный  $1,57 \pm 0,02$ , что соответствует присоединенной массе  $(3,14 \pm 0,04) \rho R^2$  и согласуется с теоретическим значением присоединенной массы цилиндра в потенциальных течениях  $m^{ad} = \pi \rho R^2$ . Отметим, что сила трения зависит от мгновенного распределения завихренности и не зависит от ускорения. Поэтому полная гидродинамическая сила в рассмотренной задаче претерпевает такой же скачок.

#### Литература

1. Дынникова Г.Я. О присоединенной массе в модели вязкой несжимаемой жидкости *ДАН*, 2019, т. 488, № 5, с. 493–497. DOI: 10.31857/S0869-56524885493-497
2. Dynnikova G. Aerodynamic forces exerted on a body in viscous incompressible fluid resulting from vorticity generation on the body surface. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2018, vol. 468, no. 1, art. ID 012002. DOI: 10.1088/1757-899X/468/1/012002
3. Dynnikova G.Y., Andronov P.R. Expressions of force and moment exerted on a body in a viscous flow via the flux of vorticity generated on its surface. *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, 2018, vol. 72, no. Nov-Dec., pp. 293–300. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2018.06.002
4. Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье — Стокса. *ДАН*, 2004, т. 399, № 1, с. 42–46.

### Added mass in a viscous incompressible fluid under no-slip and partial slip boundary conditions

© G.Ya. Dynnikova

Institute of Mechanics, Lomonosov MSU, Moscow, Russia  
E-mail: dyn@imec.msu.ru

**Abstract.** It is proved that in a viscous incompressible fluid under the no-slip and partial slip boundary conditions, the hydrodynamic force is the sum of two forces, one of which depends only on the body velocity

and the velocity distribution in the flow space, and the second is equal to the product of the added masses tensor by the acceleration vector. The coefficients of the added masses do not depend on the viscosity and the slip coefficient and coincide with the coefficients calculated for the potential flows of an ideal fluid.

**Keywords:** *added mass, partial slip, viscous incompressible fluid.*

In [1], an added masses theorem was proved for the case of a viscous incompressible fluid under the no-slip condition at the body surface. It is shown that the coefficients of the added masses don't depend on the viscosity, but depend on the geometry of the bodies only and coincide with the coefficients calculated for the potential flows of an ideal fluid. In this paper, this theorem is generalized to the case of the partial slip boundary condition.

The proof used the Helmholtz decomposition of the vector function  $\mathbf{G} = \nabla p$ , whereby any continuous piecewise smooth vector function defined in the domain  $V_f$  can be expressed in terms of its curl  $\mathbf{R}$ , divergence  $H$ , and values at the domain boundaries  $S$ .

$$\left. \begin{aligned} &\mathbf{G}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in V_f \\ &\alpha \mathbf{G}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S \\ &0, \mathbf{r} \notin V_f \cup S \end{aligned} \right\} = \int_{V_f} \mathbf{R}(\mathbf{r}') \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV + \int_{V_f} H(\mathbf{r}') \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV + \\ + \int_S (\mathbf{n}(\mathbf{r}') \times \mathbf{G}(\mathbf{r}')) \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS + \int_S (\mathbf{G}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}')) \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS. \quad (1)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2^{\kappa-1} \pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{\kappa}}; \quad \mathbf{r}' \in V_f \cup S;$$

On a smooth surface the coefficient  $\alpha$  is equal to  $1/2$ , the normal  $\mathbf{n}$  is directed into the domain  $V_f$ . Curl of the pressure gradient is equal to zero and the divergence is expressed from the Navier-Stokes equation. The projection of equation (1) onto the surface  $S$  is an integral equation that defines a function  $\Psi = \mathbf{n} \times \mathbf{G} = \mathbf{n} \times \nabla p$  on the surface. It is shown that this function can be represented as a sum  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ , where the function  $\Psi_1$  depends on the velocity of the body and the instantaneous distribution of the velocity in the flow region, but it does not depend on the acceleration, the function  $\Psi_2$  depends only on the accelerations (translational and angular), the geometry of the body and the boundaries of the flow. Moreover, the dependence on acceleration is linear.

In [2, 3], identities were proved that are valid for any continuous piecewise smooth function  $p$  on the closed surface  $S$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p &\equiv -\oint_{S_b} p \mathbf{n} \, ds = \frac{1}{\kappa - 1} \oint_{S_b} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \nabla p) \, ds; \\ \mathbf{M}_p &\equiv \oint_{S_b} p \mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \, ds = -\frac{1}{2} \oint_{S_b} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 (\mathbf{n} \times \nabla p) \, ds. \end{aligned} \quad (2)$$

Therefore, the pressure forces can be represented as the sum

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p &= \mathbf{F}_p^{stat} + \mathbf{F}^{ad}, \quad \mathbf{F}_p^{stat} = \frac{1}{\kappa - 1} \oint_{S_b} \mathbf{r} \times \Psi_1 \, ds, \\ \mathbf{F}^{ad} &= \frac{1}{\kappa - 1} \oint_{S_b} \mathbf{r} \times \Psi_2 \, ds; \quad \mathbf{M}_p = \mathbf{M}_p^{stat} + \mathbf{M}^{ad}, \\ \mathbf{M}_p^{stat} &= -\frac{1}{2} \oint_{S_b} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \Psi_1 \, ds, \quad \mathbf{M}^{ad} = -\frac{1}{2} \oint_{S_b} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \Psi_2 \, ds, \end{aligned}$$

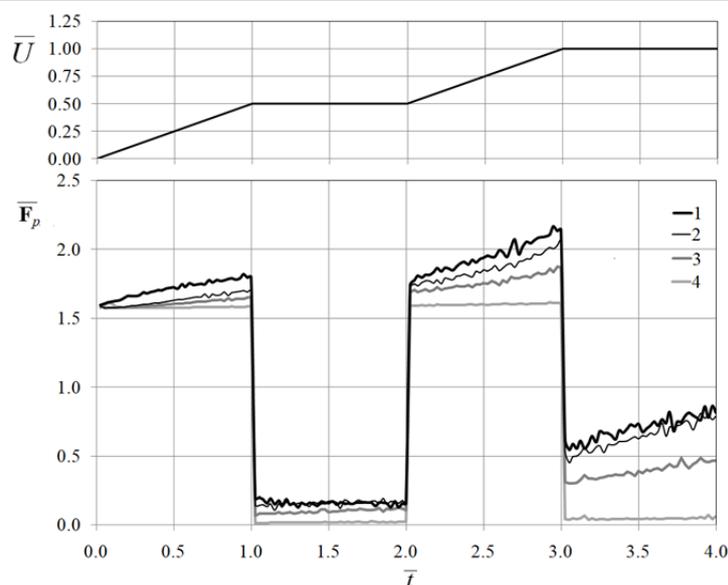
where  $\mathbf{F}^{ad}, \mathbf{M}^{ad}$  are force and moment of added masses, linearly dependent on accelerations and independent of viscosity, slip coefficient, or flow history. The coefficients at the acceleration components are equal to the coefficients of added masses for potential flows.

The proved theorem is illustrated by the example of the pressure force acting on a cylinder of radius  $R$ , which begins to move at  $t = 0$  in a fluid at rest in a direction perpendicular to its axis, with a variable velocity  $U$ ,

$$\bar{U} = \frac{U}{U_0} = \begin{cases} 0.5\bar{t}, & \bar{t} \leq 1; \\ 0.5, & 1 < \bar{t} \leq 2; \\ 0.5\bar{t} - 0.5, & 2 < \bar{t} \leq 3; \\ 1, & \bar{t} > 3, \end{cases}$$

where  $\bar{t} = tU_0/R$ .

A partial slip condition is set on the cylinder surface. The calculations were performed by the meshless method of Viscous Vortex Domains (VVD) [4]. A slip model is chosen, in which the vorticity flux  $\sigma$  is proportional to the jump in the tangential velocity  $\Delta u$  on the body surface  $\sigma = \Delta u/\tau$ , since this model is most convenient for solving the problem by the VVD method. In the figure, the dependences of the force  $\bar{F}_p = F_p/(\rho U_0^2 R)$  are shown at  $Re = U_0 R/\nu = 250$  and different values  $\bar{\tau} = \tau U_0/R$ . Curve 1 corresponds to the no-slip boundary condition ( $\bar{\tau} = 0$ ), the values  $\bar{\tau}$  for curves 2, 3, and 4 are 0.5, 1, and 5, respectively.



Pressure force acting on a cylinder moving at variable speed.

It can be seen from the graphs that at the moments of turning off and turning on the acceleration, the pressure force in all cases undergoes a jump equal to  $1.57 \pm 0.02$ , which corresponds to the added mass  $(3.14 \pm 0.04) \rho R^2$  that agrees with the theoretical value of the added mass of the cylinder in potential flows  $m^{ad} = \pi \rho R^2$ . Note that the friction force depends on the instantaneous vorticity distribution and does not depend on acceleration. Therefore, the total hydrodynamic force in the considered problem undergoes the same jump.

## References

1. Dynnikova G.Ya. Added mass in a model of a viscous incompressible fluid. *Doklady Physics*, 2019, vol. 64, no. 10, pp. 397–400. DOI: 10.1134/S1028335819100045
2. Dynnikova G. Aerodynamic forces exerted on a body in viscous incompressible fluid resulting from vorticity generation on the body surface. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2018, vol. 468, no. 1, art. 012002. DOI: 10.1088/1757-899X/468/1/012002
3. Dynnikova G.Ya., Andronov P.R. Expressions of force and moment exerted on a body in a viscous flow via the flux of vorticity generated on its surface. *European Journal of Mechanics, B/Fluids*. 2018. vol. 72, no. Nov-Dec., pp. 293–300. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2018.06.002
4. Dynnikova G.Ya. The lagrangian approach to solving the time-dependent Navier—Stokes equations. *Doklady Physics*, 2004, vol. 49, no. 11, pp. 648–652.

## Численное моделирование процессов образования и дробления вихрей при обтекании перфорированной поверхности

© А.С. Епихин<sup>1,2\*</sup>, В.Т. Калугин<sup>1</sup>, П.А. Чернуха<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>ИСП им. В.П. Иванникова РАН, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): andrey.epikhin@bk.ru

**Аннотация.** В работе проведено численное моделирование трехмерного обтекания сплошной и перфорированной пластины при различных углах атаки с применением пакета OpenFOAM. Для расчетов использовался метод крупных вихрей. Получены как аэродинамические характеристики, так и структуры их обтекания. Проведен анализ структур обтекания и определены особенности процессов образования и дробления вихрей за счет перфорации поверхности. Выполнено сравнение с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** численное моделирование, перфорация, аэродинамические характеристики, метод крупных вихрей, OpenFOAM.

## Numerical simulation of the physical processes of formation and propagation of vortices at the flow around perforated plate

© A.S. Epikhin<sup>1,2\*</sup>, V.T. Kalugin<sup>1</sup>, P.A. Chernukha<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Ivannikov Institute for System Programming of the RAS, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): andrey.epikhin@bk.ru

**Abstract.** The aim of the present investigation is to obtain and analyze flow field and aerodynamic characteristics of perforated plates at different angles by numerical simulation using OpenFOAM software package. Large Eddy Simulation was used to obtain a detailed representation of turbulent velocity flow field in the near wake of the drag plates. The numerical simulation were performed and compared with experimental data to assess aerodynamic performance of solid and perforated inclined plates which simulate forward-opening configuration of the drag brakes. For fully perforated plate's passive gas injection through the holes close to the leading edge induce separation zone deformation and affect the whole flow structure downstream.

**Keywords:** numerical simulation, perforation, aerodynamic performance, LES, OpenFOAM.

## Особенности процесса обтекания перфорированной пластины с внутренней полостью

© А.Г. Голубев\*, М.Д. Калугина\*\*

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: alexeygg@yandex.ru; \*\*maria224466@yandex.ru

**Аннотация.** Исследован процесс обтекания двух пластин с одинаковыми геометрическими параметрами, но с различным конструкционным исполнением: 1) с внутренней полостью, в которую через отверстия может затекать воздух (тип 1); 2) со сквозной перфорацией (тип 2). Рассмотрены структуры течений, полученные при численном моделировании обтекания пластины типа 1 дозвуковым потоком воздуха под углом атаки  $\alpha = 0 \dots 90^\circ$  в пакете SolidWorks Flow Simulation. Проведен сравнительный анализ аэродинамических характеристик (АДХ) обоих типов пластин при изменении угла атаки.

**Ключевые слова:** пластина, сквозная перфорация, внутренняя полость, аэродинамические характеристики.

**Введение.** До сих пор одним из актуальных направлений современной аэродинамики является организация управления и стабилизации внешнего газового потока при обтекании различных летательных аппаратов (ЛА) [1]. Конструкция наиболее эффективного ЛА должна способствовать безотрывному обтеканию компоновки для обеспечения необходимых АДХ на всем протяжении полета и отсутствия у них нестационарного характера изменения [2].

В данной работе для устранения крупномасштабных вихревых структур, при взаимодействии с которыми могут возникать вибрации конструкции ЛА [3], предложено использовать перфорацию поверхности с внутренней полостью и без нее на примере плоской пластины.

**Исследование обтекания перфорированной пластины с внутренней полостью.** Для проведения процесса численного моделирования трехмерного обтекания была выбрана плоская перфорированная пластина типа 1. Ее относительная длина  $\bar{l} = 1$ , ширина  $\bar{b} = 1$ , толщина  $\bar{c} = 0,04$  и относительный диаметр отверстий  $\bar{d}_{\text{отв}} = 0,027; 0,04; 0,067; 0,093$  рассчитывались по формулам:

$$\bar{l} = \frac{l}{l}, \quad \bar{b} = \frac{b}{l}, \quad \bar{c} = \frac{c}{l}, \quad \bar{d}_{\text{отв}} = \frac{d_{\text{отв}}}{l},$$

где  $l$  — длина пластины ( $l = 150$  мм);  $b$  — ширина пластины;  $c$  — толщина пластины.

Степень перфорации вычислялась по зависимости:

$$\sigma = \frac{S_{\text{отв}}}{S} \cdot 100 \%,$$

где  $S_{\text{отв}}$  — площадь всех отверстий, расположенных на пластине;  
 $S$  — площадь пластины.

Углы атаки изменялись в диапазоне  $\alpha = 0 \dots 90^\circ$  с шагом  $\Delta\alpha = 30^\circ$ . Параметры дозвукового потока соответствовали числу Рейнольдса  $Re = 2,5 \cdot 10^5$ , рассчитанному по длине пластины. При этом давление  $p = 101325$  Па, плотность  $\rho = 1,225$  кг/м<sup>3</sup>.

Численное моделирование проводилось в программном пакете SolidWorks 2018 Flow Simulation путем решения системы уравнений, выражающих основные законы сохранения. Начальная расчетная область представляет собой куб с длиной стороны 1,5 м. Число ячеек базовой расчетной сетки составляло примерно  $1 \cdot 10^6$ , при этом было выполнено измельчение ячеек вблизи отверстий путем построения локальной сетки с уровнем дробления ячеек в текучей среде, равным 5, и сгущение сетки к поверхности пластины.

В результате были получены структуры течения с распределением скорости для пластин с различными диаметрами отверстий и степенями перфорации:  $\bar{a}_{\text{отв}} = 0,027$  ( $\sigma = 40,7 \%$ );  $0,04$  ( $\sigma = 40,7 \%$ );  $0,067$  ( $\sigma = 22,3 \%$  и  $50,2 \%$ );  $0,093$  ( $\sigma = 43,8 \%$ ).

Было выявлено, что при нулевом угле атаки вихри, образующиеся в передней части пластины, приводят к некоторому расширению потока, однако далее структура течения более равномерна. При  $\alpha = 30^\circ$  происходит двойное искривление потока при его протекании сквозь внутреннюю полость, которое становится более заметно при увеличении диаметра отверстий. С увеличением угла атаки до  $\alpha = 60^\circ$  ближе к передней кромке пластины струи движутся практически прямолинейно, однако начиная с середины пластины на подветренной стороне воздушный поток раздваивается в процессе обтекания твердой оболочки. При этом основной поток не приобретает дополнительных возмущений за счет искривленных струй.

Локальные вихреобразования возникают между отверстиями, возле задней кромки пластины и внутри полости около скруглений кромок при  $\alpha = 0$  и  $30^\circ$ , а крупные вихревые структуры образуются вдали от поверхности пластины при  $\alpha = 60^\circ$ .

По полученным значениям сил были рассчитаны коэффициент продольной  $c_x$  и нормальной силы  $c_y$ .

На основании полученных данных можно сделать вывод о том, что чем выше степень перфорации  $\sigma$ , в том числе и при равных значениях диаметров, тем большее значение принимает коэффициент

продольной силы. Однако в случае  $\bar{d}_{\text{отв}} = 0,027$  ( $\sigma = 40,7\%$ )  $c_x$  больше, нежели при  $\bar{d}_{\text{отв}} = 0,067$  ( $\sigma = 50,2\%$ ).

Определяющую роль играет также диаметр отверстий: при равной степени перфорации меньший  $c_x$  получается при большем значении  $\bar{d}_{\text{отв}}$ .

При анализе зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки было отмечено, что после  $\alpha = 50^\circ$  наименьшим значением обладает пластина с минимальной степенью перфорации, при  $\alpha < 50^\circ$  значения для всех вариантов достаточно близки. Максимум  $c_y$  на всем участке изменения угла атаки наблюдался при  $\bar{d}_{\text{отв}} = 0,067$  ( $\sigma = 50,2\%$ ), т. е. когда степень перфорации наибольшая.

При сравнении АДХ двух типов пластин установлено, что коэффициент продольной силы в случае наличия у пластины с относительной толщиной 0,04 протоков с внутренней полостью меньше, нежели у аналогичных пластин с относительной толщиной 0,027 и 0,04 со сквозными отверстиями. Максимальное значение коэффициента  $c_x$  достигается при угле атаки  $\alpha = 30^\circ$ .

Получено, что  $c_y$  в случае наличия у пластины с относительной толщиной 0,04 протоков с внутренней полостью имеет большее значение при  $\alpha < 50^\circ$ , нежели пластины с относительной толщиной 0,027 и 0,04 со сквозными отверстиями.

**Выводы.** В результате численного моделирования процесса обтекания плоской перфорированной пластины с внутренней полостью при различных углах атаки были получены структуры обтекания и рассчитаны АДХ, сравнение которых проведено с аэродинамическими характеристиками пластины типа 2.

## Литература

1. Chernyshev S.L., Gaifullin A.M., Sviridenko Yu.N. Civil aircraft vortex wake TsAGI's research activities. *An International Review Journal "Progress in aerospace sciences"*, 2014, pp. 150–165.
2. Epikhin A.A., Kalugin V.T. Features of numerical simulation of the unsteady vortex flow around aircraft considering airbrake. *Conference Series Materials Science and Engineering*, 2018, art. 012035.
3. Епихин А.С., Калугин В.Т. Методы снижения и расчет нестационарных аэродинамических нагрузок при килевом бафтинге маневренного самолета. *Математическое моделирование*, 2017, т. 29, № 10, с. 35–44.

## Features of the flow process around a perforated plate with an internal cavity

© A.G. Golubev<sup>a)</sup>, M.D. Kalugina<sup>b)</sup>

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: <sup>a)</sup>alexeygg@yandex.ru; <sup>b)</sup>maria224466@yandex.ru

**Abstract.** The process of flow around two plates with the same geometric parameters, but with different design versions: 1) with an internal cavity, into which air can flow through the holes (type 1); 2) with through perforation (type 2). The structure of the flows obtained in the numerical simulation of the flow around a plate of type 1 by a subsonic air flow at an angle of attack  $\alpha = 0 \dots 90^\circ$  in the SolidWorks FlowSimulation package are considered. A comparative analysis of the aerodynamic characteristics (ADC) of both types of plates with a change in the angle of attack is carried out.

**Keywords:** *plate, through perforation, internal cavity, aerodynamic characteristics.*

**Introduction.** Until now, one of the topical areas of modern aerodynamics is the organization of control and stabilization of the external gas flow when flowing around various aircraft (AC) [1]. The design of the most efficient aircraft should facilitate uninterrupted flow around the assembly to ensure the necessary ADC throughout the flight and the absence of a non-stationary nature of changes in them [2].

In this paper, in order to eliminate large-scale vortex structures, when interacting with which vibrations of the aircraft structure may occur [3], it is proposed to use surface perforation with and without an internal cavity on the example of a flat plate.

**Study of the flow around a perforated plate with an internal cavity.** To carry out the process of numerical simulation of three-dimensional flow, a flat perforated plate of type 1 was selected. Its relative length  $\bar{l} = 1$ , width  $\bar{b} = 1$ , thickness  $\bar{c} = 0,04$  and relative diameter of the holes  $\bar{d}_h = 0,027; 0,04; 0,067; 0,093$  were calculated by the formulas:

$$\bar{l} = \frac{l}{l}, \bar{b} = \frac{b}{l}, \bar{c} = \frac{c}{l}, \bar{d}_h = \frac{d_h}{l},$$

where  $l$  is the length of the plate ( $l = 150$  mm);  $b$  is the width of the plate;  $c$  is the plate thickness.

The degree of perforation was calculated from the relationship:

$$\sigma = \frac{S_h}{S} \cdot 100 \%,$$

where  $S_h$  is the area of all holes located on the plate;  $S$  is the area of the plate.

The angles of attack varied in the range  $\alpha = 0 \dots 90^\circ$  with a step of  $\Delta\alpha = 30^\circ$ . The parameters of the subsonic flow corresponded to the Reynolds number  $Re = 2.5 \cdot 10^5$ , calculated from the length of the plate. In this case, the pressure is  $p = 101325$  Pa, the density is  $\rho = 1.225$  kg / m<sup>3</sup>.

Numerical modeling was carried out in the SolidWorks 2018 Flow Simulation software package by solving a system of equations expressing the basic conservation laws. The initial computational domain is a cube with a side length of 1.5 m. The number of cells of the basic computational grid was approximately  $1 \times 10^6$ , and the cells were refined near the holes by constructing a local grid with a level of cell fragmentation in a fluid medium equal to 5, and mesh to the surface of the plate.

As a result, flow structures were obtained with a velocity distribution for plates with different hole diameters and degrees of perforation:  $\bar{d}_h = 0.027$  ( $\sigma = 40.7\%$ );  $0.04$  ( $\sigma = 40.7\%$ );  $0.067$  ( $\sigma = 22.3\%$  и  $50.2\%$ );  $0.093$  ( $\sigma = 43.8\%$ ).

It was found that at a zero angle of attack, the vortices formed in the front part of the plate lead to some expansion of the flow, but further the flow structure is more uniform. At  $\alpha = 30^\circ$ , a double curvature of the flow occurs when it flows through the inner cavity, which becomes more noticeable with an increase in the diameter of the holes. With an increase in the angle of attack to  $\alpha = 60^\circ$ , the jets move almost rectilinearly closer to the front edge of the plate, however, starting from the middle of the plate, on the leeward side, the air flow bifurcates during the flow around the solid shell. In this case, the main stream does not acquire additional disturbances due to curved jets.

Local vortex formations occur between the holes, near the trailing edge of the plate and inside the cavity near the rounding of the edges at  $\alpha = 0$  and  $30^\circ$ , and large vortex structures are formed far from the plate surface at  $\alpha = 60^\circ$ .

From the obtained values of the forces, the coefficients of the longitudinal  $c_x$  and normal forces  $c_y$  were calculated.

Based on the data obtained, it can be concluded that the higher the degree of perforation  $\sigma$ , including with equal values of the diameters, the greater the value of the coefficient of longitudinal force. However, in the case of  $\bar{d}_h = 0.027$  ( $\sigma = 40.7\%$ )  $c_x$ , it is greater than in the case of  $\bar{d}_h = 0.067$  ( $\sigma = 50.2\%$ ).

The decisive role is also played by the diameter of the holes: with an equal degree of perforation, a smaller  $c_x$  is obtained with a larger value  $\bar{d}_h$ .

When analyzing the dependence of the lift coefficient on the angle of attack, it was noted that after  $\alpha = 50^\circ$  the plate with the minimum degree of perforation has the smallest value; at  $\alpha < 50^\circ$  the values for all variants are quite close. The maximum  $c_y$  in the entire section of the change in the angle of attack was observed at  $\bar{d}_h = 0.067$  ( $\sigma = 50.2\%$ ), i.e. when the degree of perforation is greatest.

When comparing the ADC of the two types of plates, it was found that the coefficient of longitudinal force in the case of a plate with a relative thickness of 0.04 with ducts with an internal cavity is less than for similar plates with a relative thickness of 0.027 and 0.04 with through holes. The maximum value of the coefficient  $c_x$  is achieved at an angle of attack  $\alpha = 30^\circ$ .

It was found that  $c_y$  in the case of a plate with a relative thickness of 0.04 with ducts with an internal cavity has a greater value at  $\alpha < 50^\circ$  than for plates with a relative thickness of 0.027 and 0.04 with through holes.

**Conclusion.** As a result of numerical simulation of the process of flow around a flat perforated plate with an internal cavity at various angles of attack, the flow structures were obtained and the ADC were calculated, which were compared with the aerodynamic characteristics of the type 2 plate.

#### References

1. Chernyshev S.L., Gaifullin A.M., Sviridenko Yu.N. Civil aircraft vortex wake TsAGI's research activities. *An International Review Journal "Progress in aerospace sciences"*, 2014, pp. 150–165.
2. Epikhin A.A., Kalugin V.T. Features of numerical simulation of the unsteady vortex flow around aircraft considering airbrake. *Conference series materials science and engineering*, 2018, art. 012035.
3. Epikhin A.S., Kalugin V.T. Methods of reduction and calculation of non-stationary aerodynamic loads during keel buffering of a maneuverable aircraft. *Mathematical Modeling*, 2017, vol. 29, no. 10, pp. 35–44.

## Экспериментальное исследование теплоотдачи и трения в канале при течении за цилиндром

© Н.А. Киселёв, А.Г. Здитовец, Ю.А. Виноградов

НИИ механики МГУ, Москва, Россия  
E-mail: kiselev.nick.a@gmail.com

**Ключевые слова:** коэффициент теплоотдачи, коэффициент трения, интенсификация теплообмена, турбулентный пограничный слой.

Согласно ряду работ (de Souza et al., 1999), установка цилиндра в турбулентный пограничный слой на гладкой пластине приводит к разрушению теплового и динамического пограничных слоев. В данной работе рассмотрено влияние диаметра цилиндра, установленного поперек направления течения в щелевом канале. Экспериментальные исследования проводились на малой дозвуковой аэродинамической трубе НИИ механики МГУ. Щелевой рабочий канал имел размеры: длина 1080 мм, высота 30 мм и ширина 300 мм. На оси канала попе-

рек потока устанавливался круговой цилиндр, задняя кромка которого располагалась на расстоянии 700 мм от начала рабочего канала. Исследовались следующие диаметры цилиндра: 2,75, 3,2, 4,2, 5,88, 7,4 и 8 мм. Скорость набегающего потока составляла 50 м/с.

Коэффициенты теплоотдачи и трения определялись на участке 0...120 мм от задней кромки цилиндров. Коэффициенты теплоотдачи определялись нестационарным методом с использованием ИК камеры. Коэффициент трения определялся методом Клаузера — динамическая скорость в данном сечении подбиралась таким образом, чтобы профиль скорости в координатах стенки совпадал с универсальным логарифмическим профилем.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 18-08-00413 и СП-4006.2018.1.*

### Литература

1. de Souza F., Delville J., Lewalle J., & Bonnet J.P. Large scale coherent structures in a turbulent boundary layer interacting with a cylinder wake. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 1999, vol. 19 (4), pp. 204–213.  
[https://doi.org/10.1016/S0894-1777\(99\)00022-9](https://doi.org/10.1016/S0894-1777(99)00022-9)

## Experimental investigation of heat transfer and friction in a channel flow behind the cylinder

© N.A. Kiselev, A.G. Zditovets, Yu.A. Vinogradov

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia  
E-mail: kiselev.nick.a@gmail.com

**Keywords:** *heat transfer coefficient, friction coefficient, heat transfer enhancement, turbulent boundary layer.*

According to a number of papers (de Souza et al., 1999), the installation of a cylinder in a turbulent boundary layer on a smooth plate leads to the destruction of the thermal and dynamic boundary layers. In this paper we consider the effect of the diameter of a cylinder installed across the direction of flow in a slot channel.

Experimental studies were carried out on a subsonic wind tunnel of the Research Institute of Mechanics, Moscow State University. The slot working channel had the following dimensions: 1080 mm long, 30 mm high and 300 mm wide. A circular cylinder was mounted on the channel axis across the flow, the trailing edge of which was located at a distance of 700 mm from the beginning of the working channel. 7 different cylinder diameters were investigated: 2.75, 3.2, 4.2, 5.88, 7.54 and 8 mm. The oncoming flow velocity was 50 m / s.

The heat transfer and friction coefficients were determined in the area 0...120 mm from the trailing edge of the cylinders. The heat transfer coefficients were determined by a transient method using an IR camera. The friction coefficient was determined by the Klauser method by the dynamic velocity in a given section was selected in such a way that the velocity profile in the wall coordinates coincided with the universal logarithmic profile.

*This work was supported by the RFBR grants no. 18-08-00413 and SP-4006.2018.1.*

## References

1. de Souza F., Delville J., Lewalle J., & Bonnet J.P. Large scale coherent structures in a turbulent boundary layer interacting with a cylinder wake. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 1999, vol. 19 (4), pp. 204–213. [https://doi.org/10.1016/S0894-1777\(99\)00022-9](https://doi.org/10.1016/S0894-1777(99)00022-9)

## Об определении азимутальной скорости в круглой трубе при наличии пристенных спиральных завихрителей

© А.С. Кондратьев, К.Ф. Огородник, П.П. Швыдько

Московский государственный политехнический университет, Москва, Россия

Стационарное циркуляционно-продольное течение ньютоновской жидкости в трубе с непрерывными поверхностными завихрителями или вращения трубы является широко распространенным видом движения в различных установках, используемых в ядерной энергетике, химической, биологической и других отраслях промышленности.

Наряду с зависимостями, предложенными в работах [1, 2], выражение для азимутальной скорости  $W$  можно представить в виде обобщенной зависимости

$$W/W_R = a(r/R) / [b + c(r/R)^n], \quad (1)$$

где  $W_R$  — величина азимутальной скорости на стенке трубы (завихрителе) при  $r = R$ ;  $r$  — текущий радиус;  $R$  — внутренний радиус трубы;  $r_m$  — радиус, при котором азимутальная скорость максимальна;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $n$  — постоянные, которые подбираются из условий наилучшего соответствия с опытными данными.

Можно показать, что вся совокупность опытных данных описывается следующим набором параметров.

Если принять  $W/W_R = 0$  при  $(r/R) = 0$ ;  $W/W_R = 2,6$  при  $(r_m/R) = 0,2$ ;  $W/W_R = 1$  при  $(r/R) = 1$ , получим, что  $a = 26$ ;  $b = 1$ ;  $c = 25$ . Если принять, что  $W/W_R = 3,0$  при  $(r_m/R) = 0,2$ , то при  $n = 2,1$  получим, что  $a = 29,61838$ ;  $b = 1$ ;  $c = 28,61838$ . Если принять, что  $W/W_R = 3,6$  при  $(r_m/R) = 0,2$ , то при  $n = 2,3$  получим, что  $a = 31,59009$ ;  $b = 1$ ;  $c = 30,59009$ .

По формуле (1) при  $r = r_m$  можно определить максимальное значение азимутальной скорости  $W_m$ , используя которое, можно получить выражение для распределения азимутальной скорости относительно ее максимального значения. Проведем необходимые выкладки, получаем

$$W/W_m = (r/r_m)[b + c(r_m/r)^n]/[b + c(r/R)^n]. \quad (2)$$

В этом случае также возможно провести расчеты при различных сочетаниях значений коэффициентов в формуле (2).

На основе анализа расчетно-эмпирических аппроксимаций профиля азимутальных скоростей при циркуляционно-продольном течении в трубе получена новая расчетно-эмпирическая зависимость, обобщающая ранее предложенные зависимости.

### Литература

1. Зуйков А.Л. Аппроксимирующие профили циркуляционных характеристик закрученного течения. *Вестн. МГСУ*, 2011, № 5, с. 185–190.
2. Сугак Е.В., Сугак А.В. Моделирование турбулентных закрученных потоков. *Соврем. проб. науки образ.*, 2013, № 1, 9 с.

## On determining the azimuthal velocity in round pipe in the presence of wall spiral swirls

© A.S. Kondratiev, K.F. Ogorodnik, P.P. Shvydko

Moscow State Polytechnic University, Moscow, Russia

Stationary circulation-longitudinal flow of Newtonian fluid in a pipe with continuous surface swirlers or pipe rotation is a widespread type of motion in various installations used in nuclear power, chemical, biological and other industries.

Along with the dependences proposed in [1, 2], the expression for the azimuthal velocity  $w$  can be represented in the form of a generalized dependence

$$W/W_R = a(r/R)/[b + c(r/R)^n], \quad (1)$$

where  $W_R$  is the value of the azimuthal velocity on the pipe wall (swirler) at  $r = R$ ;  $r$  is the current radius;  $R$  is the inner radius of the pipe;  $r_m$  is the radius at which the azimuthal velocity is maximum, and the constants  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $n$  are selected from the conditions of the best fit with the experimental data.

It can be shown that the entire set of experimental data is described by the following set of parameters.

If we take  $W/W_R = 0$  with  $(r/R) = 0$ ;  $W/W_R = 2,6$  with  $(r_m/R) = 0,2$   $W/W_R = 1$  for  $(r/R) = 1$ , we obtain that  $a = 26$ ;  $b = 1$ ;  $c = 25$ . If we assume that  $W/W_R = 3,0$  with  $(r_m/R) = 0,2$ , then with  $n = 2.1$  we obtain that  $a = 29.61838$ ;  $b = 1$ ;  $c = 28.61838$ . If we assume that  $W/W_R = 3,6$  with  $(r_m/R) = 0,2$  then with  $n = 2.3$  we get that  $a = 31.59009$ ;  $b = 1$ ;  $c = 30.590$ .

According to the formula (1) at  $r = r_m$  one can determine the maximum value of the azimuthal velocity  $W_m$ , using which, one can obtain an expression for the distribution of the azimuthal velocity relative to its maximum value. Having done the necessary calculations, we get

$$W/W_m = (r/r_m)[b + c(r_m/r)^n]/[b + c(r/R)^n]. \quad (2)$$

In this case, it is also possible to carry out calculations with different combinations of coefficient values in the last formula.

Based on the analysis of the computational-empirical approximations of the azimuthal velocity profile in the circulation-longitudinal flow in the pipe, a new computational-empirical dependence was obtained, generalizing the previously proposed dependencies.

## References

1. Zuikov A.L. Approximating profiles of circulation characteristics of swirling flow. *Vestn. MGSU*, 2011, no. 5, pp. 185–190.
2. Sugak E.V., Sugak A.V. Modeling of turbulent swirling flows. *Sovrem. samples. science image*, 2013, no. 1, 9 p.

## Влияние показателя адиабаты и радиационных процессов на взаимодействие газового уплотнения с ускоренно движущимся слоем

© Г.Ю. Котова<sup>1</sup>, К.В. Краснобаев<sup>1,2</sup>, Р.П. Тагирова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

E-mail: kvk-kras@list.ru, gviana.k@gmail.com, rtaghirova@gmail.com

**Аннотация.** Численно смоделированы кумулятивные явления, возникающие при взаимодействии облака с газовым слоем или сферической оболочкой. Ускорение слоя происходит вследствие разности давлений на обеих его сторонах. В общем случае ускорение слоя обусловлено также неравновесными процессами радиационного нагрева газа излучением от внешнего источника. Найдено, что с уменьшением показателя адиабаты качественные особенности погружения облака в слой существенно не меняются и возникают кумулятивные струи, скорость газа в которых направлена в сторону, противоположную начальной скорости газа. При фиксированной кинетической энергии облака увеличение сжимаемости приводит к росту плотности в струе и к возрастанию отношения длины струи к ее поперечному размеру. Выявлена немонотонность изменения радиуса струи вдоль оси симметрии. Установлено, что для сферической оболочки существенным является эффект уменьшения ускорения из-за падения давления внутри сферы. Характерным для такого движения является существование внешней ударной волны, которая способна влиять на деформацию уплотнения. Для слоя, формирующегося под действием внешнего ионизирующего излучения, найдено, что возможно разрушение облака и формирование кумулятивной струи горячего газа.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00184).*

## **Effect of adiabatic index and radiation processes on interaction of a gas condensation with an accelerated moving layer**

© G.Yu. Kotova<sup>1</sup>, K.V. Krasnobaev<sup>1,2</sup>, R.R. Tagirova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Mechanics and Mathematics,

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences (IKI), Moscow, Russia

E-mail: kvk-kras@list.ru, gviana.k@gmail.com, rtagirova@gmail.com

**Abstract.** The cumulative phenomena arising from the interaction of a cloud with a gas layer or a spherical shell are numerically simulated. The acceleration of the layer occurs due to the pressure difference on both sides of it. In the general case, the acceleration of the layer is also due to non-equilibrium processes of radiation heating of the gas by radiation from an external source. It is shown that with a decrease in the adiabatic index, the qualitative features of cloud immersion into the layer do not change significantly and cumulative jets appear. The gas velocity in cumulative jets is directed opposite to the initial gas velocity. At a fixed kinetic energy of the cloud, an increase in compressibility leads to an increase in

the density in the jet and to growth of the ratio of the jet length to its transverse size. It is revealed that the change in the radius of the jet along the axis of symmetry is non-monotonic. The effect of a decrease in acceleration due to a pressure drop inside the sphere is found significant for a spherical shell. This moving is characterized by the existence of an external shock wave, which is able to influence the deformation of the seal. For the layer formed under the action of external ionizing radiation, we show that the destruction of the cloud and the formation of a cumulative jet of hot gas is possible.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00184).*

## **Отрывные и вихревые структуры при сверхзвуковом обтекании удлиненного цилиндрикоконического тела под углами атаки**

© С.В. Гувернюк<sup>1</sup>, А.Г. Кузьмин<sup>2\*</sup>, М.М. Симоненко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>НИИ механики МГУ, Москва, Россия

<sup>2</sup>СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail: a.kuzmin@spbu.ru

**Аннотация.** Представлены результаты численного моделирования сверхзвукового обтекания удлиненного цилиндрикоконического осесимметричного тела под углами атаки. На подветренной поверхности тела идентифицированы отрывные структуры, включающие первичный поперечный отрыв набегающего потока и вторичный отрыв расходящегося от плоскости симметрии течения. Отрывы потока инициируют формирование глобальных и локальных вихревых структур в подветренном течении. Поперечное растекание потока на подветренной поверхности приводит к уменьшению толщины пограничного слоя в окрестности линии растекания и формированию в этой области пристеночного высоконапорного сверхзвукового течения, которое может вызывать локальное повышение давления на выступающих препятствиях.

**Ключевые слова:** осесимметричное тело, сверхзвуковой поток, отрыв потока.

Характерной особенностью сверхзвукового обтекания удлиненных тел под углом атаки является поперечный отрыв потока, приводящий к формированию сложной вихревой структуры с подветренной стороны тела [1, 2]. Исследования трехмерного сверхзвукового

обтекания удлиненных тел с кольцевыми выступами проводились в [3, 4], при этом был обнаружен эффект локального повышения давления на подветренной стороне выступа.

В настоящей работе представлены результаты численного моделирования сверхзвукового обтекания удлиненного осесимметричного гладкого тела. Рассматриваемое тело состоит из цилиндрического корпуса (диаметр  $d = 30$  мм, длина  $L = 260$  мм) с коническим наконечником (угол полураствора  $20^\circ$ ). Набегающий сверхзвуковой поток воздуха описывается в рамках модели вязкого совершенного газа в предположении, что течение турбулентное и подчиняется уравнениям Рейнольдса (URANS). Используется двухпараметрическая дифференциальная модель турбулентности  $k-\omega$  SST. На поверхности тела ставятся условия прилипания и адиабатичности. На внешних границах расчетной области — условие сверхзвуковой скорости течения.

Решения URANS уравнений строятся методом установления с использованием пакета ANSYS-15 CFX. В качестве начальных условий брались параметры набегающего потока [3, 4]: число Маха  $M_\infty = 3$ , показатель адиабаты  $\gamma = 1,4$ , полное давление  $P_0 = 4,3 \cdot 10^5$  Па, температура торможения  $T_0 = 275$  К, единичное число Рейнольдса  $Re_1 = 3,7 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup>. Угол атаки варьировался в диапазоне  $\alpha = 0 \dots 18^\circ$ .

В исследованном диапазоне изменения угла атаки нестационарное решение сходилось к стационарному полю параметров, практически симметричному относительно плоскости изменения угла атаки. При нулевом и малых углах атаки реализуется безотрывное обтекание тела. Основные изменения в структуре потока связаны с особенностями развития поперечного течения при увеличении угла атаки, при этом можно отметить три характерные области подветренного течения вдоль цилиндрической поверхности тела.

В первой области (I) течение безотрывное, со сходящимися на подветренной стороне линиями тока. В следующей области (II) вниз по потоку линии тока расходятся на подветренной стороне, на боковой поверхности тела реализуется первичный поперечный отрыв, инициирующий развитие глобального парного симметричного вихревого течения. Далее в области (III) наблюдается пространственное расширение глобального вихревого течения и возникновение на подветренной стороне пары вторичных отрывных структур, инициирующих локальные вихревые образования. При этом в области III между парой глобальных вихрей формируется проникающее к поверхности тела локальное высоконапорное сверхзвуковое течение, в котором полное давление сопоставимо по величине с полным давлением набегающего потока, прошедшего головной скачок уплотнения перед коническим наконечником.

Первичный поперечный отрыв возникает на всех рассмотренных углах атаки  $\alpha \geq 5^\circ$ . Вторичный отрыв наблюдается при  $\alpha \geq 8^\circ$ . С увеличением угла атаки интенсифицируется вихревое течение на подветренной стороне, вызывающее отток газа от плоскости симметрии и уменьшение толщины пограничного слоя. При этом внешний сверхзвуковой поток приближается к обтекаемой поверхности на подветренной стороне, отрывные структуры смещаются вверх по потоку. Область пристеночного сверхзвукового течения с повышенным полным давлением на подветренной стороне также смещается вверх по потоку при увеличении угла атаки. По мере удаления от носика эжектирующее действие вихревого течения уменьшается, что приводит к вырождению вторичного отрыва.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-01-00242, расчеты проведены с использованием ресурсов Вычислительного центра СПбГУ (<http://cc.spbu.ru>).*

#### Литература

1. Park M.-Y., Kim W.-S., Kim S., Park S.H., Lee J.-W. Asymmetric vortices around a body in a high angle of attack supersonic flow. *Journal of the Korean Physical Society*, 2009, vol. 55, no. 5, pp. 2159–2165. DOI: 10.3938/jkps.55.2159
2. Tuling S., Dalab L., Toomer C. Some compressibility effects on the lee side flow structures of cruciform wing–body configurations with very low aspect ratio. *Aerospace Science and Technology*, 2013, no. 29, pp. 373–385. DOI: 10.1016/j.ast.2013.04.008
3. Симоненко М.М., Зубков А.Ф. Экспериментальное исследование сверхзвукового трехмерного обтекания осесимметричного тела с кольцевым выступом на поверхности. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2018, № 5 (698), с. 52–59. DOI: 10.18698/0536-1044-2018-5-52-59
4. Simonenko M.M., Guvernyuk S.V., Kuzmin A.G. On the supersonic flow over an axisymmetric step at an angle of attack. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 2027, art. ID 030023. DOI: 10.1063/1.5065117

### Separation and vortex structures in supersonic flow around slender cylindrical-conical body at angles of attack

© S.V. Guvernyuk<sup>1</sup>, A.G. Kuzmin<sup>2\*</sup>, M.M. Simonenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

\*E-mail: a.kuzmin@spbu.ru

**Abstract.** Results of the numerical simulation of supersonic flow over a slender cylindrical-conical axisymmetric body at angles of attack are presented. Separation structures are identified on the leeward surface of the body, including the primary transverse separation of the incoming flow and the secondary separation of the flow diverging from the plane of

symmetry. The flow separations initiate the formation of global and local vortex structures in the leeward flow. The transverse flow spreading on the leeward surface leads to a decrease in the boundary layer thickness in a vicinity of the spreading line and the formation of a near-wall supersonic high-pressure flow in this area, which can cause a local increase in pressure on protruding obstacles. The effect of an abnormal increase in pressure in the leeward flow was observed experimentally and numerically [1].

**Keywords:** *axisymmetric body, supersonic flow, flow separation.*

*This work was partially supported by the RFBR, project no. 19-01-00242.*

#### References

1. Simonenko M.M., Guvernyuk S.V., Kuzmin A.G. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 2027, ar. ID 030023. DOI: 10.1063/1.5065117

## Схемы численного решения граничного интегрального уравнения при моделировании обтекания подвижных профилей вихревыми методами

© И.К. Марчевский<sup>1,2</sup>, К.С. Кузьмина<sup>1,2\*</sup>, В.М. Аушев<sup>1</sup>,  
Ю.А. Измайлова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>ИСП им. В.П. Иванникова РАН, Москва, Россия

\*E-mail: kuz-ksen-serg@yandex.ru

**Аннотация.** Рассмотрены вопросы, связанные с численным моделированием обтекания подвижного профиля или решения сопряженных задач гидроупругости с помощью двумерных вихревых методов. Одним из этапов, наиболее сильно влияющих на точность решения задачи, является вопрос качественного удовлетворения граничного условия, которое обычно сводится к граничному интегральному уравнению. Ранее авторами были разработаны расчетные схемы, позволяющие удовлетворять граничное условие с высокой точностью. В докладе обсуждаются вопросы обобщения разработанных подходов для случаев произвольного движения и деформации профиля, решения сопряженных задач гидроупругости, а также к определению тензора присоединенных масс профилей различных форм.

**Ключевые слова:** *граничное интегральное уравнение, сопряженные задачи гидроупругости, тензор присоединенных масс.*

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 17-79-20445.*

## **Schemes for the numerical solution of the boundary integral equation when modeling the flow around moving airfoils by vortex methods**

© I.K. Marchevsky<sup>1,2</sup>, K.S. Kuzmina<sup>1,2\*</sup>, V.M. Aushev<sup>1</sup>, Yu.A. Imailova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>ISP RAS, Moscow, Russia

\*E-mail: kuz-ksen-serg@yandex.ru

**Abstract.** The paper deals with issues related to the numerical simulation of the flow around a moving airfoil or the solution of coupled problems of hydroelasticity using two-dimensional vortex methods. One of the stages that most strongly affects the accuracy of solving the problem is the question of qualitative satisfaction of the boundary condition, which is usually reduced to a boundary integral equation. Previously, the authors have developed numerical schemes that allow satisfying the boundary condition with high accuracy. The report discusses the generalization of the developed approaches for the cases of arbitrary motion and deformation of the airfoil, the solution of coupled problems of hydroelasticity, as well as the determination of the tensor of the attached masses of airfoils of various shapes.

**Keywords:** *boundary integral equation, coupled hydroelastic problems, added mass tensor.*

*This work was supported by the grant RSF no. 17-79-20445.*

## **Течение и теплообмен в турбулентном сжимаемом пограничном слое при инородном вдуве**

© М.С. Макарова\*, В.Г. Лущик

НИИ механики МГУ, Москва, Россия

\*E-mail (докладчик): mariia.makarova@gmail.com

**Аннотация.** Численное исследование турбулентного сжимаемого пограничного слоя на проницаемой пластине при вдуве при значениях температуры вдуваемого газа, равной либо ниже температуры адиабатной непроницаемой стенки, подтвердило существование диапазона температур проницаемой стенки ниже температуры вдуваемого газа. Рассмотрены режимы однородного (смесь He(5%)-Xe) и инородного вдува (вдув гелия в ксенон).

**Ключевые слова:** *вдув, адиабатная стенка, модель турбулентности.*

*Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00234).*

## Литература

1. Leontiev A.I., Lushchik V.G., Makarova M.S. Distinctive features of heat transfer on a permeable surface in a laminar compressible gas flow at Prandtl number  $Pr < 1$ . *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2020, vol. 147, art. ID 118959.

## Flow and heat transfer in a turbulent compressible boundary layer with foreign injection

© M.S. Makarova\*, V.G. Lushchik

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): mariia.makarova@gmail.com

**Abstract.** A numerical study of a turbulent compressible boundary layer on a permeable plate during injection at temperatures of the injected gas equal or below the adiabatic impermeable wall temperature confirmed the existence of a range of the permeable wall temperature below the injected gas temperature. The regimes of homogeneous (He(5%)-Xe mixture) and foreign injection (injection of helium into xenon) are considered.

**Keywords:** injection, adiabatic wall, turbulence model.

*This work was funded by a grant from the Russian Science Foundation (project no. 19-19-00234).*

## References

1. Leontiev A.I., Lushchik V.G., Makarova M.S. Distinctive features of heat transfer on a permeable surface in a laminar compressible gas flow at Prandtl number  $Pr < 1$ . *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2020, vol. 147, art. ID 118959.

## Численное решение задачи о сжатии газа комбинированием метода характеристик и метода ближайших соседей

© Ю.В. Николаев

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

E-mail (докладчика): YNikolaev@list.ru

**Аннотация.** Для произвольной сетки в области решения системы уравнений газовой динамики, описывающего одномерные течения безударного сжатия, предложен алгоритм расчета газодинамических параметров. Алгоритм основан на методе характеристик и методе ближайших соседей.

**Ключевые слова:** система уравнений газовой динамики, одномерные течения безударного сжатия, метод характеристик, метод ближайших соседей.

Предложен алгоритм, использующий один из методов машинного обучения — метод ближайших соседей для случая регрессии, в котором значение объекта рассчитывается как взвешенное значение ближайших к нему объектов с известными значениями [1]. Алгоритм протестирован на примере расчета [2] значений газодинамических параметров в точках сетки, покрывающей область решения системы уравнений газовой динамики для случая одномерных течений политропного газа. Течения реализуют сжатие покоящегося газа с плотностью 1 в покоящийся газ с плотностью  $10^4$ . Описываемое сжатие происходит без ударных волн, эффективным с точки зрения энергозатрат способом с затратами энергии только на сжатие газа, но не на его разгон. Алгоритм может быть использован при численном решении в случае произвольных сеток и для других задач газовой динамики.

#### Литература

1. URL: <https://scikit-learn.org/0.21/modules/neighbors.html> (дата обращения 18.11.2020).
2. Баутин С.П., Николаев Ю.В. Численное решение задачи о сжатии газа из покоя в покой. *Вычислительные технологии*, 2020, т. 25, № 5, с. 55–65.

### Numerical solution of the gas compression problem by combining the characteristics method and the nearest neighbors method

© Iu.V. Nikolaev

Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia  
E-mail (speaker): YNikolaev@list.ru

**Abstract.** An algorithm for calculating gas dynamic parameters is proposed for an arbitrary grid in the area of solving a system of gas dynamics equations describing one-dimensional shockless compression flows. The algorithm is based on the characteristics method and the nearest neighbors' method.

**Keywords:** system of equations of gas dynamics, one-dimensional shockless compression flows, method of characteristics, nearest neighbor.

In this paper, proposed an algorithm that uses one of the machine learning methods—the nearest neighbors method for the regression case, in which the object value is calculated as the weighted value of the objects

closest to it with known values [1]. The algorithm is tested on the example of calculating [2] the values of gas-dynamic parameters at grid points covering the solution area of the system of gas dynamics equations for the case of one-dimensional polytropic gas flows. Flows realize compression of a stationary gas with a density of 1 into a stationary gas with a density of  $10^4$ . The described compression occurs without shock waves, in a way that is efficient from the point of view of energy input, with energy expenditure only for compressing the gas, but not for its acceleration. The algorithm can be used for numerical solution in the case of arbitrary grids and for other problems of gas dynamics.

### References

1. Available at: <https://scikit-learn.org/0.21/modules/neighbors.html> (accessed November 18, 2020).
2. Bautin S.P., Nikolaev Y.V. Numerical solution of the problem of the gas compression from rest to rest. *Computational technologies*, 2020, vol.25, no. 5, pp. 55–65.

## Возникновение периодических волн и уединенной волны в турбине гидроэлектростанции

© В.М. Овсянников

Российский университет транспорта «МИИТ», Москва, Россия  
Московская государственная академия водного транспорта, Москва, Россия

**Аннотация.** При аварии турбины гидроэлектростанции может происходить подъем водой тяжелого ротора турбины с выбросом его в машинный зал во вращающемся состоянии. Для анализа этого явления с позиции гидродинамики следует рассмотреть возможные механизмы образования ударной волны. Один из таких механизмов описывается волновым уравнением третьего порядка дифференциальности по времени с использованием полного уравнения неразрывности, выведенного Эйлером в 1752 г.

**Ключевые слова:** уравнение неразрывности, ударная волна, трехмерное течение, якобиан третьего порядка.

**Полное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера с членами высокого порядка малости.** При выводе уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости геометрическим путем Эйлер [1, 2], приравняв объемы первоначальной фигуры, например, куба и фигуры, деформированной тремя деформациями сжатия-растяжения и тремя деформациями сдвига, — скошенного параллелепипеда, получил уравнение, содержащее 15 слагаемых. В самом деле, смешанное скалярно-векторное произведение, используемое для вычисления

объема скошенного параллелепипеда, содержит большое число слагаемых. Если не превращать предельными переходами это уравнение в дивергенцию вектора скорости, а использовать члены высокого порядка малости, то уравнение позволяет сосчитать возникновение периодических волн вибрации и образование уединенной волн. Однако это становится возможным только после перезаписи полного уравнения неразрывности для сжимаемой жидкости и газа, что было сделано в 2006 г., так как в несжимаемой жидкости волн не возникает:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \rho(t-t_0) \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)} \right] + (t-t_0)^2 \rho \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

Здесь  $\rho$  — плотность;  $t-t_0$  — интервал времени деформации контрольной фигуры;  $u, v, w$  — компоненты скорости вдоль осей  $x, y, z$ .

**Оценка интенсивности вибраций вала турбины.** С использованием приведенной выше формулы интенсивность гармонических колебаний может быть оценена при решении волнового уравнения второго порядка по времени

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \left( \frac{1}{c_0^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}.$$

Здесь  $\rho_0$  — термодинамическая плотность;  $c_0$  — скорость звука в рассматриваемой среде.

Для интенсивности возникающих периодических колебаний типа вибраций решение волнового уравнения методом запаздывающего потенциала дает формулу [3]

$$I \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right] = \rho_0 \omega^4 W^2 / (16\pi^2 c_0 r^2). \quad (1)$$

Здесь  $W$  — объем жидкости, вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ ;  $r$  — расстояние от оси вращения точки, для которого вычисляется интенсивность.

Интенсивность вибраций оказывается пропорциональной 4-й степени угловой скорости вращения  $\omega$ . Числовые оценки проведем, используя обобщенные параметры нескольких современных турбин.

Вычисленная по этой формуле волновая энергия должна быть умножена на площадь  $S$  боковой поверхности стенки турбины с высотой рабочего колеса  $h = 0,25$  м и диаметром  $D$

$$S = h\pi D.$$

Теперь объем жидкости  $W$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega$ , будет

$$W = h\pi D^2/4,$$

а расстояние  $r$  от оси вращения точки, для которого в формуле (1) вычисляется интенсивность,  $r = D/2$ .

Волновая энергия распространяется в плоскости вращения винта. Это известно по направлению распространения звука от самолетов с винтовыми двигателями.

Волновая энергия каждую секунду затрачивается на поддержание вибраций массивного рабочего колеса и его оси. Произведем оценки волнообразования в турбине ГЭС, пользуясь параметрами гидростанции, приведенными в справочнике [4].

Исходя из амплитуды вибраций подшипника  $\delta = 1,5 \text{ мм} = 0,0015 \text{ м}$  и частоты  $\nu = 1,6 \text{ гц} = 1/T$ , с, скорость вибрации можно оценить как произведение  $V = \delta \nu$ . Кинетическая энергия вибрирующей конструкции массой  $m$  составит

$$m V^2/2 = m(\delta\nu)^2/2.$$

Считая, что эта энергия подновляется  $\nu$  раз в секунду для поддержания вибраций, можно заключить, что на вибрации затрачивается мощность

$$\nu m V^2/2[\text{Вт}] = m \delta^2 \nu^3/2,$$

равная произведению  $S I$ .

Используя формулу (1), запишем такое равенство:

$$\frac{S\rho_0\omega^4W^2}{16\pi^2c_0r^2} = m\delta^2 \nu^3 / 2. \quad (2)$$

Здесь площадь  $S$  боковой цилиндрической поверхности вращающейся воды связана с высотой  $h$  и диаметром  $D$  формулой  $S = h\pi D$ .

Подставив в обе части равенства (2) значения из справочника [4] для турбины Красноярской ГЭС:

диаметр рабочего колеса  $D = 7,5 \text{ м}$ ;

угловую частоту вращения  $\nu = 1,6 \text{ гц}$ ;

$\omega = 6,28 \cdot 1,6 \text{ гц} = 10 \text{ рад/с}$ ;

плотность воды  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;

скорость распространения звука  $c_0 = 1450 \text{ м/с}$ ;

размах вибраций подшипника  $\delta = 1,5 \text{ мм}$ ;

массу рабочего колеса и выброшенной в машинный зал конструкции  $m = 1\,687\,000 \text{ кг}$  (из материалов об аварии на Саяно-Шушенской ГЭС),

получим приближенное равенство мощностей:  $31 \text{ Вт} \approx 31 \text{ Вт}$ .

Высота боковой цилиндрической поверхности вращающейся воды взята равной  $h = 0,125$  м, а площадь боковой поверхности вращающейся воды  $S = h\pi D = 2,93$  м<sup>2</sup> и объем  $W = 5,5$  м<sup>3</sup>.

Точность согласования правой и левой частей равенства (2) указывает на правильный порядок величин, использованных в этой приближенной оценке.

**Метод бегущих волн Даламбера решения волнового уравнения.** В XVIII в. Даламбер использовал метод бегущих волн, чтобы получить общее решение однородного волнового дифференциального уравнения, имеющего второй порядок дифференциальности по времени. Для нахождения решения неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} =$$

$$= \rho_0 \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)} \right] + (t - t_0) \rho_0 2 \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)},$$

получающегося методом Лайтхилла акустической аналогии, можно использовать тот же метод бегущих волн. Для упрощения выкладок исключим из неоднородной части якобианы второго порядка малости, создающие генерацию гармонических волн, рассмотренных в предыдущем разделе. Интерес представляет член с якобианом третьего порядка, способный к генерации в потоке ударной волны. Поэтому будем искать решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (t - t_0) \rho_0 2 \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}.$$

Пусть левая часть уравнения при нулевом значении якобиана третьего порядка имеет синусоидальные гармонические колебания, возникшие или за счет откинутых неоднородных членов с якобианами второго порядка, или за счет граничных условий.

Метод Даламбера изложим в обозначениях учебника Высшей математики И.И. Баврина [5, с. 493], решающего однородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + bt$$

для случая неравного нулю якобиана третьего порядка будем искать в виде

$$u(x, y, z, t) = \sin(x - at) + \sin(x + at) + \sin(y - at) + \sin(y + at) + \\ + \sin(z - at) + \sin(z + at) + bt^3 / 6.$$

Вычислив производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x - at) - \sin(x + at);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin(y - at) - \sin(y + at);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\sin(z - at) - \sin(z + at);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2 \sin(x - at) - a^2 \sin(x + at) - a^2 \sin(y - at) - a^2 \sin(y + at) - \\ - a^2 \sin(z - at) - a^2 \sin(z + at) + bt$$

и подставив в волновое уравнение, получаем тождество, указывающее на верность решения неоднородного уравнения при линейной зависимости неоднородного члена от времени. Рассматриваемое решение показывает возможность образования ударной волны в трех-

мерном течении при якобиане третьего порядка  $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$  поля ско-

рости, отличном от нуля, налагающейся на гармонические колебания вибраций.

В инженерных конструкциях из плоского двухмерного течения трехмерное течение может возникнуть не сразу, а постепенно, нарастая по линейному закону во времени:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + bt^2.$$

Тогда, применяя аналогично метод Даламбера бегущих волн, можно получить ударную волну, возрастающую пропорционально времени в четвертой степени.

**Возникновение ударной волны при вращении воды в турбине с вибрирующей осью вращения.** Развитие во времени уединенной волны может быть связано с сильным отклонением оси вращения турбины от вертикального положения с возникновением трехмерного потока. Решение волнового уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \\ & = \rho_0 \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)} \right] + (t - t_0) \rho_0 2 \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}, \end{aligned}$$

после исключения лишних членов получающее вид

$$-\left(\frac{1}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (t - t_0) \rho_0 2 \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)},$$

дает выражение для оценки изменения по времени давления возникающей ударной волны:

$$p = -\left(\frac{1}{6}\right) c_0^2 \rho_0 \omega^2 A (t - t_0)^4, \quad (3)$$

имеющей вид степенной функции 4-го порядка, возрастающей во времени. Вот это повышение давления и может создать ударную волну, достаточную для подъема и выброса турбины в машинный зал.

В выражении (3)  $A$  — угловое ускорение отклонения оси ротора от вертикального положения, обеспечивающее линейное по времени изменение трехмерности течения за счет изменения компоненты скорости  $w$ :

$$w = Az(t - t_0). \quad (4)$$

Пусть нижний опорный подшипник ротора не совершает вибраций, а верхний, находящийся на  $z = 5$  м выше, вибрирует с частотой  $\nu = 1,6$  гц и периодом колебаний  $T = 1/\nu = 1/1,6 = 0,62$  с, а четвертью периода 0,15 с. Примем половину размаха колебания оси на высоте верхнего подшипника равной 1 мм. Угол колебания будет составлять 0,001/5 радиан. Угловое ускорение оси при колебаниях составит  $(0,001/5)/[(0,15 \text{ с})^2] = 0,01 \text{ с}^{-2}$ .

В формуле (4) возникновения трехмерного течения коэффициент  $A$  имеет размерность углового ускорения. Ввиду неопределенности поля скорости вращательного движения вокруг вибрирующей оси для оценки картины возникновения уединенной ударной волны положим  $A = 0,01 \text{ с}^{-2}$ .

Площадь круга  $S$  с диаметром, равным диаметру рабочего колеса, равна 44,3 м<sup>2</sup>. Вес выброшенной в машинный зал ударной волной конструкции составляет

$$G = m g = 1\,687\,000 \text{ кг} \cdot 9,8 \text{ м/с}^2 = 16,87 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

Для подъема конструкции достаточно создания волнового давления уединенной ударной волны  $G/S=16,87 \cdot 10^6 \text{ Н}/44,3 \text{ м}^2 = 3,8 \cdot 10^5 \text{ Па}$  по всей поверхности круга. Подставим в правую часть формулы (3)

$$p = -\left(\frac{1}{6}\right) c_0^2 \rho_0 \omega^2 A (t - t_0)^4,$$

числовые значения  $p = 3,8 \cdot 10^5 \text{ Па}$ , угловую частоту вращения  $\omega = 6,28 \cdot 1,6 \text{ гц} = 10 \text{ рад/с}$ , плотность воды  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ , скорость распространения звука  $c_0 = 1450 \text{ м/с}$ ,  $A = 0,01 \text{ с}^{-2}$  уравнение относительно интервала времени  $t - t_0$ . Разрешив его, получим  $t - t_0 = 0,183 \text{ с}$ . Эта величина меньше периода обращения рабочего колеса, составляющего  $T = 1/\nu = 0,62 \text{ с}$ .

Таким образом, показано, что по полному уравнению неразрывности, выведенному Эйлером с сохранением членов третьего порядка малости, можно получить образование уединенной ударной волны, давление которой через  $0,183 \text{ с}$  достаточно для поднятия веса вращающейся в агрегате конструкции и возрастающей пропорционально времени в 4-й степени.

### Литература

1. Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior. *Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae*, 1761, vol. 6 (1756–1757), pp. 271–311. *Opera omnia*, ser. II, vol. 13, pp. 1–369.
2. Эйлер Л. *Принципы движения жидкостей*. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН. Пер. с латинского Е.В. Ивановой и В.М. Овсянникова. 4-е изд., доп. Москва, Издательство «Спутник +», 2020, 203 с.
3. Овсянников В.М. Возможности вибраций и возникновения ударной волны при вращательном движении жидкости. *Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. DIFF2020. Постер-сессия. Математические проблемы механики. Суздаль 3-8 июля 2020 г.* URL: [https://cloud.mail.ru/public/3e6K/4w1669X4m/Математические\\_проблемы\\_механики/#](https://cloud.mail.ru/public/3e6K/4w1669X4m/Математические_проблемы_механики/#)
4. Енохович А.С. *Справочник по физике и технике*. Москва, Просвещение, 1989, 224 с.
5. Баврин И.И. *Высшая математика*. Москва, Академия, 2000, 612 с.

## The appearance of periodic waves and a solitary wave in the turbine of a hydroelectric power plant

© V.M. Ovsyannikov

Russian University of Transport, Moscow, Russia  
Moscow State Academy of Water Transport, Moscow, Russia

**Abstract.** Hydrodynamics equations do not contain terms that create a shock wave in the turbine of a hydroelectric power plant. Additional terms of Euler's continuity equation (1752) provide such a possibility. The in-

homogeneous wave equation of the second order in time gives vibrations of the fluid in the turbine. The wave equation of the third order in time gives a power law for the pressure increase in a solitary shock wave. Euler derived in 1752 the continuity equation for an incompressible fluid. He used shear and stretch deformations along the three axes of the cube. The volume of the beveled parallelepiped gives the mixed product of vectors. The mixed product of vectors contains terms of the second and third orders of smallness in time. The terms of the second order of smallness penetrate into the inhomogeneous part of the wave equation of the second order in time. These terms give rise to vibrations of the fluid in the turbine. The third-order term of smallness of the continuity equation enters the inhomogeneous part of the third-order wave equation. The term of the third order of smallness gives rise to a solitary pressure wave. The pressure in the shock wave increases with time according to the power law of the fourth degree. This shock wave can lead to turbine failure.

**Keywords:** *continuity equation, high order terms, vibrations, shock wave, hydroelectric power station turbine.*

### **Вопросы механики сплошных сред применительно к общепромышленным технологическим проблемам**

© К.М. Иванов, А.И. Олехвер, П.М. Винник, Е.Ю. Ремшев

БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург, Россия

\*E-mail (докладчика): leshicher@mail.ru

**Аннотация.** Представлены результаты экспериментального исследования деформированного состояния материала при реализации его механической обработки (вытяжка с утонением). В частности, обнаружены новые, в литературе не представленные, эффекты и особенности в динамике процесса, оказывающее влияние на формирование конечной деформации. Предложены пути применения математического аппарата, применяемого в механике сплошных сред и теории пластичности, для оценки напряженно-деформированного состояния материала для учета обнаруженных эффектов.

**Ключевые слова:** *механика, разрушение, материальная частица, деформация, монотонность, эксперимент, делительная сетка, эффект.*

Технологические проблемы, наличествующие в машиностроении, многосторонни и разнообразны. Они могут быть связаны с отсутствием того или иного оборудования и (или) инструмента, отсутствием или низким качеством сырья (и вызываемой этим необходимо-

стью подбора приемлемой замены), недостаточным пониманием физики течения технологических процессов (и принимаемыми на этой основе нерациональными решениями по назначению технологических параметров), отсутствием или неудовлетворительным качеством применяемых для расчетов инженерных методик и математических моделей.

Среди технологических процессов, применяемых в машиностроении, особое место занимают процессы пластической деформации металлов. Их важность объясняется оптимальным для ряда производств (особенно крупносерийных и массовых) сочетанием цены и качества изделий [1].

Основой построения математических и расчетных инженерных моделей для процессов холодной штамповки является теория пластичности. Как указывает Г.А. Смирнов-Аляев в [1], потребности практики предъявляют к инженерным моделям три основных требования: соответствие расчетных методов современному уровню развития теории пластичности; достаточную для практики точность расчетов; доступность расчетных методик для инженерных работников. Однако инженерные модели строятся на основе математических моделей, которые занимают промежуточное положение между строго математическими построениями собственно теории пластичности и инженерными моделями.

Технологические процессы изготовления деталей, формируя механические свойства деталей, во многом определяют возможный при эксплуатации изделия или конструкции, составной частью которой является изготовленная деталь, характер ее выхода из строя, разрушения [2].

Хотя при современном уровне развития теории пластичности и математических моделей процессов холодной штамповки они могут не позволять учитывать те или иные физические особенности протекания процессов, при современном уровне развития производства может отсутствовать и необходимость учета этих особенностей, но с точки зрения будущих перспектив развития производства установление таких физических особенностей и разработка путей их учета в математических и инженерных моделях актуальны.

Вытяжка с утонением стенки является классическим широко применяемым и достаточно хорошо исследованным процессом обработки металлов давлением, которому посвящено огромное число публикаций.

Экспериментальные методы определения напряженно-деформированного состояния заготовки при вытяжке с утонением стенки были обоснованы и развиты в работах [3, 4] под руководством И.П. Ренне в Тульском механическом институте (ныне Тульский го-

сударственный университет), а также приведены и обсуждены в книге [5].

Вопросы аналитического расчета напряженно-деформированного состояния заготовки, силы деформирования, подбора оптимальных технологических параметров при вытяжке с утонением стенки были рассмотрены (среди прочих) в фундаментальных трудах М.В. Сторожева и Е.А. Попова [6] и А.Л. Воронцова [7].

Начало разработки вопросов учета анизотропии свойств при вытяжке с утонением стенки связано с проводившимися в Тульском государственном университете исследованиями С.П. Яковлева и С.С. Яковлева [8–10], а их продолжение — с работами М.В. Грязева [11, 12], С.Н. Ларина [13].

В Балтийском государственном техническом университете «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова авторами в рамках модели А.Л. Воронцова [7, гл. 15] была вычислена степень деформации по А.А. Ильюшину, и таким образом установлены аналитические зависимости механических свойств материала заготовки от условий трения [14, 15], учитывающие неоднородность механических свойств по толщине стенки, а затем полученные зависимости были обобщены для случая разностенной заготовки [16].

За прошедшее время измерительная и компьютерная техника претерпели существенные изменения, которые побуждают вернуться к вопросам расчета неравномерности деформации при вытяжке с утонением по толщине и высоте стенки, поднятым в [3–5], а также к разработке методик учета указанной неравномерности при проектировании технологических процессов изготовления осесимметричных деталей.

В 2017–2018 гг. в Балтийском государственном техническом университете «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова были проведены обширные экспериментальные исследования вытяжки с утонением стенки методами делительной сетки, замеров твердости, которые были также подкреплены результатами компьютерного моделирования.

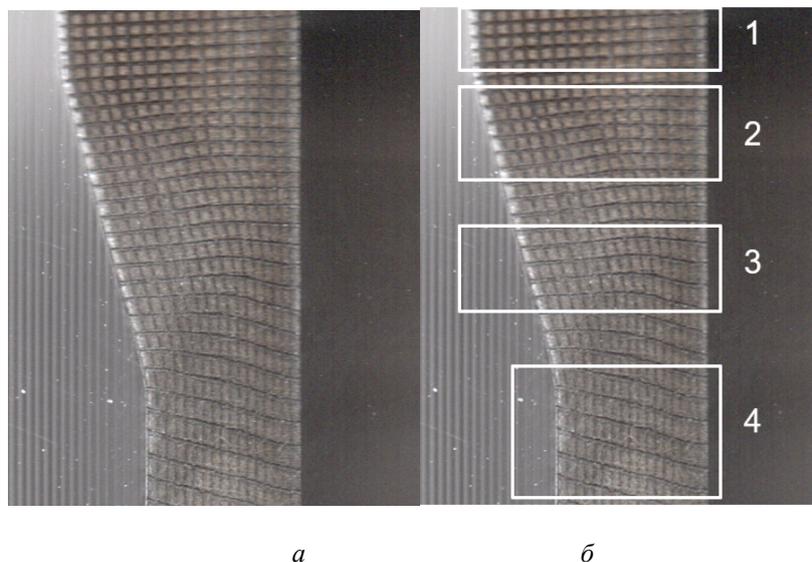
В исследованиях методом делительной сетки перед вытяжкой с утонением стенки заготовки были разрезаны по осевому сечению на две половинки, методом лазерной резки на получившиеся сечения была нанесена прямоугольная делительная сетка (одно семейство линий — примерно параллельно наружной поверхности стенки заготовки, другое семейство линий — перпендикулярно первому, т. е. примерно перпендикулярно наружной поверхности стенки), потом половинки заготовок склеивались, и заготовка подвергалась операции вытяжки с утонением стенки. При вытяжке процесс останавливался (заготовка извлекалась и разделялась на две исходные половинки с делительной сеткой): а) после прохождения донного участка

заготовки; б) после прохождения середины высоты стенки; в) после прохождения почти всей стенки (не пройденная часть составляла около 10 % высоты стенки); после прохождения всей вытяжки с утонением.

После сканирования деформированной делительной сетки с максимально доступным разрешением были вручную определены координаты всех узлов сетки в системе координат графического редактора Paint. Сравнение измеренных в редакторе Paint размеров с результатами физических замеров образца позволяет в случае необходимости произвести пересчет всех размеров в систему СИ.

Эти эксперименты позволили обнаружить ряд новых особенностей динамики течения материала при вытяжке с утонением стенки, которые ранее не были отражены в литературе и которые, несмотря на довольно малое количественное влияние на формируемые механические свойства материала заготовки, вносят существенный вклад в понимание физики процесса.

Наибольший интерес с точки зрения кинематики деформирования материала представляет очаг пластической деформации на стационарном этапе протягивания полуфабриката (рис. 1).



**Рис. 1.** Делительная сетка в очаге пластической деформации:  
*а* — оригинальный снимок; *б* — выделены этапы деформирования

Снимок позволяет фиксировать хронологическую последовательность деформирования материала полуфабриката от входа в зону основного очага пластической деформации до окончательного формирования. Можно отметить следующую последовательность формирования:

1) наклон прямолинейного отрезка по направлению движения рабочего инструмента в зоне, примыкающей к очагу пластической деформации (ОПД);

2) изгиб в центральной части отрезка при сохранении прямолинейности краев в верхнем сечении конусной части матрицы;

3) дальнейший изгиб кривой в нижнем сечении конусной части матрицы;

4) наклон прямолинейной части отрезка, примыкающего к наружной поверхности полуфабриката, и формирование окончательной формы волокна, близкой к прямолинейному отрезку.

Во-первых, отметим, что указанное понижение наружного края поперечного волокна перед входом ОПД при отсутствии такого понижения после ОПД означает, что суммарное расстояние между поперечными волокнами по наружной поверхности меньше, чем по внутренней. Следовательно, наружные слои должны находиться в условиях сжатия.

Во-вторых, из указанного характера изменения формы поперечного волокна в ходе деформирования следует, что при прохождении очага пластической деформации скорости движения материальных частиц поперечного волокна изменяются — наиболее быстро движущимися последовательно становятся частицы вблизи внутренней, средней и наружной поверхности изделия.

В-третьих, отметим, что относительное перемещение наружного края поперечного волокна сначала ниже внутреннего, а затем выше внутреннего означает, что при типовом расчете деформации по относительному изменению формы и размеров ячейки делительной сетки по сравнению с ее первоначальными формой и размерами, для наружных слоев реальная длина траекторий течения больше, чем кажется, так как имеет место изгиб поперечного волокна в противоположных направлениях. Расстояние между поперечными волокнами по внутреннему краю отличается от расстояния по внешнему краю, а следовательно, удлинение ячеек по внутреннему и наружному контурам не одинаково.

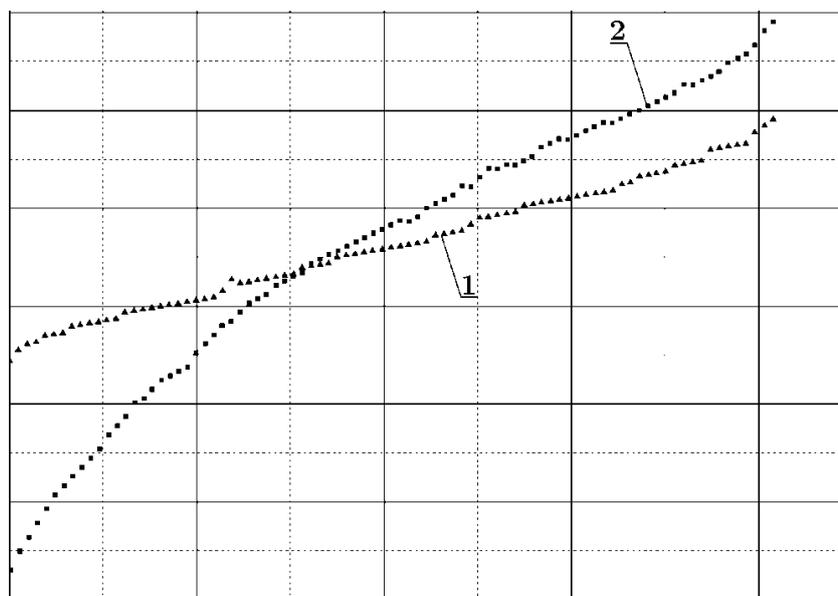
Все вышеперечисленное указывает на выраженную немонотонность процесса вытяжки с утонением стенки (монотонность понимается в определении Г.А. Смирнова-Аляева [1, с. 44]).

В этом вопросе требуется дополнительно исследовать, проанализировать и провести оценку влияния различных факторов на конечную структуру деформированного состояния материала, согласовать теоретические и экспериментальные данные.

Так, при классических расчетах напряженно-деформированного состояния при вытяжке с утонением стенки исходят из предположения о локализации пластической деформации в очаге пластической

деформации, охватывающем часть заготовки, находящуюся в зоне конической части матрицы [например, 6, 7, 10, 14–16]. Осевое сечение ОПД обычно принимается имеющим форму кольцевого сектора [6, 7, 11, 14, 15].

Однако проведенные в БГТУ «ВОЕНМЕХ» эксперименты показали, что до входа в этот ОПД форма стенок заготовки существенно изменяется, что теоретически означает наличие пластической деформации материала, которая и подтверждается сохранением приобретенной формы заготовки при остановке процесса на промежуточной стадии и извлечении заготовки. На рис. 2 показаны точки внутреннего контура осевого сечения стенки заготовки до начала процесса вытяжки и после деформации придонного участка (сглаживание точек контура не проводилось, неровности кривых объясняются как локальными микродефектами поверхности заготовки, так и погрешностями ручного определения координат точек).



**Рис. 2.** Изменение формы внутреннего контура осесимметричной заготовки при вытяжке с утонением стенки (при остановке вытяжки после прохождения придонного участка):

1 — внутренний контур до начала вытяжки; 2 — внутренний контур после остановки вытяжки после прохождения придонного участка (Левый край соответствует входу стенки в классический ОПД, правый — верхнему краю стенки. По вертикальной оси отложено расстояние от точек внутреннего контура до оси заготовки)

Хотя изменение расстояния от внутреннего края в результате вытяжки составляет всего около 2 % на входе в ОПД и около 1 % в области верхнего края стенки, однако качественно такое изменение означает:

- 1) наличие предварительной пластической деформации заготовки до входа в ОПД;
- 2) изменение направления деформации в радиальном направлении в ходе вытяжки с утонением стенки;
- 3) увеличение внутреннего радиуса заготовки в области верхнего края стенки в ходе процесса вытяжки;
- 4) формирование наклона (в сторону внешней поверхности заготовки) линий делительной сетки, расположенных до вытяжки горизонтально.

Можно еще предположить, что в случае более высокой исходной стенки за участком, где в ходе вытяжки происходит показанное на рис. 1 увеличение внутреннего радиуса заготовки, располагается участок, до которого влияние вталкивания заготовки в матрицу не распространяется, следовательно, его радиус должен остаться неизменным.

Вталкивание заготовки в конусную часть матрицы приводит к некоторому торможению материала срединной по толщине области стенки, что сказывается на части стенки, которая еще не вошла в ОПД, но подошла к нему достаточно близко, и, в свою очередь, к незначительному искривлению выпуклостью вверх линий делительной сетки, расположенных до вытяжки горизонтально.

Кроме того, торможение материала стенки перед входом в ОПД приводит к локальному увеличению толщины стенки. В той части рис. 1, в которой внутренний контур после вытяжки оказывается ближе к оси заготовки, такое утолщение стенки составляет до 2 %.

#### **Выводы.**

1. Экспериментально установлено, что при вытяжке с утонением стенки материал стенок еще до входа в очаг пластической деформации претерпевает некоторую пластическую деформацию.

2. Экспериментально установлено, что по крайней мере в верхней части стенки заготовки указанная деформация является разнонаправленной, т. е. если сначала происходят удлинение вдоль одной главной оси (растяжение в окружном направлении) и укорочение вдоль другой главной оси (сжатие в радиальном направлении), то затем (по мере приближения данной области стенки к входу в очаг пластической деформации) направление деформации меняется на противоположное — теперь происходит сжатие в окружном направлении и растяжение в радиальном.

3. Таким образом, деформация верхней части заготовки всегда является сложной.

4. Экспериментально доказано, что вследствие возникающего некоторого пластического утолщения стенки заготовки перед входом в основной очаг пластической деформации должно происходить некоторое подтормаживание материала.

## Литература

1. Смирнов-Аляев Г.А. *Сопротивление материалов пластическому деформированию*. Ленинград, Машиностроение, 1978, 368 с.
2. Селиванов В.В. *Прикладная механика сплошных сред. Т. 2*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.
3. Ренне И.П., Иванова Э.А., Бойко Э.А., Филигаров Ю.М. *Неравномерность деформации при плоском пластическом течении. Часть 1. Стационарное плоское течение*. Тула, Изд-во Тульского политехн. института, 1971, 160 с.
4. Ренне И.П., Кузнецова Э.А., Кузнецов В.П. Неравномерность деформаций и механических свойств по толщине стенки при вытяжке с утонением. *Кузнечно-штамповочное производство*, 1969, № 2.
5. Смирнов-Аляев Г.А., Чикидовский В.П. *Экспериментальные исследования в обработке металлов давлением*. Ленинград, Машиностроение, 1972, 360 с.
6. Сторожев М.В., Попов Е.А. *Теория обработки металлов давлением*. Москва, Машиностроение, 1977. 423 с.
7. Воронцов А.Л. *Теория и расчеты процессов обработки металлов давлением. Том 2*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014, 441 с.
8. Яковлев С.П., Яковлев С.С., Андрейченко В.А. *Обработка давлением анизотропных материалов*. Кишинев, Квант, 1997, 331 с.
9. Яковлев С.С., Кухарь В.Д., Трегубов В.И. *Теория и технология штамповки анизотропных материалов*. Москва, Машиностроение, 2012, 400 с.
10. Яковлев С.С., Пасынков А.А., Нуждин Г.А. Технологические параметры последующих операций изотермической вытяжки осесимметричных деталей в условиях вязкого течения анизотропного материала. *Обработка материалов давлением*, 2015, № 1 (40), с. 138–145.
11. Грязев М.В., Яковлев С.С., Пилипенко О.В., Трегубов В.И. Вытяжка с утонением стенки осесимметричных деталей из двухслойных анизотропных материалов. *Известия ТулГУ. Технические науки*, 2015, вып. 1, с. 3–16.
12. Грязев М.В., Яковлев С.С., Травин В.Ю. Экспериментальные исследования силовых режимов операции вытяжки с утонением стенки осесимметричных деталей из двухслойной стали. *Известия ТулГУ. Технические науки*, 2015, вып. 6, Ч. 1, с. 220–223.
13. Ларин С.Н., Пасынков А.А., Яковлев С.С. Оценка напряженно-деформированного состояния заготовки при вытяжке через сложнопрофильную матрицу. *Известия ТулГУ. Технические науки*, 2019, вып. 10, с. 466–470.
14. Винник П.М., Иванов К.М., Данилин Г.А., Ремшев Е.Ю., Винник Т.В. Прогнозирование механических свойств детали, полученной вытяжкой с утонением. *Металлообработка*, 2015, № 4 (88), с. 31–36.
15. Винник П.М., Иванов К.М., Данилин Г.А., Ремшев Е.Ю., Затеруха Е.В. Экспериментально-аналитическая оценка неравномерности механических характеристик штампуемых деталей. *Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением*, 2015, № 11, с. 27–32.
16. Данилин Г.А., Винник П.М., Ремшев Е. Ю., Затеруха Е.В. Расчет степени деформации в детали, изготовленной вытяжкой с утонением стенки с учетом разностенности. *Металлообработка*, 2017, № 2 (98), с. 29–32.

## Continuum mechanic issues applied to general industrial technological problems

© K.M. Ivanov, A.I. Olekhver, P.M. Vinnik, E.Yu. Remshev

Baltic state technical university «VOENMEH» named after D.F. Ustinov,  
Saint Petersburg, Russia

\*E-mail (speaker): leshicher@mail.ru

**Abstract.** The article presents the results of an experimental study of the deformed state of the material during the implementation of its machining (drawing with thinning). In particular, new, not presented in the literature, effects and features in the dynamics of the process, influencing the formation of the final deformation, were discovered. The ways of using the mathematical apparatus used in mechanics of continuous media and the theory of plasticity to assess the stress-strain state of a material to take into account the discovered effects are proposed.

**Keywords:** *mechanics, destruction, material particle, deformation, monotony, experiment, dividing grid, effect.*

### References

1. Smirnov-Alyayev G.A. *Resistance of materials to plastic deformation*. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1978, 368 p.
2. Selivanov V.V. *Applied Continuum Mechanics. Vol. 2*. Moscow, BMSTU Publ., 1999.
3. Renne I.P., Ivanova E.A., Boyko E.A., Filigarov Yu.M. *Non-uniformity of deformation in a plane plastic flow. Part 1. Stationary plane flow*. Tula, Tula Polytechnic Institute Publ., 1971, 160 p.
4. Renne I.P., Kuznetsova E.A., Kuznetsov V.P. Irregularity of deformations and mechanical properties along the wall thickness during stretching with thinning. *Forging and stamping production*, 1969, no. 2.
5. Smirnov-Alyayev G.A., Chikidovsky V.P. *Experimental research in metal pressure processing*. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1972, 360 p.
6. Storozhev M.V., Popov E.A. *Theory of metal forming*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977, 423 p.
7. Vorontsov A.L. *Theory and calculations of metal forming processes. Vol. 2*. Moscow, BMSTU Publ., 2014, 441 p.
8. Yakovlev S.P., Yakovlev S.S., Andreichenko V.A. *Pressure treatment of anisotropic materials*. Kishinev, Kvant Publ., 1997, 331 p.
9. Yakovlev S.S., Kukhar V.D., Tregubov V.I. Theory and technology of stamping of anisotropic materials. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2012, 400 p.
10. Yakovlev S.S., Pasyukov A.A., Nuzhdin G.A. Technological parameters of subsequent operations of isothermal drawing of axisymmetric parts in conditions of viscous flow of anisotropic material. *Material processing by pressure*, 2015, no. 1 (40), pp. 138–145.
11. Gryazev M.V., Yakovlev S.S., Pilipenko O.V., Tregubov V.I. Stretching with wall thinning of axisymmetric parts made of two-layer anisotropic materials. *Bulletin of TulGU. Technical Science*, 2015, iss. 1, pp. 3–16.

12. Gryazev M.V., Yakovlev S.S., Travin V.Yu. Experimental studies of power modes of the drawing operation with wall thinning of axisymmetric parts made of two-layer steel. *Bulletin of TulGu. Technical Science*, 2015, iss. 6, part 1, pp. 220–223.
13. Larin S.N., Pasyukov A.A., Yakovlev S.S. Assessment of the stress-strain state of the workpiece during drawing through a complex-profile matrix. *Bulletin of TulGu. Technical Science*, 2019, iss. 10, pp. 466–470.
14. Vinnik P.M., Ivanov K.M., Danilin G.A., Remshev E.Yu., Vinnik T.V. Prediction of the mechanical properties of a part obtained by drawing with thinning. *Metall-*obrabotka**, 2015, no. 4 (88), pp. 31–36.
15. Vinnik P.M., Ivanov K.M., Danilin G.A., Remshev E.Yu., Zaterukha E.V. Experimental and analytical evaluation of non-uniformity of mechanical characteristics of stamped parts. *Forge-stamping production. Material processing by pressure*, 2015, no. 11, pp. 27–32.
16. Danilin G.A., Vinnik P.M., Remshev E.Yu., Zaterukha E.V. Calculation of the degree of deformation in a part made by drawing with wall thinning taking into account the difference in wall thickness. *Metall-*obrabotka**, 2017, no. 2 (98), pp. 29–32.

## **Численное исследование интерференции воздушного винта и крыла большого удлинения**

© О.Н. Виноградов<sup>1\*</sup>, А.В. Корнушенко<sup>1</sup>, О.В. Павленко<sup>1</sup>,  
А.В. Петров<sup>1</sup>, Е.А. Пигусов<sup>1</sup>, Т.Н. Чинь<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГУП «ЦАГИ», Жуковский, Россия

<sup>2</sup>МФТИ, Долгопрудный, Россия

\*E-mail (докладчик): oleg.vinogradov@tsagi.ru

**Аннотация.** Рассмотрено влияние диаметра ВВ на крейсерские характеристики самолета с крылом большого удлинения. Численные исследования проведены по программе, основанной на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье — Стокса.

**Ключевые слова:** *тянущий воздушный винт, интерференция воздушного винта, крыло большого удлинения.*

Вопросу взаимодействия струй воздушных винтов (ВВ), установленных на концах крыла, с элементами компоновки самолета посвящены работы [1, 2]. В данной работе расчет проведен при числах Маха  $M = 0,145$  и Рейнольдса  $Re = 0,3 \cdot 10^6$ . Исследованы три варианта обтекания прямого крыла: 1) без обдува струями ВВ, 2) с обдувом тянущего ВВ с диаметром 0,22 м и 3) с обдувом струями ВВ с диаметром 0,33 м. В расчетном исследовании был использован двухлопастной ВВ, установленный в концевом сечении крыла самолета. В работе сопоставлены результаты расчета без обдува струями ВВ с экспериментальными данными. Представлена пространственная картина течения вблизи крыла и приведено распределение давления на крыле при взаимодействии со струями возмущенного потока от

тянущего ВВ. Показано, что с увеличением диаметра ВВ возрастает его влияние на распределение давления по поверхности крыла, вследствие чего в сечениях за ВВ происходит локальное падение подъемной силы крыла.

### Литература

1. Корнушенко А.В., Кудрявцев О.В., Теперин Л.Л., Теперина Л.Н., Шустов А.В., Фарид Орфинежад, Мьё Тхейн. Использование принципа полезной интерференции для повышения аэродинамического совершенства компоновки воздушного винта и крыла. *Ученые записки ЦАГИ*, 2016, т. 47, № 8, с. 42–49.
2. Корнушенко А.В., Кудрявцев О.В., Теперин Л.Л., Теперина Л.Н., Шустов А.В., Фарид Орфинежад, Мьё Тхейн. Исследование полезной интерференции, тянущей и толкающей схем воздушных винтов, установленных на концах крыла. *Ученые записки ЦАГИ*, 2017, т. 48, № 1, с. 3–9.

## Numerical study of interference of propeller and high aspect ratio wing

© O.N. Vinogradov<sup>1\*</sup>, A.V. Kornushenko<sup>1</sup>, O.V. Pavlenko<sup>1</sup>,  
A.V. Petrov<sup>1</sup>, E.A. Pigusov<sup>1</sup>, T.N. Trinh<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT), Dolgoprudny, Russia

\*E-mail (speaker): oleg.vinogradov@tsagi.ru

**Abstract.** In this paper, we consider the effect of the propeller diameter on the cruising characteristics of aircraft with a high aspect ratio wing. Numerical studies were performed using a program based on the Reynolds-averaged Navier — Stokes equations.

**Keywords:** *pulling propeller, propeller interference, high aspect ratio wing.*

Works [1, 2] are devoted to the problem of interaction of jets propellers installed at the wing ends with elements of aircraft layout. The calculation in this investigation was performed for Mach numbers  $M = 0.145$  and Reynolds numbers  $Re = 0.3 \cdot 10^6$ . Three variants of flow around a straight wing are investigated: 1) without blowing by the propeller jets, 2) with blowing by pulling propeller jets with diameter of 0.22 m, and 3) with blowing by pulling propeller jets with diameter propeller of 0.33 m. A two-bladed propeller installed in the end section of the aircraft wing was used in the numerical study. It is shown that with an increase in the propeller diameter, its influence on the pressure distribution over the wing surface increases, as a result of which a local drop in the wing lift occurs in the sections behind the propeller. The paper presents a picture of the flow around the wing when interacting with the jets of the disturbed flow from the pulling propeller.

## References

1. Kornushenko A.V., Kudryavtsev O.V., Teperin L.L., Teperina L.N., Shustov A.V., Orfinejad F., Thein M. Application of the principle of favorable interference to increase the aerodynamic performance of the propeller and wing configuration. *TsAGI Science Journal*, 2016, vol. 47, no. 8, pp. 839–850.
2. Kornushenko A.V., Kudryavtsev O.V., Teperin L.L., Teperina L.N., Shustov A.V., Orfinejad F., Thein M. The investigation of the preferable interference of a tractor and pusher propellers mounted on the wing tips. *TsAGI Science Journal*, 2017, vol. 48, no. 1, pp. 1–9.

## Колебания жидкости в жестком прямоугольном баке с упругой перегородкой

© А.А. Пожалостин\*, Д.А. Гончаров

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail (докладчик): a.pozhalostin@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрены свободные колебания жидкости в баке с упругой перегородкой. Идеальная жидкость заполняет абсолютно жесткий сосуд прямоугольной формы с двумя отсеками на высоту  $H$ . Длина каждого отсека  $l_1$ ,  $l_2$  соответственно. Получено аналитическое, точное решение краевой задачи о малых колебаниях жидкости взаимодействующих с упругими колебаниями балки под действием гидродинамического давления жидкости.

## Freedom vibrations liquid in ridged rectangle tank with elasticity

© A.A. Pozhalostin\*, D.A. Goncharov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): a.pozhalostin@mail.ru

**Abstract.** An analytical, exact solution to the boundary value problem of small vibrations of a liquid interacting with elastic vibrations of a beam under the action of the hydrodynamic pressure of a liquid has been obtained.

## Колебания жестких пластин в прямоугольном баке, заполненном жидкостью

© А.А. Пожалостин\*, Д.А. Гончаров

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail (докладчик): a.pozhalostin@mail.ru

**Аннотация.** Представлены разработанные аналитические (точные) методы решения задач о расчете частот собственных колебаний жестких и упругих перегородок в жестком прямоугольном баке, заполненном жидкостью. Результаты решения этих задач могут быть использованы при проектировании гидротехнических сооружений, а также в судостроении при анализе динамики элементов конструкций крупных танкеров-нефтевозов и газовозов. Рассмотрено четыре случая. В первом случае бак закрыт с одного конца упруго заделанной жесткой пластиной. Во втором — пластина упруго закреплена посередине бака. В третьем — в баке расположены две пластины из случаев 1 и 2. В четвертом случае рассмотрено решение краевой задачи для упругой пластины-консоли, расположенной посередине бака. В последнем случае получено частотное уравнение, левая часть которого представляет собой мероморфную функцию с бесконечным числом простых полюсов. Одним из первых специалистов, получивших результаты в данной проблеме гидроупругости, был П.К. Ишков.

**Ключевые слова:** *механический аналог, колебания, гидроупругость.*

## **Oscillations of rigid plates in a rectangular tank filled with liquid**

© A.A. Pozhalostin\*, D.A. Goncharov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\* E-mail (speaker): a.pozhalostin@mail.ru

**Abstract.** The article presents the developed analytical (exact) methods for solving problems of calculating the frequencies of natural vibrations of rigid and elastic partitions in a rigid rectangular tank filled with liquid. The results of solving these problems can be used in the design of hydraulic structures, as well as in shipbuilding when analyzing the dynamics of structural elements of large oil tankers and gas carriers. Four cases were considered. In the first case, the tank is closed at one end by an elastically sealed rigid plate. In the second, the plate is elastically fixed in the middle of the tank. In the third case, two plates from cases 1 and 2 are located in the tank. In the fourth case, the solution of the boundary value problem for an elastic cantilever plate located in the middle of the tank is considered. In the latter case, a frequency equation is obtained, the left side of which is a meromorphic function with an infinite number of simple poles. One of the first specialists to obtain results in this problem of hydroelasticity was P.K. Ishkov.

**Keywords:** *mechanical analogue, oscillations, hydroelasticity.*

## Аэродинамическая фокусировка мелкодисперсных водных капель в сверхзвуковом воздушном потоке

© С.С. Попович\*, А.Г. Здитовец, Н.А. Киселев, Ю.А. Виноградов

НИИ механики МГУ, Москва, Россия

\*E-mail (докладчик): pss@imec.msu.ru

Исследованию взаимодействия двухфазных (дисперсных) потоков с обтекаемыми телами посвящено множество работ (см., например, обзор [1]). Наличие даже небольшого количества примеси (доли процента) в основном потоке может приводить к существенным изменениям его параметров на поверхности обтекаемого тела. В данной работе внимание сконцентрировано на влиянии примеси водных капель в сверхзвуковом воздушном потоке на температуру поверхности обтекаемого тела, а также на возможности аэродинамической фокусировки частиц на стенку при организации в потоке скачков уплотнения малой интенсивности. Снижение температуры обтекаемой стенки в этом случае может позволить значительно повысить эффективность методов тепловой защиты, устройств безмашинного энергоразделения, способов интенсификации теплообмена и др. [2–4].

Известно, что поверхность, обтекаемая высокоскоростным потоком, разогревается до температуры, близкой к локальной температуре торможения невозмущенного потока. Однако полного восстановления температуры до значения температуры торможения не происходит. Если поверхность тепло изолирована (непроницаема для теплового потока), то ее температура (адиабатная температура стенки  $T_{aw}$ ) будет равна температуре пристенного слоя газа, в общем случае не равной температуре торможения потока [5]. Мерой отклонения служит коэффициент восстановления температуры  $r$ , показывающий долю кинетической энергии потока, переходящей в тепло на стенке:

$$T_{aw} = \frac{T_0^* \left( 1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)}{\left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)} = \begin{cases} \approx T_0^* (M \ll 1); \\ \approx r T_0^* (M \gg 1), \end{cases} \quad (1)$$

где  $T_{aw}$  — адиабатная температура стенки, К;  $T_0^*$  — температура торможения в потоке, К;  $r$  — коэффициент восстановления температуры;  $M$  — число Маха;  $\gamma$  — показатель адиабаты газа.

При турбулентном безотрывном обтекании пластины и тел вращения с гладкими образующими (цилиндр, конус) коэффициент восстановления температуры составляет около  $0,89 \pm 0,01$  [5]. Однако стенка может нагреваться ( $r$  возрастает) или охлаждаться ( $r$  снижается) при воздействии градиента давления, усложнении формы поверх-

ности и наличии сильных возмущений в потоке (скачки уплотнения, отрывные течения, фазовые переходы).

В исследованиях сверхзвуковых потоков уменьшение адиабатной температуры стенки (эффект аэродинамического охлаждения) фиксируется в области отрывных и возвратных течений при обтекании ребер, уступов, лопаток, обтекателей различных форм и т. п. [6–10]. В области многофазных течений в литературе представлен ряд работ, посвященных данному вопросу. В работе [11] экспериментально показано, что адиабатная температура стенки, обтекаемой сверхзвуковым потоком влажного пара, может быть равна температуре насыщения потока, если в потоке присутствуют капли воды определенного размера и концентрации. В работах [13–15] численно показано, что наличие даже очень малой концентрации капель в основном потоке может приводить к значительному снижению адиабатной температуры стенки. Попаданию капель в пограничный слой может способствовать механизм аэродинамической фокусировки частиц в сверхзвуковом потоке. Согласно результатам исследований [16], дисперсные частицы фокусируются вдоль фронта скачка уплотнения. Таким образом, искусственная генерация скачков уплотнения малой интенсивности в газокапельном потоке может позволить снизить аэродинамический нагрев обтекаемой поверхности.

В работе представлены результаты сравнительного исследования обтекания пластины сверхзвуковым воздушным и воздушно-капельным потоками. Экспериментальные исследования проводились на сверхзвуковом аэродинамическом стенде (рис. 1) с использованием систем регистрации данных National Instruments, автоматизированных программ опроса и обработки показаний сенсорных устройств в среде LabView, термопар с термокомпенсацией, зондовых измерений, тепловизионных и оптических методов визуализации картины течения [17, 18].

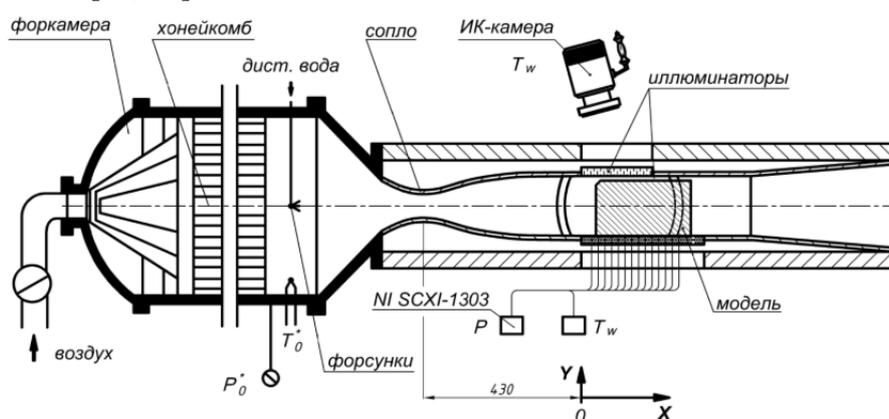
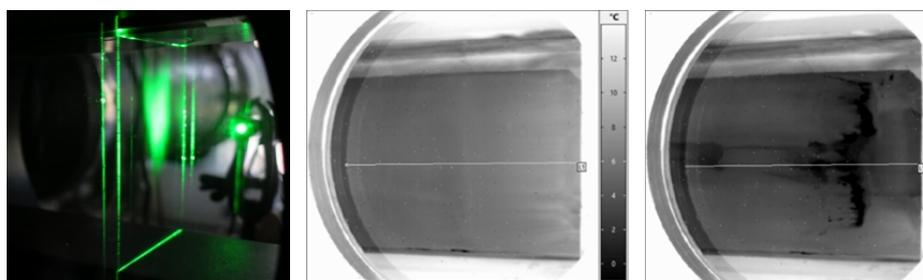


Рис. 1. Схема проведения эксперимента:

$T_0^*$  — полная температура набегающего потока;  $P_0^*$  — полное давление в форкамере;  
 $P$  — статическое давление на стенке;  $T_w$  — температура модели



**Рис. 2.** Визуализация течения лазерным ножом, тепловизионная картина течения воздушного и воздушно-капельного сверхзвукового потока (слева направо)

Металлическая пластина устанавливалась вертикально в рабочем канале аэродинамической установки. Капли дистиллированной воды в воздушный поток распылялись в форкамере через центробежные форсунки мелкодисперсного распыла «полый конус». Массовая концентрация жидкости составляла до 0,5 % расхода воздуха, средний диаметр капель по Заутеру — 80 мкм, число Маха набегающего потока  $M = 2,0–3,0$ . Результаты измерений температуры поверхности пластины для случая однофазного (без капель) воздушного потока сравнивались с результатами для воздушно-капельного потока при одинаковых параметрах в форкамере.

С помощью визуализации лазерным ножом (рис. 2) было показано, что большая часть впрыскиваемых в форкамере капель концентрируется в центральной части канала, не доходя до стенки. При установке модельной пластины поперек потока в центральной части канала не удалось добиться существенного снижения температуры модели. Возможно, причиной тому является отклонение линий тока вдоль головного скачка уплотнения, в результате чего капли не попали в пограничный слой.

С целью фокусировки частиц в направлении формирующегося на модели пограничного слоя перед моделью был установлен клин — генератор скачка уплотнения. В этом случае впервые удалось добиться выраженного снижения температуры стенки в области падения скачка уплотнения на стенку (см. рис. 2). Невооруженным взглядом можно было видеть образование ледяных наростов на обтекаемой стенке со сниженной температурой на величину до  $15^\circ$ . Дальнейшее увеличение эффекта, по-видимому, связано с подбором оптимальной конфигурации скачков уплотнения, относительного расхода жидкости, режимных параметров потока и размера впрыскиваемых частиц.

*Работа выполняется в рамках госбюджетной темы  
AAAA-A16-116021110200-5 НИИ механики МГУ.*

## Литература

1. Вараксин А.Ю. Обтекание тел дисперсными газовыми потоками (обзор). *Теплофизика высоких температур*, 2018, т. 56, № 2, с. 282–305.
2. Leontiev A.I., Zditovets A.G., Vinogradov Y.A., Strongin M.M., Kiselev N.A. Experimental investigation of the machine-free method of temperature separation of air flows based on the energy separation effect in a compressible boundary layer. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 2017, no. 88, pp. 202–219.
3. Бурцев С.А. Исследование путей повышения эффективности газодинамического энергоразделения. *Теплофизика высоких температур*, 2014, т. 52, № 1, с. 14–21.
4. Попович С.С., Здитовец А.Г., Киселёв Н.А., Макарова М.С. Использование метода сверхзвукового безмашинного энергоразделения при редуцировании давления природного газа. *Тепловые процессы в технике*, 2019, т. 11, № 91, с. 2–15.
5. Леонтьев А.И. Газодинамические методы температурной стратификации (обзор). *Известия РАН. МЖГ*, 2002, № 4, с. 6–26.
6. Чжен П. *Отрывные течения*. Москва, Мир, 1973, т. 3, 335 с.
7. Виноградов Ю.А., Попович С.С., Стронгин М.М. Экспериментальное исследование коэффициента восстановления температуры и интенсификации теплоотдачи при течении на плоской стенке за ребром сверхзвукового потока сжимаемого газа. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2016, № 11, с. 55–75.
8. Leontiev A.I., Popovich S.S., Vinogradov Y.A., Strongin M.M. Experimental research of heat transfer in supersonic separated compressible gas flow. *Journal of Physics: Conf. Series*, 2018, vol. 1129, art. no. 012022, pp. 1–4.
9. Попович С.С. Аэродинамическое охлаждение стенки при течении сверхзвукового потока в следе за обратным уступом. *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*, 2019, т. 20, № 1, с. 1–11.
10. Carscallen W.E., Currie T.C., Hogg S.I., Gostelow J.P. Measurement and computation of energy separation in the vertical wake flow of a turbine nozzle cascade. *J. of Turbomachinery*, 1999, vol. 121, no. 4, pp. 703–708.
11. Игнатъевская Л.А. *Исследование двухфазного пограничного слоя на плоской стенке*. Дис. ... канд. техн. наук. Москва, МЭИ, 1971.
12. Леонтьев А.И., Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д. Пограничный слой на плоской пластине в сверхзвуковом газокапельном потоке. Влияние испаряющихся капель на температуру адиабатической стенки. *Теплофизика высоких температур*, 2015, т. 53, № 6, с. 910–917.
13. Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Влияние примеси неиспаряющихся капель на структуру течения и температуру адиабатической стенки в сжимаемом двухфазном пограничном слое. *Известия РАН. МЖГ*, 2019, № 3, с. 58–69.
14. Азанов Г.М., Осипцов А.Н. Влияние мелких испаряющихся капель на температуру адиабатической стенки в сжимаемом двухфазном пограничном слое. *Известия РАН. МЖГ*, 2016, № 4, с. 62–71.
15. Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Аэродинамическая фокусировка инерционных частиц в области пересечения ударных волн. *Известия РАН. МЖГ*, 2007, № 4.
16. Попович С.С. Особенности автоматизации эксперимента и обработки результатов при исследовании теплообмена в сверхзвуковом потоке сжимаемого газа. *Программная инженерия*, 2018, № 1, с. 35–45.
17. Попович С.С., Здитовец А.Г., Киселёв Н.А., Виноградов Ю.А., Медвецкая Н.В. Измерение адиабатной температуры стенки плоской пластины, обтекаемой сверхзвуковым воздушно-капельным потоком. *Известия РАН. МЖГ*, 2020, № 5, с. 130–136.

## Метод типа Барнса — Хата решения граничного интегрального уравнения, возникающего в вихревых методах вычислительной гидродинамики

© Е.П. Рятина<sup>1,2\*</sup>, И.К. Марчевский<sup>1,2</sup>, Ю.С. Черных<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>ИСП им. В.П. Иванникова РАН, Москва, Россия

\*E-mail: evgeniya.ryatina@yandex.ru

**Аннотация.** Объектом исследования работы являются двумерные лагранжевы вихревые методы вычислительной гидродинамики. При моделировании обтекания профиля вихревыми методами наиболее трудоемкой операцией является расчет конвективных скоростей вихревых частиц, что по сути означает вычисление их парных взаимодействий. При решении задач обтекания систем подвижных друг относительно друга тел возрастает вычислительная сложность процедуры решения граничного интегрального уравнения на профиле, выражающего собой граничное условие прилипания, что существенно ограничивает область применимости вихревых методов.

В работе предложена модификация быстрого метода Барнса — Хата с использованием идей мультипольных и локальных разложений для решения задачи расчета взаимодействия набора вихревых частиц между собой. Метод имеет логарифмическую вычислительную сложность вместо квадратичной (при прямом расчете), что позволяет существенно снизить время расчетов при большом числе рассматриваемых частиц. Предложена адаптация метода к итерационному решению линейной системы, аппроксимирующей граничное интегральное уравнение. С использованием разработанной модификации быстрого метода реализованы как расчетные схемы, обеспечивающие выполнение граничного условия в отдельных точках профиля, так и более точные, позволяющие учитывать распределение решения вдоль панелей профиля. Помимо существенного уменьшения времени расчетов, другим преимуществом использования данного подхода является отсутствие необходимости хранения матрицы системы полностью — необходимо сохранять лишь те ее коэффициенты, которые рассчитываются «напрямую».

**Ключевые слова:** вихревой метод, граничное интегральное уравнение, метод Барнса — Хата, задача  $N$  тел.

### Литература

1. Barnes J., Hut P. A hierarchical  $O(M\log N)$  force-calculation algorithm. *Nature*, 1986, vol. 324 (4), pp. 446–449.
2. Dynnikova G.Ya. Fast technique for solving the  $N$ -body problem in flow simulation by vortex methods. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, pp. 1389–1396.

## Barnes — Hut-type method for boundary integral equation in vortex particle method of computational fluid dynamics

© E.P. Ryatina<sup>1, 2\*</sup>, I.K. Marchevsky<sup>1, 2</sup>, J.S. Chernyh<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Ivannikov Institute for System Programming of the RAS, Moscow, Russia

\*E-mail: evgeniya.ryatina@yandex.ru

**Abstract.** The lagrangian vortex method of computational fluid dynamics is considered. Generally, for the problem of the two-dimensional flow simulation around airfoils the most time-consuming operation is convective velocities computation (squared computational complexity), that leads to the necessity of particles pairs interactions calculation. If the system of several airfoils is considered, which somehow moves relative to each other, the other time-consuming operation in vortex method is a boundary integral equation solution, which is an analogue of boundary no-slip condition. These facts limit the vortex method range of applicability significantly. We suggest the fast Barnes — Hut method modification based on the multipole method ideas with local expansions for both mentioned operations in vortex method — particles interactions calculation and boundary integral equation solution. The method has logarithmic computational complexity instead of the squared one that significantly reduced the computational time when the number of particles is large. Also, an adaptation of fast method for the iterative solution of the linear system that approximates the boundary integral equation is proposed. Besides, the method can be used as for numerical scheme, when the boundary condition is satisfied only in some control points, and for more accurate schemes as well, when the distribution of the solution is taking into account. Moreover, the fast method allows not to store the full system matrix, but only some of its coefficients, which are calculated exactly.

**Keywords:** *vortex method, boundary integral equation, Barnes — Hut method, N-body problem.*

### References

1. Barnes J., and Hut P. A hierarchical  $O(N\log N)$  force-calculation algorithm. *Nature*, 1986, vol. 324 (4), pp. 446–449.
2. Dynnikova G.Ya. Fast technique for solving the  $N$ -body problem in flow simulation by vortex methods. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, pp. 1389–1396.

## Использование разрывного метода Галеркина для решения задач газовой динамики

© С.М. Сауткина<sup>1\*</sup>, В.Н. Корчагова<sup>2</sup>, И.К. Марчевский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>ИСП им. В.П. Иванникова РАН, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): sofyasautkina@yandex.ru

**Аннотация.** Работа посвящена разработке и реализации процедуры численного решения системы уравнений газовой динамики разрывным методом Галеркина. Вычислительный алгоритм реализован в виде прототипа программного комплекса на языке C++ и верифицирован на тестовых задачах. Проведен анализ качества получаемого численного решения в зависимости от выбора численного потока, индикатора «проблемных» ячеек и лимитера. Построена и реализована численная схема для моделирования течений вязкого газа. Показана эффективность распараллеливания и хорошая масштабируемость алгоритма.

**Ключевые слова:** RKDG-метод, газовая динамика, лимитер.

При решении инженерных задач аэро- и гидродинамики требуется высокое разрешение моделирования течений жидкости и газа. При выборе численного метода для поиска решения необходимо учитывать правильность воспроизведения решения в областях, где оно претерпевает сильные изменения во времени и пространстве, в частности, на ударных волнах, волнах разрежения и контактных разрывах. Для задач газовой динамики часто применяются конечно-объемные схемы типа Годунова, которые позволяют определить средние величины искомого решения на ячейках сетки. Методы этого типа дают точное решение задачи о распаде произвольного разрыва, они консервативны и сохраняют монотонность профилей сеточных функций. Однако такой подход обеспечивает только первый порядок аппроксимации по пространству на гладких решениях, поэтому для качественной передачи особенностей решения приходится существенно уменьшать шаг сетки. Избежать такой ситуации можно с помощью методов повышенного порядка аппроксимации. Но тогда, как правило, возникает другая проблема: приходится расширять шаблон аппроксимации. Для двумерных и трехмерных течений, моделируемых на неструктурированных сетках, это может быть нетривиальной задачей.

В последние годы идет активное развитие разрывного метода Галеркина, который также называют RKDG-методом (Runge — Kutta Discontinuous Galerkin). Он относится к эффективным численным

методам решения задач с разрывными решениями и большими градиентами решения. Основная идея разрывного метода Галеркина состоит в использовании полиномиальной аппроксимации решения внутри ячейки и приближенном решении задачи Римана о распаде разрыва на ее границе. Этот подход обеспечивает сохранение компактного шаблона аппроксимации за счет повышения порядка численного решения на каждой ячейке сетки. Кроме того, использование компактного шаблона дает возможность решать задачи в областях сложной формы на неструктурированных сетках. Преимуществом RKDG-метода является использование явной схемы расчета, что упрощает разработку численного алгоритма и позволяет эффективно распараллелить вычисления.

Указанные достоинства разрывного метода Галеркина делают его перспективным инструментом решения широкого класса задач, однако его практическая реализация сопряжена с некоторыми трудностями. Высокий порядок аппроксимации приводит к возникновению нефизических осцилляций решения вблизи разрывов; для их подавления используются различные функции-лимитеры, которые позволяют корректировать величину производных приближенного решения. Однако применение лимитеров может привести к снижению порядка точности схемы в области с гладким решением. Чтобы этого избежать, используются так называемые функции-индикаторы проблемных ячеек. Необходимость поиска проблемных ячеек и монотонизации решения увеличивает вычислительную сложность алгоритма. Технологии лимитирования и индикации «проблемных» ячеек для одномерных течений развиты весьма хорошо, однако далеко не все они могут быть перенесены на двумерные и трехмерные задачи.

Идеальные (невязкие) течения, описываемые уравнениями Эйлера, можно рассматривать как упрощенную модель реального газа, при течении которого возникают вязкие напряжения. Добавление соответствующих членов в математическую модель приводит к рассмотрению уравнений Навье — Стокса, для численного решения которых требуются существенная модификация и адаптация алгоритма RKDG-метода, связанная с появлением в уравнении эллиптического (по пространственным переменным) оператора.

Значительная часть существующих реализаций RKDG-метода использует аппроксимации решения высокого порядка (вплоть до 5-6), но лишь для гладких решений. Непосредственному проведению расчетов обтекания, особенно в областях сложной формы, разрешению тонких структур течений вязкого газа и моделированию неустойчивостей посвящено значительно меньше работ. Это связано с объективными трудностями эффективной реализации соответствующих алгоритмов и с принципиальной сложностью задачи численной монотонизации решения в случае возникновения разрывов. Поэтому до сих пор не

существует универсальных решений, которые обеспечивали бы приемлемое качество разрешения разрывов при адекватных затратах вычислительных ресурсов и были бы применимы к широкому классу задач.

В работе представлена разработка и адаптация алгоритма RKDG-метода для численного моделирования двумерных течений вязкого нетеплопроводного сжимаемого газа. Представлен прототип параллельного программного комплекса, реализующий RKDG-метод на неструктурированных сетках.

В качестве тестовой задачи рассмотрена задача Сода с круговым возмущением, решение которой содержит три типа разрывов: ударная волна, волна разрежения и контактный разрыв. Были протестированы различные реализации технологий расчета численных потоков и подходов к лимитированию численного решения. Показано, что лимитер, основанный на локальном принципе максимума, характеризуется повышенной численной вязкостью по сравнению с лимитером на основе WENO-подхода.

Для тестирования моделирования течения вязкого газа рассмотрен центрированный круглый вихрь Ламба с заданной конечной интенсивностью. Для этой задачи известно точное решение для эволюции поля скоростей для случая несжимаемой среды, занимающей безграничную область. Показано хорошее согласование численного решения с аналитическим.

Эффективность распараллеливания реализованного прототипа программного комплекса продемонстрирована на задаче о двойном маховском отражении ударной волны, набегающей на косой уступ, и на задаче Сода в области сложной формы: ускорение остается практически линейным даже при использовании большого количества вычислительных узлов и при обработке на одном процессоре менее 1000 ячеек.

## Литература

1. Toro E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2009, 738 p.

## RKDG method for solution of gas dynamics equations

© S.M. Sautkina<sup>1\*</sup>, V.N. Korchagova<sup>2</sup>, I.K. Marchevsky<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Ivannikov Institute for System Programming of the RAS, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): sofyasautkina@yandex.ru

**Abstract.** This work is concentrated on the development and using of Runge — Kutta Discontinuous Galerkin method for the simulation of gas flows. The numerical algorithm is implemented in C++ in-house prototype

and verified on the set of test cases. The report presents an analysis of quality of the numerical solution in dependency on Riemann solver type, indicators of “problem” cells and limiters. The numerical algorithm is extended to the model of viscous gas. The good efficiency of parallelization and good scalability is presented.

**Keywords:** *RKDG method, gas dynamics, limiter.*

#### References

1. Toro E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2009, 738 p.

## Оценка предельной частоты колебаний капли в потоке

© М.Н. Сергеев

РГАТУ имени П.А. Соловьева, Рыбинск, Россия  
E-mail: mihail\_sergeev@mail.ru

**Аннотация.** Изучение дробления капли является актуальной задачей, так как этот процесс часто встречается в природе и используется в технике. Как известно, существует область равновесных значений капли при ее деформации в потоке. Каплю можно приблизительно считать эллипсоидом. В этом случае показано, что в области равновесия капли имеет место подобласть, где капля находится в неустойчивом состоянии и распадается. На распад капли влияют возникающие в ней колебания. В данной работе производится оценка частоты таких колебаний. Причем полагается, что колебания происходят преимущественно вдоль осей эллипсоида. Колебания полагаются малыми. Частота определяется из уравнения динамики колебаний эллипсоида. Получена предельная частота колебаний при критическом соотношении полуосей эллипсоида.

**Ключевые слова:** *динамика капли, дробление, колебания капли, число Вебера, поверхностное натяжение, аэродинамическое давление.*

## Estimation of the limiting frequency of drop vibrations in the flow

© M.N. Sergeev

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University, Rybinsk, Russia  
E-mail: mihail\_sergeev@mail.ru

**Abstract.** The study of droplet crushing is an urgent task, since this process is often found in nature and is used in engineering. As is known, there is a region of equilibrium values of a drop when it is deformed in

the flow. The drop can be roughly considered an ellipsoid. In this case, it is shown that in the region of equilibrium of the drop there is a subdomain where the drop is in an unstable state and decays. The decay of a drop is affected by the vibrations that occur in it. In this paper, the frequency of such oscillations is estimated. Moreover, it is assumed that the oscillations occur mainly along the axes of the ellipsoid. Fluctuations are assumed to be small. The frequency is determined from the equation of oscillation dynamics of the ellipsoid. The limiting frequency of oscillations is obtained for the critical ratio of the ellipsoid semi-axes.

**Keywords:** *drop dynamics, crushing, drop vibrations, Weber number, surface tension, aerodynamic pressure.*

### **Численное исследование аэродинамических характеристик возвращаемого аппарата и донного элемента конструкции в процессе их разделения**

© В.Т. Калугин, Д.М. Слободянюк

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: kaluginvt@mail.ru, slob.dima@mail.ru

Спуск возвращаемого аппарата (ВА) в атмосфере Земли сопровождается отделением некоторых элементов его конструкции. Одним из таких элементов может быть крышка люка парашютного контейнера (КЛПК), расположенная в донной части ВА. После отделения КЛПК находится в непосредственной близости от ВА, в результате чего имеет место взаимная аэродинамическая интерференция. Данное явление существенно влияет на безопасность отделения, поскольку происходит изменение суммарных аэродинамических характеристик (АДХ) как ВА, так и КЛПК, что может привести к возникновению колебаний и столкновению. Ранее проводились экспериментальные исследования обтекания ВА и находящейся вблизи него донной КЛПК, а также определение минимального импульса толкателей, необходимого для безопасного отделения крышки [1], однако в работе не было исследовано влияние силы толкателей КЛПК на процесс ее отделения при различных углах атаки.

В настоящей работе рассматривается решение сопряженной задачи аэродинамики и динамики движения КЛПК, расположение которой предусмотрено на кормовой поверхности ВА, при ее отделении с учетом аэродинамической интерференции. Расчеты выполняются в пакете FlowVision с применением технологии динамических сеток. Определяются аэродинамические характеристики неподвижного спускаемого аппарата и подвижной крышки. Выявляются особенно-

сти обтекания, оценивается влияние кинематических параметров на безопасность отделения. Выявлены режимы, при которых происходит столкновение КЛПК и ВА. При нулевом угле атаки проведен импульсный анализ, и определена минимальная начальная скорость для безопасного отделения крышки.

### **Литературы**

1. Henicke B., Yechout T. Aerodynamic Investigation of NASA Crew Exploration Vehicle Forward Bay Cover Separation Characteristics. In: *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, 2010, p. 191.

## **Analysis the influence of the frontal heat shield separation process from the reentry vehicle on their aerodynamic characteristics using numerical simulation**

© V.T. Kalugin, D.M. Slobodyanyuk

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: kaluginvt@mail.ru, slob.dima@mail.ru

During reentry vehicle (RV) moving in the Earth's atmosphere, frontal heat shield (FHS) is separated. After separation, when FHS moves in the immediate vicinity of the RV, there is mutual aerodynamic interference, which significantly affects the separation safety. As a result of this effect, changing the total aerodynamic characteristics of both the RV and the FHS occurs, which can lead to oscillations and collision. Earlier, numerical modeling of the flow around the RV and the nearby FHS was carried out [1], however, the effect FHS motion on the aerodynamics characteristics during separation was not taken into account in the work.

In this paper, the problem of the joint flow around an FHS and RV using fixed and dynamic grids in a spatially unsteady setting is considered. Features of the flow are revealed; the influence of the FHS motion in the incident flow on the RV and FHS aerodynamics characteristics is estimated. Comparison of aerodynamics characteristics is carried out in the calculation using various varieties of grids. It is noted that the FHS velocity presence is a determining factor both in the aerodynamics characteristics changing and in the flow structures transformation, unlike calculations with a fixed grid. In conclusion, the influence of the detachable elements speed movement should be taken into account during calculations using a dynamic grid; as a result acceptable results for engineering practice are obtained.

## Reference

1. Aksenov A.A., et al. Computer simulation of the flow and relative motion of the returned apparatus and the hatch of the parachute container during separation at the descent site. *Space Engineering and Technologies*, 2015, no. 2, pp. 39–50.

## Вихревые структуры и гамильтонова геометрия

© Н.Н. Фимин

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
E-mail: oberon@kiam.ru

**Аннотация.** Геометризация описания вихревых гидродинамических систем может быть проведена на основе введения потенциалов Монжа — Клебша. Для этого строим лагранжиан потока, преобразуем его по Лежандру в функцию Гамильтона и определяем гамильтоново пространство на касательном расслоении над потенциальным многообразием Монжа. Вычислив гессиан гамильтониана, получим коэффициенты фундаментального тензора гамильтонова пространства, определяющие его метрику. Далее определяем аналоги коэффициентов Кристоффеля для  $N$ -линейной связности. Рассматривая уравнения Эйлера — Лагранжа с этими коэффициентами связности, приходим к геодезическим уравнениям для «вертикальных» траекторий в гамильтоновом пространстве. Анализируя полученную систему уравнений геодезического движения на предмет возможного увеличения или уменьшения бесконечно малого расстояния между геодезическими вертикальными траекториями (решения соответствующей системы уравнений Якоби — Картана), можем сформулировать общие критерии распада и разрушения вихревой континуальной системы.

**Ключевые слова:** потенциалы Монжа, гессиан, девиация геодезических уравнений, лагранжиан.

## Литература

1. Fimin N.N., Chechetkin V.M. *The Physical Foundations of Hydrodynamic Processes. Macroscopic and Kinetic Approaches*. World Scientific, Singapore-London-Tokyo, 2020, 296 p.

## Vortex structures and Hamilton geometry

© N.N. Fimin

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia

**Abstract.** Geometrization of the description of vortex hydrodynamic systems can be carried out on the basis of the introduction of the Monge — Clebsch potentials. To do this, we construct the Lagrangian of the flow,

transform it according to Legendre into a Hamiltonian function, and define the Hamiltonian space on the cotangent bundle over the potential Monge manifold. By calculating the Hessian of the Hamiltonian, we obtain the coefficients of the fundamental tensor of the Hamiltonian space, which determine its metric. Next, we define analogs of the Christoffel coefficients for the N-linear connection. Considering the Euler-Lagrange equations with these connectivity coefficients, we arrive at geodesic equations for “vertical” trajectories in Hamiltonian space. Analyzing the resulting system of equations of geodesic motion for a possible increase or decrease in the infinitely small distance between geodesic vertical paths (solutions of the corresponding system of Jacobi — Cartan equations), we can formulate general criteria for the decay and destruction of a vortex continuous system.

**Keywords:** *Monge potentials, Hessian, geodesics deviation, Lagrangian.*

### References

1. Fimin N.N., Chechetkin V.M. *The Physical Foundations of Hydrodynamic Processes. Macroscopic and Kinetic Approaches.* World Scientific, Singapore-London-Tokyo, 2020, 296 p.

## **Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в топливных баках**

© Чжаокай Юй, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: yuzhaokai933@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрена осесимметричная задача об определении форм равновесия жидкости в тороидальных баках в условиях микрогравитации. При отсутствии значительных массовых гравитационных сил поведение жидкого топлива в баках начинают определять силы поверхностного натяжения и межмолекулярные силы на границе жидкости с твердой стенкой. На основе принципа стационарности потенциальной энергии выведены условия равновесия замкнутой системы жидкости — газа с твердой стенкой в условиях микрогравитации. Приведена система дифференциальных уравнений, трудности численного решения которой состоят в определении трех предварительно неизвестных констант, и для их решения составлены условие Дюпрэ — Юнга, условие соприкосновения с твердой стенкой и условие сохранения объема жидкости.

**Ключевые слова:** *капиллярная жидкость, тороидальный сосуд, равновесная свободная поверхность, задача Коши.*

В условиях космического полета возникают трудные проблемы по обеспечению надежного питания двигателя топливом и по определению гидродинамических характеристик колебаний жидкости. Для их решения необходимо предварительно определить равновесную свободную поверхность капиллярной жидкости. Исследование равновесия капиллярной жидкости в сосуде тороидальной формы актуально для дальнейшего конструирования топливных баков, так как в последние годы тороидальные баки в связи с их преимуществами в компоновке больше применяются в разгонных блоках.

Напишем условия равновесия системы газ — жидкость — твердая стенка:

$$2H = \text{Bo}z + C, \text{Bo} = \frac{\rho g r_0^2}{\sigma_{12}}(\Sigma);$$

$$\sigma_{12} \cos \alpha_0 + (\sigma_{23} - \sigma_{13}) = 0(\gamma).$$

Задача о нахождении формы равновесной поверхности сводится к построению решения уравнения Лапласа при граничном условии Дюпре — Юнга и условия сохранения объема жидкости. Случай  $\text{Bo} = 0$  приводит к известной в дифференциальной геометрии задаче об изучении поверхности постоянной средней кривизны.

Для применения метода Рунге — Кутты преобразуем уравнение Лапласа в следующую систему дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$r'(s) = u(s), \quad z'(s) = v(s);$$

$$u'(s) = -v(s) \left( \text{Bo} z(s) + C - \frac{v(s)}{r(s)} \right);$$

$$v'(s) = u(s) \left( \text{Bo} z(s) + C - \frac{v(s)}{r(s)} \right).$$

Начальные условия имеют следующую форму:

$$r(0) = \delta - \sin(\theta_1), \quad z(0) = \cos(\theta_1);$$

$$u(0) = -\cos(\alpha + \theta_1), \quad v(0) = -\sin(\alpha + \theta_1),$$

где  $\delta = R_0 / r_0$ .

Условия соприкосновения свободной поверхности с твердой стенкой:

$$l(\bar{s}) = [\delta - r(\bar{s})]^2 + z(\bar{s})^2 = 1;$$

условие Дюпре — Юнга:

$$\alpha(\bar{s}) = \sin^{-1}(r'(\bar{s})) + \sin^{-1}(z(\bar{s})) = \alpha_0;$$

условие сохранения объема жидкости:

$$V(\bar{s}) = 2\pi \left( \int_0^{\bar{s}} z r r' ds - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \tau \cdot (\delta - \sin \tau) \cdot (-\cos \tau) d\tau \right) = V_0.$$

На основе метода Рунге — Кутты 4-го порядка в программе MATLAB получены формы равновесия капиллярной жидкости для различных практически важных ситуаций. Количественно оценено влияние различных параметров, таких как угол смачивания  $\alpha_0$ , число Бонда  $Bo$ , соотношение радиусов окружностей  $\delta = R_0 / r_0$  и относительный объем заполнения жидкостей  $V_0$ , на форму равновесия капиллярной жидкости.

В будущем будут исследованы равновесные свободные поверхности при малых углах смачивания  $[0, 10^\circ]$ , так как именно в этом диапазоне находятся углы смачивания реального ракетного топлива в баках. Кроме того, на основе полученной формы свободной поверхности можно исследовать колебания жидкости в условиях микрогравитации.

### Литература

1. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. *Гидромеханика невесомости*. А.Д. Мышкис, ред. Москва, 1976, 504 с.
2. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. *Методы решения задачи гидромеханики для условий невесомости*. А.Д. Мышкис, ред. Киев, 1992, 592 с.
3. Будник А.М., Полевиков В.К. Осесимметричные формы равновесия жидкости в тороидальном сосуде при невесомости. *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*, 1986, № 6, с. 154–156.
4. Siekmann J., Scheideler W., Tietze P. Static meniscus configurations in propellant tanks under reduced gravity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1981, vol. 28, no. 1, pp. 103–116.

## Study of the equilibrium free surface of capillary fluids in a toroidal vessel

© Zhaokai Yu, A.N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: yuzhaokai933@mail.ru

**Abstract.** The paper considers the problem of determining the shapes of the free surface of liquids in containers of a torus shape under microgravity conditions. In the absence of significant mass gravitational forces,

the behavior of liquid fuel in tanks begins to be determined by surface tension forces and intermolecular forces at the interface of the liquid with a solid wall. Equilibrium conditions of a closed liquid-gas system with a solid wall are derived on the basis of the principle of stationarity of potential energy. A system of differential equations is presented, the difficulties of numerical solution of which consist in determining three previously unknown constants and for their solution the Dupre — Young condition, the condition for contact with a solid wall and the condition for the conservation of the volume of liquid are compiled.

**Keywords:** *capillary fluid, toroidal vessel, equilibrium free surface, Cauchy problem.*

In conditions of space flight, difficult problems arise in ensuring reliable fuel supply to the engine and in determining the hydrodynamic characteristics of fluid vibrations. To solve them, it is necessary to first determine the equilibrium free surface of the capillary liquid. The study of the equilibrium of a capillary liquid in a toroidal vessel is relevant for the further design of fuel tanks, since in recent years, toroidal tanks, due to their advantages in layout, are more used in upper stages.

Let us write the equilibrium conditions for the “gas–liquid–solid wall” system:

$$2H = \text{Bo}z + C, \text{Bo} = \frac{\rho g r_0^2}{\sigma_{12}}(\Sigma);$$

$$\sigma_{12} \cos \alpha_0 + (\sigma_{23} - \sigma_{13}) = 0(\gamma).$$

The problem of finding the shape of an equilibrium surface is reduced to constructing a solution to the Laplace equation under the Dupre — Young boundary condition and the condition for the conservation of the volume of the liquid. The case of total weightlessness leads to the well-known problem in differential geometry of studying a surface of constant mean curvature.

To apply the Runge — Kutta method, we transform the Laplace equation into the following system of 1-st order differential equations:

$$r'(s) = u(s), \quad z'(s) = v(s);$$

$$u'(s) = -v(s) \left( \text{Bo} z(s) + C - \frac{v(s)}{r(s)} \right);$$

$$v'(s) = u(s) \left( \text{Bo} z(s) + C - \frac{v(s)}{r(s)} \right).$$

The initial conditions have the following form:

$$\begin{aligned}r(0) &= \delta - \sin(\theta_1), \quad z(0) = \cos(\theta_1); \\ u(0) &= -\cos(\alpha + \theta_1), \quad v(0) = -\sin(\alpha + \theta_1),\end{aligned}$$

where  $\delta = R_0 / r_0$ .

Conditions for free surface contact with a solid wall:

$$l(\bar{s}) = [\delta - r(\bar{s})]^2 + z(\bar{s})^2 = 1;$$

the Dupre — Young boundary condition:

$$\alpha(\bar{s}) = \sin^{-1}(r'(\bar{s})) + \sin^{-1}(z(\bar{s})) = \alpha_0;$$

the condition for maintaining the volume of liquid:

$$V(\bar{s}) = 2\pi \left( \int_0^{\bar{s}} z r r' ds - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \tau \cdot (\delta - \sin \tau) (-\cos \tau) d\tau \right) = V_0.$$

On the basis of the Runge — Kutta method of the 4th order in the MATLAB program, the forms of equilibrium of a capillary liquid for various practically important situations are obtained. The influence of various parameters, such as the contact angle  $\alpha_0$ , the Bond number  $Bo$ , the ratio of the radii of the circles  $\delta = R_0 / r_0$  and the relative filling volume of liquids  $V_0$ , on the shape of the equilibrium of the capillary liquid, was quantitatively evaluated.

In the future, equilibrium free surfaces will be studied at small contact angles, since it is in this range that the contact angles of real propellant in tanks are located. In addition, on the basis of the obtained shape of the free surface, it is possible to investigate the oscillations of a liquid under microgravity conditions.

## References

1. Babskii V.G., Kopachevskii N.D., Myshkis A.D., Slobozhanin L.A., Tiuptsov A.D. *Hydromechanics of weightlessness*. Moscow, 1976, 504 p.
2. Myshkis A.D., Kopachevskii N.D., Zhukov M.Yu., Slobozhanin L.A., Tiuptsov A.D. *Methods for solving the problems of hydromechanics for weightlessness conditions*. Kiev, 1992, 592 p.
3. Budnik A.M., Polevnikov V.K. Axisymmetric forms of liquid equilibrium in a toroidal vessel under zero gravity. *News of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas*, 1986, no. 6, pp. 154–156.
4. Siekmann J., Scheideler W., Tietze P. Static meniscus configurations in propellant tanks under reduced gravity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1981, vol. 28, no. 1, pp. 103–116.

## СЕКЦИЯ 4. ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

*Руководители:* д-р техн. наук, проф. С.С. Гаврюшин,  
д-р техн. наук, проф. А.Ю. Карпачев

### Идентификация параметров рычажных и зубчатых механизмов

© А.К. Алешин, И.М. Кондратьев\*

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

\*E-mail: kiimash@yandex.ru

**Аннотация.** Представлен методологический подход к идентификации параметров, определяющих функциональные характеристики рычажных и зубчатых механизмов. Для определения приведенных момента инерции и момента сил сопротивления, а также массы тела, координат центра масс и тензора инерции тела разработаны соответствующие методы оперативной идентификации [1]. Для определения функциональных характеристик механизмов в натуральных экспериментах предложено использовать модифицированный метод интервалов времени, в котором они рассматриваются как случайные величины.

**Ключевые слова:** идентификация параметров, метод интервалов времени, случайная величина.

#### Литература

1. Алешин А.К., Кондратьев И.М. Метод идентификации инерционных характеристик твердого тела. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 2, с. 12–13. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-2-1960

### Parameter identification for lever and gear mechanisms

© А.К. Aleshin, I.M. Kondrat'ev\*

Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia

\*E-mail: kiimash@yandex.ru

**Abstract.** A methodological approach to the parameter identification of the functional characteristics of lever and gear mechanisms is presented. To determine the reduced moment of inertia and the moment of resistance forces, as well as mass, center of mass 3D-location and inertia tensor for mechanism, appropriate methods of operational identification

have been developed [1]. To determine the functional characteristics of mechanisms in field experiments, it is proposed to use a modified time interval method, in which time intervals are considered as random variables.

**Keywords:** *parameter identification, time interval measurement, random variable.*

### References

1. Aleshin A.K., Kondrat'ev I.M. A solid body inertia properties identification method. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, iss. 2, pp. 12–13. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-2-1960

## Прогнозирование штампуемости листового проката

© С.А. Берестова, К.В. Серков

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия  
E-mail: s.a.berestova@urfu.ru, k.v.serkov@urfu.ru

**Аннотация.** Технологические особенности широко применяемых методов получения листовых материалов приводят к анизотропии их физико-механических свойств. Эта анизотропия неизбежно проявляется в процессе дальнейшего их использования. Создавая благоприятную текстуру листовых материалов, можно увеличить способность листовых материалов к глубокой вытяжке. Кристаллографическая текстура является основным фактором, обуславливающим появление анизотропии в материалах. Кристаллографическая текстура как преимущественная ориентация кристаллографических осей в поликристаллах возникает при различных видах термомеханической обработки. Для оценки штампуемости листовых материалов важным техническим показателем анизотропии механических свойств является коэффициент нормальной пластической анизотропии, который определяется отношением приращений пластических деформаций по толщине и по ширине плоского образца, вырезанного под фиксированным углом, при его одноосном растяжении в области равномерной деформации. В случае нетекстурированного состояния этот коэффициент равен единице, а чем он выше, тем больше сопротивление листа утончению при штамповке и тем глубже вытяжка. Для листов из однофазных металлов и сплавов, которые в макросимметрии являются ортотропными, установлена аналитическая связь коэффициента нормальной пластической анизотропии с соответствующими текстурными параметрами и степенью анизотропии монокристалла кубической симметрии. В качестве примеров вычислены коэффициенты для листов малоуглеродистой стали. Экспериментальные данные о текстуре материала и об измеренных и рассчитанных различ-

ными способами значения коэффициента нормальной пластической анизотропии были взяты из независимых источников.

**Ключевые слова:** коэффициент нормальной пластической анизотропии.

## Forecasting of sheets stamping

© S.A. Berestova, K.V. Serkov

Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia  
E-mail: s.a.berestova@urfu.ru, k.v.serkov@urfu.ru

**Abstract.** Technological features of widely used methods for producing sheet materials lead to anisotropy of their physical and mechanical properties. This anisotropy inevitably manifests itself in the process of their further use. The deep drawing ability of the sheet materials can be increased by creating a favorable texture of the sheet materials. The crystallographic texture is the main factor that causes the appearance of anisotropy in materials. The crystallographic texture is the predominant orientation of the crystallographic axes in polycrystals. It arises during various types of thermomechanical processing. An important technical indicator of the mechanical properties anisotropy to assess the formability of sheet materials is the plastic anisotropy normal coefficient. It is determined by the ratio of the increments of plastic deformations over the thickness and over the width of a flat specimen cut at a fixed angle. The flat specimen with its uniaxial tension is in the region of uniform deformation. This coefficient is equal to one in the case of a non-textured state. The higher it is the greater the sheet's resistance to thinning during stamping. We considered sheets of single-phase metals and alloys. They are orthotropic in macro symmetry. An analytical relationship is established between the plastic anisotropy normal coefficient and the corresponding texture parameters and the degree of anisotropy of a single crystal of cubic symmetry. Coefficients for low-carbon steel sheets are calculated as examples. Experimental data were taken from independent sources. There are data about the texture of the material, the values of the measured and calculated in various ways coefficient for normal plastic anisotropy.

**Keywords:** coefficient of normal plastic anisotropy.

## Аналитические оценки упругих колебаний конструкции отделяемых створок обтекателей трансформируемого сборочно-защитного блока

© В.Н. Бакулин<sup>1</sup>, С.В. Борзых<sup>2\*</sup>, К.В. Терешина<sup>2</sup>, Ю.Н. Щиблев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИПРИМ РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>ПАО РКК «Энергия» им. С.П. Королёва, Королёв Московская область, Россия

\*E-mail: rigidbor@gmail.ru

**Аннотация.** Отделение защитных створок обтекателей сборочно-защитного блока — одна из ключевых операций на участке выведения. В связи с этим становится остроактуальной разработка моделей процесса отделения створок, в максимальной степени учитывающих свойства створок, в частности, их упругие свойства. Кинематические схемы отделения створок предполагают их разворот относительно осей вращения, зафиксированных на носителе, и силы средств отделения создают необходимый для разворота момент, а также вызывают колебания створок. Малые колебания могут быть представлены в виде разложения в ряд по собственным формам. Получен ряд аналитических оценок уровня колебаний створок в процессе их отделения.

**Ключевые слова:** ракета-носитель, створки обтекателя, процесс отделения, колебания.

Моделирование динамики современных космических конструкций рассматривалось в работах [1–10] и др. Отделение защитных створок обтекателей сборочно-защитного блока — одна из ключевых операций на участке выведения, отказ которой автоматически означает невыполнение миссии. В связи с этим становится остроактуальной разработка моделей процесса отделения створок, в максимальной степени учитывающих наиболее существенные особенности процесса отделения и свойства самих створок, в частности, их упругие свойства.

«Твердые» модели достаточно точно позволяют рассчитывать относительное движение носителя и створок после их отделения, что является отражением того факта, что силы инерции, обусловленные движением створок как целого, практически не влияют на их колебательное движение. В связи с этим уравнения движения как целого (по твердым формам) и малые упругие колебания можно анализировать независимо [11].

Интенсивные колебания створок возникают под действием сил, создаваемых специальными средствами отделения — толкателями (пружинными, пиротехническими, пневматическими), твердотопливными двигателями. Кинематические схемы отделения створок часто

предполагают их разворот относительно осей вращения, зафиксированных на носителе, и силы средств отделения создают необходимый для разворота момент. Затем, после достижения определенного угла разворота, связь с носителем разрывается, и начинается участок автономного движения створки.

Малые упругие колебания могут быть представлены в модальном виде, т. е. в виде разложения в ряд по собственным формам колебаний [2]. Предполагается, что выполняется свойство ортогональности форм, и вклад каждой частной формы в общую деформацию не зависит от вклада по другим формам. Тогда отдельные уравнения по каждому тону колебаний будут независимы, и в этом случае они решаются аналитически:

$$S_n(t) = S_{n0} \cos \omega_n t + \frac{\dot{S}_{n0}}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sum_i \left[ F_i^x f_{ni}^x + F_i^y f_{ni}^y + F_i^z f_{ni}^z \right] \sin \omega_n (t - \tau) d\tau, \quad (1)$$

где  $S_{n0}$ ,  $\dot{S}_{n0}$  — начальные условия;  $F$  — силы средств отделения; формы  $f_{ni}$  ортонормированы.

Силы в правых частях уравнения (1) создаются, как правило, либо толкателями, либо твердотопливными ракетными двигателями (РДТТ). Зависимость тяги РДТТ от времени близка к постоянной. То же самое можно сказать и об изменении силы толкателей, особенно в начальной, наиболее опасной фазе процесса отделения. Тогда в (1) проекции сил могут быть вынесены из-под знака интеграла.

С точки зрения уменьшения возмущений при разделении и снижения нагрузок на узлы связи предпочтительными являются симметричные схемы процесса, когда плоскость отделения совпадает с плоскостью симметрии отделяемой конструкции, при этом средства отделения установлены попарно симметрично [11]. Отделение створок обтекателей выполнено именно по такой схеме.

Пусть для нее  $F_1^x = F_2^x$ ;  $F_1^y = -F_2^y$ ;  $F_1^z = F_2^z$  (ось  $x$  продольная). Тогда  $f_{n1}^x = f_{n2}^x$ ;  $f_{n1}^y = -f_{n2}^y$ ;  $f_{n1}^z = f_{n2}^z$  — для симмет-

ричных форм и  $f_{n1}^x = -f_{n2}^x$ ;  $f_{n1}^y = f_{n2}^y$ ;  $f_{n1}^z = -f_{n2}^z$  — для кососимметричных.

На РДТТ возможна задержка включения по времени относительно друг друга. Может иметь место также разброс сил, развиваемых отдельными толкателями. Из (1) видно, что кососимметричные формы будут возбуждаться только при наличии задержки  $\Delta t$  включения одного из РДТТ (или разнице сил толкателей), иначе возбуждение охватывает только симметричные формы. В этом случае при  $\Delta t = 0$  для симметричных форм в период действия силы из (1) получим колебания около смещенного положения:

$$S_n = \frac{2 \left[ F_1^x f_{n1}^x + F_1^y f_{n1}^y + F_1^z f_{n1}^z \right]}{\omega_n^2}, \quad (2)$$

а после окончания работы средств отделения сохраняются остаточные колебания около нулевого значения  $S_n = 0$ .

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-08-00673.*

### Литература

1. Бакулин В.Н., Борзых С.В., Воронин В.В., Кокушкин В.В. Динамика процесса посадки космического аппарата с рычажно-тросовым посадочным устройством. *Вестник МАИ*, 2012, № 5, с. 45–50.
2. Бакулин В.Н., Борзых С.В., Воронин В.В. Математическое моделирование процесса посадки космического аппарата на участке его контакта с поверхностью. *Вестник МАИ*, 2011, № 4, с. 38–46.
3. Бакулин В.Н., Борзых С.В., Решетников М.Н. Моделирование относительного движения возвращаемой капсулы и транспортного корабля при их разделении. *Вестник МАИ*, 2011, № 3, с. 287–294.
4. Bakulin V.N., Borzykh S.V., Voronin V.V. Space vehicle landing dynamics at failure of landing gear. *Russian Aeronautics*, 2016, vol. 59 (1), pp. 23–28. DOI: 10.3103/S1068799816010049
5. Bakulin V.N., Bogomolov N.V., Borzykh S.V. Separation algorithm of the Soyuz MS Spacecraft from Nonstabilized International Space Station. *Russian Aeronautics*, 2019, vol. 62, no. 4, pp. 577–584.
6. Анфалов А.С., Богомолов Н.В., Борзых С.В. Моделирование процесса отделения пилотируемых кораблей от крупногабаритных орбитальных станций. *Изв. вузов. Машиностроение*, 2018, № 5, с. 77–84.
7. Бакулин В.Н., Богомолов Н.В., Анфалов А.С., Борзых С.В. Статистическое определение области ограничений угловой скорости орбитальной станции для обеспечения безопасного отделения пилотируемых транспортных кораблей. *XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов*. В 4-х томах, 2019, с. 629–630.

8. Bogomolov N.V., Anfalov A.S., Borzykh S.V., Bakulin V.N. Simulation of process of small satellites separation from deployer installed on cargo spacecraft. *Journal of Physics: Conference Series. Proc. of the 4th International Conference Supercomputer Technologies in Mathematical Modelling, June 19–21, 2019, Moscow*. P. 012003. DOI:10.1088/1742-6596/1392/1/012003
9. Бакулин В.Н., Борзых С.В., Воронин В.В., Кокушкин В.В. Исследование влияния свойств грунта посадочной поверхности на устойчивость процесса посадки космического аппарата с механическим посадочным устройством. *Вестник Московского авиационного института*, 2014, т. 21, № 1, с. 25–32.
10. Бакулин В.Н., Борзых С.В., Ильясова И.Р. Математическое моделирование процесса раскрытия многозвенных солнечных батарей. *Вестник МАИ*, 2011, № 3, с. 295–302.
11. Колесников К.С., Кокушкин В.В., Борзых С.В., Панкова Н.В. *Расчет и проектирование систем разделения ступеней ракет*. 2-е изд., доп. Красноярск, Издательство СГАУ им. Решетнева, 2011, 337 с.

### **Analytical evaluations of the elastic vibrations of the structure of separated salves of transformable assembly protective blocks**

© V.N. Bakulin<sup>1</sup>, S.V. Borzykh<sup>2\*</sup>, K.V. Tereshina<sup>2</sup>, Yu.N. Shchiblev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IAM RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup>PJSC RKK “Energia”, Korolyov, Moscow Region, Russia

\*E-mail: rigidbor@gmail.ru

**Abstract.** The separation of the protective flaps of the fairings of the assembly-protective unit is one of the key operations in the launch area. In this regard, it becomes urgent to develop models of the leaf separation process, taking into account the properties of the valves to the maximum extent, in particular, their elastic properties. Kinematic schemes for separating the flaps imply their rotation relative to the axes of rotation fixed on the carrier, and the forces of the separation means create the moment necessary for the swing, and also cause the flaps to vibrate. Small fluctuations can be represented as a series expansion in their own forms. A number of analytical estimates of the level of oscillations of the valves in the process of their separation were obtained.

**Keywords:** *launch vehicle, fairing flaps, separation process, vibrations.*

*This work was supported by the grant RFBR no. 20-08-00673.*

#### **References**

1. Bakulin V.N., Kokushkin V.V., Borzykh S.V., Voronin V.V. Dynamics of the landing process of a spacecraft with a lever-rope landing device. *Aerospace MAI Journal*, 2012, vol. 19, no. 5, pp. 45–50.
2. Bakulin V.N., Borzykh S.V., Voronin V.V. Mathematical modeling of the process of landing a spacecraft at the site of its contact with the surface. *Aerospace MAI Journal*, 2011, vol. 18, no. 4, pp. 38–46.

3. Bakulin V.N., Borzykh S.V., Reshetnikov M.N. Modeling the relative motion of the reentry capsule and the transport ship during their separation. *Aerospace MAI Journal*, 2011, vol. 18, no. 3, pp. 287–294.
4. Bakulin V.N., Borzykh S.V., Voronin V.V. Space vehicle landing dynamics at failure of landing gear. *Russian Aeronautics*, 2016, vol. 59 (1), pp. 23–28. DOI: 10.3103/S1068799816010049
5. Bakulin V.N., Bogomolov N.V., Borzykh S.V. Separation algorithm of the Soyuz MS Spacecraft from Nonstabilized International Space Station. *Russian Aeronautics*, 2019, vol. 62, no. 4, pp. 577–584.
6. Anfalov A.S., Bogomolov N.V., Borzykh S.V. Modeling the process of separating manned spacecraft from large-sized orbital stations. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2018, no. 5, pp. 77–84.
7. Bakulin V.N., Bogomolov N.V., Anfalov A.S., Borzykh S.V. Statistical determination of the area of limitations of the angular velocity of an orbital station to ensure the safe separation of manned transport vehicles. *XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. Collection of works*. In 4 volumes, 2019, pp. 629–630.
8. Bogomolov N.V., Anfalov A.S., Borzykh S.V., Bakulin V.N. Simulation of process of small satellites separation from deployer installed on cargo spacecraft. *Journal of Physics: Conference Series. Proc. of the 4th International Conference Supercomputer Technologies in Mathematical Modelling, June 19–21, 2019, Moscow*. P. 012003. DOI: 10.1088/1742-6596/1392/1/012003
9. Bakulin V.N., Borzykh S.V., Voronin V.V., Kokushkin V.V. Investigation of the effect of soil properties of the landing surface on the stability of the landing process of a spacecraft with a mechanical landing gear. *Aerospace MAI Journal*, 2014, vol. 21, no. 1, pp. 25–32.
10. Bakulin V.N., Borzykh S.V., Ilyasova I.R. Mathematical modeling of the process of opening multilink solar batteries. *Aerospace MAI Journal*, 2011, vol. 18, no. 3, pp. 295–302.
11. Kolesnikov K.S., Kokushkin V.V., Borzykh S.V., Pankova N.V. *Calculation and design of missile stage separation systems*. 2<sup>nd</sup> ed., enl. Krasnoyarsk, Reshetnev SGAU Publ., 2011, 337 p.

## Продольно-поперечные волны в гибкой деформируемой нити

© А.В. Брюквин, О.Ю. Брюквина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: bryukvin\_a@mail.ru bryukvina\_o@mail.ru

**Аннотация.** В работе рассматриваются продольно-поперечные колебания гибкой деформируемой нити. Анализируются условия, приводящие к возникновению продольно-поперечных волн. Аналитически решается частный случай продольно-поперечного движения.

**Ключевые слова:** гибкая нить, колебания, трос.

## Longitudinal-transverse waves in a flexible deformable thread

© A.B. Bryukvin, O.Yu. Bryukvina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: bryukvin\_a@mail.ru bryukvina\_o@mail.ru

**Abstract.** The paper deals with the longitudinal-transverse vibrations of a flexible deformable thread. The conditions leading to the occurrence of longitudinal-transverse waves are analyzed. A particular case of longitudinal-transverse motion is solved analytically.

**Keywords:** *flexible string, transverse, oscillations.*

## Математические методы прогнозирования определяющих характеристик композиционных материалов и конструкций при экстремальных воздействиях

© Е.Л. Гусев<sup>1, 2\*</sup>, В.Н. Бакулин<sup>3</sup>, В.Д. Черных<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ИПНГ ФИЦ «ЯНЦ» СО РАН, Якутск, Россия

<sup>2</sup>ИМИ СВФУ, Якутск, Россия

<sup>3</sup>ИПМ РАН, Москва, Россия

\*E-mail: elgusev@mail.ru

**Аннотация.** Разработаны модификации методов поиска глобального экстремума многопараметрических показателей эффективности с учетом структурных особенностей критериев оценки качества, применяемых в задачах прогнозирования определяющих характеристик композитов. Проанализированы перспективные пути повышения потенциальных возможностей, связанные с совершенствованием методов построения оптимальных направлений поиска абсолютного минимума показателей эффективности, связанных с решением задач прогнозирования остаточного ресурса, надежности, долговечности полимерных композитов при воздействии экстремальных факторов внешней среды и эксплуатационных нагрузок. Проведенный сравнительный анализ существующих подходов и их возможных модификаций позволил заключить, что наиболее перспективные возможности эффективного построения глобально-оптимальных решений в уточненных вариационных постановках обратных задач прогнозирования связаны с развитием методологии эффективного сужения областей поиска, содержащих глобально-оптимальные решения.

**Ключевые слова:** композиционные материалы, остаточный ресурс, долговечность, прочность, вариационная постановка, принцип множественности моделей прогнозирования, обратные задачи прогнозирования.

В последние десятилетия все большее распространение в современных областях техники, определяющих научно-технический прогресс, таких как авиационная и космическая техника, судостроение, системы нефтяной и газовой промышленности, современная техника, функционирующая в экстремальных условиях Арктической и Субарктической зоны, находят композиционные материалы, композиционные конструкции, композиционные покрытия. В связи с растущим применением композитов в технике значительную актуальность приобретает проблема прогнозирования надежности, долговечности, остаточного ресурса композиционных материалов и конструкций из них [1–10]. Проведены исследования, связанные с возможностью разработки эффективных методов построения наиболее перспективных направлений поиска глобально-оптимальных решений в вариационных постановках обратных задач прогнозирования остаточного ресурса композитов с учетом установленных качественных закономерностей структуры оптимальных решений. Проведенный сравнительный анализ существующих подходов и их возможных модификаций позволил заключить, что наиболее перспективные возможности эффективного построения глобально-оптимальных решений в вариационных постановках обратных задач прогнозирования связаны с развитием методологии эффективного сужения областей поиска, содержащих глобально-оптимальные решения. При этом основу развиваемой методологии составляют методики, связанные с теоретическим обоснованием допустимости схем сужения множества допустимых вариантов, при которых на результирующем множестве меньшей размерности продолжает находиться искомое глобально-оптимальное решение. На основе конструктивного исследования структуры показателей эффективности в исследуемых вариационных постановках обратных задач прогнозирования остаточного ресурса композитов установлено, что оптимальные решения, доставляющие абсолютный минимум соответствующим показателям эффективности, могут дополнительно удовлетворять некоторой системе соотношений. Разработка методологии выделения таких систем дополнительных соотношений позволила существенно уменьшить размерность исходных вариационных постановок обратных задач прогнозирования остаточного ресурса композитов и, соответственно, значительно сузить исходное множество допустимых вариантов моделей прогнозирования. Установлены функциональные соотношения, которым дополнительно могут удовлетворять искомые глобально-оптимальные решения в вариационных постановках обрат-

ных задач прогнозирования остаточного ресурса. Установленные функциональные соотношения в общем случае могут быть записаны в виде

$$g_j(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, q; q < n). \quad (1)$$

Проведенный конструктивный анализ исследуемых вариационных постановок обратных задач прогнозирования остаточного ресурса позволил установить, что необходимые условия экстремума для показателей эффективности по ряду параметров одновременно совпадают с достаточными условиями. Обозначим такие параметры через  $u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_q}$ . Необходимые и достаточные условия экстремума для этой выделенной системы параметров могут быть взяты за систему функциональных соотношений  $g_j$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) (1), которая может служить основой для последующего существенного уменьшения размерности исходной задачи прогнозирования и упрощения ее структуры. На основе применения современного математического аппарата конструктивного анализа системы соотношений, к которым приводят необходимые и достаточные условия экстремума, выделенная система  $q$  параметров  $u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_q}$  может быть выражена через оставшуюся систему  $r = n - q$  параметров  $u_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n; l \neq u_{j_i}, i = 1, 2, \dots, q$ ) многопараметрической модели прогнозирования

$$u_{j_i} = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_{j_1-1}, u_{j_1+1}, \dots, u_{j_q-1}, u_{j_q+1}, \dots, u_{n-1}, u_n), \quad (2)$$

$$(i = 1, 2, \dots, q).$$

В результате разработанный подход позволил получить вариационную задачу значительно меньшей размерности и соответственно более простой структуры по сравнению с исходной вариационной задачей, для которой с учетом установленных особенностей ее структуры разработаны эффективные методы нелокальной оптимизации. Для сформулированной вспомогательной вариационной задачи с учетом установленных особенностей ее структуры разработаны эффективные методы нелокальной оптимизации.

По разработанным методикам, основанным на применении необходимых и достаточных условий экстремума для эффективного конструктивного преобразования вариационных постановок обратных задач прогнозирования остаточного ресурса композитов к вариационным задачам меньшей размерности, проведены сравнительные вычислительные эксперименты, которые показали высокую эффективность разработанных методов для решения задач прогнозирования остаточного ресурса композитов в вариационных постановках.

## Литература

1. Гусев Е.Л. Применение параллельных процедур поиска экстремума для решения обратных задач прогнозирования определяющих характеристик композиционных материалов. *Физика и механика материалов*, 2016, т. 26, № 1, с. 70–72.
2. Гусев Е.Л., Бакулин В.Н. Вариационная формулировка обратных задач прогнозирования остаточного ресурса композитов. *Доклады Академии наук*, 2018, т. 63, № 9, с. 388–392.
3. Гусев Е.Л., Бакулин В.Н. Оптимальное управление уменьшением интенсивности теплового поля на основе выбора структуры неоднородных конструкций в вариационной постановке. *Доклады РАН*, 2018, т. 480, № 3, с. 287–292.
4. Gusev E.L. Using parallel procedures for the searching of the extremum for the decision of the inverse problems prediction of the defining characteristics of the composite materials. *Material Physics and Mechanics*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 70–72.
5. Гусев Е.Л. Прогнозирование остаточного ресурса композитов при воздействии экстремальных факторов внешней среды. *Главный механик*, 2020, т. 197, № 1, с. 32–36.
6. Gusev E.L., Bakulin V.N., Chernykh V.D. Development of combined search methods for efficiency indicator extreme in variation statement of forecasting tasks for determine characteristics of composite materials. *Journal of Physics: Conference Series. Supercomputer Technologies in Mathematical Modelling, 19–21 June 2019. Moscow*, 2019, vol. 1392, art. 012008.
7. Gusev E.L., Bakulin V.N. Optimum design of structurally nonhomogeneous materials and constructions with required properties. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2016, vol. 89, pp. 260–264.
8. Гусев Е.Л., Бабенко Ф.И. Методы поиска экстремума с оптимальным выбором параметров для решения задач восстановления параметров моделей прогнозирования определяющих характеристик полимерных композитов. *Сб. трудов «Материалы для технических устройств и конструкций, применяемых в Арктике»*. Москва, ВИАМ, 2015, с. 132–141.
9. Gusev E.L. Research Methods of the Limit Possibilities of Structurally Inhomogeneous Structures with a Desired Set of Properties during Wave Actions in the Variation Statement. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2015, vol. 44, no. 2, pp. 148–152.
10. Gusev E.L., Bakulin V.N. Variation statement of the optimal design problem of composition constructions with the required complex of properties. *Mechanics of Composite Materials*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 637–644.

## Mathematical methods for predicting the defining characteristics of composite materials and structures under extreme impacts

© E.L. Gusev<sup>1,2\*</sup>, V.N. Bakulin<sup>3</sup>, V.D. Chernykh<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of oil and gas problems FRC «YSC» SB RAS, Yakutsk, Russia

<sup>2</sup>Institute of Mathematics and Computer Science, North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia

<sup>3</sup>Institute of Applied Mechanics, Moscow, Russia

\*E-mail: elgusev@mail.ru

**Abstract.** Modifications of methods for searching for the global extremum of multiparametric performance indicators are developed, taking into account the structural features of quality assessment criteria used in predicting the defining characteristics of composites. The article analyzes promising ways to increase potential opportunities associated with improving methods for constructing optimal directions for searching for the absolute minimum of efficiency indicators related to solving problems of predicting the remaining resource, reliability, and durability of polymer composites under the influence of extreme environmental factors and operational loads. The comparative analysis of existing approaches and their possible modifications allowed us to conclude that the most promising opportunities for effective construction of globally optimal solutions in refined variational formulations of inverse forecasting problems are associated with the development of a methodology for effectively narrowing the search areas containing globally optimal solutions.

**Keyword:** *mathematical methods of continuum mechanics, composite materials, residual life, durability, forecasting methods.*

## Конечно-элементное моделирование ортодонтических перемещений элементов зубочелюстной системы

© Э.Б. Демишкевич

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: mail@edtech.ru

**Аннотация.** В работе описаны особенности конечно-элементного моделирования ортодонтических перемещений элементов зубочелюстной системы. Представлен способ построения качественных конечно-элементных моделей на основе снимков клинического случая, полученных методом компьютерной томографии. Приведен пример моделирования перемещений, вызываемых ортодонтической пружиной.

**Ключевые слова:** *конечно-элементный анализ, зубочелюстная система, ортодонтическое лечение.*

Ортодонтическое лечение заключается в приложении нагрузок к элементам зубочелюстной системы. Биологический процесс, проходящий под воздействием ортодонтических нагрузок, приводит к перемещению зубов сквозь поддерживающие их костные ткани. Ключевым стимулом к ортодонтическому перемещению является напряженно-деформированное состояние периодонта — тонкой ткани, соединяю-

ший зуб и альвеолярную кость. Периодонт обеспечивает снабжение окружающих его тканей питательными веществами, таким образом изменения его структуры приводят к рассасыванию или формированию костных тканей. В работе описано влияние напряженно-деформированного состояния периодонта на перестроение костей. Перемещение зуба рассматривается как итерационный процесс, где перемещения вычисляются на каждом шаге, затем происходит перестроение модели согласно измененному положению зуба и описанному поведению периодонта. Разработанный метод позволяет точно промоделировать ортодонтические перемещения зубов, используя персонализированные данные пациента для анализа.

### **Литература**

1. Chen J., Li W., Swain M.V., Ali Darendeliler M., Li Q. A periodontal ligament driven remodeling algorithm for orthodontic tooth movement. *Journal of Biomechanics*, 2014, vol. 47 (7), pp. 1689–1695. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2014.02.030
2. Арутюнов С.Д., Гаврюшин С.С., Демишкевич Э.Б. Конечно-элементное моделирование начальных перемещений элементов зубо-челюстной системы при ортодонтическом лечении. *Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2014, № 3 (54), с. 108–120.

## **Finite-element simulation of orthodontic tooth movement**

© E.B. Demishkevich

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: mail@edtech.ru

**Abstract.** The paper describes the specifics of finite element modeling to simulate orthodontic tooth movement. A method to build quality finite element models on the basis of clinical case images obtained by computed tomography is presented. An example of simulation for movements caused by an orthodontic spring is also provided.

**Keywords:** *finite-element modeling, orthodontic tooth movement.*

Orthodontic treatment consists of applying loads to the elements of the dentition. Under the influence of orthodontic loading, the biological process leads to the movement of the teeth through the supporting bone tissue. The key stimulus for orthodontic movement is the stress-strain state of the periodontium, a thin tissue that connects the tooth and alveolar bone. The periodontium provides nutrients to the surrounding tissue, so changes in its structure lead to the resorption or formation of bone tissue. This study describes the effect of the stress-strain state of the periodontium on bone remodelling. A tooth movement is treated as an iterative process where the movements are calculated at each step, then the model is

reconstructed according to the changed position of the tooth and the periodontal behaviour described. The developed approach makes possible the accurate simulation of orthodontic tooth movements using personalised patient data for analysis.

#### References

1. Chen J., Li W., Swain M.V., Ali Darendeliler M., Li Q. A periodontal ligament driven remodeling algorithm for orthodontic tooth movement. *Journal of Biomechanics*, 2014, vol. 47 (7), pp. 1689–1695. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2014.02.030
2. Arutyunov S.D., Gavryushin S.S., Demishkevich E.B. Finite-element modeling of the orthodontic tooth movement. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences Series*, 2014, no. 3 (54), pp. 108–120 (In Russ.).

### Об устойчивости стационарного вращения ротора с жидкостью, ось которого расположена в анизотропных вязкоупругих закреплениях

© Д.Н. Дерендяев, Н.В. Дерендяев

ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия  
E-mail: derendyaevdm@mail.ru, derendyaevnic@rambler.ru

**Аннотация.** Работа содержит развитие оригинального метода исследования устойчивости режимов стационарного вращения роторных систем с жидкостью. Метод, изложенный в [1], удается распространить на случай с анизотропными закреплениями оси ротора [2]. Были установлены теоремы, согласно которым изменение степени неустойчивости связано с осуществимостью возмущенного движения типа эллиптической прецессии. При этом возмущенное движение жидкости в специально выбранной неинерциальной системе отсчета представляет суперпозицию движений, отвечающих двум круговым прецессиям.

С использованием этого обобщения метода исследования устойчивости построены границы областей устойчивости режимов стационарного вращения роторной системы с жидкостью в пространстве параметров анизотропных закреплений оси ротора: для случая анизотропной жесткости закреплений, а также для случая анизотропного демпфирования в закреплениях оси ротора.

**Ключевые слова:** роторная система, полость, содержащая вязкую жидкость, режим стационарного вращения, устойчивость и автоколебания.

## **Литература**

1. Дерендяев Н.В. *Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость*. Нижний Новгород, Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2014, 154 с.
2. Дерендяев Н.В., Дерендяев Д.Н. Устойчивость стационарного вращения роторных систем с жидкостью в случае анизотропных закреплений оси ротора. *Доклады РАН*, 2018, т. 480, № 1.

## **Синхронизация частоты колебаний дискового золотника и частоты вращения коленчатого вала за счет коррекции угла закручивания пружины**

© С.С. Драгунов\*, Е.В. Терентьев

ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ», Москва, Россия

\*E-mail: sergejdragunov@yandex.ru

**Аннотация.** В новой конструкции механизма газораспределения открытие и закрытие выпускного и впускного отверстий осуществляет дисковый золотник, совершающий колебательные движения синхронно с частотой вращения коленчатого вала. Внутренний конец пружины закреплен на валу, а внешний является свободным и при повороте в обе стороны от среднего положения упирается в упоры, положение которых изменяется при изменении частоты вращения коленчатого вала. В первой половине такта выпуска золотник поворачивается в сторону открытия выпускного отверстия за счет жесткой кинематической связи с коленчатым валом. В середине такта выпуска кинематическая связь разрывается и возобновляется в конце такта впуска.

**Ключевые слова:** *механизм газораспределения, синхронизация, колебания, пружина.*

Современные поршневые двигатели внутреннего сгорания с механизмом газораспределения (МГР) клапанного типа имеют ряд недостатков, таких как чрезмерный нагрев выпускных клапанов и ограниченные возможности проходных сечений.

Актуальность данной работы заключается в разработке принципиально новой конструкции МГР с дисковым золотником, совершающим колебательное движение синхронно с частотой вращения коленчатого вала, которая устраняет указанные выше недостатки МГР клапанного типа. Принципиальным отличием предлагаемой конструкции МГР от известных ранее конструкций золотникового типа является колебательное движение дискового золотника как по гармо-

ническому закону на одних участках, так и по инерции на других участках. При этом на большей части такта сжатия и рабочего хода золотник остается неподвижным, поэтому он не подвержен износу и в то же время обеспечивает хорошую герметизацию цилиндра. Золотник совершает одно полное колебание только во время такта выпуска и такта впуска, что соответствует одному обороту коленчатого вала, которое обозначим как  $T$ .

Сначала рассмотрим работу МГР при максимальной частоте вращения коленчатого вала. Для совершения колебательного процесса пружину надо деформировать. Поэтому в первой половине такта выпуска, когда коленчатый вал поворачивается на  $90^\circ$ , золотник также необходимо принудительно повернуть на  $90^\circ$  и закрутить пружину, а затем разорвать кинематическую связь и отпустить золотник в свободное движение под действием закрученной пружины. Время, в течение которого пружина полностью распрямится, соответствует одной четвертой периода собственных колебаний, что также соответствует повороту коленчатого вала на угол  $90^\circ$ , поэтому обозначим этот интервал времени как  $T_{90}$ . Если период собственных колебаний рассчитан по формуле

$$T = 2\pi (J / \chi)^{0,5}, \quad (1)$$

где  $J$  — суммарный момент инерции золотника и пружины;  $\chi$  — жесткость пружины, то золотник окажется в среднем положении в верхней мертвой точке (ВМТ), когда впускное и выпускное отверстия полностью закрыты.

После прохождения среднего положения золотник продолжит свое вращательное движение в течение следующего интервала времени  $T_{90}$  и откроет полностью впускное отверстие, когда коленчатый вал повернется на  $90^\circ$ , что будет соответствовать середине такта впуска. В этот момент времени пружина окажется закрученной в противоположную сторону и начнет поворачивать золотник в сторону закрытия впускного отверстия. Через следующий интервал времени  $T_{90}$  поршень окажется в НМТ, и в этот момент времени движение золотника необходимо остановить за счет механического торможения.

Поскольку ударные нагрузки недопустимы, то золотник надо затормаживать плавно, при повороте коленчатого вала на угол примерно в  $30^\circ$ . Поэтому пружину закручивают во время первой половины такта выпуска не на  $90^\circ$ , а только на  $60^\circ$ . При повороте коленчатого вала на угол  $60^\circ$  на такте выпуска золотник будет поворачиваться по гармоническому закону, а при дальнейшем повороте на угол в  $30^\circ$  будет двигаться по инерции. Но в этом случае жесткость пружины должна определяться по формуле

$$\chi = 16 \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \right)^2 J v^2, \quad (2)$$

где  $v$  — частота вращения коленчатого вала,  $\text{с}^{-1}$ .

После прохождения своего среднего положения, которое соответствует ВМТ, золотник повернется на угол  $30^\circ$  по инерции в сторону открытия впускного отверстия. Внешний свободный конец пружины коснется второго упора на стороне впуска, и пружина начнет закручиваться в противоположную сторону, а движение золотника будет соответствовать гармоническому закону. При повороте еще на угол  $60^\circ$  золотник остановится. В этот момент впускное отверстие будет полностью открыто, а поршень окажется в среднем положении на такте впуска.

С этого момента пружина начнет разжиматься, поворачивая золотник в сторону закрытия впускного отверстия. При повороте на угол  $60^\circ$  пружина полностью распрямится. В этот момент включается жесткая кинематическая связь, плавно затормаживающая движение золотника при повороте на угол  $30^\circ$ .

Для работы двигателя на частотах, меньше максимальной, необходимо предусмотреть механизм, обеспечивающий синхронизацию колебательного процесса золотника. Эта задача решается путем уменьшения угла закручивания пружины при уменьшении частоты вращения коленчатого вала. Для определения величины угла закручивания пружины  $\theta_m$  необходимо решить уравнение

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \theta_m}{\theta_m} \sqrt{\frac{J}{\chi}} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{J}{\chi}} = \frac{1}{4v}, \quad (3)$$

где  $v$  — текущее значение частоты вращения коленчатого вала.

После преобразований формулы (3) получаем решение в виде

$$\theta_m = \frac{\pi}{\frac{1}{2v} \sqrt{\frac{J}{\chi}} - \pi + 2}.$$

**Заключение.** Управление передвижением упоров для внешнего конца пружины осуществляет система автоматического регулирования, которая помимо основного параметра, частоты вращения коленчатого вала, также учитывает наличие трения при повороте золотника.

*Работа выполняется при финансовой поддержке РФФИ по гранту № 19-08-00367.*

## Литература

1. Dragunov S.S. Improvement of reciprocating internal combustion engines on the basis of new designs timing mechanisms. *5th International Workshop on Computer Science and Engineering: Information Processing and Control Engineering, WCSE 2015-IPCE Information Processing and Control Engineering*, Programme, 2015, pp. 239–243.
2. Golubev Yu.F., Melkumova E.V. Two-legged Walking Robot Prescribed Motion on a Rough Cylinder. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, art. ID 030009.

## Synchronization of the disc slide valve vibration frequency and the crankshaft rotational speed by correcting the spring twisting angle

© S.S. Dragunov\*, E.V. Terentyev

National research university "MPEI", Moscow, Russia

\*E-mail: sergejdragunov@yandex.ru

**Abstract.** In the new design of the gas distribution mechanism, the opening and closing of the exhaust and inlet openings is carried out by a disc slide valve, which oscillates synchronously with the crankshaft rotation speed. The inner end of the spring is fixed on the shaft, and the outer end is free and when turning to both sides from the middle position abuts against the stops, the position of which changes when the crankshaft speed changes. In the middle of the exhaust stroke, the kinematic connection is broken and resumes at the end of the intake stroke.

**Keywords:** gas distribution mechanism, synchronization, vibrations, spring.

## References

1. Dragunov S.S. Improvement of reciprocating internal combustion engines on the basis of new designs timing mechanisms. *5th International Workshop on Computer Science and Engineering: Information Processing and Control Engineering, WCSE 2015-IPCE Information Processing and Control Engineering*. Programme, 2015, pp. 239–243.
2. Golubev Yu.F., Melkumova E.V. Two-legged Walking Robot Prescribed Motion on a Rough Cylinder. *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1959, art. ID 030009.

## Построение начальной конфигурации нагруженного тела

© Т.Б. Дуйшеналиев, И.В. Меркурьев, Е.А. Грибов

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

**Аннотация.** Решается задача об определении недеформированной (естественной) конфигурации тела при заданном деформированном его состоянии. Математическая модель для этой задачи базируется на

решении краевой задачи теории упругости в неклассической постановке. Областью определения уравнений равновесия и совместности деформаций, а также граничных условий служит конечное состояние. Это состояние равновесия считается заданным, а не искомым. Иначе невозможно математически корректно указать положения сил, распределенных в объеме и на поверхности тела. Перемещения, определяемые по формулам Чезаро, представляют те перемещения, которые приводят тело в область конечного (деформированного) состояния. По ним находятся координаты точек начального состояния тела и строится его конфигурация.

**Ключевые слова:** упругое тело, краевая задача, напряжение, деформация, перемещение, формулы Чезаро, конфигурация, пластина.

Известно, что существуют две постановки статической краевой задачи [1]: 1) тело с заданными силами внутри своего объема и на его поверхности находится в равновесии. Нужно найти напряжения и деформации в нем; 2) к заданному начальному состоянию тела статически прикладываются внешние силы и тело, двигаясь и деформируясь, переходит в некое конечное состояние, где и обретает равновесие. Необходимо найти это конечное состояние, а также напряжения и деформации в нем.

Первая постановка задачи выдвигается при формулировании, а вторая — при решении краевой задачи статики [1, 2]. Постановки эти не идентичны, они даже диаметрально противоположны, ибо в первой из них речь идет о равновесии, а во второй — о движении. Однако в механике деформируемого твердого тела считается, что задачи обеих постановок имеют одно и то же решение. Но это не совсем так. Во второй постановке область определения уравнений равновесия (объем  $V$  и поверхность  $S$  тела) неизвестна. Для тела неизвестной конфигурации невозможно математически строго указать координаты точек приложения массовых сил, а также сил на поверхности.

Вернемся к первой общепризнанной постановке. Запишем уравнения статической краевой задачи в напряжениях:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad x_i \in V, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0, \quad x_i \in V, \quad (2)$$

$$\sigma_{ji} n_j = p_i, \quad x_i \in S. \quad (3)$$

Выделим в теле элемент объема  $V_\varepsilon$  с поверхностью  $S_\varepsilon$ . Равенство нулю главного вектора и главного момента усилий, приложенных к этому элементу:

$$\int_{S_\varepsilon} \sigma_j n_j dS + \int_{V_\varepsilon} f dV = 0, \int_{S_\varepsilon} r \times \sigma_j n_j dS + \int_{V_\varepsilon} r \times f dV = 0, \quad (4)$$

а также равенство нулю главного вектора и главного момента внешних сил, приложенных к рассматриваемому телу в целом:

$$\int_S p dS + \int_V f dV = 0, \int_S r \times p dS + \int_V r \times f dV = 0, \quad (5)$$

приводит к уравнениям (1), (3). В этих уравнениях  $\sigma_i$ ,  $f$ ,  $p$ ,  $r$  — соответственно, векторы напряжения на площадке с нормалью  $x_i$ , массовых и поверхностных внешних сил и радиус-вектор. Уравнение (2) выражает условие совместности деформации.

Задача (1)—(3) — это прежде всего задача о равновесии сил. Решая ее, мы находим то поле напряжений  $\sigma_{ij}$ , которое имеется в теле и которое уравнивает внешние силы. Разумеется, эти напряжения созданы перемещениями  $u_i$ , которые произошли до того, как установилось рассматриваемое равновесие. Как, когда и под действием каких изменяющихся во времени внешних сил произошли эти перемещения, к статической задаче в нашем случае не имеют отношения.

Уравнения (1)—(3) можно записать и в перемещениях:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i = 0, \quad x_i \in V, \quad (6)$$

$$(\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})) n_j = p_i, \quad x_i \in S. \quad (7)$$

Эти уравнения в механическом смысле выражают то же самое, что и уравнения (1)—(3) — в любой материальной точке внутри объема  $V$  и на его поверхности  $S$  внешние силы уравновешены. Статическая краевая задача является, как уже подчеркивалось выше, задачей о равновесии сил. В свете этого ее естественно представлять в напряжениях.

Краевая задача (1)—(3) как математическая имеет единственное решение. Это решение, подчеркнем еще раз, в нашем предложении ищется для конечного состояния равновесия с известными  $V$  и  $S$  и остается таким же и при других представлениях краевой задачи.

Задача решена, если найдено поле напряжения  $\sigma_{ij}(x)$ ,  $x_i \in V$ , которое удовлетворяет уравнениям совместности деформации и уравнивает внешние силы внутри области  $V$  и на ее поверхности  $S$ . Из этого решения через обобщенный закон Гука легко определяются деформации и далее перемещения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} (-\nu \delta_{ij} \sigma_{kk} + (1 + \nu) \sigma_{ij}), \quad (8)$$

$$u_i(x) = u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0)(x_j - x_j^0) + \frac{1}{E} \int_{\ell} (-v\delta_{ik}\sigma_{ii} + (1+v)(\sigma_{ik} + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\sigma_{ii,j} - \delta_{kj}\sigma_{ii,i}) + (1+v)(\sigma_{ki,j} - \sigma_{kj,i})))) dy_k, \quad (9)$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\ell$  — линия в области  $V$ ;  $x^0$  — начальная точка этой линии,  $u_i(x^0)$ ;  $\omega_{ij}(x^0)$  — постоянные интегрирования, не влияющие на деформированное состояние, и их в нашем случае можно не учитывать. Уравнения (9) получаются из формул Чезаро, если в них деформации выразить через напряжения [3].

Эти перемещения преобразуют область  $V$  и ее поверхность  $S$  в область  $V_0$  с поверхностью  $S_0$ . Начальная конфигурация тела строится по координатам  $z_i$ , определяемым по формулам:

$$z_i = x_i - \frac{1}{E} \int_{\ell} (-v\delta_{ik}\sigma_{ii} + (1+v)(\sigma_{ik} + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\sigma_{ii,j} - \delta_{kj}\sigma_{ii,i}) + (1+v)(\sigma_{ki,j} - \sigma_{kj,i})))) dy_k, \quad x_i \in V. \quad (10)$$

Для определения координат поверхности начальной конфигурации тела в предыдущее выражение надо вносить  $x_i \in S$ . Здесь нет обычного координатного разночтения: в функциях перемещений, напряжений и деформаций, так же как и во всех предыдущих выражениях, только координаты конечного состояния. Оба состояния, начальное и конечное, являются состояниями равновесия. В первом нет никаких внешних и внутренних усилий. А во втором, являющимся предметом изучения краевой задачи, любое внешнее воздействие уравновешивается внутренними напряжениями.

На основе предложенного подхода к решению краевой задачи статики разработана математическая модель для описания конечных деформаций и построения начальной конфигурации нагруженного тела. Математическая модель для этой задачи базируется на решении краевой задачи теории упругости в неклассической постановке, полученном в работе [3]. Проведены обширные вычислительные эксперименты по описанию конечных (геометрически нелинейных) деформаций упругих элементов различных конструкций. Расчеты выполнены в системе MATLAB. Моделировались изгибные деформации пластин и стержней, деформирование растяжения—сжатия толстостенного цилиндра, а также построены начальные конфигурации при кручении пластин из различных конструкционных материалов (сталь, алюминий, резиноподобные композиты).

## Литература

1. Новацкий В. *Теория упругости*. Москва, Мир, 1975, 872 с.
2. Мейз Дж. *Теория и задачи механики сплошных сред*. Пер. с англ. Москва, Мир, 1974, 318 с.
3. Дуйшеналиев Т.Б. *Неклассические решения механики деформируемого тела*. Москва, Изд-во МЭИ, 2017, 400 с.

## Construction of the initial configuration of the loaded body

© Т.В. Duishenaliev, I.V. Merkuryev, E.A. Gribov

National Research University “MPEI”, Moscow, Russia

**Abstract.** The problem of determining the undeformed (natural) configuration of a body for a given deformed state is solved. The mathematical model for this problem is based on the solution of the boundary value problem of the theory of elasticity in a non-classical formulation. The final state is the domain for determining the equations of equilibrium and compatibility of deformations, as well as boundary conditions. This state of equilibrium is considered to be given, not sought. Otherwise, it is impossible to mathematically correctly indicate the positions of the forces distributed in the volume and on the surface of the body. The displacements determined by the Cesaro’s formulas represent those displacements that bring the body into the areas of the final (deformed) state. They are used to find the coordinates of the points of the initial state of the body and to build its configuration.

**Keywords:** *elastic body, boundary value problem, stress, deformation, displacement, Cesaro's formulas, configuration, plate.*

It is known that there are two formulations of the static boundary value problem [1]: (1) A body with given forces inside of its volume and on its surface is in an equilibrium. It is necessary to find stresses and deformations in it; (2) External forces are statically applied to a given initial state of the body, and the body, moving and deforming, passes into a certain final state, where it finds equilibrium. It is necessary to find this final state, as well as stresses and deformations in it.

The first one is put forward when formulating, and the second one — when solving the boundary value problem of statics [1, 2]. These formulations are not identical, they are even diametrically opposed, since the first one is about the equilibrium, and the second one is about the movement. However, in the mechanics of a deformable solid body, it is considered that the problems of both formulations have the same solution, but it is not truly so. In the second formulation, the domain of determining the equilibrium equations (volume  $V$  and surface  $S$  of the body) is unknown. For a

body of unknown configuration, it is mathematically impossible to strictly indicate the coordinates of the points of application of mass forces, as well as forces on the surface.

Let's go back to the first generally accepted formulation. Let us write the equations of the static boundary value problem in stresses:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad x_i \in V, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} f_{k,k} + f_{i,j} + f_{j,i} = 0, \quad x_i \in V, \quad (2)$$

$$\sigma_{ji} n_j = p_i, \quad x_i \in S. \quad (3)$$

Let us select the volume element  $V_\varepsilon$  in the body with the surface  $S_\varepsilon$ . The equality to zero of the main vector and the principal moment of forces applied to this element:

$$\int_{S_\varepsilon} \sigma_j n_j dS + \int_{V_\varepsilon} f dV = 0, \quad \int_{S_\varepsilon} r \times \sigma_j n_j dS + \int_{V_\varepsilon} r \times f dV = 0, \quad (4)$$

as well as the equality to zero of the main vector and the principal moment of external forces applied to the considered whole body:

$$\int_S p dS + \int_V f dV = 0, \quad \int_S r \times p dS + \int_V r \times f dV = 0, \quad (5)$$

leads to the equations (1), (3). In these equations  $\sigma_i$ ,  $f$ ,  $p$ ,  $r$ , respectively, are the stress vectors on the site with the normal  $x_i$ , mass and surface external forces, and the radius vector. The equation (2) expresses the deformation compatibility condition.

The problem (1)–(3) is primarily the problem of the balance of forces. By solving it, we find the stress field  $\sigma_{ij}$  that is present in the body and that balances external forces. Of course, these stresses are created by the displacements  $u_i$  that occurred before the considered equilibrium was established. How, when and under which time-varying external forces these displacements occurred, in our case, have nothing to do with the static problem.

The equations (1)–(3) can be written in displacements as well:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i = 0, \quad x_i \in V, \quad (6)$$

$$(\lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})) n_j = p_i, \quad x_i \in S. \quad (7)$$

In a mechanical sense, these equations express the same as the equations (1)–(3) — at any material point inside the volume  $V$  and on its sur-

face  $S$  the external forces are balanced. The static boundary value problem, as already emphasized above, is the problem of the equilibrium of forces. Considering this, it is natural to formulate it in stresses.

The boundary value problem (1)–(3), as the mathematical one, has the only solution. This solution, we emphasize one more time, in our formulation is sought for a final equilibrium state with known  $V$  and  $S$ , and remains the same for the other representations of the boundary value problem.

The problem is solved if the stress field  $\sigma_{ij}(x)$ ,  $x_i \in V$  is found that satisfies the deformation compatibility equations and balances the external forces inside the area  $V$  and on its surface  $S$ . From this solution, through the generalized Hooke's law, the deformations and further the displacements are easily determined:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}(-\nu\delta_{ij}\sigma_{kk} + (1+\nu)\sigma_{ij}), \quad (8)$$

$$u_i(x) = u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0)(x_j - x_j^0) + \frac{1}{E} \int_{\ell} (-\nu\delta_{ik}\sigma_{kk} + (1+\nu)(\sigma_{ik} + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\sigma_{tt,j} - \delta_{kj}\sigma_{tt,i}) + (1+\nu)(\sigma_{ki,j} - \sigma_{kj,i})))) dy_k, \quad (9)$$

where  $E$  is Young's modulus,  $\ell$  is the line in the area  $V$ ,  $x^0$  is the initial point of this line,  $u_i(x^0)$ ,  $\omega_{ij}(x^0)$  are the integration constants that do not affect the deformed state and, in our case, they can be ignored. The equations (9) are received from the Cesaro formulas if the deformations in them are expressed in terms of stresses [3].

These displacements transform the area  $V$  and its surface  $S$  into the area  $V_0$  with the surface  $S_0$ . The initial configuration of the body is built by the coordinates  $z_i$  determined by the formulas:

$$z_i = x_i - \frac{1}{E} \int_{\ell} (-\nu\delta_{ik}\sigma_{kk} + (1+\nu)(\sigma_{ik} + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\sigma_{tt,j} - \delta_{kj}\sigma_{tt,i}) + (1+\nu)(\sigma_{ki,j} - \sigma_{kj,i})))) dy_k, \quad x_i \in V. \quad (10)$$

To determine the coordinates of the surface of the initial configuration of the body,  $x_i \in S$  must be entered in the previous expression. There is no usual coordinate discrepancy here: in the functions of displacements, stresses and strains, as in all the previous expressions, there are only the coordinates of the final state. Both states, the initial and the final, are the states of equilibrium. In the first one there are no external and internal efforts. In the second one, which is the subject of study of the boundary value problem, any external influence is balanced by internal stresses.

On the basis of the proposed approach to the solution of the boundary value problem of statics, a mathematical model has been developed for describing finite deformations and constructing the initial configuration of the loaded body. The mathematical model for this problem is based on the solution of the boundary value problem of the theory of elasticity in a non-classical formulation obtained in the work [3]. Extensive computational experiments were carried out to describe the finite (geometrically nonlinear) deformations of elastic elements of various structures. The calculations were performed in the MATLAB system. Bending deformations of plates and rods, tensile-compression deformation of a thick-walled cylinder were simulated, and the initial configurations were constructed during torsion of plates made of various structural materials (steel, aluminum, rubber-like composites).

### References

1. Novatsky V. *Theory of elasticity*. Moscow, Mir, 1975, 872 p.
2. Maze J. *Theory and problems of continuum mechanics*. Translated from English. Moscow, Mir, 1974, 318 p.
3. Duishenaliev T.B. *Non-classical solutions of the mechanics of a deformable body*. Moscow, MPEI Publ., 2017, 400 p.

## Решение задачи контактного взаимодействия для анизотропного цилиндра с участием массовых сил

© Д.А. Иванычев<sup>1\*</sup>, Е.Ю. Левина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: Lsivdmal@mail.ru

**Аннотация.** Исследовано упругое равновесие трансверсально-изотропного тела вращения в условиях контактного взаимодействия без трения в зоне контакта и находящегося одновременно под действием массовых сил. Математическая модель построена на основе метода граничных состояний. Основу метода составляют понятия пространств внутренних и граничных состояний, сопряженных изоморфизмом. Строятся базисы пространств состояний; назначаются скалярные произведения в этих пространствах и проводится их ортонормирование. Искомое состояние раскладывается в ряд по элементам ортонормированного базиса, и поиск искомого состояния сводится к решению бесконечной системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье. Решена задача контакта по торцу для кругового цилиндра из горной породы. Полученные характеристики напряженно-деформированного состояния имеют полиномиальный вид.

**Ключевые слова:** метод граничных состояний, осесимметричная деформация, анизотропия, массовые силы, контактные задачи.

Контактное взаимодействие является наиболее распространенным случаем механического взаимодействия деталей машин. Последние могут быть изготовлены из современных анизотропных материалов, обладающих сильным различием в упругих свойствах для разных направлений. К таким материалам относятся композиты, полимеры, армированные стеклопластики и др. Кроме того, на эти тела действуют массовые силы. Определение напряженно-деформированного состояния от совокупности таких воздействий, а также в силу сложной физической природы материалов составляет актуальную научную задачу.

**Постановка задачи.** Исследуется равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения из трансверсально-изотропного материала под действием массовых сил  $\mathbf{X}$ . На поверхности тела заданы осесимметричные граничные условия:

$$\{u_n, p_\tau\} \in S_u; \mathbf{p} \in S_p,$$

где  $S_u$  — поверхность контакта;  $S_p$  — остальная часть поверхности тела.

Рассматривается двухсторонний контакт по нормали к одной или нескольким поверхностям без трения, т. е. для контактирующей поверхности  $p_\tau = 0$ . Причем контакт происходит по симметричной относительно оси  $z$  поверхности целиком или ее части и не обязательно  $u_n = 0$ . Задача состоит в определении напряженно-деформированного состояния, возникающего в теле.

**Метод решения.** Для решения поставленной задачи прибегнем к понятиям метода граничных состояний (МГС) [1]. Основу метода составляют пространства внутренних  $\Xi$  и граничных  $\Gamma$  состояний:

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\}; \tilde{A} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}.$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений:  $\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}$ .

При построении решения основных задач механики используется уравнение Клапейрона [2]

$$\int_V \mathbf{X} \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{P}_\nu \mathbf{u}_\nu dS - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) можно записать в следующем виде:

$$\int_V (\sigma_{ij}^i \varepsilon_{ij}^j + \sigma_{ij}^j \varepsilon_{ij}^i) dV = \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + \int_S \mathbf{P}_v^i \mathbf{u}_v^j dS + \int_V \mathbf{X}^j \mathbf{u}^i dV + \int_S \mathbf{P}_v^j \mathbf{u}_v^i dS, \quad (2)$$

и будем определять скалярные произведения в базисе внутренних состояний следующим образом (например, для 1-го и 2-го внутреннего состояния):

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V (\varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1) dV. \quad (3)$$

Граничное состояние  $\gamma_k$  будем формировать наборами компонент вектора перемещения точек границы  $u_{vi}$ , поверхностными усилиями  $p_i$  и массовыми силами  $X_i$ :

$$\gamma_k = \{u_{vi}^k, p_i^k, X_i^k\}, \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j,$$

где  $n_j$  — компонента нормали к границе.

Согласно (2), в пространстве граничных состояний  $\Gamma$  скалярное произведение выражает двойную работу внешних сил по поверхности тела  $S$  и работу массовых сил на перемещениях  $u_i$  внутренних точек тела:

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_{vi}^2 dS + \int_V X_i^1 u_i^2 dV + \int_S p_i^2 u_{vi}^1 dS + \int_V X_i^2 u_i^1 dV, \quad (4)$$

причем в силу тождества Бетти и соотношения Клапейрона:  $(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1)$ .

В случае гладкой границы и в силу (1) оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. Это позволяет поиск внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния.

Далее осуществляется ортонормирование базисов пространств состояний, используя скалярные произведения (3) и (4).

Окончательно проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомого внутреннего  $\xi$  и граничного  $\gamma$  состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k. \quad (5)$$

В общем случае под контактной задачей понимается взаимодействие двух или нескольких тел. Решение таких задач подразумевает

постановку смешанных задач для каждого тела, где на одной из границ задаются нормальные перемещения и касательные напряжения. В данном случае возникает необходимость в решении системы уравнений, которую удобно записать в матричном виде:

$$\beta_{ij} = 2 \int_V \mathbf{X}^i \mathbf{u}^j dV + 2 \int_{S_u} p_\tau^i u_\tau^j dS_u + 2 \int_{S_u} p_n^j u_n^i dS_u + 2 \int_{S_p} \mathbf{p}_v^i \mathbf{u}_v^j dS_p; \quad \mathbf{B} = [\beta_{ij}]_{N \times N};$$

$$\alpha_j = 2 \int_V \mathbf{X} \mathbf{u}^j dV + 2 \int_{S_u} p_\tau u_\tau^j dS_u + 2 \int_{S_u} p_n^j u_n dS_u + 2 \int_{S_p} \mathbf{p}_v \mathbf{u}_v^j dS_p;$$

$$\mathbf{A} = [\alpha_j]_N, \quad (6)$$

где характеристики с верхними индексами  $i$  и  $j$  относятся к соответствующим характеристикам в базисных элементах пространств состояний.

Коэффициенты Фурье  $\mathbf{C} = [c_k]_N$  рассчитываются так:

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A},$$

где  $N$  — число используемых элементов базиса.

Окончательно решение имеет вид (5).

Главной сложностью в МГС является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды; также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

В данной задаче используется объединенный базис внутренних состояний, состоящий из базиса в задаче эластостатики  $\Xi^s$  и базиса в задаче от действия массовых сил  $\Xi^x$ :

$$\Xi = \{ \xi_1^s, \xi_2^x, \xi_3^s, \xi_4^x, \dots, \xi_{k-1}^s, \xi_k^x, \dots \}.$$

В работе [3] изложены подробные методики формирования базиса внутренних состояний в задаче эластостатики на основе общего решения для среды и базиса в задаче от действия массовых сил на способе применения фундаментальных многочленов.

**Решение задачи.** Апробация предложенной методики проведена на исследовании упругого состояния трансверсально-изотропного кругового в плане цилиндра из горной породы алевролита крупного темно-серого [4]. После процедуры обезразмеривания параметров задачи цилиндр занимает область  $V = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq 4\}$ ; упругие характеристики материала:  $E_z = 6,21$ ;  $E_r = 5,68$ ;  $G_z = 2,55$ ;  $\nu_z = 0,22$ ;  $\nu_r = 0,24$ .

Граничные условия имитируют контакт одного из торцов цилиндра со скольжением:

$$p_r = 0, w = 0, S_1 \mid z = 0, 0 \leq r \leq 1;$$

$$p_r = 0, p_z = -1, S_2 \mid z = 4, 0 \leq r \leq 1;$$

$$\mathbf{p} = 0, S_3 \mid r = 1, 0 \leq z \leq 4.$$

На тело действуют массовые силы  $\mathbf{X} = \{r, z\}$ .

Для решения данной задачи потребовался базис в 30 элементов. Оценка точности решения осуществляется сопоставлением заданных условий на границе и внутри области (массовые силы) с полученными в ходе решения. Компоненты напряженно-деформированного состояния имеют полиномиальный вид. Здесь приведем выражения полученных массовых сил:

$$R = [99724,3r + 216,898r^3 + 216,076rz - 55,1951rz^2] \cdot 10^5;$$

$$Z = [50,3475 + 8,0256r^2 + 99852,1z - 14,8378r^2z + 100,384z^2 - 17,9696z^3] \cdot 10^5.$$

**Заключение.** Метод граничных состояний показал свою эффективность в плане решения осесимметричных контактных задач для ограниченных трансверсально-изотропных тел вращения с учетом массовых сил. Сложность задачи заключается в том, что восстановление искомого упругого поля осуществляется одновременно по четырем направлениям (четыре интеграла в выражении для  $\alpha_i$  (6)): массовые силы  $\mathbf{X}$ , поверхностные усилия на участке  $S_p$ , компоненты  $p_\tau$  и  $u_n$  на участке  $S_u$ .

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 "p\_a".*

## Литература

1. Пеньков В.Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. *Дальневосточный математический журнал*, 2001, т. 2, № 2, с. 115–137.
2. Новацкий В. *Теория упругости*. Москва, Мир, 1975, 872 с.
3. Иванычев Д.А. Решение контактной задачи теории упругости для анизотропных тел вращения с массовыми силами. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*, 2019, № 2, с. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05
4. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. Изд. 2. Москва, Наука, 1977, 416 с.

## Solution of the contact interaction problem for an anisotropic cylinder with the participation of mass forces

© D.A. Ivanychev<sup>1\*</sup>, E.Y. Levina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail: Lsivdml@mail.ru

**Abstract.** The paper investigates the elastic equilibrium of a transversely isotropic body of revolution under conditions of contact interaction without friction in the contact zone and simultaneously under the influence of mass forces. The mathematical model is based on the boundary state method. The method is based on the concept of spaces of internal and boundary states conjugated by an isomorphism. Bases of state spaces are constructed; dot products in these spaces are assigned and orthonormalized. The desired state is expanded in a series of elements of the orthonormal basis, and the search for the desired state is reduced to solving an infinite system of algebraic equations for the Fourier coefficients. The problem of end contact for a circular cylinder made of rock is solved. The obtained characteristics of the stress-strain state have a polynomial form.

**Keywords:** *method of boundary states, axisymmetric deformation, anisotropy, mass forces, contact problems.*

*The reported study was funded by RFBR and the Lipetsk Region according to the research project no. 19-41-480003 "r\_a".*

### References

1. Penkov V.B. Metod granichnykh sostoianii dlia resheniia zadach lineinoi mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137.
2. Novatskii V. *Teoriia uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Mir, 1975, p. 872.
3. Ivanychev D.A. Reshenie kontaktnoj zadachi teorii uprugosti dlja anizotropnyh tel vrashhenija s massovymi silami [The contact problem Solution of the elasticity theory for anisotropic rotation bodies with mass forces]. *Vestnik Permskogo nacional'nogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. Mehanika — Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*, 2019, no. 2, pp. 49–62. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.05
4. Lekhnitskii S.G. *Teoriia uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity of an anisotropic body]. 2nd Ed. Moscow, Nauka, 1977.

## **О взаимодействии поверхностно неоднородных труб и жестких цилиндрических втулок и вставок**

© К.Е. Казаков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия  
E-mail: kazakov-ke@yandex.ru

**Аннотация.** Разнообразные детали и элементы, из которых состоят конструкции, машины и механизмы, в процессе эксплуатации взаимодействуют и изнашиваются. Для предотвращения преждевременного износа, а также для обеспечения дополнительных свойств зачастую используют покрытия, свойства которых отличаются от свойств основного тела. Их использование приводит к необходимости проводить корректировочные расчеты, так как наличие дополнительных слоев обуславливает изменение напряженно-деформированного состояния тел. В данной работе описываются задачи взаимодействия жестких цилиндрических втулок и вставок и вязкоупругой стареющей трубы с тонким неоднородным упругим покрытием со стороны жесткого тела. Для поставленных задач построены их математические модели, которые представляют собой интегральные уравнения с операторами двух типов: с постоянными и переменными пределами интегрирования. Получены явные формулы для нахождения контактных давлений в области взаимодействия тел. Аналитические формулы имеют вид, который позволяет производить эффективные расчеты в случаях, когда свойства покрытия описываются сложными функциями.

**Ключевые слова:** *контактная задача, поверхностно неоднородная труба, смешанное интегральное уравнение, аналитические методы.*

## **On the interaction of surface nonuniform pipes and rigid cylindrical bushes and inserts**

© К.Е. Kazakov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia  
E-mail: kazakov-ke@yandex.ru

**Abstract.** Structures, machines and mechanisms make up of various parts and elements which interact and wear out during operation. To prevent premature wear, as well as to provide additional properties, coatings which properties differ from the main body are often used. This leads to the need to carry out corrective calculations, since the presence of additional layers causes a change in the stress-strain state of bodies. This paper describes the problems of interaction between rigid cylindrical bushes and

inserts and a viscoelastic aging pipe with a thin nonuniform elastic coating on the side of the rigid body. For these problems their mathematical models have been built. It is integral equations with operators of two types: with constant and variable limits of integration. Explicit formulas for finding contact pressures in the region of interaction of bodies are obtained. The analytical formulas have a form that allows one to provide efficient calculations in cases where the properties of the coating are described by complex functions.

**Keywords:** *contact problem, surface nonuniform tube, mixed integral equation, analytical methods.*

## Двухмассовая модель транспортировки груза квадрокоптером

© А.Ю. Карпачев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: a-karpachev@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрена динамика движения двухмассовой системы с вязкоупругой связью при подъеме груза в однородном поле тяжести.

**Ключевые слова:** *динамика, квадрокоптер, грузоподъемность.*

**Введение.** В расчетах динамики полета беспилотного летательного аппарата (БПЛА) — дрона, как правило, используется модель абсолютно твердого тела. В числе многочисленных функциональных задач, решаемых с помощью беспилотников и, в частности, квадрокоптеров, значительное место принадлежит реализации их транспортных возможностей [1].

В этом случае движение квадрокоптера должно осуществляться с учетом влияния транспортируемого им груза. В связи с этим на основе постановки и решения прямой задачи теоретической механики представлен один из подходов к определению поведения квадрокоптера с использованием предложенной двухмассовой модели, включающей вязкоупругую связь. Исследовано влияние механических характеристик такой связи на силы, необходимые для вертикального подъема и зависания транспортной системы на заданной высоте.

**Постановка задачи.** Как показано на рис. 1, *a*, квадрокоптер 1 и груз 2 соединены посредством связи представленной схемой Фойхта Кельвина, упругая ее часть определена коэффициентом  $c$ , а демпфирующее сопротивление — коэффициентом  $\mu$ .

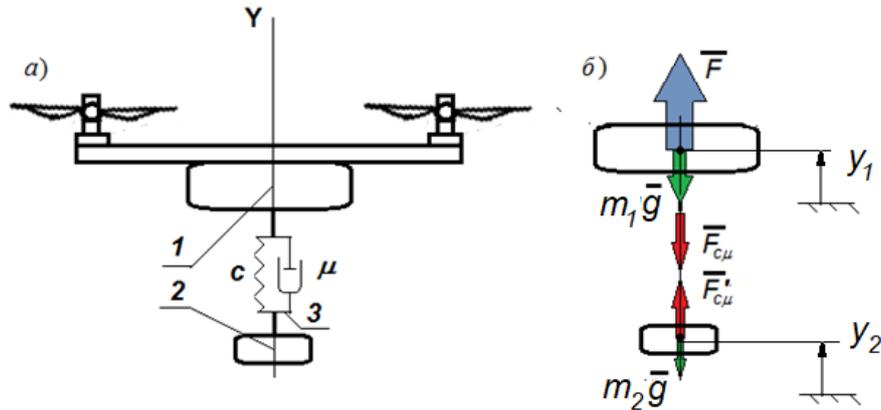


Рис. 1. Модель транспортировки груза квадрокоптером (а) и ее расчетная схема (б)

Для описания положения системы выбраны координаты  $y_1$  и  $y_2$ , отсчитываемые от ее начального положения равновесия в состоянии покоя. Тогда уравнение движения квадрокоптера массой  $m_1$  примет вид

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -m_1 g + F - F_{c\mu}, \quad (1)$$

а груза массы  $m_2$ , соответственно,

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = F'_{c\mu} - m_2 g. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2)  $F$  — подъемная сила, а реакция связи

$$F_{c\mu} = F'_{c\mu} = c(\Delta_{ст} + y_1 - y_2) + \mu(\dot{y}_1 - \dot{y}_2), \quad (3)$$

где  $\Delta_{ст}$  — статическая деформация упругой составляющей связи.

В задачу входит определение влияния механических характеристик принятой связи на движение при вертикальном подъеме и зависании на заданной высоте такой транспортной системы. Для этого необходимо представить уравнение (2) с учетом (3) в виде дифференциального уравнения второго порядка

$$m_2 \dot{y}_2 = c(y_1 - y_2) + \mu(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \quad (4)$$

или системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{y}_2 = v,$$

$$\dot{v} = \frac{c}{m_2}(y_1 - y_2) + \frac{\mu}{m_2}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2), \quad (5)$$

в которых  $v$  — скорость груза.

В задаче предполагается, что при движении системы из состояния покоя масса  $m_2$  начнет совершать колебательные движения. Пре-

буется подобрать такие характеристики  $c$  и  $\mu$ , чтобы при наборе высоты за счет силы  $F$  квадрокоптер остановился, а скорость груза стала равна нулю и колебания прекратились.

Если принять движение массы  $m_1$  в виде функции [2]

$$y_1 = 0,5 h^* \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi}{t^*} t \right) \right], \quad (6)$$

удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} t = 0: y_1 &= 0, \dot{y}_1 = 0; \\ t = t^*: y_1 &= h^*, \dot{y}_1 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $h^*$  — высота, на которую должен подняться и остановиться (зависнуть) квадрокоптер за время  $t^*$ , и подставить ее во второе уравнения системы (5), то варьированием параметров  $c$  и  $\mu$  в полученном уравнении можно добиться выполнения требуемого условия при  $t = t^*: \dot{y}_2 = 0$ , используя при этом известные численные методы решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений первого порядка.

**Результаты расчета.** В качестве исходных данных примем:  $m_1 = 0,111$  кг,  $m_2 = 0,02$  кг, задавая  $t^* = 1$  с,  $h^* = 1$  м. Расчеты удобно проводить, если ввести безразмерные параметры, приняв массу системы  $M = m_1 + m_2$  и обозначив  $\tilde{m}_1 = \frac{m_1}{M}$ ,  $\tilde{m}_2 = \frac{m_2}{M}$ ; время  $0 \leq \tilde{t} = \frac{t}{t^*} \leq 1$ ;  $\tilde{y}_1 = \frac{y_1}{h^*}$ ,  $\tilde{y}_2 = \frac{y_2}{h^*}$  — вертикальные координаты, соответствующие центрам масс квадрокоптера и груза.

С учетом обозначений  $\tilde{v} = \frac{t^*}{h^*} v$ ,  $\tilde{k}^2 = t^{*2} k^2 = t^{*2} \frac{c}{m_2}$ ,  $\tilde{b} = \frac{\mu}{m_2} t^*$ ,

система (5) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{y}}_2 &= \tilde{v}, \\ \ddot{\tilde{y}}_2 &= \tilde{k}^2 (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + \tilde{b} \left( \dot{\tilde{y}}_1 - \dot{\tilde{y}}_2 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

В результате выполненного расчета установлено, что при коэффициенте упругости  $c = 1000$  Н/м, коэффициенте сопротивления  $\mu = 100$  Н·с/м обеспечивается выполнение условия  $t = t^*: \dot{y}_2 = 0$ . Используя (1), можно найти зависимость изменения подъемной силы для реализации заданной транспортной операции.

**Вывод.** В случаях транспортировки груза, ликвидация его колебаний возможна на основе расчета упругих и демпфирующих характеристик его подвески к квадрокоптеру.

## Литература

1. Аникин М.А., Бычкова Е.С., Гаркуша А.В., Парфенов А.А., Карпачев А.Ю. Экспериментальное определение динамических воздействий для пилотирования квадрокоптера. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 2 (98), с. 10–12. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-2-1960
2. Карпачев А.Ю. Постановка и проведение студенческих научных исследований на примере движения квадрокоптера. *XLIV Академические чтения по космонавтике*. Москва, 2020, с. 35–37.

## The two-mass model of transportation of goods by drone

© A.Yu. Karpachev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: a-karpachev@mail.ru

**Abstract.** The dynamics of motion of a two-mass system with a viscoelastic coupling is considered when lifting a load in a uniform gravity field. In calculations of the flight dynamics of an unmanned aerial vehicle (UAV) — drone, a model of an absolutely solid body is used. Among the many functional tasks that are solved with the help of drones, and in particular, quadcopters, a significant place belongs to the implementation of their transport capabilities. At the same time, the movement of the quadcopter should be controlled taking into account the influence of the cargo it is transporting. Based on the formulation and solution of a direct problem of theoretical mechanics, one of the approaches to determining the permissible load capacity of a quadcopter is presented using a single-mass model and a proposed two-mass model that includes viscoelastic coupling. The influence of the mechanical characteristics of such a connection on the forces required for vertical lifting and hovering at a given height of such a transport system is determined. The compiled equations for describing the motion and an example of calculation are given.

**Keywords:** *dynamics, quadcopter, carrying capacity.*

## References

1. Anikin M.A., Bychkova E.S., Garkusha A.V., Parfenov A.A., Karpachev A.Yu. Experimental determination of dynamic effects for piloting a quadcopter *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, iss. 2 (98), pp. 10–12. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-2-1960
2. Karpachev A.Yu. Setting up and conducting student research on the example of the movement of a quadcopter. *XLIV academic readings on astronautics*. Moscow, 2020, pp. 35–37.

## Об устойчивости тонких упругих оболочек

© А.В. Карпов\*, В.В. Новиков

ННГУ им. Н. И. Лобачевского Нижний Новгород, Россия

\*E-mail (докладчика): mr.karpov.9857@gmail.com

**Аннотация.** Предложен новый подход к исследованию устойчивости нагруженных оболочек. Он заключается в ориентировании при расчетах на предельно допустимые нагрузки, которые получены исходя из нелинейной модели с учетом малых несовершенств и малых неконсервативных нагрузок.

**Ключевые слова:** упругая оболочка, нагрузка, консервативная нагрузка, малые несовершенства, малая неконсервативность, внутренний резонанс, взрывная неустойчивость.

### Литература

1. Вольмир А.С. *Устойчивость упругих систем*. Москва, Физматгиз, 1963, 880 с.
2. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О взрывной неустойчивости механических систем. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 1997, № 2, с. 169–175.

## On the stability of thin elastic shells

© A.V. Karpov\*, V.V. Novikov

State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia

\*E-mail (speaker):mr.karpov.9857@gmail.com

**Abstract.** A new approach to the study of the stability of loaded shells is proposed. It consists in orientation in the calculations for the maximum permissible loads, which are obtained based on a nonlinear model, taking into account small imperfections and small non-conservative loads.

**Keywords:** elastic shell, load, conservative load, small imperfections, small non-conservative load, internal resonance, explosive instability.

### References

1. Volmir A.S. *Ustoychivost' uprugikh system* [Stability of elastic systems]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 880 p.
2. Denisov G.G., Novikov V.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela — Izvestia RAN. Rigid body mechanics*, 1997, no. 2, pp. 169–175.

## Стационарные волны в цилиндрической оболочке с вязкоупругим наполнителем

© Н.У. Кулдашов\*, Б.З. Нуриддинов, Ш. Аблокулов, А. Рузимов

Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан

\*E-mail (докладчика): safarov54@mail.ru

**Аннотация.** Дана постановка задачи о распространении неосесимметричных собственных волн в трехслойных цилиндрических оболочках, а движение наполнителя описывается динамическими уравнениями теории вязкоупругости. Разработаны методики расчета на основе методов Мюллера, Гаусса и ортогональной прогонки. Получены численные результаты комплексной фазовой скорости в зависимости от различных волновых чисел и параметров осесимметричной цилиндрической механической системы для гипотез Кирхгофа — Лява и Тимошенко. Обнаружено, что при решении задачи распространения собственных волн в составных цилиндрических телах для достаточно длинных волн фазовые скорости первой формы, по гипотезам Кирхгофа — Лява и Тимошенко, хорошо согласуются между собой. Но поглощающие волны по двум гипотезам разные. Установлено, что при коротких волнах можно пользоваться уравнениями оболочек с учетом сжимаемости наполнителя. Найдено, что увеличение толщины наполнителя особенно существенно сказывается при сравнительно малых толщинах наполнителя.

**Ключевые слова:** вязкоупругая механическая система, собственная волна, конструкция, трехслойный цилиндр, жесткое закрепление.

Рассмотрим распространение свободных волн в двух бесконечно длинных слоистых вязкоупругих цилиндрических оболочках, между которыми находятся слои вязкоупругого наполнителя. Уравнения движения вязкоупругого цилиндрического наполнителя в системе координат  $r, \theta, z$  записывается в виде

$$\tilde{\mu}_s \nabla^2 \vec{u} + (\tilde{\lambda}_s + \tilde{\mu}_s) \text{grad div } \vec{u} = \rho_s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $\vec{u}(u_r, u_\theta, u_z)$  — вектор перемещений точек среды;  $\rho_s$  — плотность материала среды;

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_s \varphi(t) &= \lambda_{0s} \left[ \varphi(t) - \int_0^t R_{\lambda_s}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right]; \\ \tilde{\mu}_s \varphi(t) &= \mu_{0s} \left[ \varphi(t) - \int_0^t R_{\mu_s}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$R_{\lambda_s}(t-\tau)$  и  $R_{\mu_s}(t-\tau)$  — ядра релаксации;  $\lambda_{0s}, \mu_{0s}$  — мгновенные модули упругости;  $\varphi(t)$  — функция времени. Применяемые обычно в расчетах уравнения движения трехслойных оболочек получаются с привлечением различного рода допущений, связанных с характером деформирования заполнителя [1]. С целью оценки приемлемости получаемых на основании этих уравнений результатов при решении динамических задач для трехслойных цилиндрических оболочек предложен уточненный подход, когда движение заполнителя описывается динамическими уравнениями теории вязко упругости (1), а несущие слои рассматриваются как тонкие оболочки, подчиняющиеся гипотезам Кирхгофа — Лява или Тимошенко. Контакт между несущими слоями и заполнителем может быть жестким или скользящим. Уравнения движения несущих слоев (оболочек) в перемещениях, в символической векторно-матричной форме, запишем в виде

$$L_{ij}\bar{U}_k - \int_0^t L_{ij}R_{Ek}(t-\tau)\bar{U}_k(\bar{r}, \tau)d\tau = \frac{(1-\nu_{0k}^2)}{G_{0k}h_{0k}}\bar{q}_k + \rho_{0k}\frac{(1-\nu_{0k}^2)}{G_{0k}}\frac{\partial^2\bar{U}_k}{\partial t^2},$$

$$k = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь  $\bar{U}_k$  — вектор перемещений точек срединной поверхности несущего слоя; индекс  $k=1$  относится к внутреннему несущему слою,  $k=2$  — к внешнему слою.

Рассмотрим продольно-поперечные волны. В этом случае предполагается, что  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ , тогда справедливо для всех осесимметричных задач  $u_\theta = \vartheta_k = 0$ . Решение уравнений ищем в виде

$$\{\bar{U}_k, \bar{u}\} = \{\bar{U}_{k,0}, \bar{u}_0\} \exp i(\xi z - \omega t), \quad (4)$$

где  $\bar{U}_{k,0}(u_{k,0}, w_{k,0})$  — отличные от нуля амплитуды смещений точек срединных поверхностей несущих слоев;  $u_0(U(r), W(r))$  — амплитуды перемещений точек заполнителя;  $\xi = 2\pi/\lambda_f$ ;  $\omega = c_f\xi$ ;  $\lambda_f$ ,  $c_f = c_{fR} + ic_{fI}$  — длина и комплексная фазовая скорость волн. Подставляя выражения для  $U_k$  из (4) в (3), получаем систему алгебраических уравнений относительно  $u_{k,0}, w_{k,0}$  с комплексными коэффициентами:

$$\xi^2 u_{k,0} + i\xi \frac{\gamma_k}{a_k} w_{k,0} = -\rho_k \frac{1-\nu_k}{2\bar{G}_k} \omega^2 u_{k,0} - \frac{1-\nu_k}{2\bar{G}_k h_k} q_{zk}^0;$$

$$\frac{h_k^2}{12} \xi^4 w_{k,0} + \frac{w_{k,0}}{a_k^2} + i \xi \frac{\gamma_k}{a_k} u_{k,0} = \rho_k \frac{1-\nu_k}{2\bar{G}_k} \omega^2 w_{k,0} - \frac{1-\nu_k}{2\bar{G}_k h_k} q_{rk}^0. \quad (5)$$

Из (5) находим нагрузки, которые передаются на заполнитель со стороны обшивок как функции амплитуд перемещений точек срединной поверхности соответствующего несущего слоя. Для всех рассмотренных случаев построены зависимости фазовой скорости от волнового числа (дисперсионные кривые). В качестве примера вязкоупругого материала примем трехпараметрическое ядро релаксации Колтунова — Ржаницына  $R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k}$  с параметрами  $A_k = 0,048$ ;  $\beta_k = 0,05$ ;  $\alpha_k = 0,1$ . Следует отметить, что с ростом толщины заполнителя (с увеличением  $k_s$ ) это различие уменьшается, так что для толстого заполнителя ( $k_s > 20$ ) предположение о скользящем контакте является приемлемым, особенно при определении минимумов кривых дисперсии.

Исследовано влияние толщины, жесткости и веса заполнителя на скорости распространения волн. Как показали расчеты, с увеличением толщины заполнителя реальные и мнимые части комплексной фазовой скорости для первой формы увеличиваются, а для второй — несколько понижаются. Увеличение толщины заполнителя особенно существенно сказывается при сравнительно малых толщинах заполнителя.

На основе полученных результата установлено, что увеличение толщины заполнителя особенно существенно сказывается на изменении комплексной фазовой скорости при сравнительно малых толщинах заполнителя. С ростом порядка моды крутильных колебаний густота расположения кривых на плоскости фазовой скорости и волновых чисел увеличивается. В случае коротких волн существует предельное значение комплексной фазовой скорости.

*Работа выполнена при поддержке гранта РУз ОТ-Ф4-01.*

## Литература

1. Safarov I.I., Teshayev M.Kh., Akhmedov M.S. Free Oscillations of a Toroidal Viscoelastic Shell with a Flowing Liquid. *American Journal of Mechanics and Applications*, 2018, vol. 6(2), pp. 37–49. <http://www.sciencepublidoi:10.11648>

## Stationary waves in a cylindrical shell with a viscoelastic filler

© N.U. Kuldashov\*, B.Z. Nuriddinov, Sh. Ablokulov, A. Ruzimov

Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent,  
Republic of Uzbekistan

\*E-mail (speaker): safarov54@mail.ru

**Abstract.** The formulation of the problem of the propagation of non-axisymmetric natural waves in three-layer cylindrical shells is given, and the motion of the filler is described by the dynamic equations of the theory of viscoelasticity. The calculation methods based on the Mueller, Gauss and orthogonal sweep methods have been developed. Numerical results are obtained for the complex phase velocity depending on various wave numbers and parameters of an axisymmetric cylindrical mechanical system for the Kirchhoff — Love and Timoshenko hypotheses. It was found that when solving the problem of propagation of natural waves in composite cylindrical bodies, for sufficiently long waves, the phase velocities of the first form, according to the hypotheses of Kirchhoff — Love and Timoshenko, are in good agreement with each other. But, absorbing waves are different according to the two hypotheses. It was found that at short waves, one can use the equations of the shells taking into account the compressibility of the filler. It was found that an increase in the thickness of the filler is especially significant at relatively small thicknesses of the filler.

**Keywords:** *viscoelastic mechanical system, natural wave, structure, three-layer cylinder, rigid fastening.*

Let us consider the propagation of free waves in two infinitely long layered viscoelastic cylindrical shells, between which there are layers of viscoelastic filler. The equations of motion of a viscoelastic cylindrical filler, in the coordinate system, are written in the form

$$\tilde{\mu}_s \nabla^2 \vec{u} + (\tilde{\lambda}_s + \tilde{\mu}_s) \text{grad div } \vec{u} = \rho_s \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

where  $\vec{u}(u_r, u_\theta, u_z)$  is the vector of displacements of points of the environment;  $\rho_s$  is the density of the medium material;

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_s \varphi(t) &= \lambda_{0s} \left[ \varphi(t) - \int_0^t R_{\lambda_s}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right]; \\ \tilde{\mu}_s \varphi(t) &= \mu_{0s} \left[ \varphi(t) - \int_0^t R_{\mu_s}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$R_{\lambda_s}(t-\tau)$  and  $R_{\mu_s}(t-\tau)$  — relaxation kernels;  $\lambda_{0s}, \mu_{0s}$  — instant moduli of elasticity;  $\varphi(t)$  — function of time. The equations of motion of three-layer shells, usually used in calculations, are obtained using various kinds of assumptions related to the nature of the deformation of the filler [1]. In order to assess the acceptability of the results obtained on the basis of these equations, when solving dynamic problems for three-layer cylindrical shells, a refined approach is proposed, when the motion of the filler is described by the dynamic equations of the theory of viscoelasticity (1), and the bearing layers are considered as thin shells obeying the Kirchhoff — Love hypotheses or Timoshenko. The contact between the bearing layers and the core can be rigid or sliding. The equations of motion of the bearing layers (shells) in displacements, in symbolic vector-matrix form, can be written as

$$L_{ij}\vec{U}_k - \int_0^t L_{ij}R_{E\kappa}(t-\tau)\vec{U}_k(\vec{r}, \tau)d\tau = \frac{(1-\nu_{0\kappa}^2)}{G_{0\kappa}h_{0\kappa}}\vec{q}_\kappa + \rho_{0\kappa}\frac{(1-\nu_{0\kappa}^2)}{G_{0\kappa}}\frac{\partial^2\vec{U}_k}{\partial t^2},$$

$$k = 1, 2. \quad (3)$$

Here,  $U_k$  is the vector of displacements of the points of the middle surface of the bearing layer, the index  $k=1$  refers to the inner bearing layer, and  $k=2$  — to the outer layer. Consider longitudinal-transverse waves. In this case, it is assumed that  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ , then is true for all axisymmetric problems  $u_\theta = \vartheta_k = 0$ . We seek the solution of the equations in the form

$$\{\vec{U}_k, \vec{u}\} = \{\vec{U}_{k,0}, \vec{u}_0\} \exp i(\xi z - \omega t), \quad (4)$$

where  $\vec{U}_{k,0}(u_{k,0}, w_{k,0})$  are nonzero amplitudes of displacements of the points of the middle surfaces of the bearing layers;  $u_0(U(r), W(r))$  — amplitudes of displacements of filler points;  $\xi = 2\pi/\lambda_f$ ;  $\omega = c_f\xi$ ;  $\lambda_f, c_f = c_{fR} + ic_{fI}$  — length and complex phase velocity of waves. Substituting expressions for  $U_k$  from (4) into (3), we obtain a system of algebraic equations with respect  $u_{k,0}, w_{k,0}$  to with complex coefficients

$$\xi^2 u_{k,0} + i\xi \frac{\gamma_k}{a_k} w_{k,0} = -\rho_k \frac{1-\nu_k}{2\bar{G}_k} \omega^2 u_{k,0} - \frac{1-\nu_k}{2\bar{G}_k h_k} q_{zk}^0;$$

$$\frac{h_k^2}{12} \xi^4 w_{k,0} + \frac{w_{k,0}}{a_k^2} + i\xi \frac{\gamma_k}{a_k} u_{k,0} = \rho_k \frac{1-\nu_k}{2\bar{G}_k} \omega^2 w_{k,0} - \frac{1-\nu_k}{2\bar{G}_k h_k} q_{rk}^0. \quad (5)$$

From (5), we find the loads that are transmitted to the filler from the side of the skins as a function of the amplitudes of displacements of the points of the middle surface of the corresponding bearing layer. For all considered cases, the dependences of the phase velocity on the wave number (dispersion curves) are plotted. As an example of a viscoelastic material, we take the three-parametric Koltunov-Rzhanitsyn relaxation kernel

$$R_{\kappa}(t) = A_{\kappa} e^{-\beta_{\kappa} t} / t^{1-\alpha_{\kappa}} \quad \text{with parameters } A_{\kappa} = 0.048; \beta_{\kappa} = 0.05; \alpha_{\kappa} = 0.1.$$

It should be noted that with an increase in the thickness of the filler (with an increase  $k_s$ ), this difference decreases, so that for a thick filler ( $k_s > 20$ ) the assumption of sliding contact is acceptable, especially when determining the minima of dispersion curves. The influence of the thickness, stiffness and weight of the filler on the wave propagation speed has been investigated. Calculations have shown that with an increase in the thickness of the filler, the real and imaginary parts of the complex phase velocity, for the first form, increase, and for the second, it slightly decreases. The increase in the thickness of the filler is especially significant at relatively small thicknesses of the filler.

On the basis of the results obtained, it was established that an increase in the thickness of the filler has a particularly significant effect on the change in the complex phase velocity at relatively small thicknesses of the filler. With an increase in the order of the torsional vibration mode, the density of the curves on the plane of the phase velocity and wavenumbers increases. In the case of short waves, there is a limit value for the complex phase velocity.

*This work was supported by the Grant of the Republic of Uzbekistan OT-F4-01.*

## References

1. Safarov I.I., Teshayev M.Kh., Akhmedov M.S. Free Oscillations of a Toroidal Viscoelastic Shell with a Flowing Liquid. *American Journal of Mechanics and Applications*, 2018, vol. 6 (2), pp. 37–49.

## Усталостная прочность при высокочастотном нагружении титановых образцов

© И.С. Никитин, А.Д. Никитин, Б.А. Стратула

ИАП РАН, Москва, Россия

E-mail: i\_nikitin@list.ru, nikitin\_alex@bk.ru, stratula@matway.net

**Аннотация.** Разработан численный метод для сквозного счета развития трещиноподобных зон усталостного разрушения при высо-

кочастотном нагружении материалов от зарождения повреждаемости до макроразрушения. Приведены примеры расчета усталостного разрушения титановых образцов, используемых в сверхмногоцикловых испытаниях на пьезоэлектрических установках. Проведено сравнение численных и экспериментальных результатов для образцов сложной геометрии.

**Ключевые слова:** *высокочастотное нагружение, пьезоэлектрическая установка, сверхмногоцикловая усталость, развитие повреждений, усталостное разрушение.*

*Исследование выполнено за счет гранта Российского  
научного фонда (проект № 19-19-00705).*

### **Литература**

1. Никитин И.С., Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин А.Д. Мультирежимная модель развития усталостных повреждений. *Прикладная математика и механика*, 2020, т. 84, № 5, с. 687–698.

## **Fatigue strength under high frequency loading titanium specimens**

© I.S. Nikitin, A.D. Nikitin, B.A. Stratula

ICAD RAS, Moscow, Russia  
E-mail: i\_nikitin@list.ru, nikitin\_alex@bk.ru, stratula@matway.net

**Abstract.** A numerical method has been developed for through calculation of the development of crack-like fatigue fracture zones under high-frequency loading of materials from the damage initiation to macrofracture. Examples of fatigue fracture calculation for titanium specimens in piezoelectric devices for very-high-cycle fatigue tests are given. Comparison of numerical and experimental results for specimens of complex geometry is carried out.

**Keywords:** *high-frequency loading, piezoelectric device, very-high-cycle fatigue, damage development, fatigue fracture.*

*The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation  
(project no. 19-19-00705).*

### **References**

1. Nikitin I.S., Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin A.D. Multimode model of fatigue damage development. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, vol. 84, no. 5, pp. 687–698.

## Расчет удара двигателей самолета по контайменту атомной электростанции

© А.В. Острик\*, В.В. Ким

Институт проблем химической физики РАН, Черноголовка, Россия

\*E-mail: ostrik@icp.ac.ru

**Аннотация.** Предложен новый вариант определяющих уравнений, являющийся обобщением широко используемых моделей бетона: деформационной теории пластичности Г.А. Гинеева и модели Холмквиста — Джонсона — Кука. Разработан и апробирован численный алгоритм решения предложенных определяющих уравнений в каждой расчетной ячейке газодинамического кода. Алгоритм реализован в виде подпрограммы для ЭВМ и внедрен в 3D-код метода конечно-размерных частиц. С помощью модернизированного 3D-кода выполнены расчеты ударов двигателей самолета Boeing 707-320 по контайменту атомной электростанции. Получено, что двигатели при скорости удара 100 м/с существенно повреждают контаймент, но не пробивают его.

**Ключевые слова:** определяющие уравнения бетона, удар двигателей самолета по контайменту, численное моделирование.

Одним из наиболее опасных источников ударного воздействия на атомные электростанции (АЭС) могут быть падающие самолеты [1–5]. Падение самолета — крайне тяжелое, но весьма редкое событие. Вообще говоря, вероятность случайного падения тяжелого летательного аппарата на ядерный реактор мала, порядка  $10^{-6}$  1/год (менее одного события за миллион лет) [6], но его последствия катастрофичны и не могут не учитываться при проектировании АЭС. Более того, вероятность существенно увеличивается для тех случаев, когда АЭС располагаются непосредственно в зоне прохождения над ними воздушной трассы, что имеет место для ряда атомных станций. После событий в США 11 сентября 2001 г. нельзя исключать и специального перенаправления самолета на реактор при террористических актах. Поэтому вероятности падения самолета для каждой АЭС оцениваются индивидуально с учетом воздушной обстановки, и если эта вероятность менее  $10^{-6}$  1/год, то возможность воздействия игнорируется, в противном случае считается, что самолет упадет обязательно (принцип «или — или»).

Основную защитную функцию от удара самолета и его компактных элементов выполняет внешняя железобетонная оболочка, и при расчете удара требуются определяющие уравнения для бетона, как составной части конструкции. Широко используемые модели пла-

стичности бетона Холмквиста — Джонсона — Кука [7–11] (НДС-модель) и Г.А. Гинеева [12, 13] допускают обобщение посредством их синтеза. НДС-модель константно обеспечена, но не чувствительна к третьему инварианту тензора напряжений. Деформационная теория пластичности бетона Г.А. Гинеева не обладает этим недостатком, но она применима только к статическим задачам при траекториях нагружения, близких к простым, и не учитывает накопления поврежденности.

При обобщении за основу берется подход к описанию поведения бетона согласно НДС-модели за исключением поверхности пластического течения, которая принимается в виде, синтезирующем подходы обеих моделей:

$$\left(\frac{T_s}{T_c}\right)^2 = \left(1 - D + f \frac{P}{T_c}\right) \left(1 + C \ln\left(\dot{\varepsilon}_i\right)\right)^2 (1 + \delta); \quad (1)$$

$$\delta = e \left(\frac{S \left(1 + C \ln\left(\dot{\varepsilon}_i\right)\right)}{T_s}\right)^3; \quad f = \frac{3T_c(R_c - R_p)}{R_c R_p}; \quad e = \frac{R_c R_p}{3T_c^2} - 1;$$

$$T_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2 + 2(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)};$$

$$S^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} (S_{xx}^3 + S_{yy}^3 + S_{zz}^3 - 3(\sigma_{xy}^2 S_{zz} + \sigma_{xz}^2 S_{yy} + \sigma_{yz}^2 S_{xx}) + 6\sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz}),$$

где  $P$  — давление;  $T_s$  — предельная интенсивность касательных напряжений (корень из второго инварианта девиатора напряжений);  $D$  — скалярная мера поврежденности;  $S$  — инвариантная величина, куб которой с точностью до коэффициента  $3^{3/2}/2$  совпадает с третьим инвариантом девиатора напряжений;  $R_c, R_p, T_c$  — пределы прочности бетона при одноосных сжатиях, растяжениях и чистом сдвиге;  $C, f, e$  — константы;  $\dot{\varepsilon}_i$  — интенсивность скоростей деформаций.

В (1) поправка  $\delta = \delta(S)$  введена для учета влияния на поверхность текучести третьего инварианта  $S$ , а множитель  $1 + C \ln\left(\dot{\varepsilon}_i\right)$  учитывает влияние скорости деформации аналогично тому, как это делается в НДС-модели. При этом константа  $C$  имеет тот же смысл и величину, что весьма полезно, поскольку при практическом

использовании НС-модели эта константа определялась для многих марок бетона.

Расчет приращения степени поврежденности  $\Delta D$  делается в соответствии с НС-моделью, в которой накопление поврежденности пропорционально накоплению пластической деформации

$$\Delta D = \frac{\Delta \varepsilon^p + \Delta \mu^p}{\max\left(\varepsilon_{fmin}, D_1 \left(P/R_c + R_{pg}/R_c\right)^{D_2}\right)},$$

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \varepsilon_i - \Delta T / (\sqrt{3}G), \quad \Delta \mu^p = \Delta(\mu - P/K(\mu)),$$

где  $\Delta \varepsilon^p, \Delta \mu^p$  — приращения сдвиговой и объемной пластических деформаций;  $D_1, D_2$  — константы материала;  $\varepsilon_{fmin}$  — константа, введенная для подавления накопления поврежденности от слабых волн растяжений;  $R_{pg}$  — предел прочности при всестороннем растяжении.

Помимо синтеза набора учитываемых факторов, влияющих на деформирование и разрушение бетонных композиций, преимуществом новой модели является ее константная обеспеченность, поскольку требующиеся константы уже имеются для моделей, послуживших в качестве прототипов.

Перед началом расчетов считываются материальные константы бетона, и в случае отсутствия некоторых из них (обязательно наличие плотности  $\rho_0$  и прочности на одноосное сжатие  $R_c$ ) проводится их оценка на основе соответствующих корреляционных соотношений [14]. Если необходимо, делается пересчет констант на случай бетонного массива. Расчет предполагает итерации по степени поврежденности  $D$  и величине инварианта  $S$ . Алгоритм каждой итерации строится по методу Уилкинса [15]. Требуемая на практике точность (относительная погрешность менее 0,1 %) достигается за 3–5 итераций.

Для магистральных самолетов типа Boeing характерное время удара составляет десятые доли секунды [16], что говорит о преобладании оболочечной стадии деформирования и разрушения контаймента при ударном воздействии на него легко деформируемой и разрушаемой конструкции фюзеляжа летательного аппарата. Однако волновая стадия оказывается доминирующей при рассмотрении взаимодействия с контайментом компактных и жестких двигателей. С помощью 3D-кода [17] с внедренным в него алгоритмом реализации модели поведения бетонных композиций выполнены три варианта расчета ударов двигателей самолета Boeing 707-320 по защитной оболочке: одиночное воздействие сверху по сферическому куполу;

одиночное воздействие сбоку по цилиндрической части; одновременное воздействие двух центральных двигателей сбоку. Получено, что двигатели при скорости падающего самолета 100 м/с существенно повреждают контаймент, но не пробивают его (останавливаются внутри защитной конструкции). При этом в случае удара сверху по сферическому куполу возможно обрушение его центральной части на внутреннюю металлическую оболочку контаймента. Показано, что результат воздействия каждого из четырех двигателей самолета Boeing 707-320 локализуется в зоне удара и взаимовлиянием соседних ударов на волновой стадии деформирования можно пренебречь. Следовательно, удары двигателей допустимо считать отдельно, а последствия воздействия определять посредством сложения распределений степени поврежденности бетонных композиций от каждого из них.

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ  
№ 18-08-00094-а, № 19-08-0606.*

#### **Литература**

1. Iqbal M.A., Rai S., Sadique M.R., Bhargava P. Numerical simulation of aircraft crash on nuclear containment structure. *Nuclear Engineering and Design*, 2012, vol. 243, pp. 321–335.
2. Sadique M.R., Iqbal M.A., Bhargava P. Nuclear containment structure subjected to commercial and fighter aircraft crash. *Nuclear Engineering and Design*, 2013, vol. 260, pp. 30–46.
3. Kostov M., Henkel F.O., Andonov A. Safety assessment of A92 reactor building for large commercial aircraft crash. *Nuclear Engineering and Design*, 2014, vol. 269, pp. 262–267.
4. Siefert A., Henkel F.O. Nonlinear analysis of commercial aircraft impact on a reactor building — Comparison between integral and decoupled crash simulation. *Nuclear Engineering and Design*, 2014, vol. 269, pp. 130–135.
5. Duc-Kien Thai, Seung-Eock Kim. Safety Assessment of a Nuclear Power Plant Building Subjected to an aircraft Crash. *Nuclear Engineering and Design*, 2015, vol. 293, pp. 38–52.
6. Касьян А.И., Медведь А.Н., Нестеров И.А., Тандура В.П. К оценке вероятности падения летательного аппарата на площадку атомной электростанции. *НТЖ Двигатель*, 2015, № 2 (98), с. 24–27. URL: [www.dvigately.ru](http://www.dvigately.ru)
7. Holmquist T.J., Johnson G.R., Cook W.H. A computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rates, and high pressures. *Proc. 14th Int. Symp. Ballistics*. Quebec City, Canada, 26–29 September, 1993, vol. 2, pp. 591–600.
8. Johnson G.R. Numerical algorithms and material models for high-velocity impact computations. *Int. J. of Impact Eng.*, 2011, vol. 38, pp. 456–472.
9. Islam M.J., Swaddiwudhipong S., Liu Z.S. Penetration of concrete targets using a modified Holmquist-Johnson-Cook material model. *International Journal of Computational Methods*, 2012, vol. 9, p. 19.
10. Gen-Mao Ren, Hao Wu, Qin Fang, Xiang-Zhen Kong. Parameters of Holmquist — Johnson — Cook model for high-strength concrete-like materials under projectile impact. *Int. J. of Protective Structures*, 2017.
11. Johnson G.R., Holmquist T.J., Gerlach Ch. Strain-rate effects associated with the HJC concrete model. *EPJ Web of Conferences*, 2018, vol. 183, art. ID 01008.

12. Гениев Г.А. Вариант деформационной теории пластичности бетона. *Бетон и железобетон*, 1969, № 2, с. 18–20.
13. Гениев Г.А., Киссюк В.П., Тюпин Г.А. *Теория пластичности бетона и железобетона*. Москва, Стройиздат, 1974, 316 с.
14. Острик А.В., Ким В.В. Расчетные модели нестационарного деформирования и разрушения бетонов (обзор). *Конструкции из композиционных материалов*, 2020, вып. 4. (в печати).
15. Уилкинс М.Л. *Расчет упруго-пластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике*. Б. Олдер, С. Фернбах, М. Ротенберг, ред. Москва, Мир, 1967, с. 212–263.
16. Riera J.D. On the Stress Analysis of Structures Subjected to Aircraft Impact Forces. *Nucl. Eng. and Des.*, 1968, vol. 8, pp. 415–426.
17. Ким В.В., Ломоносов И.В., Острик А.В., Фортов В.Е. Метод конечно-размерных частиц в ячейке для численного моделирования высокоэнергетических импульсных воздействий на вещество. *Математическое моделирование*, 2006, т. 18, № 8, с. 5–11.

## Numerical modeling of aircraft engines impact on nuclear power plant containment

© A.V. Ostrik\*, V.V. Kim

Institute of Problems of Chemical Physics of the RAS, Chernigolovka, Russia

\*E-mail: ostrik@icp.ac.ru

**Abstract.** A new variant of the defining equations for concrete is proposed. This variant generalizes widely used concrete models. These models are deformation theory of plasticity by G.A. Gineev and the Holmquist — Johnson — Cook model. A numerical algorithm for solving the proposed defining equations in each calculation cell of the gas dynamic code has been developed and has been tested. The algorithm is realized as a subroutine for computers and is used in the 3D-code of the method of finite-dimensional particles. Calculations of impacts of Boeing 707-320 aircraft engine are made using the developed 3D-code. It is obtained that engines having a speed of 100 m/s significantly damage the containment, but do not punch it (the engines stop inside the protective structure).

**Keywords:** *determining equations for concrete, aircraft impact on containment, numerical simulation.*

### References

1. Iqbal M.A., Rai S., Sadique M.R., Bhargava P. Numerical simulation of aircraft crash on nuclear containment structure. *Nuclear Engineering and Design*, 2012, vol. 243, pp. 321–335.
2. Sadique M.R., Iqbal M.A., Bhargava P. Nuclear containment structure subjected to commercial and fighter aircraft crash. *Nuclear Engineering and Design*, 2013, vol. 260, pp. 30–46.
3. Kostov M., Henkel F.O., Andonov A. Safety assessment of A92 reactor building for large commercial aircraft crash. *Nuclear Engineering and Design*, 2014, vol. 269, pp. 262–267.

4. Siefert A., Henkel F.O. Nonlinear analysis of commercial aircraft impact on a reactor building — Comparison between integral and decoupled crash simulation. *Nuclear Engineering and Design*, 2014, vol. 269, pp. 130–135.
5. Duc-Kien Thai, Seung-Eock Kim. Safety Assessment of a Nuclear Power Plant Building Subjected to an aircraft Crash. *Nuclear Engineering and Design*, 2015, vol. 293, pp. 38–52.
6. Kasyan A.I., Medved A.N., Nesterov I.A., Tandura V.P. The assessment of the probability of an aircraft falling on the place of a nuclear power plant. *Sci. and Tech. J. Engine*, 2015, no. 2 (98), pp. 24–27. Available at: [www.dvigately.ru](http://www.dvigately.ru)
7. Holmquist T.J., Johnson G.R., Cook W.H. A computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rates, and high pressures. *Proc. 14th Int. Symp. Ballistics*. Quebec City, Canada, 26–29 September, 1993, vol. 2, pp. 591–600.
8. Johnson G.R. Numerical algorithms and material models for high-velocity impact computations. *Int. J. of Impact Eng.*, 2011, vol. 38, pp. 456–472.
9. Islam M.J., Swaddiwudhipong S., Liu Z.S. Penetration of concrete targets using a modified Holmquist — Johnson — Cook material model. *International Journal of Computational Methods*, 2012, vol. 9, p. 19.
10. Gen-Mao Ren, Hao Wu, Qin Fang, Xiang-Zhen Kong. Parameters of Holmquist — Johnson — Cook model for high-strength concrete-like materials under projectile impact. *Int. J. of Protective Structures*, 2017.
11. Johnson G.R., Holmquist T.J., Gerlach Ch. Strain-rate effects associated with the HJC concrete model. *EPJ Web of Conferences*, 2018, vol. 183, art. ID 01008.
12. Geniev G.A. Variant of the deformation theory of concrete plasticity. *J. Concrete and reinforced concrete*, 1969, no. 2, pp. 18–20.
13. Geniev G.A., Kissyuk V.P., Tyupin G.A. *Theory of plasticity for concrete and reinforced concrete*. Moscow, Stroyizdat Publ., 1974, 316 p.
14. Ostriк A.V., Kim V.V. Numerical models of non-stationary deformation and destruction of concretes (overview). *J. Constructions from composite materials*, 2020, no. 4 (In print).
15. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow. In: B. Alder, S. Fernbach, and M. Rotenberg, eds. *Fundamental Methods in Hydrodynamics*, vol. 3. Series: Methods in Computational Physics. Advances in Research and Application. New York, Acad. Press, 1964, pp. 211–263.
16. Riera J.D. On the Stress Analysis of Structures Subjected to Aircraft Impact Forces. *Nucl. Eng. and Des.*, 1968, vol. 8, pp. 415–426.
17. Kim V.V., Lomonosov I.V., Ostriк A.V., Fortov V.E. Method of finite-dimensional particles in a cell for numerical modeling of high-energy impulse actions on matter. *Mathematical modeling*, 2006, vol. 18, no. 8, pp. 5–11.

## Изгибные колебания консоли с трением

© А.А. Пожалостин, А.В. Паншина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: [a.pozhalostin@mail.ru](mailto:a.pozhalostin@mail.ru), [panalv@mail.ru](mailto:panalv@mail.ru)

**Аннотация.** Представлен приближенный подход к определению логарифмического декремента изгибных колебаний упругой консоли с грузом на конце. Использован способ, предложенный в монографии

В.С. Постникова о внутреннем трении в металле. В рассматриваемой постановке задачи трение предполагается малым. Поэтому формы собственных колебаний консоли с трением считаются равными формам собственных колебаний консоли без трения.

**Ключевые слова:** изгибные колебания, трение, частотное уравнение, декремент колебаний.

В работе излагается подход в определении логарифмического декремента изгибных колебаний упругой консоли с трением, основанный на способе В.С. Постникова для внутреннего трения в металлах. Рассмотрены изгибные колебания упругой однородной балки с грузом на конце. Получено приближенное решение этой задачи с использованием частотного эксперимента.

**Постановка задачи.** Колебательная система (рис. 1) состоит из заземленной однородной балки погонной плотности  $\mu_0$  [1, 2]. Длина балки  $OA = l$ . На свободном конце балки находится точечный груз массой  $m$ .

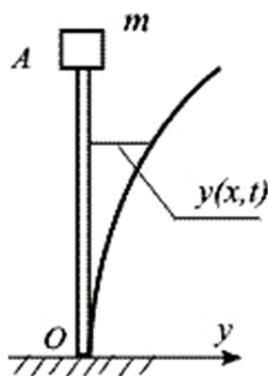


Рис. 1. Схема балки

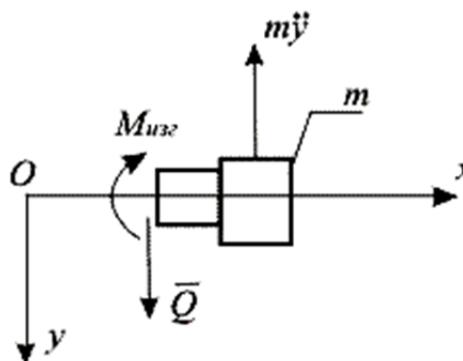


Рис. 2. Элемент балки

Приняты допущения: балка идеально упругая, колебания малые, изгиб прямой, силы внутреннего трения линейно пропорциональны скорости деформации [3, 4]. Пусть  $y(x, t)$  — изгиб балки (см. рис. 1). Дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний упругой балки имеет вид [2, 4]

$$EJ_0 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $EJ_0$  — изгибная жесткость [1];  $E$  — модуль Юнга I-го рода.

Отметим, что  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$ , где  $\omega$  — частота свободных колебаний системы. Введем обозначение  $\frac{\mu_0 \omega^2}{EJ_0} = \lambda^4$ . Здесь  $\lambda$  — собственное значение нашей краевой задачи. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \lambda^4 y = 0. \quad (2)$$

Прогиб балки ищем в виде произведения  $y = f(x) \cdot s(t)$  [2, 3]. Дифференциальное уравнение для формы колебаний  $f(x)$ :

$$f^{IV} - \lambda^4 f = 0; \quad f^{IV} = \frac{d^4 f}{dx^4}. \quad (3)$$

Краевые условия задачи при  $x = 0$  и при  $x = l$  имеют вид

$$y(0, t) = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0; \quad M_{\text{изг}}(l, t) = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} + Q(l, t) = 0. \quad (4)$$

Изгибающий момент и перерезывающая сила (рис. 2) имеют вид

$$M_{\text{изг}}(x, t) = -EJ_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad Q(x, t) = -EJ_0 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \quad (5)$$

С помощью принципа Даламбера получим уравнение  $-m\ddot{y} + Q(l, t) = 0$ . Так как  $\ddot{y} = -\omega^2 y$ , то это уравнение примет вид

$$m\omega^2 y(l, t) - EJ_0 \frac{\partial^3 y(l, t)}{\partial x^3} = 0.$$

Тогда решение уравнения (3) для формы колебаний  $f(x)$  [3]:

$$f(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x.$$

Постоянные интегрирования  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) определяются из граничных условий (4). Используя эти условия с учетом выражений (5), получим частотное уравнение задачи:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{ch} \lambda l - \cos \lambda l) [m\omega^2 (\operatorname{sh} \lambda l - \sin \lambda l) - EJ_0 \lambda (\operatorname{ch} \lambda l - \cos \lambda l)] - \\ & - (\operatorname{sh} \lambda l + \sin \lambda l) [m\omega^2 (\operatorname{ch} \lambda l - \cos \lambda l) - EJ_0 \lambda (\operatorname{sh} \lambda l + \sin \lambda l)] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решая трансцендентное уравнение (6), можно вычислить собственные значения  $\lambda_i$  и частоты собственных колебаний  $\omega_i$ .

На основании [3, 4] полагаем, что внутреннее трение в материале стержня и в атмосфере, окружающей установку, приближенно прямо пропорционально скорости изменения деформации в балке и скорости движения материальных элементов окружающей атмосферы. Поэтому при вычислении сил вязкого трения используем формализм Релея [1].

В дальнейшем будем учитывать только первый тон колебаний системы. Поэтому имеем дифференциальное уравнение для  $s(t)$  [3]:

$$\ddot{s} + 2n\dot{s} + \omega^2 s = 0.$$

Здесь  $\omega$  — собственная частота первого тона поперечных колебаний системы без учета сил вязкого трения — решение уравнения (9).

Обозначим экспериментальные значения частоты первого тона (с учетом вязкого трения) через  $\omega_{1\text{Э}}$ .

Так как  $\omega_{1\text{Э}}^2 = \omega^2 - n^2$  [3–5], а  $\omega_{1\text{Э}} = 2\pi/T$ ,  $\omega = 2\pi/T_1$ , то имеем:

$$n^2 = (2\pi/T)^2 - (2\pi/T_1)^2.$$

Выпишем теперь логарифмический декремент колебаний системы:

$$\eta = nT_1 = T_1 \sqrt{(2\pi/T)^2 - (2\pi/T_1)^2}.$$

Здесь  $T_1$ ,  $\omega_{1\text{Э}}$  — период и частота первого тона колебаний системы, определенные экспериментально.

Справедливость такого подхода можно проверить экспериментально, используя несложную установку с заземленной балкой.

## Литература

1. Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, 543 с.
2. Стрелков С.П. *Введение в теорию колебаний*. Санкт-Петербург, Лань, 2016.
3. Колесников К.С. *Динамика ракет*. Москва, Машиностроение, 2003, 519 с.
4. Постников В.С. *Внутреннее трение в металлах*. Москва, Металлургия, 1974, 352 с.

## Flexural vibrations of the console with friction

© А.А. Pozhalostin, А.В. Panshina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: a.pozhalostin@mail.ru, panalv@mail.ru

**Abstract.** The paper presents an approximate approach for determining the logarithmic decrement of Flexural vibrations of an elastic console with a load at the end. The method proposed in V.S. Postnikov's mono-

graph on internal friction in metal is used. In this problem statement, the friction is assumed to be small. Therefore, the forms of natural vibrations of the console with friction are considered equal to the forms of natural vibrations of the console without friction.

**Keywords:** *flexural vibrations, friction, frequency equation, the decrement of the oscillations.*

## **Анализ разрывов неконтактных напряжений в растущих вязкоупругих телах**

© Д.А. Паршин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия  
E-mail: parshin@ipmnet.ru

**Аннотация.** Представленные исследования относятся к математической теории поверхностного роста стареющих вязкоупругих деформируемых твердых тел (см., например, литературные обзоры в [1, 2]). Рассматриваются трехосные определяющие соотношения интегрального типа, содержащие единственное ядро релаксации. Изучаются разрывы неконтактных напряжений на поверхностях, ограничивающих части формируемого тела, изготавливаемые на различных этапах его кусочно-непрерывного роста. Математически строго построены аналитические зависимости, описывающие эволюцию этих разрывов в произвольных телах, наращиваемых рассматриваемым материалом. Проанализирована структура этих зависимостей. Исследован ряд частных случаев, реализующихся при некоторых часто встречающихся силовых и кинематических условиях деформирования растущего тела для экспериментально подтвержденных общих свойств кривых ползучести материала. Результаты работы имеют важное практическое применение при решении прикладных задач механики растущих тел.

**Ключевые слова:** *растущее тело, кусочно-непрерывный рост, вязкоупругость, старение, разрыв напряжений, эволюция разрыва, аналитическая зависимость, прикладные задачи механики растущих тел.*

### **Литература**

1. Manzhairov A.V., Parshin D.A. Analytical solution of the mechanical problem on additive thickening of aging viscoelastic tapers under nonstationary longitudinal end forces. *Engng Letters*, 2018, vol. 26, no. 2, pp. 267–275.
2. Parshin D.A. Mathematical modelling of the process of internal technological stress fields development in cylindrical solids being layer-by-layer made of ageing viscoelastic materials. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1479, art. ID 012145.

## Analysis of noncontact stress discontinuities in growing viscoelastic solids

© D.A. Parshin

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia  
E-mail: parshin@ipmnet.ru

**Abstract.** The presented study relates to the mathematical theory of surface growth of aging viscoelastic solids (see, e.g., bibliography reviews in [1, 2]). Three-axis defining relations of integral type containing a single relaxation kernel are considered. Noncontact stresses discontinuities on the boundary surfaces of the solid parts that are produced at various stages of its piecewise continuous growth are studied. The analytical dependences describing the evolution of the corresponding stress jumps in arbitrary solids built up of the material under consideration are mathematically strictly constructed. The structure of these dependencies is analyzed. A number of special cases which are realized under some frequently encountered force and kinematic conditions of growing solids deformation, for experimentally confirmed general properties of material creep curves, are investigated. The results of this work have an important practical usage in solving applied problems of growing solid mechanics.

**Keywords:** *growing solid, piecewise continuous growth, viscoelasticity, aging, stress discontinuity, jump evolution, analytical dependence, applied problems in mechanics of growing solids.*

### References

1. Manzhairov A.V., Parshin D.A. Analytical solution of the mechanical problem on additive thickening of aging viscoelastic tapers under nonstationary longitudinal end forces. *Engng Letters*, 2018, vol. 26, no. 2, pp. 267–275.
2. Parshin D.A. Mathematical modelling of the process of internal technological stress fields' development in cylindrical solids being layer-by-layer made of ageing viscoelastic materials. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1479, art. ID 012145.

## Кинетика формирования трещин на границе соединения материалов

© М.Н. Перельмутер

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия  
E-mail: perelm@ipmnet.ru

**Аннотация.** Разработана методика оценки времени формирования трещин-дефектов в зоне ослабленных связей на границе соединения материалов, основанная на модели концевой области трещины

и кинетической теории термофлуктуационного распада молекулярных связей. Методика реализована в виде численного алгоритма расчета, ориентированного на исследование соединений полимеров и металла. Полагается, что часть трещины, занятая связями (концевая область), не является малой по сравнению с длиной трещины. При анализе предельного равновесия трещины не накладывается условие равенства нулю коэффициента интенсивности напряжений, что позволяет рассматривать в рамках модели со связями в концевой области трещины также и композиционные материалы с подкрепляющими волокнами.

**Ключевые слова:** *формирование трещин, кинетика, соединение материалов.*

*Работа выполнена по теме государственного задания  
(№ госрегистрации АААА-А17-117021310386-3).*

## **Kinetics of crack formation on the material interface**

© M.N. Perelmuter

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia  
E-mail: perelm@ipmnet.ru

**Abstract.** A model of thermal fluctuation crack formation in weakened bonds region on a material interface is proposed. The weakened bonds region is modeled by a bridged crack whose properties vary in time according to the thermal fluctuation mechanism. It is assumed that the crack part occupied by bridges (the bridged zone) is not small compared with the crack length. The stresses in the bridges and the kinetic dependence of the bond density in the crack bridged zone are determined by solving a system of singular integro-differential equations. The condition for the crack-defect nucleation is the decrease to the critical value of the average bond density on the corresponding part of the weakened bond region.

**Keywords:** *crack formation, end region, thermal fluctuation fracture, interface.*

*The work was supported by the state program number  
АААА-А17-117021310386-3.*

## **Нелинейное деформирование упругопластических осесимметричных мембран**

© С.А. Подкопаев, С.С. Гаврюшин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mails: podkopaevsa@bmstu.ru, gss@bmstu.ru

**Аннотация.** Рассмотрены теоретические основы алгоритма расчетов процессов деформирования упругих осесимметричных мембран с учетом физической и геометрической нелинейностей. Представлены эксплуатационные характеристики осесимметричных мембран в различных промышленных устройствах. Представлена математическая модель для описания процесса нелинейного деформирования осесимметричных оболочек. Реализован и апробирован модифицированный метод продолжения решения по параметру нагружения, позволяющий моделировать закритическое поведение оболочек и прием «смены подпространства управляющих параметров». На примере шарнирно-опертой сферической оболочки выполнено исследование закритического поведения. Выбрана рациональная математическая модель для описания нелинейного деформирования осесимметричных оболочек. На основе разработанной математической модели и вычислительных алгоритмов создан авторский программный комплекс, который может быть использован при расчетах элементов конструкций, подвергающихся конечным деформациям, а также может быть использован при моделировании технологических процессов при изготовлении деталей в промышленности.

**Ключевые слова:** нелинейное деформирование, тонкостенная осесимметричная оболочка, мембрана, закритическое поведение, дискретное переключение, продолжение по параметру, смена подпространства параметров.

## Nonlinear deformation of elastic-plastic axisymmetric membranes

© S.A. Podkopaev, S.S. Gavrushin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mails: podkopaevsa@bmstu.ru, gss@bmstu.ru

**Abstract.** The theoretical foundations of the algorithm for calculating the deformation processes of elastic axisymmetric membranes are considered, taking into account physical and geometric nonlinearities. Performance characteristics of axisymmetric membranes in various industrial devices are presented. A mathematical model is presented for describing the process of nonlinear deformation of axisymmetric shells. A modified method for continuing the solution by the loading parameter is implemented and tested, which allows modeling the supercritical behavior of shells and the technique of “changing the subspace of control parameters”. The study of supercritical behavior is performed on the example of a hinged-supported spherical shell. A rational mathematical model is chosen

to describe the nonlinear deformation of axisymmetric shells. Based on the developed mathematical model and computational algorithms, the author created a software package that can be used for calculating structural elements that are subject to finite deformations, and can also be used for modeling technological processes in the manufacture of parts in industry.

**Keywords:** *nonlinear straining, thin-walled axisymmetric shell, membrane, post-buckling behavior, discrete switching, continuation by parameter, change of the subspace of parameters.*

**Применение аналитического расчета кинематических характеристик автомобильного транспортного средства при косом наезде на боковые тросовые ограждения для проверки правильности построения конечно-элементной модели тросовых ограждений и оценки пассивной безопасности водителя / пассажира**

© Г.П. Колесникова

ВА РВСН им. Петра Великого, Балашиха, Россия  
E-mail: kolesnikovagp@mail.ru

**Аннотация.** Представлена методика проверки правильности разработанной конечно-элементной модели тросовых ограждений с использованием аналитически рассчитанных кинематических характеристик автотранспортного средства. Даны рекомендации по процедуре проведения виртуального теста с целью проверки правильности построения конечно-элементной модели, а также проанализирована возможность использования аналитических траекторий в изучении пассивной безопасности водителя/пассажира. Конечно-элементное моделирование проведено с помощью многоцелевого конечно-элементного комплекса LS-DYNA. Настоящая работа является продолжением исследований, опубликованных в [1] и [2].

**Abstract.** An analytical calculation of the kinematic characteristics of a motor vehicle allows both checking the correctness of the developed finite element (FE) model of cable barriers and can be used to study the movement of a motor vehicle directly during the construction of the FE model. In the article it has been provided recommendations on the procedure for conducting a virtual test in order to verify the correctness of the construction of the FE model of the cable barriers, and also it has been analyzed the possibility of using analytical trajectories in the study of passive safety of the driver/passenger. FE modeling has been performed using the LS-DYNA multipurpose finite element complex. The present work continued researches which has been published as [1] and [2].

## References

1. Kolesnikova G.P., Gasaniev A.R. Priblizhennoe matematicheskoe modelirovanie traektorii dvizheniya ATS pri kosom naezde na bokovye trosovye ograzhdeniya. *J. Avtomobil, doroga, infrastruktura*, 2018, vol. 1 (15).
2. Kolesnikova G.P. Approximate methods of analytical modeling of the trajectory of motor vehicle movement at an oblique hitting the side of a cable barrier. *J. Avtomobil, doroga, infrastruktura*, 2018, vol. 2 (16).

## Инженерные подходы к расчетам строительных конструкций при дифференцированном сейсмическом движении грунта

© Е.В. Позняк\*, А.М. Бхалла

ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ», Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): pozniakyv@mpei.ru

**Аннотация.** Обсуждается инженерная методика расчета строительных конструкций линейно-спектральным методом при волновом дифференцированном сейсмическом воздействии, а также допущения, связанные с распространением сейсмических волн, и инженерные приемы, обеспечивающие запас прочности в условиях неопределенности величины пикового ускорения грунта и направления сейсмического воздействия.

**Ключевые слова:** сейсмические волны, линейно-спектральный метод, сейсмическое воздействие, сейсмические ротации

**Введение.** В новой редакции свода правил 14.13330 [1], регламентирующем расчеты строительных конструкций на сейсмостойкость, впервые появилось указание на необходимость учета волнового характера сейсмического воздействия при значениях фазовых скоростей распространения сейсмических волн до 400 м/с. Имеются в виду волновые эффекты, связанные с прохождением сейсмических волн под подошвой фундамента; взаимодействие конструкции с основанием и распространение волн внутри сооружения считаются отдельными проблемами. Волновое движение грунта описывается с помощью интегральной дилатационно-ротационной или дифференцированной моделей движения грунта. В интегральной дилатационно-ротационной модели предполагается, что объем грунта под фундаментом движется как твердое тело с шестью степенями свободы; такая модель применяется для сооружений на очень жестких фундаментах.

В дифференцированной модели сейсмическое грунтовое движение задается векторным полем кинематических параметров, опреде-

ленным в каждой точке основания. Модель дифференцированного движения грунта принимают в случаях, когда одновременно действуют два фактора: 1) в спектре воздействия преобладают короткие волны с малыми длинами (по сравнению с размерами фундамента); 2) здание или сооружение имеет податливый фундамент или установлено на точечных опорах.

Основной метод расчета конструкций на сейсмические воздействия — линейно-спектральный метод. Это квазистатический модальный метод, в ходе которого определяется модальная сейсмическая нагрузка, параметры динамической реакции находят в виде отклика системы на эту статическую нагрузку, а результирующую динамическую реакцию определяют по правилу ККСК — «корень квадратный из суммы квадратов».

Применение линейно-спектрального метода для дифференцированного волнового движения грунта за рубежом неизвестно, отечественные научные школы пока впереди. В настоящей работе рассматривается применение линейно-спектрального метода при дифференцированном сейсмическом воздействии и связанные с ним инженерные подходы и допущения.

**Расчетные параметры дифференцированного воздействия.** Дифференцированное сейсмическое воздействие передается на конструкцию в виде кинематического возбуждения жестко заделанных в грунтовое основание опор, причем грунт в зонах опирания может двигаться поступательно и совершать угловые (ротационные) перемещения. Для конструкции с  $n$  степенями свободы, имеющей  $p$  опорных точек, связанных с основанием, движение грунта в зоне опирания  $i$ -й опорной точки  $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$  ( $i = 1, \dots, p$ ) описывается векторами абсолютных поступательных и ротационных перемещений, скоростей, ускорений. Вектор ускорений поступательного движения в  $i$ -й точке равен  $\ddot{\mathbf{X}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = |\ddot{\mathbf{X}}_i^0| \mathbf{v}_i^X(t)$ , где  $|\ddot{\mathbf{X}}_i^0|$  — его модуль;  $\mathbf{v}_i^X(t) = (v_{1i}^X \ v_{2i}^X \ v_{3i}^X)^T$  — вектор направления поступательного воздействия. Вектор ротационных ускорений в соответствующих обозначениях равен  $\ddot{\mathbf{a}}_i^0(t, x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = |\ddot{\mathbf{a}}_i^0| \mathbf{v}_i^\alpha(t)$ . За пиковые ускорения поступательного и ротационного движения в  $i$ -й точке принимают максимальные значения модулей векторов поступательных и ротационных ускорений  $I_i^X = \max |\ddot{\mathbf{X}}_i^0|$  и  $I_i^\alpha = \max |\ddot{\mathbf{a}}_i^0|$ .

При расчетах по линейно-спектральному методу вектор ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}_i^0$  и направляющие косинусы воздействия принимаются постоянными во времени:

$$\ddot{\mathbf{q}}_i^0 = I_i^X \cdot \mathbf{v}_i = \text{const};, \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i^X \\ w_i \mathbf{v}_i^\alpha \end{pmatrix} = \text{const}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v}_i$  — объединенный вектор направляющих косинусов  $\mathbf{v}_i^X$  и  $\mathbf{v}_i^\alpha$ ;  $w_i = I_i^\alpha / I_i^X$  — относительная интенсивность углового ускорения. При задании направлений воздействия применяют нефизичный, но надежный инженерный подход — направления определяются из условия максимума динамической реакции конструкции, это так называемые опасные направления сейсмического воздействия.

Пространственное распределение кинематических параметров точек грунта задается относительно единственной точки — точки привязки. Назначим точкой привязки первую опорную точку с вектором перемещений  $\mathbf{q}_1^0$  и ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}_1^0$ . Согласно (1), в точке привязки вектор ускорений выражается через пиковое ускорение поступательного движения  $I = I_1^X$  и вектор направлений воздействия  $\mathbf{v}_1$ :  $\ddot{\mathbf{q}}_1^0(x_1, x_2, x_3) = I \mathbf{v}_1$ .

Для  $i$ -й опорной точки, заданной вектором  $\mathbf{r}_i = (x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$ , вводится матрица, задающая пространственное изменение ускорений по отношению к точке привязки [2]:  $\mathbf{T}_i^{[6 \times 6]} = \mathbf{T}_i(\mathbf{r}_i) = \text{diag}(\mathbf{T}_{1i}, \mathbf{T}_{2i}, \dots, \mathbf{T}_{6i})$ , где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{1i} &= I_i^X \mathbf{v}_{1i}^X / (I_1^X \mathbf{v}_{11}^X), \quad \mathbf{T}_{4i} = I_i^X w_i \mathbf{v}_{1i}^\alpha / (I_1^X w_1 \mathbf{v}_{11}^\alpha), \\ \mathbf{T}_{2i} &= I_i^X \mathbf{v}_{2i}^X / (I_1^X \mathbf{v}_{21}^X), \quad \mathbf{T}_{5i} = I_i^X w_i \mathbf{v}_{2i}^\alpha / (I_1^X w_1 \mathbf{v}_{21}^\alpha), \\ \mathbf{T}_{3i} &= I_i^X \mathbf{v}_{3i}^X / (I_1^X \mathbf{v}_{31}^X), \quad \mathbf{T}_{6i} = I_i^X w_i \mathbf{v}_{3i}^\alpha / (I_1^X w_1 \mathbf{v}_{31}^\alpha). \end{aligned}$$

В этих обозначениях полный  $6p$ -мерный вектор ускорений  $\ddot{\mathbf{q}}^0$ :

$$\ddot{\mathbf{q}}^0 = \mathbf{T} \mathbf{v} = \text{const}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{T}^{[6p \times 6p]} = \text{diag}(\mathbf{T}_1^{[6 \times 6]}, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_p)$ ,  $\mathbf{v}^{[6p]} = (\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_p)^T$ .

Коэффициенты динамичности также могут быть различными в разных точках основания. Движению  $i$ -й опорной точки соответствует шестикомпонентный вектор спектральных коэффициентов динамичности  $\beta_i(\Omega) = (\beta_{1i} \quad \beta_{2i} \quad \beta_{3i} \quad \beta_{4i} \quad \beta_{5i} \quad \beta_{6i})^T$ . В инженерных расчетах обычно принимают единый коэффициент динамично-

сти для всех компонент воздействия — либо по огибающей КД, либо как максимальный элемент вектора  $\beta(\Omega_k)$ :  $\beta_k = \max(\beta(\Omega_k))$ , где  $\Omega_k$  — собственная частота  $k$ -й формы колебаний. Однако существуют подходы, принимающие во внимание пространственное изменение спектрального состава воздействия.

**Уравнения относительного движения.** Уравнение абсолютного движения системы с  $n$  степенями свободы под многомерным кинематическим воздействием, передающимся на конструкцию через  $p$  опорных точек, имеет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0 - \mathbf{B}_s\dot{\mathbf{q}}^0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{q}_{abs}^{[n]}$  — вектор абсолютных обобщенных перемещений;  $\mathbf{q}^{[n]}$  — вектор относительных обобщенных перемещений (в подвижной системе координат, вмороженной в основание);  $\mathbf{M}^{[n \times n]}$ ,  $\mathbf{B}^{[n \times n]}$  и  $\mathbf{K}^{[n \times n]}$  — матрицы инерции, демпфирования и жесткости конструкции;  $\mathbf{K}_s^{[n \times 6p]}$ ,  $\mathbf{B}_s^{[n \times 6p]}$  — матрицы жесткости и демпфирования системы опорных элементов;  $\mathbf{q}^{0[6p]}$  и  $\dot{\mathbf{q}}^{0[6p]}$  — векторы перемещений и скоростей грунта в опорных точках. При переходе к относительному движению, учитывая условия равновесия конструкции в опорных точках, и при допущении малого внутреннего демпфирования уравнение движения принимает вид, удобный для применения линейно-спектрального метода при заданном пиковом ускорении грунта:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{M}_s\ddot{\mathbf{q}}^0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{M}_s^{[n \times 6p]} = -\mathbf{M}\mathbf{F}\mathbf{K}_s$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{K}^{-1}$ .

**Сейсмическая нагрузка.** Для решения динамических уравнений вида (4) применяют метод разложения по собственным формам, подробно см. в [3]. Сейсмическая нагрузка  $\mathbf{S} = \mathbf{K}\mathbf{q}$  определяется для  $i$ -й обобщенной координаты и  $k$ -й формы колебаний:

$$S_{ik} = \beta_k \mathbf{m}_i \frac{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{M}_s}{M_{\text{mod},k}} \mathbf{T}\mathbf{v}_k,$$

где вектор-строка  $\mathbf{m}_i$  есть  $i$ -я строка матрицы инерции  $\mathbf{M}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Заключение.** В работе приведены основные теоретические выкладки, позволяющие провести расчет линейно-спектральным методом на дифференцированное сейсмическое воздействие. Эта задача связана с решением важной проблемы — моделированием простран-

ственно-временных полей кинематических параметров движения грунта и получением акселерограмм в различных точках грунтового основания. Достижения современной сейсмологии позволяют получить в ходе детального сейсмического районирования более или менее достоверную оценку пиковых ускорений на площадке строительства, спектрального состава воздействия, синтезировать искусственные акселерограммы. Возможные неопределенности исходных данных перекрываются инженерными приемами, например, применением концепции опасных направлений сейсмического воздействия или использованием максимальных коэффициентов динамичности. Таким образом, ЛСМ остается самым надежным инженерным методом проектирования строительных конструкций.

### Литература

1. СП 14.13330—2018. *Строительство в сейсмических районах*. Актуализированная редакция СНиП II-7-81\* (с изменениями № 1).
2. Назаров Ю.П. *Расчетные параметры волновых полей сейсмических движений грунта*. Москва, Наука, 2015, 401 с.
3. Nazarov Y.P., Poznyak E. Response Spectrum Method for integrated and differential spatial seismic ground motions. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2018, vol. 108, pp. 69–78.

## Engineering approaches to analysis of civil structures under differential seismic ground motion

© E.V. Poznyak\*, A.M. Bkhalla

National Research University Moscow Power Engineering Institute  
Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): pozniakyv@mpei.ru

**Abstract.** The report discusses the engineering methodology of structural seismic analysis using the Response Spectral Method for wave differential seismic action, as well as assumptions related to the propagation of seismic waves, and engineering techniques provided structural safety in conditions of uncertainty of the peak ground acceleration and the direction of seismic impact.

**Keywords:** *seismic waves, response spectral method, seismic action, seismic rotations.*

### References

1. SP 14.13330—2018. *Stroiyeł'stvo v seysmicheskikh rayonakh* [Seismic building design code].
2. Nazarov Yu.P. *Rastchetnye parametry volnovykh poley seysmicheskikh dvizheniy grunta*. [Calculated parameters of wave fields of seismic ground motions]. Moscow, Nauka Publ., 2015, 401 p.

3. Nazarov Yu.P., Poznyak E.V. Response Spectrum Method for integrated and differential spatial seismic ground motions. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2018, vol. 108, pp. 69–78.

## **Особенности учета распределения напряжений в десне при моделировании покрывных протезов типа «сэндвич»**

© Т.В. Полякова

ИКИ РАН, Москва, Россия  
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: tpolyakova@bmstu.ru

**Аннотация.** Рассмотрен протез «сэндвич» с опорой на резцы. Получены напряжения в десне. Построение виртуальной трехмерной модели осуществляется в среде специализированных программных комплексов (Amira, Mimics, Geomagic). Расчеты были выполнены в среде прикладного программного конечно-элементного комплекса ANSYS.

**Ключевые слова:** протез «сэндвич», метод конечных элементов, фанетная модель.

В первом варианте протез полностью опирался своим базисом на альвеолярный гребень. Во втором варианте помимо альвеолярного гребня нагрузка частично воспринималась одиночно стоящим зубом, обеспечивающим крепление протеза с помощью фиксирующей коронки. Анализировали результаты распределения эквивалентных напряжений в слизистом десневом слое, характеризующие давление, оказываемое на альвеолярный гребень со стороны протеза.

В результате проведенного исследования можно утверждать, что с помощью покрывного протеза типа «сэндвич» можно обеспечить надежную фиксацию, используя оставшиеся одиночно стоящие зубы или корни, при условии использования штифтового крепления. Показано, что использования в качестве опоры одиночно стоящих зубов, прикрытых фиксирующей коронкой, приводит к более рациональному распределению жевательной нагрузки, обеспечивая снижение давления на слизистый слой альвеолярного гребня. Использование фиксирующих коронок приводит к более равномерному распределению напряжений в окружающих зуб костных тканях при действии боковых и угловых нагрузок по сравнению с кламмерной фиксацией.

## Литература

1. Чумаченко Е.Н., Арутюнов С.Д., Лебеденко И.Ю. *Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния зубных протезов*. Москва, Молодая гвардия, 2003, 272 с.
2. Серова Н.С. *Лучевая диагностика в стоматологической имплантологии*. Москва, Е-ното, 2015, 220 с.

## Features of accounting for stress distribution in the mucosa when simulation sandwich denture

© T.V. Polyakova

Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail (speaker): tpolyakova@bmstu.ru

**Abstract.** The sandwich denture with support on incisors is considered. Stress in the mucosa was obtained. The virtual 3D-model is built in the environment of specialized software complexes (Amira, Mimics, Geomagic). Calculations were performed in the environment of the applied software finite element complex ANSYS.

**Keywords:** *sandwich denture, finite element method, facet model.*

In the first version, the prosthesis completely rested its basis on the alveolar crest. In the second version, in addition to the alveolar crest, the load was partially perceived by a singly standing tooth, which provides for the attachment of the prosthesis using a fixing crown. Results of distribution of equivalent stresses in mucosal gum layer characterizing pressure exerted on alveolar crest from prosthesis side were analyzed.

As a result of the study, it can be argued that with the help of the sandwich- denture reliable fixation can be provided using the remaining singly standing teeth or roots, provided that a nail is used. It has been shown that the use of singly standing teeth covered with a fixing crown as a support leads to a more rational distribution of the mastication load, providing a decrease in pressure on the mucosa layer of the alveolar crest. The use of fixing crowns leads to a more uniform distribution of stresses in the bone tissues surrounding the tooth under the action of lateral and angular loads compared to clammer fixation.

## References

1. Chumachenko E.N., Arutyunov S.D., Lebedenko I.Yu. *Matematicheskoye modelirovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya zubnykh protezov* [Mathematical modelling of the stress-strain state of dentures]. Moscow, Molodaya gvardiya, 2003, 272 p. (in Russ.).
2. Serova N.S. *Luchevaya diagnostika v stomatologicheskoy implantologii* [Radiation diagnostics in dental implantology]. Moscow, E-noto, 2015, 220 p. (in Russ.).

## Анализ неравномерности вращения выходного звена планетарного механизма с эллиптическими зубчатыми колесами

© А.А. Приходько

КубГТУ, Краснодар, Россия  
E-mail: sannic92@gmail.com

**Аннотация.** Рассмотрена двухрядная планетарная передача с двумя внешними зацеплениями, имеющая в своем составе пару цилиндрических и пару эллиптических зубчатых колес. Построена кинематическая модель механизма, в результате анализа которой получены зависимости коэффициента неравномерности вращения выходного звена от соотношения радиусов цилиндрических зубчатых колес при различных эксцентриситетах пары эллиптических зубчатых колес.

**Ключевые слова:** вращательное движение, неравномерное движение, эллиптические зубчатые колеса, кинематический анализ, коэффициент неравномерности движения.

Передачи с некруглыми зубчатыми колесами позволяют реализовать различные виды движения выходного звена: неравномерное вращательное движение [1], движение с остановками [2], возвратно-вращательное движение [3, 4]. В настоящей работе исследуется кинематика двухрядной планетарной передачи с двумя внешними зацеплениями, включающей пару цилиндрических и пару эллиптических зубчатых колес (рис. 1). Механизм состоит из неподвижной стойки 0, трех звеньев 1–3, вращательных кинематических пар  $A$ ,  $C$ ,  $E$  и зубчатых кинематических пар  $B$  и  $D$ . В зависимости от выбора радиусов цилиндрических зубчатых колес можно получить различные виды движения выходного вала (рис. 1): неравномерное движение (например,  $R_1 > a + c$ ); движение с остановками (например,  $R_1 = a + c$ ); возвратно-вращательное движение (например,  $R_1 < a + c$ ).

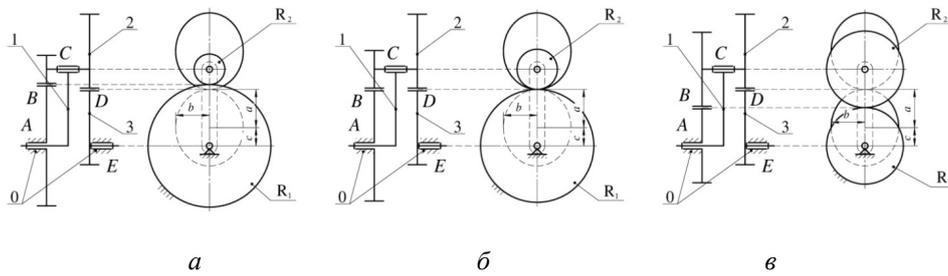
В результате проведенного кинематического анализа построены графики функций угла поворота выходного вала для представленных механизмов (рис. 2).

Перспективным направлением практического применения представленных передач является разработка на их основе исполнительных механизмов перемешивающих устройств. Проведенные различными авторами исследования показывают [5–7], что неравномерное движение рабочего органа перемешивающего устройства позволит повысить интенсивность перемешивания в реакторе с мешалкой.

Одним из параметров, характеризующих закон движения рабочего органа, является коэффициент неравномерности вращения, который определяется следующим образом [7]:

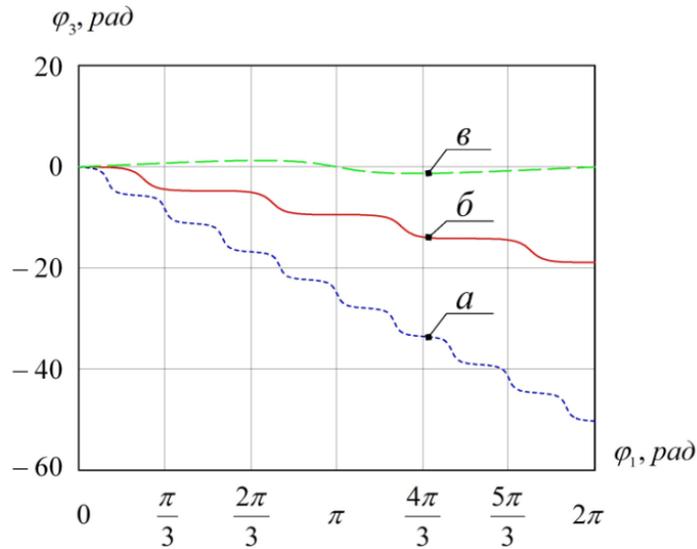
$$\delta = \frac{\omega_{3\max} - \omega_{3\min}}{\omega_{3\text{ср}}} = \frac{u_{31\max}\omega_1 - u_{31\min}\omega_1}{u_{31\text{ср}}\omega_1} = \frac{u_{31\max} - u_{31\min}}{u_{31\text{ср}}},$$

где  $u_{31\max}$  и  $u_{31\min}$  — максимальное и минимальное значения передаточной функции механизма, соответственно;  $u_{31\text{ср}}$  — среднецикловое передаточное отношение механизма.



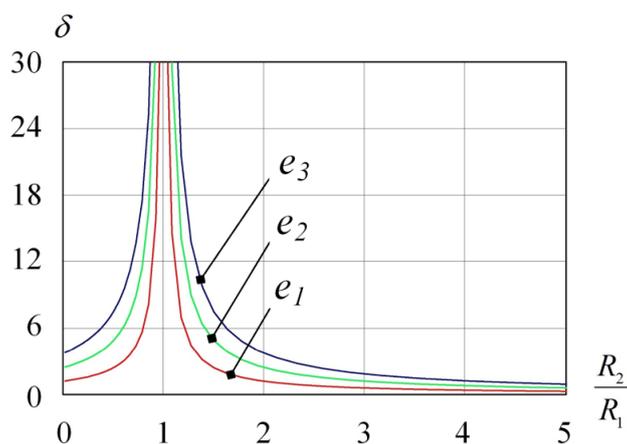
**Рис. 1.** Варианты планетарного механизма с эллиптическими зубчатыми колесами для различных видов движения:

*a* — неравномерное движение; *б* — движение с остановками;  
*в* — возвратно-вращательное движение



**Рис. 2.** Графики функций угла поворота выходного вала для планетарных механизмов с различными радиусами цилиндрических колес

Предложенные механизмы в зависимости от геометрических параметров (радиусы цилиндрических зубчатых колес, эксцентриситет пары эллиптических зубчатых колес) имеют различные значения экстремумов передаточной функции, а также среднецикловое передаточного отношения. Влияние геометрических параметров механизма на коэффициент неравномерности вращения выходного вала показано на следующих графиках (рис. 3).



**Рис. 3.** Графики зависимостей коэффициента неравномерности вращения выходного вала механизма от соотношения радиусов цилиндрических зубчатых колес для различных эксцентриситетов эллиптических колес:  $e_1 = 0,28$ ,  $e_2 = 0,475$ ,  $e_3 = 0,6$

Анализ приведенных зависимостей показывает, что механизмы с большими эксцентриситетами эллиптических зубчатых колес имеют большую неравномерность вращения выходного вала при равных значениях соотношения  $R_2/R_1$ . При одинаковых радиусах цилиндрических колес коэффициент неравномерности вращения выходного вала стремится к бесконечности, так как среднецикловое передаточное отношение в данном случае равно нулю.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края в рамках научного проекта № 19-41-233002.*

### Литература

1. Mundo D. Geometric design of a planetary gear train with non-circular gears. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, vol. 41, pp. 456–472.
2. Приходько А.А., Смелягин А.И. Создание и исследование планетарных механизмов прерывистого движения с эллиптическими зубчатыми колесами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение*, 2019, № 6, с. 77–88.
3. Приходько А.А., Смелягин А.И., Герасименко Е.О., Сонин С.А. Перемешивающее устройство с возвратно-вращательным движением рабочего органа. *Известия высших учебных заведений. Пищевая технология*, 2017, № 4, с. 84–87.

4. Prikhodko A.A. Structural and kinematic analysis of a stirred tank planetary drive. *Matec Web of Conferences*, 2018, vol. 226, art. ID 01012.
5. Мудров А.Г. Конструкции и модель смешения в аппаратах с мешалкой. *Известия КГАСУ*, 2018, № 1, с. 226–233.
6. Смелягин А.И., Приходько А.А. Кинематический анализ сложного исполнительного механизма возвратно-вращательного перемешивающего устройства. *Наука. Техника. Технологии (Политехнический вестник)*, 2014, № 4, с. 79–86.
7. Torubarov N.N., Malyshev R.M., Kolebanov A.V., Frantsuzov A.I., Rusinov V.V., Uskov A.A. Mixers with nonstationary motion of the stirrers. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2016, vol. 52, no. 5–6, pp. 327–331.

## Analysis of the rotation irregularity of the output link in the planetary mechanism with elliptical gears

© A.A. Prikhodko

Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia  
E-mail: sannic92@gmail.com

**Abstract.** The paper considers a two-row planetary gear with two external gears, which has a pair of elliptical gears. A kinematic model of the mechanism has been constructed, as a result of which the dependences of the coefficient of rotation irregularity of the output link on the ratio of the radii of the cylindrical gears at different eccentricities of a pair of elliptical gears are obtained.

**Keywords:** rotational motion, irregular motion, elliptical gearwheels, kinematic analysis, coefficient of rotation irregularity

*The reported study was funded by RFBR and Krasnodar krai according to the research project no. 19-41-233002.*

### References

1. Mundo D. Geometric design of a planetary gear train with non-circular gears. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, vol. 41, pp. 456–472.
2. Prikhodko A.A., Smelyagin A.I. *Vestnik MGTU im. Baumana. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2019, no. 6, pp. 77–88.
3. Prikhodko A.A., Smelyagin A.I., Gerasimenko E.O., Sonin S.A. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Pishhevaja tehnologija — News of Institutes of Higher Education. Food Technology*, 2017, no. 4, pp. 84–87.
4. Prikhodko A.A. Structural and kinematic analysis of a stirred tank planetary drive. *Matec Web of Conferences*, 2018, vol. 226, art. ID 01012.
5. Mudrov A.G. *Izvestija KGASU — News of the KSUAE*, 2018, no. 1, pp. 226–233.
6. Smelyagin A.I., Prikhodko A.A. *Nauka. Tehnika. Tehnologii (Politehnicheskij vestnik) — Science. Engineering. Technology (Polytechnical bulletin)*, 2014, no. 4, pp. 79–86.
7. Torubarov N.N., Malyshev R.M., Kolebanov A.V., Frantsuzov A.I., Rusinov V.V., Uskov A.A. Mixers with nonstationary motion of the stirrers. *Chemical and Petroleum Engineering*, 2016, vol. 52, no. 5–6, pp. 327–331.

## Воздействие сейсмозрывных волн на кусочно-однородное цилиндрическое тело с жидкостью, находящееся в деформируемой среде

© И.И. Сафаров<sup>1\*</sup>, М.Х. Тешаев<sup>2,3</sup>, А.М. Марасулов<sup>4</sup>, Б.С. Рахмонов<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Ташкентский химико-технологический институт, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup>Бухарское отделение Института математики АН РУз, Бухара, Узбекистан

<sup>3</sup>Бухарский филиал Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Бухара, Узбекистан

<sup>4</sup>Казахско-Турецкий международный университет им. Х.А. Ясави, Туркестан, Республика Казахстан

<sup>5</sup>Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

\*E-mail (докладчика): safarov54@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрена задача воздействия волн в протяженных телах с жидкостью. Обнаружены некоторые механические эффекты. Например, когда источник сейсмических волн находится на расстоянии пяти-десяти радиусов от цилиндрического тела, высокочастотный характер изменения контурных напряжений, воздействующих на внутреннюю свободную поверхность, хорошо аппроксимируется с решением для плоской волны. Также решены задачи взаимодействия и дифракции сейсмических волн глубоко заложённых пространственных цилиндрических оболочек с учетом внутренней жидкости. Обнаружено, что максимальное напряжение, вызванное в бетонной оболочке, лежащей в мягком грунте, происходит из-за поперечных горизонтальных волн, что значительно больше, чем продольные и поперечные фронтальные волны, вместе взятые.

**Ключевые слова:** оболочка, волна, дифракция, жидкость, мягкий грунт.

Интегро-дифференциальные уравнения движения кусочно-однородного цилиндрического тела с жидкостью при отсутствии массовых сил имеют вид:

$$(\tilde{\lambda}_j + 2\tilde{\mu}_j) \text{grad div } \vec{u}_j - \tilde{\mu} \text{rot rot } \vec{u}_j + \vec{b}_j = \rho_j \frac{\partial^2 \vec{u}_j}{\partial t^2}, j = 2, 4, \dots, N + 1; \quad (1)$$

$$L\tilde{E}\vec{u} = \frac{(1 - \nu_0^2)}{h_0} \vec{p} + \rho_0 (1 - \nu_0^2) \left( \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right), k = 1, 3, \dots, N; \Delta\varphi_0 - \frac{1}{c_\infty^2} \ddot{\varphi}_0 = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_j f(t) &= \lambda_{0j} \left[ f(t) - \int_{-\infty}^t R_\lambda^{(i)}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right], \\
\tilde{\mu}_j f(t) &= \mu_{0j} \left[ f(t) - \int_{-\infty}^t R_\mu^{(i)}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right]; \\
\tilde{E}f(t) &= E_{01} \left[ f(t) - \int_{-\infty}^t R_E(t-\tau) f(t) d\tau \right], \\
\beta_1^{(\kappa)} &= \frac{\gamma_\kappa (1-v_\kappa^2) c_1^2 R_k^2}{R_1}, \quad \beta_2^{(\kappa)} = \frac{R_k^2 (1-v_\kappa^2) c_1^2 \rho_1}{h_k R_1}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $\tilde{\lambda}_j$ ,  $\tilde{\mu}_j$  и  $\tilde{E}_\kappa$  — операторные модули упругости;  $E_{01}$  — мгновенный модуль упругости Юнга;  $\vec{u} = \vec{u}(u_r, u_\theta, u_z)$  и  $\vec{u}_j = \vec{u}_j(u_{rj}, u_{\theta j}, u_{zj})$  — вектор смещения оболочки и среды;  $\varphi_0$  — потенциал идеальной жидкости;  $\rho_j$  — плотность материального слоя;  $\rho_0$  — плотность материала оболочки;  $\vec{b}_j$  — объемная нагрузка ( $b_j = 0$ );  $f(t)$  — непрерывная функция;  $R_E^{(i)}(t-\tau)$ ,  $R_\mu^{(i)}(t-\tau)$  и  $R_\lambda^{(i)}(t-\tau)$  — ядра релаксации;  $\lambda_{0j}, \mu_{0j}$  — мгновенные модули упругости слоя и окружающей ее среды;  $E_{01}$  — мгновенный модуль упругости оболочки. При вычислении используется трехпараметрическое ядро релаксации Колтунова — Ржаницына  $R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k}$ . На контакте двух тел ставится условие жесткого (или скользящего) контакта. Свободные поверхности слоев свободны от усилий [1].

Волновое уравнение в потенциалах перемещений удовлетворяет на бесконечности  $r \rightarrow \infty$  условию излучения Зоммерфельда [2].

Распространяющиеся волны в среде могут быть в следующем виде:

$$\varphi_{N+1}^{(i)} = \varphi_{(N+1)0} i\pi H_o^{(1)}(\alpha_{N+1} \bar{r}) e^{-i\omega t}. \tag{4}$$

Для решения задачи в потенциалах перемещений представим вектор перемещений в виде

$$\vec{u}_j = \text{grad}\varphi_j + \text{rot}\vec{\psi}_j,$$

где  $\varphi_j$  — потенциал продольных волн;  $\vec{\psi}_j(0, 0, \psi)$  — векторный потенциал поперечных волн.

Уравнения движения (1) теории вязкоупругости в задачах плоской деформации сводятся к следующему интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} & (\lambda_{oj} + 2\mu_{oj}) \nabla^2 \varphi_j - \lambda_{oj} \int_{-\infty}^t R_\lambda^{(j)}(t-\tau) \nabla^2 \varphi_j d\tau - 2\mu_{oj} \int_{-\infty}^t R_\mu^{(j)}(t-\tau) \nabla^2 \varphi_j d\tau = \\ & = \rho_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2}; \quad \mu_{oj} \nabla^2 \bar{\psi}_j - \mu_{oj} \int_{-\infty}^t R_\mu^{(j)}(t-\tau) \nabla^2 \bar{\psi}_j d\tau = \rho_j \frac{\partial^2 \bar{\psi}_j}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\nabla^2$  — дифференциальные операторы в цилиндрических координатах;  $\nu_j$  — коэффициент Пуассона.

Решение уравнения (5) можно искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_j(r, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_{kj}^{(\varphi)}(r) \cos(n\theta) e^{-i\omega t}; \\ \psi_j(r, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_{kj}^{(\psi)}(r) \sin(n\theta) e^{-i\omega t}; \\ \mathfrak{G}^{(k)}(R_k, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k(R_k) \sin(n\theta) e^{-i\omega t}; \\ w^{(k)}(R_k, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} W_k(R_k) \cos(n\theta) e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

где  $q_{kj}^{(\varphi)}(r, \theta)$  и  $q_{kj}^{(\psi)}(r, \theta)$  — комплексные функции. Задачи сводятся к решению неоднородных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами.

Анализируются вынужденные колебания цилиндрических тел при воздействии гармонических цилиндрических волн. Напряжения и смещения определяются через специальные функции Бесселя и Ханкеля 1-го и 2-го рода. При получении численных результатов найдено, что точность повышается с увеличением числа членов рядов. В длинноволновых областях распределения напряжений трубы с жидкостью и без жидкости отличаются до 14 %, а в областях коротких волн при некоторых значениях частоты они отличаются до 40 %. Контурные напряжения на свободной поверхности цилиндрических тел достигают своего максимального значения при  $\theta = 45^\circ$  и  $135^\circ$  при воздействии поперечных волн. Распределение контурного напряжения при  $\beta_1 R_1 = 0,099$  почти совпадает со статическим результатом, а при повышении значения волнового числа ( $\beta_1 R_1 = 1,5$ ) резко отличается от статических результатов.

*Работа выполнена при поддержке гранта РУЗ ОТ-Ф4-01.*

**Литература**

1. Safarov I.I., Kulmurotov N.R., Teshayev M.K., Kuldashov N.U. Interaction of Non-stationary Waves on Cylindrical Body. *Scientific Journal Applied Mathematics*, 2019, vol. 10, pp. 435–447.
2. Safarov I.I., Kulmurotov N.R., Teshayev M.K., Kuldashov N.U. Diffraction of Surface Harmonic Viscoelastic Waves on a Multilayer Cylinder with a Liquid. *Scientific Journal Applied Mathematics*, 2019, vol. 10, pp. 468–484.

**Impact of seismic explosive waves on a piecewise-homogeneous cylindrical body with a liquid in a deformable medium**

© I.I. Safarov<sup>1\*</sup>, M.Kh. Teshayev<sup>2,3</sup>, A.M. Marasulov<sup>4</sup>, B.S. Rakhmonov<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Tashkent Institute of Chemical Technology, Tashkent, Uzbekistan

<sup>2</sup>Bukhara Branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara, Uzbekistan

<sup>3</sup>Bukhara branch of the Tashkent Institute of Irrigation Engineers and Mechanization in Agriculture, Bukhara, Uzbekistan

<sup>4</sup>Kazakh-Turkish International University named after Kh.A. Yassavi, Turkestan, Kazakhstan

<sup>5</sup>Urgench State University, Urgench, Uzbekistan

\*E-mail (speaker): safarov54@mail.ru

**Abstract.** Problems of wave action in extended bodies with liquid are considered. Some mechanical effects were found. For example, when the source of seismic waves is at a distance of five to ten radii from a cylindrical body, the high-frequency nature of the change in the contour stresses acting on the internal free surface is well approximated with the solution for a plane wave. Also, the problems of interaction and diffraction of seismic waves of deeply embedded spatial cylindrical shells, taking into account the internal fluid, have been solved. It has been found that the maximum stress caused in a concrete shell lying in soft soil is due to shear horizontal waves, which is much greater than the longitudinal and shear frontal waves combined.

**Keywords:** shell, wave, diffraction, liquid, soft soil.

Integro-differential equations of motion of a piecewise-homogeneous cylindrical body with a liquid in the absence of mass forces have the form:

$$(\tilde{\lambda}_j + 2\tilde{\mu}_j) \text{grad div } \vec{u}_j - \tilde{\mu} \text{rot rot } \vec{u}_j + \vec{b}_j = \rho_j \frac{\partial^2 \vec{u}_j}{\partial t^2}, \quad j = 2, 4, \dots, N + 1; \quad (1)$$

$$L\tilde{E}\vec{u} = \frac{(1 - \nu_0^2)}{h_0} \vec{p} + \rho_0 (1 - \nu_0^2) \left( \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right), \quad k = 1, 3, \dots, N; \quad \Delta \varphi_0 - \frac{1}{c_\infty^2} \ddot{\varphi}_0 = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\lambda}_j f(t) &= \lambda_{0j} \left[ f(t) - \int_{-\infty}^t R_\lambda^{(i)}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right]; \\
 \tilde{\mu}_j f(t) &= \mu_{0j} \left[ f(t) - \int_{-\infty}^t R_\mu^{(i)}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right]; \\
 \tilde{E} f(t) &= E_{01} \left[ f(t) - \int_{-\infty}^t R_E(t-\tau) f(t) d\tau \right]; \\
 \beta_1^{(\kappa)} &= \frac{\gamma_\kappa (1 - \nu_\kappa^2) c_1^2 R_k^2}{R_1}, \quad \beta_2^{(\kappa)} = \frac{R_k^2 (1 - \nu_\kappa^2) c_1^2 \rho_1}{h_k R_1}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Here,  $\tilde{\lambda}_j, \tilde{\mu}_j$  and  $\tilde{E}_\kappa$  are the operators of elastic moduli;  $E_{01}$  is the instantaneous modulus Young's elasticity;  $\vec{u} = \vec{u}(u_r, u_\theta, u_z)$  and  $\vec{u}_j = \vec{u}_j(u_j, u_{\theta j}, u_{zj})$  — vector-displacement of the shell and medium;  $\varphi_0$  — potential of an ideal fluid;  $\rho_j$  — the density of the material layer;  $\rho_0$  — the density of the shell material;  $\vec{b}_j$  — volumetric load ( $b_j = 0$ );  $f(t)$  — continuous function;  $R_E^{(i)}(t-\tau)$ ,  $R_\mu^{(i)}(t-\tau)$  and  $R_\lambda^{(i)}(t-\tau)$  — relaxation kernels;  $\lambda_{0j}, \mu_{0j}$  — instantaneous moduli of elasticity of the layer and its environment;  $E_{01}$  — instantaneous modulus of elasticity of the shell. For calculations used the Koltunov — Rzhantsyn's three-parameter relaxation kernel  $R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k}$ . The conditions of rigid (or sliding) contact are set at the contact of two bodies. The free surfaces of the layers are free from efforts [1].

The wave equation in the displacement potentials satisfies the Sommerfeld radiation condition at infinity  $r \rightarrow \infty$  [2].

The propagating waves in the medium can be in the following form:

$$\varphi_{N+1}^{(i)} = \varphi_{(N+1)O} i\pi H_o^{(1)}(\alpha_{N+1} \bar{r}) e^{-i\omega t}. \tag{4}$$

To solve the problem in displacement potentials, we represent the displacement vector in the form:

$$\vec{u}_j = \text{grad } \varphi_j + \text{rot } \vec{\psi}_j,$$

where  $\varphi_j$  is the potential of longitudinal waves;  $\vec{\psi}_j(0,0,\psi)$  — vector potential of transverse waves. The equations of motion (1) of the theory of viscoelasticity in problems of plane deformation are reduced to the following integro-differential equation

$$\begin{aligned}
(\lambda_{oj} + 2\mu_{oj})\nabla^2\varphi_j - \lambda_{oj}\int_{-\infty}^t R_\lambda^{(j)}(t-\tau)\nabla^2\varphi_j d\tau - 2\mu_{oj}\int_{-\infty}^t R_\mu^{(j)}(t-\tau)\nabla^2\varphi_j d\tau &= \rho_j \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial t^2}; \\
\mu_{oj}\nabla^2\bar{\psi}_j - \mu_{oj}\int_{-\infty}^t R_\mu^{(j)}(t-\tau)\nabla^2\bar{\psi}_j d\tau &= \rho_j \frac{\partial^2\bar{\psi}_j}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{5}$$

where  $\nabla^2$  are differential operators in cylindrical coordinates and  $\nu_j$  is Poisson's ratio. The solution to equation (5) can be sought in the form

$$\begin{aligned}
\varphi_j(r, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_{kj}^{(\varphi)}(r) \cos(n\theta) e^{-i\omega t}; \\
\psi_j(r, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_{kj}^{(\psi)}(r) \sin(n\theta) e^{-i\omega t}, \\
\mathfrak{S}^{(k)}(R_k, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k(R_k) \sin(n\theta) e^{-i\omega t}, \\
w^{(k)}(R_k, \theta, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} W_k(R_k) \cos(n\theta) e^{-i\omega t},
\end{aligned}$$

where  $q_{kj}^{(\varphi)}(r, \theta)$  and  $q_{kj}^{(\psi)}(r, \theta)$  are complex functions.

The problems are reduced to solving inhomogeneous algebraic equations with complex coefficients.

Forced vibrations of cylindrical bodies under the influence of harmonic cylindrical waves are analyzed. Stresses and displacements are determined through special Bessel and Hankel functions of the 1-st and 2-nd kind. When obtaining numerical results, it was found that the accuracy increases with an increase in the number of members of the series. In long-wavelength regions, the stress distributions of pipes with and without liquid differ by up to 14%, and in the regions of short waves at some frequency values they differ by up to 40%. Also, the contour stresses on the free surface of cylindrical bodies reach their maximum value under  $\theta = 45^\circ$  and under  $135^\circ$  the action of transverse waves. The distribution of the contour voltage at  $\beta_1 R_1 = 0.099$  almost coincides with the static result, and with an increase in the wavenumber value ( $\beta_1 R_1 = 1.5$ ) it sharply differs from the static results.

*This work was supported by the Grant of the Republic of Uzbekistan OT-F4-01.*

## References

1. Safarov I.I., Kulmuratov N.R., Teshayev M.K., Kuldashov N.U. Interaction of Nonstationary Waves on Cylindrical Body. *Scientific Journal Applied Mathematics*, 2019, no. 10, pp. 435–447.

2. Safarov I.I., Kulmurov N.R., Teshayev M.K., Kuldashov N.U. Diffraction of Surface Harmonic Viscoelastic Waves on a Multilayer Cylinder with a Liquid. *Scientific Journal Applied Mathematics*, 2019, no. 10, pp. 468–484.

## Решение плосконапряженных задач нелокальной теории упругости методом конечных элементов

© Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева, А.А. Соколов\*

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): Zokolof@yandex.ru

**Аннотация.** На основе модели нелокальной теории упругости рассмотрено решение плосконапряженной задачи в прямоугольной области. Использование подходов обобщенной механики сплошной среды позволило учесть эффекты нелокальности среды по пространству и получить в качестве определяющих соотношений интегро-дифференциальные уравнения, к которым применимы хорошо изученные численные методы, в частности метод конечных элементов.

**Ключевые слова:** структурно-чувствительные материалы, нелокальная упругость, метод конечных элементов.

**Введение.** Создание структурно-чувствительных материалов с уникальными физико-механическими свойствами является одной из приоритетных задач современного машиностроения. Однако при рассмотрении таких материалов классические законы механики сплошной среды перестают работать, поэтому приходится рассматривать другие математические модели, которые позволяют учесть дополнительные эффекты, которые в них возникают [1, 2]. В данной работе рассмотрена модель теории упругости, позволяющая учесть эффекты нелокальности среды по пространству. Данная модель обобщает идеи механики сплошной среды на среду с микро- и наноструктурой, что позволяет описывать ее интегро-дифференциальными уравнениями.

**Постановка задачи.** Рассмотрим уравнение равновесия сплошной среды, которое имеет следующий вид:

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

где тензор напряжений  $\hat{\sigma}$  определяется таким образом:

$$\hat{\sigma} = p_1 \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + p_2 \iint_{S'(x) \cap S} \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dS'(\mathbf{x}).$$

Граничные условия первого и второго рода будут иметь вид

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{p}(\mathbf{x}).$$

Функция нелокального влияния  $\varphi$  представляет собой произвольную нормированную положительную функцию в области  $S'(\mathbf{x})$ .

**Метод решения.** В качестве метода решения был выбран метод конечных элементов. Полученная схема решения имеет вид, который в индексной форме записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & p_1 \iint_S \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS + \\ & + p_2 \iint_S \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i} \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS'(\mathbf{x}) dS - \\ & - \oint_{\Gamma_2} N_n^{(e)} p_i d\Gamma + \iint_S N_n^{(e)} b_i dS = 0, \quad i, j, k, l = \overline{1, 2}, n = \overline{1, M^{(e)}}, (e) \in S_n. \end{aligned}$$

Компоненты тензора упругой деформации  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  определяются через соотношение Коши, а компоненты тензора упругости  $\widehat{\boldsymbol{C}}$  определяются с учетом того, что рассматривается линейное изотропное тело.

При аппроксимации интеграла с весовым множителем  $p_2$  возникла необходимость также реализовать процедуру поиска ближайших соседей относительно квадратурных узлов. На практике эта процедура была упрощена до поиска ближайших соседей относительно центров элементов, так как поиск относительно квадратурных узлов требует заметно больше вычислительных ресурсов, но при этом не дает существенных различий в конечных результатах.

**Результаты расчетов.** В качестве тестовой задачи была выбрана задача Неймана на прямоугольной области  $S = [0, 1] \times [0, 1]$  со следующими граничными и дополнительными условиями:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{x_1=0} &= -1, & \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{x_1=1} &= -1, & \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{x_2=0,1} &= 0, \\ u_i|_{x_i=0,5} &= 0, & i &= \overline{1, 2}. \end{aligned}$$

На примере данной задачи были исследованы основные параметры модели: влияние весовых параметров, радиуса нелокального влияния; а также было проведено сравнение решений при выборе различных функций нелокального влияния. Было показано, что учет нелокальных эффектов существенным образом влияет на итоговые результаты решения, в особенности на границе области. Расчеты проводились квадратичными серендиповыми элементами.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования (проект № 0705-2020-0032).*

## Литература

1. Eringen A.C. *Nonlocal continuum field theories*. New York–Berlin–Heidelberg, Springer Verlag, 2002, 393 p.
2. Gopalakrishnan S., Narendar S. *Wave Propagation in Nanostructures. Nonlocal Continuum Mechanics Formulations*. New York, Springer International Publishing, 2013, 365 p.

## Solving plane-stressed problems of nonlocal elasticity theory by the finite element method

© G.N. Kuvyrkin, I.Y. Savelieva, A.A. Sokolov\*

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): Zokolof@yandex.ru

**Abstract.** In this paper, on the basis of a model of the nonlocal theory of elasticity, the solution of the plane-stressed problem in a rectangular region is considered. The use of approaches of generalized mechanics of a continuous medium made it possible to take into account the effects of nonlocality of the medium in space and to obtain integro-differential equations as constitutive relations, to which well-studied numerical methods, in particular, the finite element method, are applicable.

**Keywords:** *structurally sensitive materials, nonlocal elasticity, finite element method.*

## References

1. Eringen A.C. *Nonlocal continuum field theories*. New York–Berlin–Heidelberg, Springer Verlag, 2002, 393 p.
2. Gopalakrishnan S., Narendar S. *Wave Propagation in Nanostructures. Nonlocal Continuum Mechanics Formulations*. New York, Springer International Publ., 2013, 365 p.

## Анализ деформирования опорных частей мостов при разном геометрическом оформлении сферического слоя скольжения

© А.А. Каменских, В.И. Струкова\*

ПНИПУ, Пермь, Россия

\*E-mail (докладчика): veloiv\_pstu@mail.ru

**Аннотация.** В рамках работы проведен анализ влияния геометрического оформления сферического слоя скольжения опорных частей мостов. Рассмотрены две задачи: влияние положения сферического слоя скольжения относительно стальных плит опорной части

на контактное деформационное поведение конструкции и влияние угла наклона торца антифрикционной прослойки на напряженно-деформированное состояние узла в целом и параметры зон контакта в частности. Выполнено моделирование двух вариантов конструкций сферических опорных частей мостов: с прослойкой, расположенной в нижней стальной плите, и с прослойкой, нанесенной на сферический стальной сегмент. В рамках работы сделана параметризация моделей опорных частей мостов относительно геометрической конфигурации слоя скольжения и рассмотрено 10 вариантов угла наклона торца антифрикционной прослойки от 0 до 45°. В рамках исследования получены качественные и количественные закономерности деформационного поведения сферических опорных частей мостов разной геометрической конфигурации.

**Ключевые слова:** сферическая опорная часть, контакт, трение, полимерные материалы, геометрическая конфигурация.

Опорные части пролетных строений мостов являются ответственными конструкциями транспортных систем и воспринимают значительные нагрузки от мостового пролета. Многие инженерные разработки мостостроения связаны с рационализацией геометрической конфигурации элементов опорных частей мостов [1–4]: изменение способа обработки контактных поверхностей; изменение геометрии и положения антифрикционных слоев скольжения; рационализация геометрического оформления технологических углублений под смазочные материалы в области контактного взаимодействия и т. д. [5–10]. В работе рассмотрен ряд актуальных задач, связанных с рационализацией геометрической конфигурации антифрикционной прослойки и ее торца. Рассмотрены модели сферических опорных частей, отличающихся расположением сферического слоя скольжения относительно стальных элементов конструкций: 1) сферическая опорная часть с антифрикционной прослойкой, расположенной в нижней стальной плите со сферическим вырезом; 2) сферическая опорная часть с антифрикционной прослойкой, нанесенной на полированный стальной сферический сегмент. Сферическая опорная часть состоит из двух стальных плит и промежуточной сферической антифрикционной прослойки толщиной 4 мм. При этом 2 мм торца слоя скольжения контактируют со стальной плитой (верхней или нижней), а 2 мм не ограничены и при пластическом деформировании могут деформироваться значительно. Обе конструкции сферической опорной части предложены ООО «АльфаТех» (г. Пермь) и рассчитаны на номинальную вертикальную нагрузку 1000 кН.

Задача реализуется в рамках общей математической постановки задачи контакта двух упругих тел через упругопластическую поли-

мерную прослойку с учетом больших деформаций в объеме материала слоя скольжения. На границах сопряжения слоя скольжения и стальных плит опорной части реализовано фрикционное контактное взаимодействие с постоянным коэффициентом трения 0,04 и заранее не известным распределением статусов контактных состояний (прилипание, проскальзывание, отлипание). В качестве материала сферического слоя скольжения используется модифицированный фторопласт. Физико-механические свойства материала антифрикционной прослойки получены экспериментально д-ром физ.-мат. наук А.А. Адамовым в Институте механики сплошных сред УрО РАН [11]. Для описания модели поведения антифрикционного полимерного материала выбрана деформационная теория упругопластичности для случая активного нагружения.

В рамках исследования влияния положения слоя скольжения относительно стальных плит опорной части установлено, что опорная часть с антифрикционной прослойкой в нижней стальной плите обладает рядом преимуществ. При стандартном угле наклона  $30^\circ$  не наблюдается расхождения контактных поверхностей вблизи края слоя скольжения. Максимальный уровень контактного давления на поверхности контакта, по которой возможен поворот сферического сегмента на 9,5 % ниже, чем у конструкции опорной части со слоем скольжения, нанесенным на сферический сегмент. Максимальный уровень контактного давления на торце антифрикционной прослойки на 15,4 % ниже, чем у второй рассматриваемой конструкции сферической опорной части. Максимальный уровень контактного касательного напряжения торца антифрикционной прослойки на 69 % ниже, чем у опорной части со слоем скольжения, нанесенным на сферический сегмент. Нормальные перемещения относительно свободной части торца слоя скольжения в 1,4 раза ниже, а уровень пластических деформаций ниже приблизительно на 10 %.

В рамках исследования также рассмотрено влияние угла наклона торца антифрикционной прослойки на деформационное поведение контактного узла, угол наклона антифрикционной прослойки варьируется от  $0$  до  $45^\circ$ . При исследовании выполнен анализ деформационного поведения конструкций в сравнении с опорной частью со стандартным углом наклона  $30^\circ$ . Установлено, что при расположении антифрикционной прослойки в нижней стальной плите при углах наклона торца прослойки от  $0$  до  $15^\circ$  наблюдается расхождение контактных поверхностей вблизи края прослойки приблизительно на 1,5 % поверхности контакта, по которой возможен поворот сферического сегмента. В другом варианте конструкции опорной части с антифрикционной прослойкой, нанесенной на сферический сегмент, отлипание контактных поверхностей наблюдается при углах наклона торца более  $20^\circ$  и при  $45^\circ$  наклона торца слоя скольжения, а площадь

контакта, находящаяся в состоянии контактного отлипания максимальна и достигает 4,5 %. При анализе деформационных характеристик конструкций в целом и анализе зон контакта в частности выбраны углы наклона торца, доставляющие опорным частям мостов наиболее благоприятное напряженно-деформированное состояние: для опорной части со слоем скольжения, нанесенным на сферический сегмент, —  $0^\circ$ ; для конструкции опорной части с прослойкой, расположенной в нижней стальной плите, —  $25^\circ$  и  $40^\circ$ . Дальнейшим направлением исследования будет анализ влияния свойств материалов антифрикционной прослойки на деформирование опорной части мостовых пролетов при стандартном и выбранных углах наклона торца слоя скольжения.

Работа моделей сферических опорных частей пролетных строений мостов верифицирована относительно данных натуральных экспериментов о деформировании опорной части с антифрикционной прослойкой, расположенной в нижней плите. Получено хорошее качественное и количественное соответствие результатов численных и натуральных экспериментов о деформировании контактного узла.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-08-00903.*

## Литература

1. Choi E., Choi S. Analysis of dynamic behavior of railroad steel bridges according to bridge bearing type. *Journal of the Korean Society for Railway*, 2012, no. 15 (1), pp. 62–70.
2. Choi E., Lee J.S., Jeon H.-Kw., Park T., and Kim H.-T. Static and dynamic behavior of disk bearings for OSPG railway bridges under railway vehicle loading. *Nonlinear Dynamics*, 2010, no. 62, pp. 73–93.
3. Kamenskikh A. The analysis of the work of materials of mouthguard designs during biomechanical deformation. *Solid State Phenomena*, 2018, no. 284, pp. 1355–1360.
4. Eggert H., Kauschke W. *Structural Bearings*. Berlin, Ernst & Sohn, 2002, 405 p.
5. Кравчук А.С. О решении трехмерных контактных задач с трением. *Прикладная математика и механика*, 2008, т. 72, вып. 3, с. 485–496.
6. Ипанов А.С., Булатов И.Л., Кочнев Н.В. [и др.]. *Опорная часть моста*. Пат. 176296 РФ, МПК E01D 19/04. 2017122366, заявлено 26.06.2017; опубл. 16.01.2018, бюл. № 2.
7. Шаферман И.М., Гитман Э.М., Шаферман А.И., [и др.]. *Опорная часть*. Пат. 194657 РФ, МПК E01D 19/04. 2019119741 заявлено 25.06.2019; опубл. 06.12.2019, бюл. № 34.
8. Корнев С.Н. *Опорная часть моста*. Пат. 042831 РФ, МПК E01D 19/04. 2004116560/22 заявлено 04.06.2004; опубл. 20.12.2004.
9. Поспелов В.М., Старченко В.С. *Опорная часть моста*. Пат. 099015 РФ, МПК E01D 19/04. 2010107823/03 заявлено 04.03.2010; опубл. 10.11.2010.
10. Балтин Д.Р., Буканова Е.В., Ипанов А.С., Копытов А.В. *Опорная часть моста*. Пат. 160343 РФ, МПК E01D 19/04. 2015147957/03 заявлено 06.11.2015; опубл. 20.03.2016, бюл. № 8.
11. Адамов А.А., Каменских А.А., Носов Ю.О. Математическое моделирование поведения современных антифрикционных полимеров. *Прикладная математика и вопросы управления*, 2019, № 4, с. 43–56.

## The analysis of deformation of the bearing bridges with different spherical slip layer geometric design

© A.A. Kamenskikh, V.I. Strukova\*

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

\*E-mail (speaker): veloiv\_pstu@mail.ru

**Abstract.** Influence Analysis of the spherical sliding layer geometric design of the bearings bridges is considered within the framework. Two tasks are considered: it is influence of the position of spherical sliding layer relative to the steel plates of the bearing on the contact deformation behavior of the structure and it is influence of the inclination angle of the antifriction layer butt on the stress-strain state of the assembly as a whole and the contact zones parameters in particular. Modeling of two variants of spherical bearings structures of bridges was carried out: with an interlayer located in the bottom steel plate and with an interlayer applied to the spherical steel segment. Parametrization of the bearings bridges models with respect to the geometric configuration of the sliding layer was made and 10 variants of the inclination angle butt of the antifriction layer from 0 to 45° were considered within the framework of the work. Qualitative and quantitative patterns of spherical bearing of bridges deformation behavior of different geometric configurations were obtained within the framework of the study.

**Keywords:** spherical bearing, contact, friction, polymeric materials, geometric configuration.

## Расчет остаточных напряжений и деформаций в цилиндрической части композитного баллона давления с несущим металлическим лейнером

© Б.С. Сарбаев\*, С. Чжан\*

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: bssarbayev@mail.ru; zxbmstu@qq.com

**Аннотация.** В результате экспериментальных исследований композитного баллона с несущим металлическим лейнером установлено, что деформирование конструкции является нелинейным. При разгрузке и повторном нагружении имеет место эффект Баушингера. С целью его описания и расчета остаточных напряжений и деформаций в цилиндрической части композитного баллона после предварительной опрессовки предлагается способ, основанный на нитяной модели волокнистого композитного материала и соотношений теории пластичности с трансляционным упрочнением для изотропного

тела. Для сравнения приведены результаты расчета, полученные с применением метода конечных элементов. Теоретические результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Показана необходимость учета нелинейного деформирования металлического лайнера как при проектировании баллона, так и при анализе напряженно-деформированного состояния при эксплуатационных нагрузках.

**Ключевые слова:** композитный баллон давления, несущий металлический лайнер, остаточные деформации, теория пластичности, трансляционное упрочнение, эффект Баушингера.

Рассматривается вариант конструкции композитного баллона высокого давления с несущим металлическим лайнером, предназначенного для хранения сжатого газа. Цилиндрическая часть баллона усилена окружными и спиральными слоями волокнистого композиционного материала (КМ). Для предотвращения нежелательного эффекта потери устойчивости тонкостенного лайнера при разгрузке баллона после предварительной опрессовки необходимо прогнозировать остаточные напряжения в лайнере и композитных слоях. В связи с этим в методах расчета и проектирования должна учитываться физическая нелинейность как лайнера, так и многослойного КМ.

В настоящей работе рассматривается способ расчета остаточных напряжений и деформаций в цилиндрической части композитного баллона указанной выше конструкции с применением соотношений теории пластичности. Он основан также на применении линейно упругой модели для КМ. В отличие от работ [1, 2], в которых используются соотношения деформационной теории пластичности, для описания физической нелинейности металлического лайнера применяются соотношения теории пластичности с трансляционным упрочнением [3]. Девииаторы напряжений  $s_{ij}$  и пластических деформаций  $e_{ij}^p$  связаны следующими зависимостями:

$$s_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0 de_{ij}^p}{d\xi_p} + r_{ij}. \quad (1)$$

Здесь для тензора  $r_{ij}$  используются интегральные соотношения наследственного типа. Они имеют вид

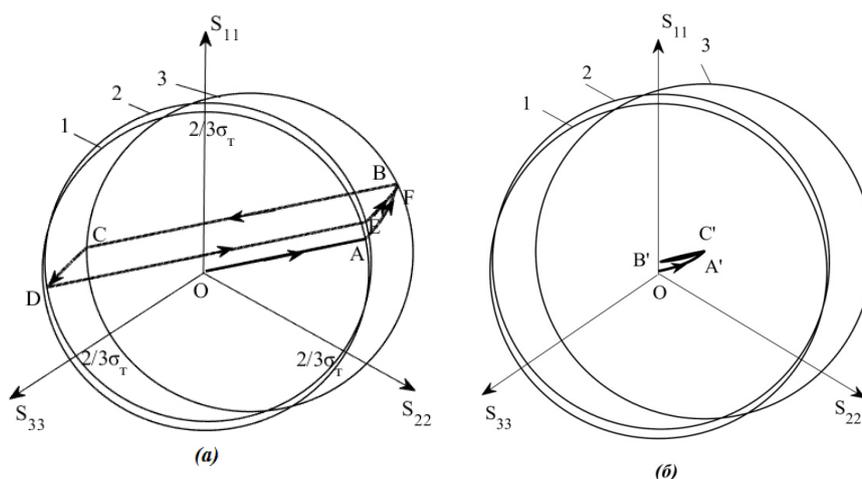
$$r_{ij} = \frac{2}{3} R \int_0^{\xi_p} \exp\{-\alpha [z_p(\xi_p) - z_p(\xi_p')]\} \frac{de_{ij}^p}{d\xi_p'} d\xi_p'. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2)  $\sigma_0$  — предел текучести;  $R$ ,  $\alpha$  — параметры материала, причем  $R > 0$ ;  $(d\xi_p)^2 = 2/3 de_{ij}^p de_{ij}^p$  — параметр Одквиста. В качестве временноподобного параметра, отражающего историю

нагружения, используется функция  $z_p(\xi_p)$ , зависящая от параметра Одквиста. Указанный подход позволяет адекватно определять напряжения и деформации в волокнистом КМ и лейнере, а также описывать эффект Баушингера при разгрузке и кривые гистерезиса при циклической нагрузке. С использованием данного подхода получены выражения для элементов матрицы упругопластических характеристик многослойного материала. Их вывод основан на приеме, изложенном в работе [3]. Таким образом, при пластическом расчете соотношения напряжений и деформаций могут быть выражены в вектор-матричной форме:

$$d\sigma = D_{ep}d\varepsilon,$$

где  $D_{ep}$  — матрица касательных упругопластических жесткостей. Сложность применения указанного варианта теории пластичности связана с неаналитичностью определяющих соотношений. Поэтому при построении алгоритма расчета наиболее эффективным является сочетание метода пошагового нагружения с методом переменных параметров жесткости.



Перемещения поверхности нагружения и траектория нагружения лейнера (а) и центра поверхности нагружения (б)

В предлагаемом способе расчета при нагружении баллона внутренним давлением для наглядности определяется перемещение поверхности нагружения и траектория нагружения лейнера в пространстве напряжений (рисунок). Алгоритм расчета реализован в программе MATLAB. Полученные определяющие соотношения сравнительно просты и удобны в практических расчетах.

В настоящей работе также выполнен расчет с применением метода конечных элементов. Для этого используется современный про-

граммный комплекс ANSYS-Workbench. Моделирование цилиндрической части баллона было построено на основе оболочных конечных элементов. В нем используются теория пластичности изотропного тела с кинематическим упрочнением и теория континуальной механики поврежденности для волокнистого КМ. В этом случае теоретические результаты, полученные на основе двух способов, удовлетворительным образом согласуются с экспериментальными данными.

Следует отметить, что остаточные деформации в лайнере, определенные на основании деформационной теории пластичности и теории течения с изотропным упрочнением? превышают экспериментальные данные [1, 2]. Показано, что применение предлагаемого способа расчета приводит к лучшему соответствию между теоретическими и экспериментальными данными [4]. Его применение для обоснования давления автофретирования, а также для анализа несущей способности конструкции при циклическом нагружении является целесообразным.

#### Литература

1. Васильев В.В., Мороз Н.Г. *Композитные баллоны давления: проектирование, расчет, изготовление и испытания*. Москва, Машиностроение, 2015, 373 с.
2. Vasiliev V.V. *Composite Pressure Vessels. Analysis, design, manufacturing*. Blacksburg, Bull Ridge Publishing, 2009, 704 p.
3. Сарбаев Б.С. Об одном варианте теории пластичности с трансляционным упрочнением. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 1994, № 1, с. 65–72.
4. Serkan Kangal, Osman Kartav, Metin Tanoglu, Engin Aktas, H. Secil Artem. Investigation of interlayer hybridization effect on burst pressure performance of composite overwrapped pressure vessels with load-sharing metallic liner. *Journal of Composite Materials*, 2019, vol. 54, iss. 7, pp. 961–980.

### **Analysis of residual stress and strain in the cylindrical part of the composite pressure vessel with load-bearing metallic liner**

© B.S. Sarbayev\*, X. Zhang\*

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail: bssarbayev@mail.ru; zxbmstu@qq.com

**Abstract.** As a result of experimental studies of the composite pressure vessel with load-bearing metallic liner, the deformation of structure is nonlinear, exhibiting Bauschinger effect during the unloading and cyclic-loading phases. A method for purpose of describing and analyzing residual stress and strain in the cylindrical part of a composite pressure vessel after preliminary pressure testing is developed, which is based on the monotropic model of the fibrous composites and the relations of the theory of

plasticity with kinematic hardening of isotropic material. In comparison, the theoretical results are in good agreement with predicted results using finite element analysis. The results show that it is necessary to consider the nonlinear deformation of the metallic liner, both in the design of pressure vessel, and in the analysis of stress-strain state under operational loading.

**Keywords:** *composite pressure vessel, load-bearing metallic liner, residual deformation, the theory of plasticity, kinematic hardening, Bauschinger effect.*

### References

1. Vasiliev V.V., Moroz N.G. *Composite pressure vessels. Analysis, design, manufacturing*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2015, 373 p. (in Russ.).
2. Vasiliev V.V. *Composite Pressure Vessels. Analysis, design, manufacturing*. Blacksburg, Bull Ridge Publ., 2009, 704 p.
3. Sarbayev B.S. On the theory of plasticity with kinematic hardening. *Journal RAN. Solid Mechanicals*, 1994, no. 1, pp. 65–72 (in Russ.).
4. Serkan Kangal, Osman Kartav, Metin Tanoglu, Engin Aktas, H. Secil Artem. Investigation of interlayer hybridization effect on burst pressure performance of composite overwrapped pressure vessels with load-sharing metallic liner. *Journal of Composite Materials*, 2019, vol. 54, iss. 7, pp. 961–980.

## Нагрузки на оси многоосного полуприцепа (трала)

© В.В. Варенцов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: varentzov.viatch@yandex.ru

**Аннотация.** Рассмотрено равновесие груженого многоосного полуприцепа (трала) с целью определения реакций, приложенных к нему. Показано, что реакции опор могут быть выражены линейными уравнениями, учитывающими координаты точек их приложения.

**Ключевые слова:** *равновесие многоосного полуприцепа, уравнения равновесия сил, нагрузка на оси.*

## Axle loads of a multi-axle semi-trailer (trawl)

© V.V. Varentsov

Bauman Moscow State Technical University  
E-mail: varentzov.viatch@yandex.ru

**Abstract.** The balance of a loaded multi-axle semitrailer (trawl) is considered in order to determine the reactions applied to it. It is shown that

the reactions of supports can be expressed by linear equations taking into account the coordinates of the points of their application.

**Keywords:** *balance of a multi-axle semitrailer, equations of the balance of forces, axle load.*

## **Расчет структурных термоупругих напряжений в волокнистых композиционных материалах**

© С.Л. Косачев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: s\_kosachev@bmstu.ru

**Аннотация.** В работе представлен аналитический метод расчета структурных термоупругих напряжений в одноосно армированном волокнистом композиционном материале (ВКМ), возникающих при его изготовлении. Метод основан на использовании модели регулярно армированного ВКМ, геометрия и напряженное состояние которого полностью определяются микроструктурой фундаментальной ячейки. Для аналитического расчета остаточных напряжений используется экспериментально установленная термоупругая аналогия, в соответствии с которой остаточные напряжения считаются пропорциональными разности коэффициентов температурного расширения матрицы и армирующих волокон и разности температур при охлаждении композита. По предложенной методике приведены результаты расчетов для стеклопластика с гексагональной решеткой, установлена оптимальная степень армирования, при которой остаточные напряжения являются минимальными для различных температур отверждения.

**Ключевые слова:** *композиционный материал, прочность, остаточные напряжения, периодические структуры.*

**Введение.** Волокнистые композиционные материалы (ВКМ) являются одними из самых перспективных материалов в создании современных машиностроительных конструкций. Однако при расчете конструкций из ВКМ возникает множество проблем, одной из которых является наличие в структуре материала остаточных напряжений.

Структура ВКМ обычно формируется в условиях повышенных температур с последующим охлаждением, что обеспечивает достижение максимальных механических свойств. Процесс охлаждения сопровождается температурными деформациями компонент ВКМ, и

поскольку термоупругие свойства волокон и матрицы различны, то возникает их стесненная деформация, пропорциональная разности коэффициентов температурного расширения и температурному интервалу режима охлаждения. Термоупругие остаточные напряжения таковы, что при высоких степенях армирования и температурного интервала охлаждения полимерная матрица может разрушаться даже на стадии изготовления конструкции без приложения внешней нагрузки.

Обычно для исследования поля остаточных напряжений в ВКМ используются различные как экспериментальные методы (например, поляризационно-оптический), так и аналитические методы [1–5, 8]. В данной работе представлен аналитический метод расчета структурных остаточных напряжений, основанный на использовании модели регулярно армированного ВКМ.

**Постановка задачи.** В качестве модели ВКМ примем некоторую трехмерную изотропную кусочно-однородную среду, упругие и геометрические свойства которой неизменны в направлении  $x_3$  и имеют двоякопериодический характер в плоскости  $x_1x_2$ . Будем полагать, что в среде реализуется такое напряженно-деформированное состояние, при котором компонента деформации  $e_{33}$  не зависит от всех координат, а остальные компоненты деформации — от координаты  $x_3$ .

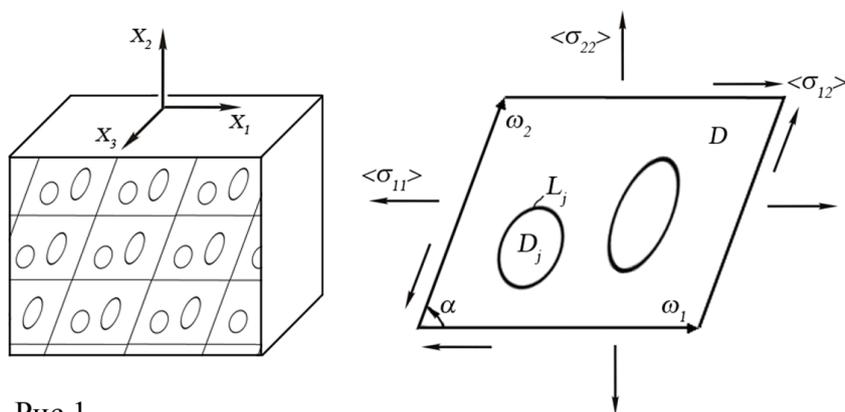


Рис. 1

Поскольку напряженно-деформированное состояние слоя ВКМ является двоякопериодическим, то достаточно рассмотреть периодический элемент структуры в виде параллелограмма периодов (фундаментальная ячейка). Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — основные периоды структуры. Внутри параллелограмма периодов  $P_{m,n}$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) содержится  $k$  непересекающихся включений (волокон), ограниченных контурами  $L_j$ . Конечные односвязные области, ограниченные контурами  $L_j$ , обозначим через  $D_j$ , упругие постоянные среды в областях  $D_j$  (волокна) и  $D$  (матрица) — через  $E_j, \nu_j$  и  $E, \nu$  соответственно (рис. 1).

Будем полагать, что волокна посажены в матрицу с некоторым известным натягом  $h_j$  в плоскости  $x_1x_2$  и упругое взаимодействие матрицы и волокон идеально, что означает непрерывность векторов напряжений и перемещений (с учетом натяга) при переходе через  $L_j$ .

**Сведение задачи к системе интегральных уравнений.** Пусть в области  $D$  справедлив закон Гука, тогда

$$e_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}), \quad e_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}), \quad e_{12} = \frac{1}{\mu}\sigma_{12}. \quad (1)$$

Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (2)$$

Уравнения совместности деформаций —

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (3)$$

Если ввести в рассмотрение функцию напряжений (функцию Эри) по формулам:

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (4)$$

то соотношения (1) и (3) приводят к бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 U(x_1, x_2) = 0, \quad (5)$$

при этом уравнения равновесия удовлетворяются автоматически. Таким образом, функция Эри является бигармонической. Если ввести в рассмотрение комплексную переменную  $z = x_1 + ix_2$ , то любую бигармоническую функцию можно выразить через две произвольные аналитические в  $D$  функции (потенциалы)  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  по формуле Гурса [6]. Тогда напряжения и перемещения, действующие в среде, запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z); \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sigma_{33} = 2\mu(1 + \nu)e_{33} + 4\nu \operatorname{Re} \Phi(z);$$

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\phi(z) - z\overline{\Phi(z)} - \overline{\psi(z)},$$

где  $\Psi(z) = \psi'(z)$ ,  $\Phi(z) = \phi'(z)$ ,  $\kappa = 3 - 4\nu$ . Черта над функцией означает комплексно сопряженную функцию.

Будем рассматривать поля напряжений, обладающие той же группой симметрии, что и область  $D$ . В этом случае напряжения в  $D$  должны иметь двоякопериодическую структуру. Тогда постановку задачи о плоской деформации композиционного материала можно сформулировать следующим образом. Определить функции  $\varphi(z), \psi(z)$  и  $\varphi_j(z), \psi_j(z)$ , регулярные соответственно в областях  $D, D_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) и удовлетворяющие на границе раздела  $L = \bigcup L_j$  следующим условиям сопряжения матрицы и волокон:

– непрерывность вектора напряжений

$$\varphi(t) + t\bar{\Phi}(t) + \bar{\Psi}(t) = \varphi_j(t) + t\bar{\Phi}_j(t) + \bar{\Psi}_j(t); \quad (7)$$

– непрерывность (с учетом натяга) вектора перемещений

$$\frac{1}{\mu} [\kappa\varphi(t) - t\bar{\Phi}(t) - \bar{\Psi}(t)] = \frac{1}{\mu_j} [\kappa_j\varphi_j(t) - t\bar{\Phi}_j(t) - \bar{\Psi}_j(t)] + 2h_j(t). \quad (8)$$

Здесь

$$t \in L_j, \Phi(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \mu_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)},$$

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \kappa_j = \frac{3-\nu_j}{1+\nu_j}.$$

При этом подразумевается, что все условия периодичности выполнены автоматически за счет специального вида представлений искомых регулярных функций. Как показано в [7], искомые функции  $\varphi(t), \psi(t)$  можно выразить через две неизвестные комплексные функции (плотности)  $p(t)$  и  $q(t)$ , причем таким образом, что для определения  $p(t)$  и  $q(t)$  получается эквивалентная исходной краевой задаче система интегральных уравнений. Подставив выражения для  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  в условия сопряжения (7) и (8), получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} p(t_0) - M_j(p(t), q(t), t_0) &= R_j(t_0); \\ q(t_0) - N_j(p(t), q(t), t_0) &= Q_j(t_0). \end{aligned} \quad (9)$$

Решив систему (9), получим значения плотностей  $p(t), q(t)$  на контуре  $L$ . После чего вычисляются производные от комплексных потенциалов, а затем и напряжения на границе раздела компонентов по формулам [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_r(t) &= \operatorname{Re}[2\Phi(t) - \bar{t}\Phi'(t) - \Psi(t)]; \\ \sigma_\theta(t) &= \operatorname{Re}[2\Phi(t) + \bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t)]. \end{aligned} \quad (10)$$

**Учет остаточных напряжений.** Гетерогенная структура ВКМ в силовых конструкциях обычно формируется в условиях повышенных температур (150...180 °С) с последующим охлаждением до окружающей комнатной температуры, что обеспечивает достижение наиболее высоких механических свойств. Процесс охлаждения сопровождается температурными деформациями компонент композиционного материала, и поскольку термоупругие свойства волокон и матрицы различны, возникает их стесненная температурная деформация, пропорциональная разности коэффициентов температурного расширения и температурному интервалу режима охлаждения. Разделение главных действующих напряжений в поперечном срезе, проведенное по результатам поляризационно-оптических измерений, показало, что в плоскости, перпендикулярной направлению армирования, действуют радиальные остаточные напряжения сжатия  $\sigma_r^{\text{ост}}$  и тангенциальные напряжения растяжения  $\sigma_\theta^{\text{ост}}$ , достигающие своих наибольших значений на поверхности раздела [8].

Для аналитического расчета остаточных напряжений в одноосно армированном композите используется экспериментально установленная термоупругая аналогия [9], в соответствии с которой остаточные напряжения считаются термоупругими, пропорциональными разности коэффициентов температурного расширения матрицы и армирующих волокон и разности температур  $\Delta T$  при охлаждении композита.

Тогда стесненные температурные перемещения армирующих волокон и матрицы могут быть определены из уравнений:

$$\begin{aligned} U + iV &= t(\alpha - \alpha_{2j})\Delta T, \\ W &= t(\alpha - \alpha_{1j})\Delta T, \quad t \in L. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $\alpha_{1j}$  и  $\alpha_{2j}$  — коэффициенты температурного расширения вдоль и поперек  $j$ -го волокна соответственно;  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения матрицы. Осевые остаточные напряжения  $\sigma_3^{\text{ост}}$  образуются вследствие различия коэффициентов Пуассона для волокон и матрицы.

Напряжения  $\sigma_1^{\text{ост}}$  и  $\sigma_2^{\text{ост}}$ , действующие в поперечных сечениях, находятся из решения задачи о плоской деформации композита (9) при следующем нагружении:

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{12} \rangle = 0, \quad h_j \neq 0, \quad (12)$$

где  $h_j$  — поперечный натяг волокна, вызванный температурными деформациями матрицы и волокна. Его можно определить из уравнения

$$h_j(t) = t\Delta T[(\alpha - \alpha_{2j}) + (\alpha - \alpha_{1j})(\nu - \nu_j)]. \quad (13)$$

В отличие от полученных ранее решений, здесь учитываются поперечные деформации не только матрицы, но и волокон, т. е. определяются напряжения как в областях, занимаемых волокнами, так и в области, занимаемой матрицей. Кроме того, предложенный подход позволяет определять напряжения в материале под воздействием под действием внешних нагрузок с учетом поля остаточных температурных напряжений, для чего в выражении (12) нужно положить внешние нагрузки не равными нулю.

**Результаты расчета.** По предложенной методике были проведены расчеты для различных типов решеток, температурных интервалов и степеней армирования ВКМ. На графиках (рис. 2, 3) представлено распределение остаточных напряжений для стеклопластика вдоль границы раздела матрица — волокно, где они достигают максимальных значений, для гексагональной решетки ( $\omega_1 = 2, \omega_2 = 2e^{i\pi/3}$ ), имеющей в узлах включения радиусом  $R = 0,75, \Delta T = -120^\circ\text{C}$ .

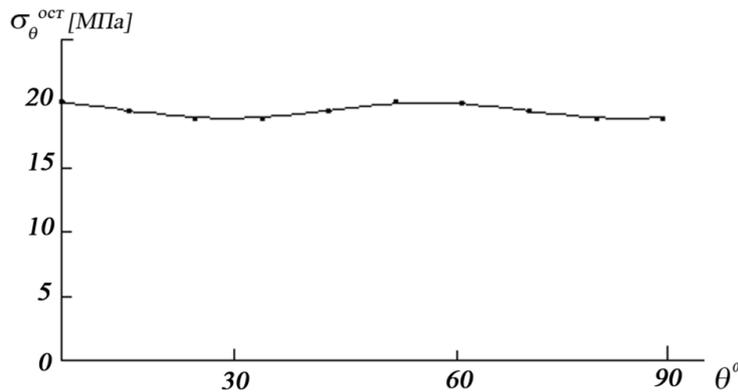


Рис. 2

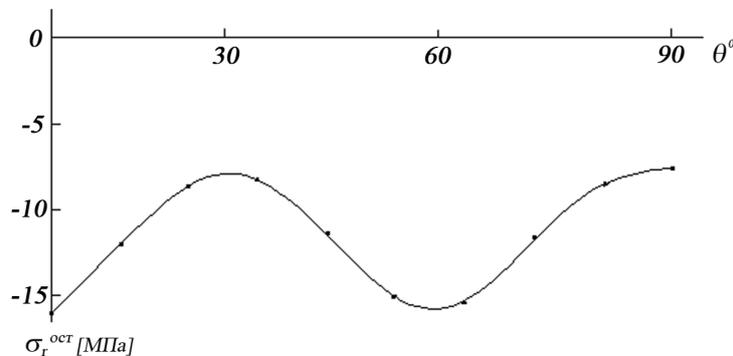


Рис. 3

Для выявления влияния на уровень начального напряженного состояния степени армирования и температуры отверждения построены графики распределения относительных эквивалентных остаточных напряжений для стеклопластика (рис. 4), рассчитанные по тензорно-инвариантному критерию прочности Гольденבלата — Копнова.

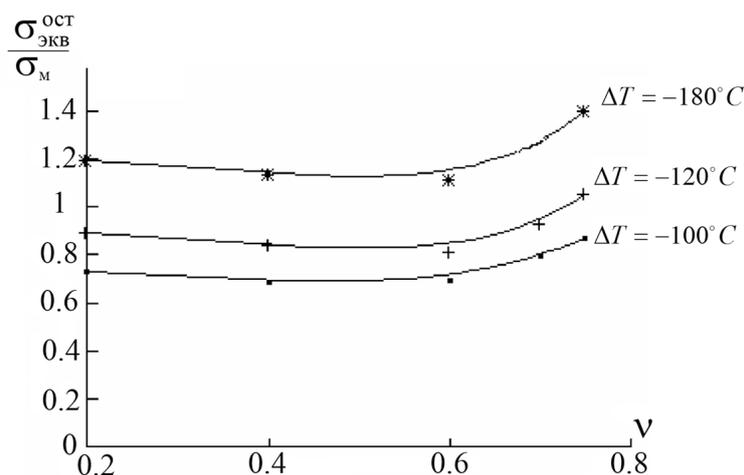


Рис. 4

Как видно из графиков, при высоких степенях армирования и температурах разрушение матрицы может наступать еще на этапе изготовления материала без приложения внешней нагрузки. Кроме того, установлена некоторая оптимальная степень армирования, соответствующая  $\nu \approx 0,6$ , при которой остаточные напряжения являются минимальными для различных температур отверждения.

### Литература

1. Видельман В.Э. *Экспериментальные исследования свойств материалов при сложных термомеханических воздействиях*. Москва, Физматлит, 2012, 204 с.
2. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели термомеханики*. Москва, Физматлит, 2002, 168 с.
3. Зиновьев П.А., Кулиш Г.Г., Цветков С.В. *Процессы деформирования и разрушения композиционных материалов при высокоинтенсивном трехосном нагружении*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, 94 с.
4. Турусов Р.А., Мемарианфард Х. Дискретная модель в анализе остаточных напряжений однонаправленных намоточных цилиндров из армированного пластика в процессе охлаждения. *Вестник МГСУ*, 2015, № 1, с. 27–35.
5. Мемарианфард М., Турусов Р.А., Мемарианфард Х. Численные и экспериментальные исследования монолитности толстостенной анизотропной оболочки. *Вестник МГСУ*, 2016, № 7, с. 36–45.
6. Мухелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Москва, Наука, 1966, 708 с.
7. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. *Периодические кусочно-однородные упругие структуры*. Москва, Наука, 1992, 287 с.

8. Албаут Г.М., Барышников В.Н., Пангаев В.В., Табанюхова М.В., Харипова Н.В. Определение концентрации напряжений в нестандартных задачах поляризации-оптичными методами. *Физическая мезомеханика*, 2003, т. 6, № 6, с. 91–95.
9. Молодцов Г.А. *Напряженные элементы конструкций ЛА из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1993, 224 с.

## **Calculating structural thermo-elastic stresses in fibrous composite materials**

© S.L. Kosachev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: s\_kosachev@bmstu.ru

**Abstract.** The paper presents an analytical method of calculating the structural thermo-elastic stresses of fibrous composite material (FCM) arising in its manufacture. The method is based on the use of a model of a regularly reinforced FCM, the geometry and tense state of which are fully determined by the microstructure of the fundamental cell. For the analytical calculation of residual stresses, an experimentally installed thermo-elastic analogy is used, according to which residual stresses are considered proportional to the differences in temperature expansion of the matrix and reinforcement fibers and temperature differences at the cooling of the composite. According to the proposed method, the results of calculations for fiberglass with hexagonal lattice are presented, the optimal degree of reinforcement is established, at which the residual stresses are minimal for different curing temperatures.

**Keywords:** *the composite material, the strength, residual stress, periodic structures.*

## **Представление термонапряженного состояния пластины на основании трехмерной теории упругости**

© В.П. Ревенко<sup>1</sup>, В.Н. Бакулин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладных проблем механики и математики НАНУ, Львов, Украина

<sup>2</sup>Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия

E-mail: victor.rev.12@gmail.com, vbak@yandex.ru

**Аннотация.** Получено общее решение статической задачи термоупругости. Оно базируется на предложенном решении уравнений Ламе через три гармонические функции и известном термоупругом потенциале. Рассмотрена пластина с заданным температурным полем со свободными от силовых нагрузок торцовыми поверхностями,

симметрично нагруженная на боковой поверхности. Построено двумерное плоское термоупругое напряженно-деформированное состояние тонкой или толстой пластины без использования гипотез о ее плоском напряженном состоянии. Перемещения и напряжения в пластине выражены через две двумерные гармонические функции и частное решение, которое определяется заданной температурой на поверхностях пластины. Записаны краевые условия для определения этих функций.

**Ключевые слова:** термоупругая пластина, термочувствительный материал, напряженное состояние.

**Введение.** Пластины, к которым приложены силовые нагрузки и заданные температурные поля, широко используются в аэрокосмической и другой технике, поэтому решение уравнений теории упругости и исследование НДС для таких упругих тел — важная научная проблема [1, 2]. В работах [2, 3] сделан обзор литературы по представлению уравнений плоской теории термоупругости с использованием гипотез плоских напряжений для тонких пластин.

Цель работы — математическое сведение трехмерного термоупругого напряженного состояния пластин к нахождению двумерных гармонических функций, удовлетворяющих заданные краевые условия.

**Формулировка задачи и представление решения.** Рассмотрена толстая пластина толщиной  $h$ , срединная поверхность которой занимает область  $S$  с контуром  $L$  и находится в плоскости  $Oxy$  декартовой системы координат:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . На поверхностях пластины ( $z = h_j$ ,  $h_1 = h/2$ ,  $h_2 = -h/2$ ) отсутствуют нормальные и касательные нагрузки, а заданы только температуры  $T^- = T^+$ , где знаки «+», «-» описывают функции на верхней и нижней поверхностях. Записаны термоупругие напряжения

$$\sigma_k = 2G[\varepsilon_k + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha T], \quad \tau_{kj} = G\gamma_{kj}, k \neq j, \quad (1)$$

и уравнения стационарной термоупругости в перемещениях  $u_k$  [1]

$$(1-2\nu)\nabla^2 u_k + \frac{\partial e}{\partial x_k} = 2(1+\nu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1,3}, \quad (2)$$

$$\nabla^2 T = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad (3)$$

где  $e = \frac{1-2\nu}{E}\Theta + 3\alpha T$  — объемное расширение,  $\Theta = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ,  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения,  $T$  — известная температура.

Использованы результаты работы [4], и найдено новое общее представление решения уравнений (2):

$$u_x = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial P}{\partial z} - 4(1-\nu)\Phi, \quad (4)$$

где  $P = z(\Phi + \beta\Omega) + \Psi$ ;  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $Q$  — трехмерные гармонические функции перемещений,  $\Omega = \int_0^z T dz$ ,  $\beta = \frac{1+\nu}{2(1-\nu)}\alpha$ .

Из представлений (1)–(4) определены нормальные

$$\sigma_j = 2G \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2} - (-1)^j \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - 2\beta T \right], \quad j = \overline{1,2},$$

$$\sigma_3 = 2G \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} - 2(2-\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - 2\beta T \right], \quad (5)$$

и касательные

$$\tau_{12} = G \left[ 2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} \right],$$

$$\tau_{j3} = G \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ 2 \frac{\partial P}{\partial x_3} - 4(1-\nu)\Phi \right] - (-1)^j \frac{\partial^2 Q}{\partial x_{3-j} \partial x_3} \right], \quad j = \overline{1,2}, \quad (6)$$

напряжения, где  $G = E / 2(1 + \nu)$ . Найдено

$$e = -2(1-2\nu) \frac{\partial}{\partial z} \Phi + 2\beta T, \quad \Theta = -2E \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi + \frac{\alpha T}{1-\nu} \right). \quad (7)$$

Рассмотрены симметричные по  $z$  нормальные напряжения, когда  $\sigma_z \ll \sigma_1, \sigma_2$ . После интегрирования по толщине пластины и использования соотношений (5)–(7) выражены нормальные и сдвигающие усилия через двумерные функции, которые удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \tilde{P} = -4(1-\nu)\Phi^+, \quad \Delta \tilde{Q} = -2 \frac{\partial}{\partial z} Q^+, \quad \Delta(\Phi^+ + \beta\Omega^+) = 0, \quad (8)$$

где  $\tilde{P} = \int_{-h_1}^{h_1} P dz$ ,  $\tilde{Q} = \int_{-h_1}^{h_1} Q dz$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

**Представление термоупругого напряженного состояния через гармонические функции.** Найдены решения уравнений (8)

$$\tilde{P} = 2(1-\nu)h\left[y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \beta\omega_1\right] - (1+\nu)h\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q^+}{\partial z} = 4h\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}; \quad (9)$$

$$\tilde{Q} = -4hy\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (1+\nu)h\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \Phi^+ = -h\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \beta\frac{h}{2}\Delta\omega_1, \quad (10)$$

где  $\varphi$ ,  $\psi$  — гармонические функции;  $\omega_1$  — частное решение уравнения  $h\Delta\omega_1 = 2\Omega^+$ .

Использованы результаты статьи [5], соотношения (9), (10) и записано общее представление напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2E \left\{ y \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^2\partial x} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2\omega_1}{\partial y^2} \right\}; \\ \sigma_y &= 2E \left\{ y \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} \right\}; \\ \tau_{xy} &= -2E \left\{ y \frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2\omega_1}{\partial x\partial y} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Гармонические функции  $\varphi$ ,  $\psi$  определяются из краевых условий [5]:

$$\begin{aligned} \{\sin^2\alpha\sigma_y + \cos^2\alpha\sigma_x + \sin 2\alpha\tau_{xy}\} \Big|_L &= \sigma_n; \\ \left\{ \frac{\sin 2\varphi}{2}(\sigma_y - \sigma_x) + \cos 2\varphi\tau_{xy} \right\} \Big|_L &= \tau_n, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{где } \sigma_n = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_1} \sigma_n(x, y, z) dz \Big|_L, \quad \tau_n = \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h_1} \tau_n(x, y, z) dz \Big|_L.$$

Методы решения краевой задачи вида (11), (12) разработаны в работах [5–7].

**Выводы.** Двумерная теория термоупругих пластин построена на основании трехмерной теории упругости без использования гипотез о нулевых касательных и нормальных напряжениях  $\sigma_z$ . Установлено, что найденные напряжения и перемещения точно равны соответствующим усредненным напряжениям трехмерной теории термоупругости. Из полученных формул следуют представления напряжений плоской задачи теории упругости.

## Литература

1. Hetnarski R.B., Eslami M.R. *Thermal Stresses — Advanced Theory and Applications*. Switzerland AG, Springer, 2019, 568 p.
2. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. *Appl. Mech. Rev.*, 2003, vol. 56, no. 1, pp. 33–85.  
<https://doi.org/10.1115/1.1521166>
3. Tokovyy Y. Plane Thermoelasticity of Inhomogeneous Solids. *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Springer, 2019.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6\\_361-1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_361-1)
4. Revenko V.P. Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity. *Int. Appl. Mech.*, 2009, vol. 45, no. 7, pp. 730–741.  
<https://doi.org/10.1007/s10778-009-0225-4>
5. Revenko V.P., Revenko A.V. Determination of Plane Stress-Strain States of the Plates on the Basis of the Three-Dimensional Theory of Elasticity. *Materials Science*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 811–818.
6. Revenko V.P., Bakulin V.N. Method of Finite Bodies for Mathematical Modeling of the Stress-strain State of Cylindrical Orthotropic Shell with the Reinforced Rectangular Hole. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, art. no. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1392/1/012021
7. Revenko V.P., Bakulin V.N. Solving equations of 3D elasticity for orthotropic bodies. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2020, art. no. 012052. DOI: 10.1088/1757-899X/927/1/012052

## Representation of the thermo stress state of a plate based on the three-dimensional theory elasticity

© V.P. Revenko<sup>1</sup>, V.N. Bakulin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine

<sup>2</sup>Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
E-mail: victor.rev.12@gmail.com

**Abstract.** A symmetrically loaded thermosensitive plate is considered. This problem in a two-dimensional formulation has become widespread in the study of the effect of temperature loads on the stress state of thin plates. It is obtained from the equations of the three-dimensional problem, after using the hypotheses of the plane stress state for thin plates. The report proposes a general three-dimensional solution of the static problem of thermoelasticity in a form convenient for practical use. To construct this solution, a thermoelastic displacement potential is added to the previously found general solution of the Lamé equations. The thermoelastic stress state of a thick or thin plate is divided into two parts: first, takes into account the thermal effect caused by external heating and internal heat sources; the second is determined by the symmetrical power load. Thermoelastic stresses are expressed in terms of deformations and known

temperature. The zero boundary conditions on the outer surfaces of the plate are exactly satisfied. This made it possible to prove that the introduced two-dimensional functions will be harmonic. After integration over the plate thickness, the normal and shear forces are expressed in terms of three unknown two-dimensional functions. A closed system of partial differential equations for the introduced two-dimensional functions is constructed without using hypotheses about the plane stress state of the plate. We used only the physical fact that normal stresses perpendicular to the middle surface are insignificant in comparison with longitudinal and transverse stresses. The displacement and stresses in the plate are expressed in terms of two two-dimensional harmonic functions and a particular solution, which is determined by a given temperature on the surfaces of the plate. The posed three-dimensional problem is reduced to solving two-dimensional equations. The proposed method allows the solution of three-dimensional boundary value problems for thick heat-sensitive plates to be reduced to a two-dimensional case. The introduced harmonic functions are determined from the averaged boundary conditions on the lateral surface of a thick plate.

**Keywords:** *thermoelasticity plate, thermosensitive material, stress state.*

#### References

1. Hetnarski R.B., Eslami M.R. *Thermal Stresses — Advanced Theory and Applications*. Switzerland AG, Springer, 2019, 568 p.
2. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem. *Appl. Mech. Rev.*, 2003, vol. 56, no. 1, pp. 33–85.  
<https://doi.org/10.1115/1.1521166>
3. Tokovyy Y. Plane Thermoelasticity of Inhomogeneous Solids. *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Springer, 2019.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6\\_361-1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_361-1)
4. Revenko V.P. Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity. *Int. Appl. Mech.*, 2009, vol. 45, no. 7, pp. 730–741.  
<https://doi.org/10.1007/s10778-009-0225-4>
5. Revenko V.P. & Revenko A.V. Determination of Plane Stress-Strain States of the Plates on the Basis of the Three-Dimensional Theory of Elasticity. *Materials Science*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 811–818.
6. Revenko V.P., Bakulin V.N. Method of Finite Bodies for Mathematical Modeling of the Stress-strain State of Cylindrical Orthotropic Shell with the Reinforced Rectangular Hole. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, art. no. 012021.  
DOI: 10.1088/1742-6596/1392/1/012021
7. Revenko V.P., Bakulin V.N. Solving equations of 3D elasticity for orthotropic bodies. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2020, art. no. 012052.  
DOI: 10.1088/1757-899X/927/1/012052

## **СЕКЦИЯ 5. НАУЧНО - МЕТОДИЧЕСКИЕ И ИСТОРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ**

*Руководители:* д-р физ.-мат. наук, проф. С.А. Берестова,  
д-р техн. наук, проф. П.М. Шкапов,  
председатель научно-методического совета  
по теоретической механике при Минобрнауки РФ,  
д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Самсонов

### **Наглядные пособия для преподавания практической механики в конце XIX века как источник изучения исторического наследия МРУЗ — ИМТУ — МВТУ**

© Г.А. Базанчук, С.В. Кураков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: bga@bmstu.ru; kurakov@bmstu.ru

**Аннотация.** Доклад посвящен вопросам изучения использования исторических моделей механизмов в практике преподавания фундаментальных наук в МРУЗ — ИМТУ — МВТУ, созданию новых научных направлений в XX веке и, как следствие, развитию и расширению коллекции наглядных пособий. Авторы проследили влияние трудов профессора Н.Е. Жуковского, выдающегося ученого-механика мирового уровня, не только на курс «Теоретическая механика», но и на смежные области технических наук. Рассказано о новых поступлениях в музейный фонд МГТУ им. Н.Э. Баумана и показано новое современное применение исторических объектов при работе со школьниками, студентами младших и старших курсов, при преподавании технических дисциплин, а также при самостоятельном изучении вопросов истории науки, техники и машиноведения.

**Ключевые слова:** *практическая механика, теоретическая механика, наглядность, модели механизмов, преподавание машиноведения, история машин и механизмов, механика в музееведении.*

**Введение.** В настоящее время роль моделей механизмов изменилась, так как изменился и традиционный курс проектирования механизмов в современной высшей школе. С развитием современных технологий данные объекты начали терять свой дидактический смысл, оставаясь при этом примером и образцом наглядности при

преподавании технических дисциплин. Скажем так, сегодня модели используются не только для демонстрации преобразования движения на лекциях по курсам «Теоретическая механика» и «Теория механизмов и машин» или для проведения экспериментов в учебной лаборатории. Фактически сами эти модели стали предметом научного исследования как ценные памятники истории науки и техники.

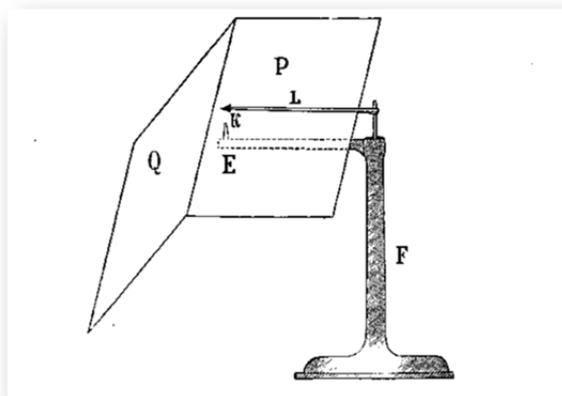
В связи с бурным ростом промышленности в середине XIX века возникает дефицит технически образованных специалистов, способных проектировать, изготавливать и эксплуатировать сложные механизмы и машины. Высшее техническое образование, которое обеспечивает теоретическую и практическую подготовку инженеров и техников, обязательно включало в учебные планы два предмета: теорию машин и теорию механизмов. Эти предметы были основными в политехнических школах и университетах. Их качественное преподавание было невозможно без наглядных пособий — моделей механизмов. Коллекции моделей машин и механизмов начинают создаваться в научных сообществах (рис. 1).



**Рис. 1.** Фото коллекции кинематических моделей для преподавания курса «Прикладная механика» в ИМТУ, начало XX века

**Новые поступления в фонды музея МГТУ им. Н.Э. Баумана.** Профессор ИМТУ Н.Е. Жуковский большое внимание уделял наглядности при написании и объяснении своих научных трудов. Так, в статье «Модель маятника Гесса» [1] Николай Егорович пишет о построении им этой модели для механического кабинета Московского университета с приведением размеров и эскиза (рис. 2).

Экземпляр научного устройства не сохранился, но вполне возможно создать историческую реплику, которая будет достаточно знаковой, символичной и вызовет интерес у студентов и преподавателей нашего университета. Подобная находка обнаружилась в недавнем поступлении в фонд музея сборника трудов Отделения физических наук Общества любителей естествознания.



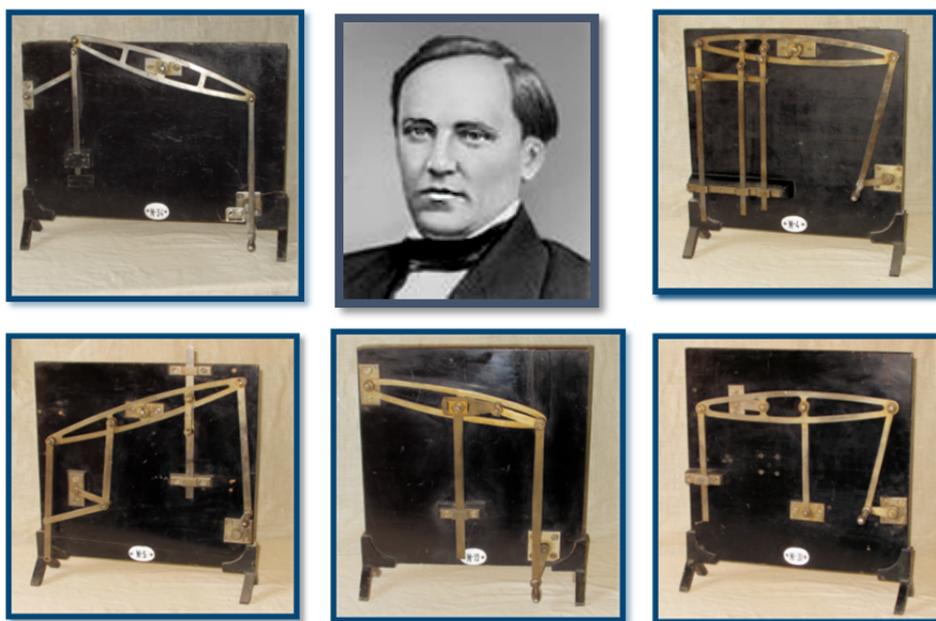
**Рис. 2.** Изображение модели маятника Гесса в статье Н.Е. Жуковского, изготовленной для механического кабинета МГУ

Прикладное значение трудов Н.Е. Жуковского оценили еще его современники. Так, в журнале «Нептун» (периодическое издание товарищества инженеров «Н.П. Зимин и К<sup>о</sup>») в 1915 г. была напечатана статья «Определение места утечки воды из водопроводных труб» по способу Н.Е. Жуковского, указанному им еще в 1898 г. К теоретическим выкладкам прилагалось техническое решение — использование прибора «Пульсограф» (скорее всего, не сохранился) системы инженера Н.В. Акимова, бывшего ученика Николая Егоровича. Как мы видим, подобные прижизненные издания полны исторической информации для атрибуции механизмов, позволяют определить начало применения тех или иных технологий, дают возможность объективно оценить вклад великого ученого в развитие технического прогресса.

Подобные выводы позволило сделать еще одно поступление в фонд музея — это некролог А.В. Летникову, написанный его коллегой Н.А. Шапошниковым, известным педагогом-математиком, в 1888 г. [2]. Формат некролога XIX века (помимо печальной констатации факта утраты) был подробным и детальным отчетом о деятельности ученого, его жизненном пути, достижениях, сделанных научных открытиях, проводимой административной работе и т. д. На секции будут вынесены на обсуждение не только научные интересы и исследова-

ния А.В. Летникова, но и его роль в создании «Русского метода подготовки инженеров». Авторы считают, что следует соблюдать историческую справедливость по отношению к нашему ученому и непременно упоминать имя А.В. Летникова как одного из основателей отечественной инженерной школы.

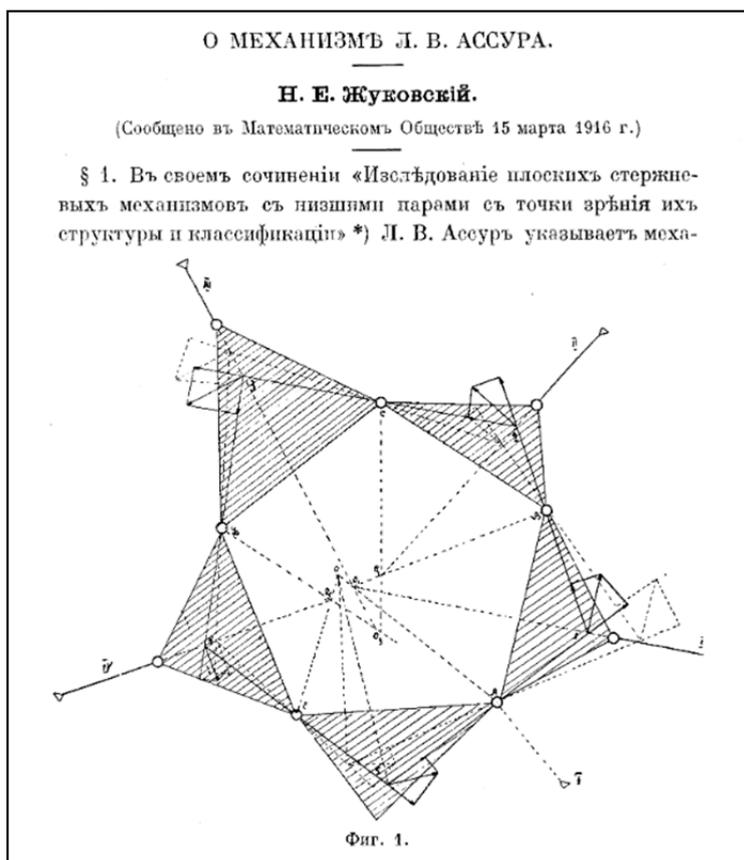
**Русская коллекция моделей механизмов второй половины XIX века.** Ее основателем является директор МРУЗ Александр Степанович Ершов. В России формирование высшего технического образования началось немного позже, чем в Европе, поэтому его развитие происходило под сильным влиянием европейского опыта. Под руководством А.С. Ершова в ремесленных мастерских приступили к изготовлению моделей кинематических механизмов, которые легли в основу уникальной коллекции, насчитывающей на сегодняшний день более 50 музейных экспонатов [3]. Особое внимание следует уделить «доскам» — стендам с плоско-рычажными механизмами, наглядно демонстрирующим работу механизмов Уатта, Нерлиха и др. (рис. 3).



**Рис. 3.** Примеры моделей плоско-рычажных механизмов, выполненные воспитанниками МРУЗ под руководством директора А.С. Ершова, 1860–1867 гг.

Секции конференции будет предложено обсудить современное применение данных моделей при объяснении и выполнении, например, домашнего задания по дисциплине «Теоретическая механика» путем математического моделирования (изменения размеров звеньев,

величины крутящего момента и пр.), что для исторических экспонатов будет крайне важным и существенно обогатит в методическом аспекте уникальную коллекцию.



**Рис. 4.** Схема плоского стержневого механизма Л.В. Ассура в статье-сообщении Н.Е. Жуковского, 1915 г.

Продолжая говорить о применении наглядных учебных пособий, вернемся к более поздней статье Н.Е. Жуковского (1916) «О механизме Л.В. Ассура», в которой Николай Егорович разбирает сочинение «Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации» еще одного своего ученика (рис. 4). Леонид Владимирович Ассур — создатель рациональной классификации плоских шарнирных механизмов любой сложности методом последовательного наложения кинематических цепей, получивших название «групп Ассура». К сожалению, недолгая жизнь этого ученого не позволила ему в полной мере раскрыть потенциал своих разработок; имя Л.В. Ассура и его исследования были основательно забыты вскоре после его смерти в 1920 г.

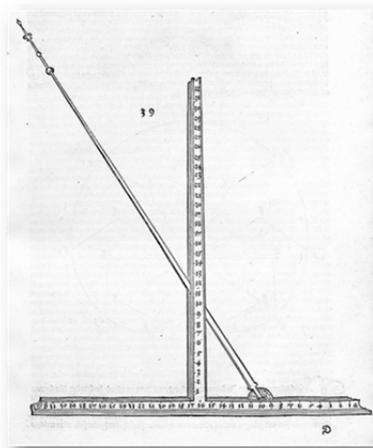
Ученые в своих работах упоминали классификацию Ассура, но не применяли ее для решения задач синтеза и анализа механизмов. Ситуация с идеями Ассура изменилась, когда к исследованиям подключился молодой ученый И.И. Артоболевский, который понял, какие возможности для построения общей теории механизмов открывает теория Л.В. Ассура. Именно И.И. Артоболевский (1905–1977), Н.Г. Бруевич (1896–1987) и В.В. Добровольский (1880–1956) развили и продолжили теорию структурного анализа механизмов, основы которой заложил ученик Н.Е. Жуковского.

**Зарубежная коллекция моделей механизмов конца XIX — начала XX века.** Связь с европейской наукой в МРУЗ — ИМТУ — МВТУ существовала всегда. Заграничные командировки русских инженеров на лучшие заводы, защита диссертаций в иностранных университетах, участие Училища в Международных выставках в Париже, Вене, Филадельфии, закупка лучшего учебного инвентаря и расходных реактивов и многое другое — все эти факты являются неотъемлемой частью научно-учебного процесса в истории нашего университета. Надо сказать, что в Европе понимали важность, полезность и необходимость применения наглядных пособий очень давно. Например, в трактате Альбрехта Дюрера «Руководство к измерению циркулем и линейкой» уже в 1525 г. приводится множество приспособлений и плоских механизмов «на пользу всем любящим искусство». Среди них конхоида, или раковина, Дюрера (рис. 5), для воспроизведения И.И. Артоболевским был создан плоский кулисно-рычажный механизм под номером 1216 в середине XX века [4].

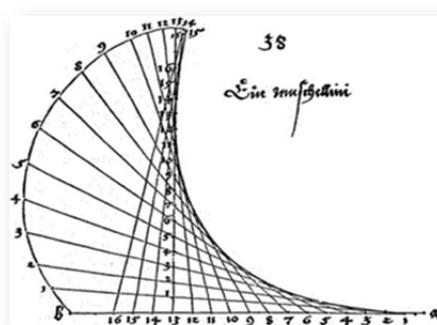
Возвращаясь к экспонатам музея МГТУ им. Н.Э. Баумана, следует отметить часть моделей Франца Рело, которые, возможно, являются единственными в мире, сохранившимися до наших дней в нашем музее. Профессор Ф. Рело, ученик выдающегося немецкого инженера Ф. Редтенбахера, создал крупнейшую коллекцию моделей механизмов для обучения практической механике [5]. Она состоит из двух частей. Первая — общеизвестна и присутствует во многих технических музеях Европы и США, а вторая часть коллекции, более поздняя, вышедшая в свет в самом начале XX века, — малоизвестна и малочисленна, так как после смерти Франца Рело в 1905 г. дела у его компаньона и фабриканта Густава Фойта расстроились, пришли в упадок, и немецкую фирму, занимавшуюся изготовлением моделей кинематических механизмов, пришлось закрыть.

Именно во второй части своей коллекции Рело уделил внимание кинематике точки и создал группу моделей — дисплеев, где отмеченная траектория на стекле позволяет изучать математическое описание движения материальных точек. В музее МГТУ им. Н.Э. Баумана имеется пять таких наглядных пособий (рис. 6). Стекла у трех из них утрачены и требуют восстановления, что будет

выполнено в ближайшем будущем, а ведущим специалистам профильной кафедры факультета «Фундаментальные науки», надеемся, будет интересно оценить методический потенциал подобных моделей при математическом моделировании и преподавании базовых курсов в нашем университете.

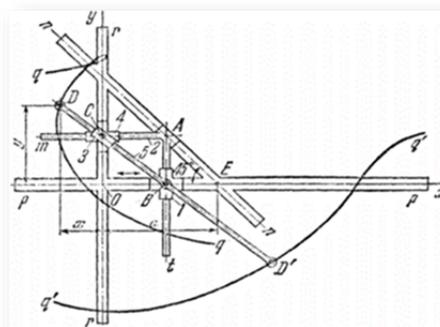


а



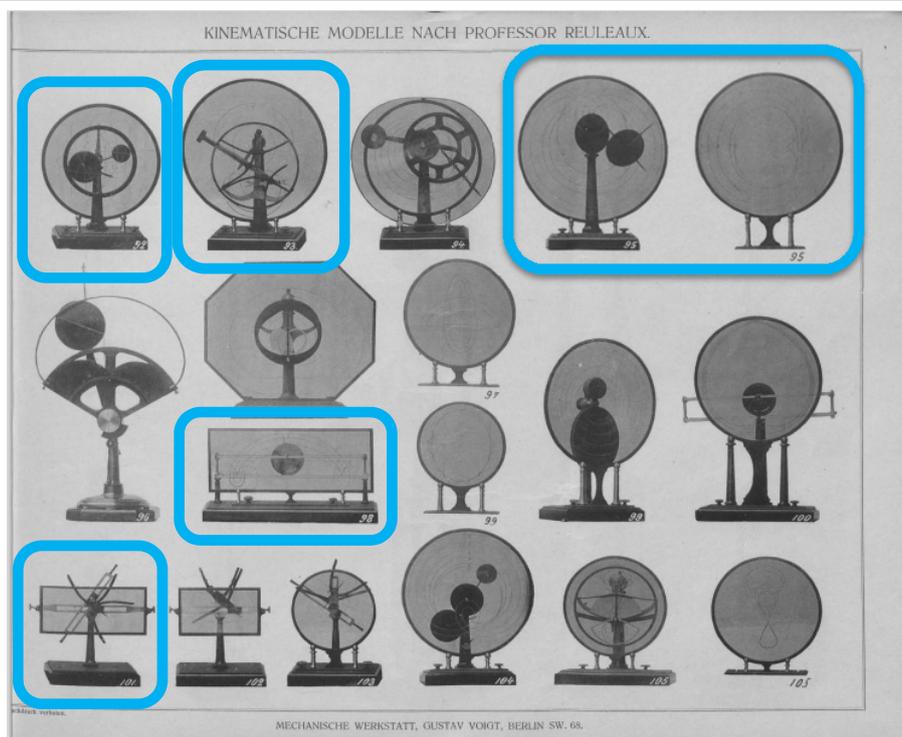
б

**Рис. 5.** Из трактата А. Дюрера пример плоского механизма (а) и конхоида Дюрера (б); кулисно-рычажный механизм № 1216 из сборника «Механизмы в современной технике», том 2, И.И. Артоболевского, воспроизводящий конхоиду Дюрера (в)



в

**Создание, перспективы и дальнейшее развитие базы данных кинематических моделей.** Для разработки необходимых протоколов и написания кода программ были привлечены практиканты Колледжа космического приборостроения при МГТУ им. Н.Э. Баумана, которые данную практическую работу выполняли впервые в ходе дипломной и преддипломной практик. Однако под руководством профессионалов: преподавателей, художника и музейных сотрудников — ребята справились с задачей успешно, создали реальный продукт, высоко оцененный конечным пользователем, и получили хороший практический опыт.



**Рис. 6.** Фрагмент каталога кинематических моделей Рело — Фойта (II часть), 1907 г. (цветом выделены модели, находящиеся в музее МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Учитывая собственный многолетний опыт, а также общемировые тенденции, можно выделить следующие методические направления использования музейных технологий в области популяризации научных знаний.

1. Создание виртуальных трехмерных моделей механизмов с использованием цифровых пакетов CAD/CAM/CAE, разработка спецификаций и маршрутных технологий, отработка 3D-визуализации (анимация, рендеринг и пр.) для наглядного представления естественных законов науки. Данное направление успешно реализуется с конца XX века и продолжает совершенствоваться сегодня [6].

2. Создание и выращивание методом прототипирования (или при помощи иных способов аддитивных технологий) трехмерных образцов моделей механизмов. У этого направления большое будущее и обширная сфера применения. Данный подход вытекает из предыдущего пункта в плане подготовки технической документации и использует ту же soft-среду.

3. Проектирование новых методов обучения (дистанционных, игровых, проблемных [7] и др.) на базе современных коммуникативных платформ — вебинары, совместные проекты с удаленным доступом, интерактивные лекции и т. п.

4. Создание виртуальных лабораторий по изучению технических дисциплин [8], когда проводится теоретическое и практическое обучение с учетом возможности гибкого изменения самой среды [9], что невозможно при классическом подходе.

5. Адаптация сложного учебно-научного материала для различных возрастных и образовательных групп общества — школьники, студенты, педагоги, пенсионеры и т. д. Большой интерес вызывает проект Департамента образования и науки г. Москвы «Университетские субботы», где специалисты разных направлений в доступной форме ведут лекции и мастер-классы. Их цель — популяризация в среде школьников современных научных и технических достижений в различных областях научной деятельности: от гуманитарных до естественно-научных и инженерных наук. Занятие в музее МГТУ им. Н.Э. Баумана «Кинематические механизмы — от простого к сложному» стало победителем московского конкурса «Лучшая университетская суббота — 2019».

**Заключение.** В последние годы отмечается значительное повышение интереса к коллекциям механизмов. Вначале этот интерес возник с исторической точки зрения к наиболее старым моделям механизмов как важным объектам изучения и сохранения памяти об истории техники и ее эволюции во времени. Некоторая часть этих моделей имеет большую историческую и художественную ценность и хранится в научных и технических музеях. Развитие Интернета вызвало появление новых форм для демонстрации коллекций редких технических устройств: веб-сайты и виртуальные музеи. Современное мультимедийное пространство позволяет проводить не только лекции и семинары по теории механизмов и машин, но и занятия по истории машиноведения, по техническому английскому языку, выполнять научные работы и реставрационные изыскания.

Как видно из изложенного, к музейной, научной и технической работам привлекаются обучающиеся различного уровня компетенции как в плане разработки программного обеспечения и создания веб-сайтов, так и в деле реставрации, идентификации и описания моделей коллекции. При поддержке университета возможно создание образовательной среды различного уровня теоретического знания и практического умения, называемых в целом «Русская школа подготовки инженеров». Студенты получают богатый опыт, работая с механизмами, изучая историю машиноведения и связанные с ней области научных знаний, а также теоретическую механику, фундаментальную инженерную дисциплину, сформировавшуюся под непосредственным руководством Н.Е. Жуковского [10]. Такова концепция развития музея крупнейшего и ведущего технического университета нашей страны.

## Литература

1. *Труды Отделения физических наук Общества любителей естествознания*. Том десятый. Выпуск первый (Известия Императорского общества любителей естествознания, антропологии и этнографии, т. 96, в. 1). 1906.
2. *Алексей Васильевич Летников* [Биограф. сведения и надгроб. речи]. Москва, типо-лит. Кушнерева, 1888, с. 12–13, 20.
3. Головин А.А., Тарабарин В.Б. *Модели механизмов русских ученых и инженеров в коллекции МГТУ им. Н. Э. Баумана*. Москва, Изд-во «Первый том», 2019, 300 с.
4. Энциклопедия по машиностроению XXL. *mash-xxl.info* [Электронный ресурс]. URL: <https://mash-xxl.info/page/014167171011010147111089056104083137172254161254/> (дата обращения 17.09.2020).
5. Voigt G. *Kinematic Models After Reuleaux*. Catalog. Berlin, 1907.
6. Kinematic Models for Design. Digital library. *Cornell University College of Engineering* [Электронный ресурс]. URL: <https://engineering.library.cornell.edu/kmoddl> (дата обращения 16.09.2020).
7. Tarabarin V., Tarabatina Z. The electronic a learning-methodical complex at the course the Theory of machines and mechanisms. *Proceeding of the China–Russian symposium on problems of development and use of the information technology in engineering education*. HPU, China, Harbin, on November, 3<sup>rd</sup>, 2007, p. 139.
8. Ceccarelli M., Carbone G. Mechanics in Mechatronics. *The International UBT-Conference Modern Enterprise: Management — Engineering — Computing*. Prishtinë, 2008.
9. Carbone G., Ceccarelli M. Experimental Tests on Feasible Operation of a Finger Mechanism in the LARM Hand. *International Journal Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2008, vol. 36, p. 1–13.
10. Шкапов П.М. О создании кафедры теоретической механики и одноименной научно-педагогической школы в Императорском Московском Техническом Училище (к 170-летию со дня рождения Николая Егоровича Жуковского). *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2016, № 12. URL: <http://technomag.neicon.ru/doc/852649.html>

## Предметно-ориентированная онтология в онлайн-курсе

© С.А. Берестова, М.Ю. Гудова

Уральский федеральный университет имени первого Президента России

Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

E-mail: [s.a.berestova@urfu.ru](mailto:s.a.berestova@urfu.ru), [m.j.gudova@urfu.ru](mailto:m.j.gudova@urfu.ru)

**Аннотация.** С развитием цифровизации образовательного процесса формируются новые правила в системе организации учебной деятельности. Университет, имея целый набор обучающих платформ, должен разработать онтологию электронного образования по установленным правилам унификации, с одной стороны, и, предусматривая возможность индивидуализации, с другой. Представление информации на коммуникационно-образовательных платформах требует четкой структуры. Разработчиками и держателями платформ

приветствуется использование встроенных интерактивных инструментов. В качестве основы для построения предметно-ориентированной онтологии использована реляционная модель данных. Онтологию, представленную в форме дерева, удобно использовать для создания модели курса, набора заданий, формирования данных о качестве этих заданий и курса в целом. Помимо этого, на базе такой онтологии организован информационный обмен между разделами курса, созданы пространство тегов и система кодификации для организации информационного обмена в электронной среде. В работе изложены принципы создания такой онтологии и принципы ее реализации на примере онлайн-курса «Инженерная механика». Эффективность и экологичность онлайн-курса обусловлены вариативностью заданий, возможностью выбора и реализации индивидуальной траектории освоения дисциплины.

**Ключевые слова:** онтология, алгоритмы, база индивидуальных заданий.

## **Subject-oriented ontology in an online course**

© S.A. Berestova, M.Yu. Gudova

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia  
E-mail: s.a.berestova@urfu.ru, m.j.gudova@urfu.ru

**Abstract.** The digitalization of the educational process dictates new rules in the system of organizing educational activities. The university has a variety of learning platforms. It is necessary to develop ontology for e-education. On the one hand, the ontology must be developed according to the established unification rules. Presentation of information on communication and educational platforms requires a clear structure. On the other hand, it is necessary to provide for the possibility of individualization. Developers and platform holders are encouraged to use interactive tools.

A relational data model is used as a basis for building a domain-oriented ontology. The ontology is presented in the form of a tree. The ontology is used to create a course model, a set of tasks, and generate data on the quality of these tasks and the course. In addition, information exchange between sections of the course is organized on this ontology. A tag space has been created. A system of cods is proposed for organizing information exchange in an electronic environment. The work outlines the principles of creating such ontology. The principles of this are also described on the example of the online course “Engineering Mechanics”. The effectiveness and environmental friendliness of the online course are due to the variability of tasks, the ability to choose and implement an individual trajectory for mastering the discipline.

**Keywords:** ontology, algorithms, database of individual tasks.

## Система автоматизированного преподавания ASSISTENT

© В.М. Хвисевич, А.И. Веремейчик, А.А. Клопоцкий, М.В. Мазырка

Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь  
E-mail: vai\_mrtm@bstu.by

**Аннотация.** Разработана система автоматизированного преподавания ASSISTENT, позволяющая повысить качество преподавания общеинженерных дисциплин и активизировать самостоятельную работу студентов.

**Ключевые слова:** автоматизированная система, комплекс, преподаватель, студент, работа, дисциплина.

В современном мире автоматизированные системы различного назначения проникли практически во все сферы человеческой жизнедеятельности. Они широко используются на производстве, в управлении, медицине и т. д. Актуальным является разработка и внедрение такого рода программных систем и в высшей школе. По сложившейся традиции при изучении общеинженерных дисциплин в вузах студентам выдаются задания на расчетно-графические (расчетно-проектировочные или контрольные) работы. После выполнения работ студенты представляют их преподавателю для проверки и защищают их, отвечая на теоретические вопросы и решая тестовые задачи. Преподаватель, имея непосредственный контакт с каждым студентом, может не только воздействовать на процесс его работы, но и способствовать выработке у него навыков логического мышления. Задания на выполнение работ, как правило, формируются преподавателями с учетом существующей учебной литературы и разработанных методических пособий. При таком подходе преподавателю требуются большие затраты времени на формирование вариантов заданий, их выдачу и проверку выполненных работ, что не позволяет в достаточной мере осуществить индивидуализацию работы со студентами. Для решения этих проблем в Брестском государственном техническом университете на кафедре прикладной механики были разработаны три специализированных пакета компьютерных программ по теоретической и прикладной механике для студентов механических специальностей [1] и на их базе создана система автоматизированного преподавания (САП) ASSISTENT, предназначенная для увеличения разнообразия выдаваемых вариантов заданий, автоматизации работы преподавателя со студентами. САП ASSISTENT представляет собой модульную систему, центральное место в которой занимает одноименный модуль ASSISTENT. Система является многопользователь-

ской и состоит из основного (управляющего) и ряда расчетных модулей. В комплексе предусмотрены четыре роли: администратор, секретарь, преподаватель и студент. Каждый пользователь входит в систему под своим паролем.

Администратор ведет справочники видов работ по факультетам, специальностям и формам обучения, отвечает за создание и обновление справочников материалов, которые используются при выполнении работ, ведет журналы групп студентов, т. е. работает с рядом основных блоков программы. Блок «Модули генерации» предназначен для визуализации представленных задач, по которым может проводиться генерация заданий с разбивкой по предметным областям. Блок «Параметры» предназначен для формирования титульного листа работы. В блоке «Группы студентов» сосредоточены сервисные команды по управлению группами студентов, в блоке «Задания» — сервисные функции по управлению заданиями к работам. Администратор занимается также формированием баз данных преподавателей и секретарей, работающих с системой. Функции секретаря, которые обычно выполняет лаборант кафедры, следующие: формирование и добавление групп факультета, анализ процесса и этапов обучения в группах, ведение списков студентов в группах. Пользователь, входящий в систему как «Преподаватель», определяет в соответствии с учебными программами дисциплин для каждой из групп студентов перечень работ, их структуру и объем, формирует задания на эти работы, объединяет их в соответствующие блоки. Преподаватель может добавлять или удалять задачи, входящие в расчетную работу, а также указывать диапазон значений нагрузок и их количество, параметры, описывающие геометрию расчетного элемента, его материал. После формирования структуры и объемов работ преподаватель осуществляет генерацию заданий с построением расчетных схем и проводит электронную рассылку их студентам. Процесс выполнения студентом работы постоянно доступен преподавателю, он может контролировать ход выполнения работы и получаемые промежуточные и окончательные результаты, при необходимости может вмешиваться в работу студента, указывая на его ошибки. Студент, войдя в систему, получает на рабочий стол задания, которые нужно выполнить. На основе этих заданий он может сформировать для себя технические задания к работам и приступить к выполнению поэтапного решения задач. Войдя в основной модуль, студент имеет возможность распечатать для себя техническое задание к работе, а также выполнить проверочный расчет для каждой схемы. После окончания каждого этапа при правильном его выполнении в базе ставится отметка о его выполнении, что позволяет преподавателю осуществлять активный контроль за ходом выполнения работ студентом.

В текущей версии системы 3.1 реализована автоматизированная работа по дисциплинам: теоретическая механика, сопротивление материалов и электротехника. По сопротивлению материалов возможно проведение расчетов как статически определимых, так и статически неопределимых систем.

Применение такого программного комплекса позволяет повысить качество изучения студентами дисциплин и успеваемость студентов, а также существенно облегчить работу преподавателя и сократить затраты его времени на проверку работ. Анализ применения комплекса ASSISTENT при изучении дисциплины «Сопротивление материалов» показал эффективность его использования в процессе изучения общинженерных дисциплин как для преподавателей, так и для студентов. В дальнейшем планируется реализовать в этой системе возможность работы и по другим дисциплинам, а также автоматизировать часть работы, связанную с защитой расчетно-графических работ.

### Литература

1. Хвисевич В.М., Веремейчик А.И., Мазырка М.В. Некоторые аспекты автоматизации учебного процесса теоретической механики и механики материалов. *Теоретическая и прикладная механика*, 2006, вып. 20, с. 62–63.

## Automated teaching system “ASSISTANT”

©V.M. Hvisevich, A.I. Veremeychik, A.A. Klopockiy, M.V. Mazyrka

Brest State Technical University, Brest, Belarus

E-mail: vai\_mrtm@bstu.by

**Abstract.** An automated teaching system “ASSISTANT” has been developed, which allows improving the quality of teaching general engineering disciplines and intensifying the independent work of students.

**Keywords:** *automated system, complex, lecturer, student, work, discipline.*

In the modern world, automated systems for various purposes have penetrated into almost all spheres of human life. They are widely used in manufacturing, management, medicine, etc. The development and implementation of such software systems in higher education is relevant. According to the established tradition, when studying general engineering disciplines at universities, students are given tasks for calculation-graphic (calculation-design or control) work. After completing the work, students submit them to the lecturer for testing and protect them by answering theoretical questions and solving test problems. A lecturer, having direct contact with each student, can not only influence the process of his work, but also contribute to his development of logical thinking skills. Tasks for the

performance of work, as a rule, are formed by lecturers taking into account existing educational literature and developed methodological manuals. Such an approach requires a lot of time for the lecturer to form task options, issue them and check the work performed, which does not allow enough individualization of work with students. To solve these problems, the Brest State Technical University, the Department of Applied Mechanics developed three specialized packages of computer programs in theoretical and applied mechanics for students of mechanical specialties [1] and on their basis an automated teaching system (ATS) "ASSISTANT" was created, designed to increase the variety of tasks issued, automation of the lecturer's work with students. ATS "ASSISTANT" is a modular system, the central place in which is the module of the same name "ASSISTANT". The system is multi-user and consists of the main (control) and a number of calculation modules. The complex has four roles: administrator, secretary, lecturer and student. Each user logs in under his/her password.

The administrator maintains directories of types of works in faculties, specialties and forms of training, is responsible for creating and updating directories of materials used in the performance of works, keeps journals of groups of students, i.e. works with a number of main blocks of the program. "Generation Modules" unit is designed to visualize presented tasks, according to which tasks can be generated with breakdown by subject areas. "Parameters" unit is used to form the cover sheet of the work. In "Student groups" block, service teams for managing student groups are concentrated, in block "Tasks", service functions for managing tasks for work are concentrated. The Administrator is also developing databases of lecturers and secretaries working with the system. The functions of the secretary, which are usually performed by the laboratory assistant of the department, are as follows: formation and addition of faculty groups, analysis of the process and stages of study in groups, maintenance of student lists in groups. The user, who enters the system under the role "Lecturer", determines the list of works, their structure and scope in accordance with the curricula of disciplines for each of the groups of students, generates tasks for these works, combines them into appropriate blocks. The instructor can add or remove tasks included in the calculation work, as well as specify the range of load values and their number, parameters describing the geometry of the calculation element, its material. After forming the structure and volumes of work, the lecturer generates tasks with the construction of calculation schemes and conducts an electronic distribution of them to students. The process of the student performing the work is constantly available to the lecturer, he can monitor the progress of the work and the obtained intermediate and final results, if necessary, and he can interfere with the student's work, indicating his mistakes. The student, entering the system, receives tasks on the desktop that need to be

completed. Based on these tasks, he can form technical tasks for himself and can begin to perform step-by-step task solving. Entering the main module, the student has the opportunity to print for himself a technical task for work, as well as perform a check calculation for each scheme. After the completion of each stage, if it is correctly performed, the database puts a mark on its implementation, which allows the lecturer to actively monitor the progress of the student's work.

In the current version of the 3.1 system, automated work is implemented in the disciplines: theoretical mechanics, material resistance and electrical engineering. According to the resistance of materials, it is possible to conduct calculations of both statically determinable and statically indeterminate systems.

The use of such a program complex allows to improve the quality of students' study of disciplines and student's performance, as well as significantly facilitate the work of the lecturer and reduce his time to check work. The analysis of the application of the "ASSISTANT" complex in the study of the discipline "Resistance of Materials" showed the effectiveness of its use in the process of studying general engineering disciplines for both lecturers and students. In the future, it is planned to realize in this system the possibility of work in other disciplines, as well as automate part of the work related to the protection of calculation and graphic works.

## References

1. Hwisevich V.M., Veremejchik A.I., Mazyrka M.V. Nekotorye aspekty avtomatizatsii uchebnogo protsessa teoreticheskoy mekhaniki i mekhaniki materialov. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, 2006, vyp. 20, pp. 62–63.

## Пример решения прямой задачи динамики точки в теории управления полета беспилотных летательных аппаратов

© Д.В. Гнилицкий, А.Е. Плотников, А.Ю. Карпачев\*

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: a-karpachev@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрена постановка темы научных исследований для студентов второго курса.

**Ключевые слова:** динамика, квадрокоптер, грузоподъемность.

**Введение.** Важную роль в техническом развитии беспилотных летательных аппаратов — БПЛА (дронов) играют успехи в теоретическом моделировании управления полетами этих робототехниче-

ских систем. Многофункциональность, которая в настоящее время реализуется с использованием дронов (доставка грузов, разведка в труднодоступных местах, поиски пропавших людей, аэросъемка при пожаротушении и многое другое), обуславливает актуальность разработок, направленных на их совершенствование.

В связи с этим задача работы заключалась в теоретическом и экспериментальном изучении грузоподъемности квадрокоптера при его вертикальном взлете и зависании на заданной высоте с целью определения необходимого коэффициента запаса подъемной силы, необходимой для транспортировки груза квадрокоптером.

**Постановка задачи и ее решение.** Обычно в расчетах динамики полета беспилотников используется модель абсолютно твердого тела. В рассматриваемом случае достаточно моделировать квадрокоптер материальной точкой массой  $M$  и ассоциировать ее движение с движением его центра масс.

Требуется изучить вертикальное движение точки из состояния покоя до необходимой высоты  $h^*$  за заданное время  $t^*$  и определить, как изменится эта высота с увеличением массы.

Вертикальное движение точки можно описать дифференциальным уравнением

$$M\ddot{y} = F - Mg, \quad (1)$$

где  $F$  — подъемная сила квадрокоптера;  $y$  — вертикальная координата положения центра масс;  $g$  — ускорение свободного падения (рис. 1).

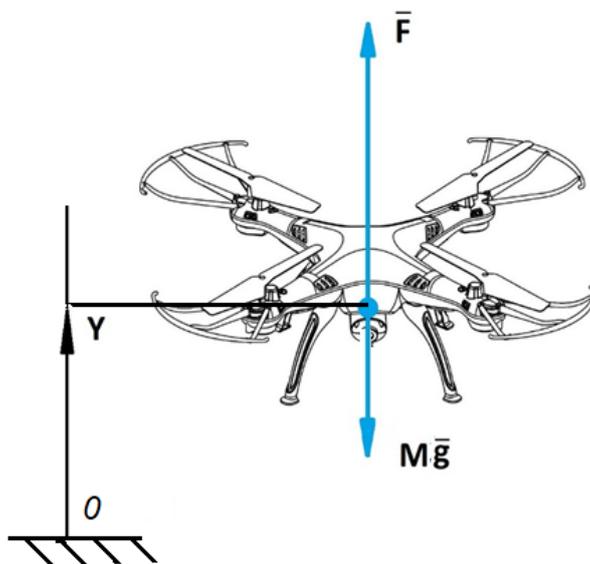


Рис. 1. Силы, действующие на квадрокоптер при его вертикальном взлете

Приведенное уравнение позволяет решить вопрос об определении функции изменения силы  $F = F(t)$  ( $t$  — время) при взлете на заданную высоту и зависании на ней.

После подстановки функции [1]

$$y = 0,5h^* \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{t^*}t\right) \right], \quad (2)$$

удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} t = 0 : y = 0, \quad \dot{y} = 0; \\ t = t^* : y = h^*, \quad \dot{y} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

в уравнение (1), получим

$$F(t) = M \left[ 0,5h^* \left(\frac{\pi}{t^*}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{t^*}t\right) + g \right]. \quad (4)$$

Задавая требуемую высоту  $h^*$  и время взлета  $t^*$  до нее, формула (4) позволяет определить закон изменения необходимой подъемной силы.

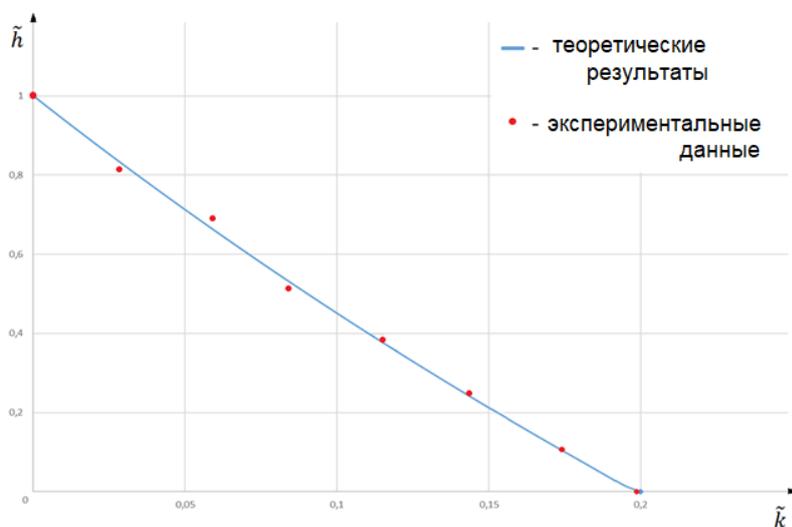
Если к массе  $M$  добавить  $m$  — массу поднимаемого груза, то, заменив в (1)  $M$  на  $M(1 + \tilde{k})$ , где  $\tilde{k} = \frac{m}{M}$ , и используя формулу (4), можно получить зависимость высоты подъема от  $\tilde{k}$ :

$$h = \frac{2h^* - g\tilde{k}t^{*2}}{2(1 + \tilde{k})}. \quad (5)$$

Фактически представленная зависимость характеризует снижение грузоподъемности квадрокоптера с увеличением массы груза.

**Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными.** Для экспериментальной проверки достоверности полученной формулы (5) использован квадрокоптер PILOTAGE Falcon X5W, способный осуществлять взлет и зависание на высоте  $h^* = 1,2$  м за время  $t^* = 1,1$  с, при массе  $M = 0,111$  кг. На рис. 2 приведены данные проведенных опытов и результаты теоретических расчетов. Их сравнение обнаруживает удовлетворительное совпадение.

Решение рассмотренных задач необходимо при формировании рациональных режимов полетов БПЛА.



**Рис. 2.** Теоретические и экспериментальные данные грузоподъемности квадрокоптера ( $\tilde{h} = h / h^*$ )

**Выводы.** 1. Приведена постановка прямой задачи вертикального движения материальной точки в одномерном поле тяжести до заданной высоты за требуемое время.

2. На основе предложенного решения определено влияние массы точки на высоту ее подъема под действием изменяющейся по заданному закону силы на выбранном интервале времени.

3. Результаты расчетов удовлетворительно совпадают с данными опытов, проведенными с использованием модели квадрокоптера, что свидетельствует о правомерности принятых допущений.

4. Поставленная задача допускает уточнение силовых условий движения точки, в частности, учет влияния сопротивления среды, в которой происходит движение.

5. Определение запаса грузоподъемности позволяет при эксплуатации квадрокоптера на практике определить диапазон варьирования транспортируемого груза.

### Литература

1. Аникин М.А., Бычкова Е.С., Гаркуша А.В., Парфенов А.А., Карпачев А.Ю. Экспериментальное определение динамических воздействий для пилотирования квадрокоптера. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 2 (98), с. 10–12. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-2-1960
2. Карпачев А.Ю. Постановка и проведение студенческих научных исследований на примере движения квадрокоптера. *XLIV Академические чтения по космонавтике*. Москва, 2020, с. 35–37.

## **An example of solution of the direct problem of dynamics of a point in the theory of flight control of unmanned aircraft**

© D.V. Gnilitskiy, A.E. Plotnikov, A.Yu. Karpachev\*

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail: a-karpachev@mail.ru

**Abstract.** The formulation of the research topic for second year students is considered.

**Keywords:** *dynamics, quadcopter, carrying capacity.*

### **References**

1. Anikin M.A., Bychkova E.S., Garkusha A.V., Parfenov A.A., Karpachev A.Yu. Experimental determination of dynamic effects for piloting a quadrocopter. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, iss. 2 (98), pp. 10–12. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-2-1960
2. Karpachev A.Yu. Setting up and conducting student research on the example of the movement of a quadrocopter. *XLIV Academic readings on astronautics*. Moscow, 2020, pp. 35–37.

## **Опыт внедрение цифровых технологий в изучение курса «Теоретическая механика»**

© С.Л. Косачев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: s\_kosachev@bmstu.ru

**Аннотация.** Представлены некоторые результаты работы, проводимой на кафедре теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана по созданию и внедрению в учебный процесс электронного курса по теоретической механике. Курс включает в себя лекционный материал, практические занятия и тестирование. Новая методика преподавания позволяет реализовать цифровое аудиторное обучение студентов, способствующее повышению качества образовательного процесса и эффективности подготовки специалистов.

**Ключевые слова:** *информационные технологии в образовании, теоретическая механика, тестирование, компьютерная анимация, онлайн-курсы.*

Теоретическая механика как базовая дисциплина инженерного образования имеет большое значение для современного машиностроения. Развитие информационных технологий привело к появлению на

кафедре теоретической механики МГТУ им. Н.Э. Баумана нескольких направлений, связанных с использованием вычислительной техники в учебном процессе. К ним относятся:

- создание автоматизированной лаборатории по курсам теоретической механики и теории колебаний [1];
- создание анимационной виртуальной коллекции механизмов, которые встречаются при изучении курса теоретической механики на практических занятиях, в вариантах курсовых работ и домашних заданиях [2];
- разработка комплекса компьютерного тестирования студентов по различным разделам курса теоретической механики [3, 4].

В настоящее время, в связи с проведением в МГТУ им. Н.Э. Баумана эксперимента по внедрению в учебный процесс смешанного цифрового обучения, на кафедре разрабатывается электронный курс по теоретической механике. Он включает в себя лекционный материал, практические занятия и тестирование. Курс охватывает классические разделы теоретической механики, предусмотренные основной образовательной программой подготовки бакалавров и специалистов. На сегодняшний день разработаны разделы «Кинематика», «Статика» и «Динамика», они размещены на платформе «Открытый МГТУ».

В соответствии с идеологией смешанного обучения электронный курс позволяет проводить аудиторные занятия в цифровом режиме с использованием проектора или интерактивной доски, а также дает возможность студентам вести самостоятельную работу при помощи любого мобильного устройства. Благодаря открытому доступу через Интернет к материалам курса студенты могут дистанционно и в удобное для себя время повторять материал, пройденный на лекциях и семинарах, а также самостоятельно изучать материал пропущенных лекций и семинарских занятий. Кроме того, у студентов появляется возможность подготовиться к занятию, предварительно изучив новый материал соответствующей электронной видео-лекции.

Изучение теоретической механики студенты начинают на первом курсе, где они впервые сталкиваются с кинематическими схемами механизмов, с которыми они будут иметь дело и в дальнейшем, как при изучении последующих разделов механики, так и в других технических дисциплинах. На первых порах у студентов возникают существенные затруднения в восприятии данных схем. Широкое использование анимации и виртуальных моделей [2] в разработанном курсе позволяет студенту увидеть за плоской схематической моделью реально движущийся механизм.

Цифровая методика преподавания курса «Теоретическая механика» учитывает модульно-рейтинговую систему оценки знаний студентов. Раздел «Кинематика» включает в себя три модуля, раздел

«Статика» один модуль и раздел «Динамика» три модуля. Для получения зачета по каждому модулю студент должен выполнить домашнее задание (ДЗ) и написать рубежный контроль (РК). Если ДЗ студент выполняет традиционным способом, то сдача РК происходит посредством компьютерного тестирования.

Формирование тестов базируется на построении компьютерного аналога обычной контрольной работы, которая, как известно, является эффективным элементом обучения и контроля знаний студентов. Тесты формируются из нескольких блоков вопросов, каждый из которых содержит несколько десятков вариантов. Из каждого блока студенту случайным образом выбирается один вопрос. Всего таких блоков от 10 до 15, вопросы охватывают как теоретическую часть курса, так и решение задач.

Тестовые вопросы условно можно разделить на три группы: знания, умения и решение задач. Первая группа включает в себя достаточно простые вопросы, которые проверяют знание студентами основных понятий, определений и терминологии. Следующая группа вопросов предполагает умение студентам вычислить те или иные физические величины, при этом ответы к задачам студент формирует сам, а не выбирает из нескольких предложенных программ. В последнюю группу вопросов включены полноценные задачи. При оценке ответов каждый вопрос в зависимости от сложности имеет свой весовой коэффициент от 1 за вопросы первой группы до 4 за задачу. В зависимости от процента выполненных заданий (с учетом весовых коэффициентов) по результатам тестирования студенту выставляется оценка.

Опыт, полученный по результатам тестирования, показал следующее:

- компьютерное тестирование ускоряет и облегчает контроль знаний студентов;
- компьютерное тестирование облегчает выполнение аудиторных контрольных работ и является объективной формой оценки знаний;
- компьютерное тестирование позволяет соблюдать единство требований ко всем студентам, во всех группах и на всех факультетах.

Работа по созданию и использованию электронного курса сочетает в себе следование классическим традициям инженерного образования и современных информационных технологий, что способствует повышению наглядности, информативности и доступности изучаемого материала.

## Литература

1. Дубинин В.В., Витушкин В.В., Дубровина Г.И. Автоматизация эксперимента в лабораторном комплексе по механике. *Сб. научно-методических статей «Теоретическая механика»*. Москва, Изд-во Московского университета, 2009, вып. 27, с. 117–136.
2. Дубинин В.В., Пашков А.В. Опыт создания и использования виртуальных моделей механизмов в курсе теоретической механики. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2013, вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/1132.html>
3. Бондаренко Н.И., Обносков К.Б., Паншина А.В. О методике создания и практике использования базы данных для компьютерного тестирования по разделу «Плоская статика» *Естественные и технические науки*, 2016, № 12 (102), с. 244–247.
4. Бондаренко Н.И., Обносков К.Б., Паншина А.В. Компьютерное тестирование в курсе теоретической механики. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 12 (36). URL: <http://engjournal.ru/catalog/pedagogika/hidden/1340.html>

## Introduction of digital technology in the course of the Theoretical Mechanics

© S.L. Kosachev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: s\_kosachev@bmstu.ru

**Abstract.** Some results of the work which is carried out at department of theoretical mechanics of MSTU of N.E. Bauman on creation and introduction to educational process of an electronic course on theoretical mechanics are presented. The course includes lecture material, a practical training and testing. The new technique of teaching allows to realize the digital classroom training of students promoting improvement of quality of educational process and efficiency of training of specialists.

**Keywords:** *information technologies in education, theoretical mechanics, testing, computer animation, online courses.*

## Образовательные кластеры прикладных учебных дисциплин

© А.В. Купавцев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: AVKUP@bk.ru

**Аннотация.** Увеличение времени на самостоятельную работу студентов за счет сокращения аудиторных занятий не привело к повышению качества обучения и снижению отсева студентов. Темати-

ческие кластеры аудиторного и удаленного электронного интенсивно-деятельностного обучения нацелены на формирование понятийного мышления студентов посредством генерализации фундаментальных естественно-научных обобщений и теоретических выводов, освоение методов и способов предметно-практической деятельности в отрасли. Знакомясь в процессе выполнения кластера с первичными (пропедевтическими) предметно-практическими видами отраслевой деятельности, учащийся затем осуществляет поиск решения проблемы персональной учебной задачи, строит его целостный контур, устанавливает содержание и последовательность своих действий, выполняет самопроверку отдельных этапов и всей деятельности в целом в режиме субъектной деятельности. Благодаря on-line помощи и контролю преподавателя познавательная деятельность учащегося превращается в *самообучение*, современный *принципиально новый вид обучения* в высшей профессиональной школе.

**Ключевые слова:** учебные кластеры, субъектная деятельность как самообучение при контроле и помощи преподавателя.

Кластеры относятся к активным технологиям обучения, при котором студент по определенной программе и при направляющей роли преподавателя усваивает учебный материал в соответствии со своими способностями и личностной позицией в учебе. Это новая современная форма самостоятельной работы студентов, пригодная для аудиторного и удаленного электронного обучения и выполнения домашних заданий. Кластер относится к тематическому заданию, нацеленному на формирование понятийного мышления и освоение предметно-практической и теоретической деятельности в производственной отрасли. Например, раскрытие непрерывного и дискретного волновых процессов, связи динамики и энергетического метода в механике, единства волновых и корпускулярных свойств материи и т. п. Кластерное обучение основано на *принципе деятельности*, согласно которому знания и умения рождаются и функционируют только в деятельности [1, с. 346]. Деятельность обучающегося в кластере превращается в средство освоения и добычи знаний.

Кластеры основаны на современном постнеклассическом понимании образовательного процесса, заключающегося в отказе от формально-номинального, «поставленного на одну доску с неодушевленными объектами» учащегося как субъекта обучения [2]. Всякую учебную задачу учащийся воспринимает как проблему, способ решения которой он должен обосновать, построить и усвоить в качестве образца отраслевой деятельности [3]. В таком кластерном *субъектно-деятельностном* обучении учащийся превращается в субъекта, который «господствует» над обстоятельствами своего творческого поиска [4]. Субъектная

деятельность учения побуждает учащегося самого осуществлять поиск решений задачных проблем, находить критерии оценки обоснованности выдвигаемых гипотез, подтверждать правильность своих действий и полученных результатов. Дана классификация типов физико-технических проблем и принципиальных способов их решения, а также раскрыта технология становления субъектности обучающегося как перехода от внеличностной знаниевой информации к личностному учебно-познавательному самовыражению.

Кластерное обучение в корне меняет процесс общения преподавателя и студентов, превращая монолог в деловой диалог, в общую совместную деятельность по достижению образовательной цели. Благодаря on-line помощи преподавателя во время занятия учащийся, выполняя кластерное задание, сразу оттачивает понимание теории и осваивает предметно-практический опыт деятельности. Познавательная деятельность учащихся, выполняющих кластерное задание, поднимается до уровня самообразования, самостоятельного *самообучения* при контроле и помощи со стороны преподавателя [5].

Приоритетное отношение к самостоятельно выполняемой познавательной деятельности студентов является принципиальной позицией кластерного обучения. В ней предусматривается подготовка учащегося к такой деятельности, вооружение нужными знаниями и опытом деятельности, способами обоснования и самоконтроля своих действий. Сопровождаемое развитием способностей и природных задатков студентов кластерное обучение становится современным *принципиально новым видом обучения* в высшей профессиональной школе.

В познавательном процессе деятельность проявляется двояко: как внешние действия с предметами окружающего мира, которые можно считать *пропедевтическими*, предшествующими более глубинным видам деятельности, являющимся следствием диалектического отражения свойств предметного мира. Например, абстрактному квантованию механического момента импульса и энергии электрона в модели атома Бора предшествовало наглядное проявление волновых свойств электронов в атомах в виде стоячих электронных волн. Демонстрация и освоение студентами двух генетических типов деятельности являются важнейшим положением кластерной технологии обучения. Пример, принцип корпускулярно-волнового дуализма раскрывает свое сущностное единство волновых и корпускулярных свойств материи, если сначала показать в качестве пропедевтики и научить конкретно объяснять и предсказывать волновые свойства микрочастиц при дифракции, при преодолении потенциальных барьеров, а также корпускулярных явлений с высокочастотным электромагнитным излучением и т. п. В роли пропедевтической предметной деятельности могут выступить

также экспериментальные методы физики. Например, экспериментальное определение ширины такого отвлеченного понятия, как ширина запрещенной зоны в полупроводниках.

Помимо практической части кластерного задания в структуру учебного кластера входят ответы на контрольные вопросы [6]. Они повышают качество знаний и служат средством активизация познавательной деятельности и творчества студентов. Они побуждают обучающихся обратиться к конспекту лекций, рекомендованной литературе, вдуматься в содержание знаний, понять их происхождение. Нестандартные вопросы побуждают думать и рассуждать.

Выполнение кластера завершается самоподведением его итогов, которое проводится в градации, вытекающей из дифференциации отраслевых направлений науки в прикладные научные дисциплины: генерализация фундаментальных обобщений естествознания (в рамках темы кластера), теоретические основы рассматриваемого физического явления, методы предметно-практической деятельности в данной прикладной отрасли научной дисциплины, базовые знания.

Например, по теме «Дискретное высокочастотного электромагнитное излучение» генерализация фундаментальных обобщений по теме включает следующие положения: гипотеза Планка, квантование энергии, фотоны как частицы электромагнитного излучения, ИСО, фундаментальные законы сохранения в природе, релятивистский электрон.

Далее на основе этой системы утверждений строится система теоретических знаний, из которой вытекают методы и способы отраслевой деятельности и практики. Завершаются «Итоги» выписыванием конкретных (базовых) формул по теме.

Систематизируя приобретенные знания по теме кластера, студенты актуализируют область ФКМ в части ее методологических положений и утверждений, усваивают опирающиеся на них теоретические построения, а также предметно-практические методы и способы деятельности, восстанавливают в памяти базовые формулы по теме кластера. Они выделяют теоретические гипотезы и другие умозаключения, которые будучи облаченными в слова становятся осознаваемыми знаниями. Студенты охотно выполняют данное требование кластерного задания, но нуждаются в помощи и контроле [7].

Учебный кластер предусматривает поэтапность выполнения задания, поэтапное дозирование методической помощи студентам, а также запланированный поэтапный учет-контроль промежуточных и итоговых результатов. Для оперативного контроля преподаватель имеет поэтапный ответник результатов по вариантам.

## Литература

1. Давыдов В.В. *Виды обобщений*. Москва, 1972, 424 с.
2. Краевский В.В. Научные исследования в педагогике и современность. *Педагогика*, 2005, № 2, с. 13–20.
3. Купавцев А.В. Интенсивно-деятельностное обучение как основа компетентностного подхода к профессиональному образованию в техническом университете. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2012, № 2, с. 113–120.
4. Купавцев А.В. *Деятельностный аспект обучения физике в техническом вузе*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002, 128 с.
5. Купавцев А.В. Самостоятельная работа под руководством преподавателя как самообучение физике студентов технического университета. *Физическое образование в вузах*, 2010, т. 16, № 3, с. 40–53.
6. Купавцев А.В. Кластерное обучение. *Alma Mater*, 2018, № 12, с. 45–50.
7. Купавцев А.В. Кластерное обучение в техническом университете. *Физическое образование в вузах*, 2018, т. 24, № 4, с. 37–56.

## Educational clusters of applied academic disciplines

© A.V. Kupavtsev

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: AVKUP@bk.ru

**Abstract.** Thematic clusters of classroom and remote electronic intensive-active learning are aimed at forming the conceptual thinking of students through the generalization of fundamental natural-science generalizations and theoretical conclusions, mastering the methods and techniques of subject-practical activities in the industry. In the process of the cluster implementation, students get acquainted with primary (propaedeutical) subject-practical types of industry activities, then search for a solution to a personal learning problem, build its integral contour, set the content and sequence of their actions, perform self-test of individual stages and the whole activity in the mode of subjective activity. Thanks to the on-line help and control of the teacher, the cognitive activity of the pupil turns into self-study, a modern essentially new kind of education in the higher professional school.

**Keywords:** *Learning clusters, subjective activity as self-study with the control and assistance of a teacher.*

## References

1. Davidov V.F. *Appearances of generalizations*. Moscow, 1972, 424 p.
2. Kraevskiy V.V. The Scientific Research in Pedagogy and Modernity. *Pedagogy*, 2005, no. 2, pp. 13–20.
3. Kupavtsev A.V. Intensive-Activity Teaching as a Base of Competence Approach to professional Education in a Technical University. *VestnicMGTU. Seriya Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences*, 2012, no. 2, pp. 113–119.

4. Kupavtsev A.V. Activ aspect of education in physics in a technical university. Moscow, BMSTU Publ., 2002.
5. Kupavtsev A.V. Unassisted Work by Teacher Leadership is Self-learning on Physics of Students in Technical University. *Physics in Higher Education*, 2010, vol. 16, no. 3, pp. 40–53.
6. Kupavtsev A.V. The claster teaching. *Alma Mater (Vestnik vysshei shkoly)*, 2018, no. 122, pp. 45–50.
7. Kupavtsev A.V. The Physics Cluster Teaching at the Technical University. *Physics in Higher Education*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 37–56.

## Первый русский учебник по практической механике

© Д.А. Мкртычян

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

**Аннотация.** А.С. Ершов — один из основателей Московской научной школы теории механизмов и машин (ТММ). Его учебник «Основания кинематики или элементарное учение о движении вообще и механизме машин в особенности», написанный для Московского университета и ИМТУ, был первым русским учебником по ТММ. Деятельность Московского ремесленного учебного заведения (впоследствии Императорское Московское техническое училище) — одного из первых в России машиностроительных учебных заведений общего назначения — во многом связана с именем А.С. Ершова, который с 1845 г. начал здесь свою работу сначала преподавателем практической механики, а затем стал профессором, инспектором классов и, наконец, его директором. В результате его деятельности как профессора прикладной механики и директора РУЗ, он добился расширения теоретического обучения, увеличения курса практической механики, повышения квалификации преподавательского состава, подготовил реорганизацию ИМТУ, добился равенства статуса преподавателей и статуса учеников с Санкт-Петербургским технологическим институтом. А.С. Ершовым было положено начало коллекции механизмов кафедры ТММ в ИМТУ.

**Ключевые слова:** инженерное образование, учебный процесс, наука, практическая механика, Императорское Московское техническое училище, А.С. Ершов, машиностроение, промышленность.

Книга А.С. Ершова «Основания кинематики или элементарное учение о движении вообще и механизме машин в особенности» была первым русским систематическим учебником по практической механике. Работа была издана в 1854 г. [1] в типографии Московского университета для студентов Московского университета и МРУЗ.

Учебник А.С. Ершова можно поставить в один ряд с самыми новыми по тому времени руководствами по практической механике. По своей структуре он очень напоминает курс Ж.-В. Понселе (Poncelet) *Mechanique physique et experimentale* (1841), монографию Э. Бура *Cours mecanique et machins* (1862), *Traite de cinematique* (1849).

Сочинение А.С. Ершова содержит 292 страницы; из них 10 страниц посвящено предисловию, 50 страниц — кинематике, остальной объем курса занимает изложение вопроса преобразования и передачи движения с помощью разнообразных механизмов (теория механизмов и машин).

В предисловии А.С. Ершов приводит краткий исторический обзор, отдавая дань своим предшественникам: Амперу (Ampere), Понселе (Poncelet), Монжу (Monge), Виллису (Willis) и др. [2].

Классификация механизмов машин в учебнике Ершова основана на понятиях Монжа, т. е. на различии видов движений по форме и направлению, и представлениях Ампера о независимости геометрических и кинематических свойств механизма от сил. В классификации Виллиса Ершов видит недостаток в том, что один и тот же механизм встречается у него в различных разделах в зависимости от возникающих значений скоростей [3].

А.С. Ершов преимущественно пользуется геометрическими построениями, с помощью которых ему удалось упростить теорию относительного движения двух цилиндров (§27), шатуна и кривошипа (§27, §129), скольжения зубцов (§88) и т. д.

В разделе «Предварительные понятия» А.С. Ершов определяет предмет механики как изучение законов и причин движения тел, дает основные кинематические и некоторые динамические определения. Далее А.С. Ершов исследует вопрос о силе инерции. Он ссылается на письма Эйлера (Euler) *Lettres a une princesse d'Allemagne* (Paris, 1843), на работу Карно (Carnot) *Principes fondamentaux de l'equilibre et du mouvement*, в которых сила инерции есть не что иное, как «сопротивление, возникающее при перемене состояния тел». Лаплас (Laplace) и Д'Аламбер (D'Alembert) отвергали понятие о силе инерции в отличие от Остроградского, Понселе, Морена и др.

В первом отделе рассматриваются общие вопросы кинематики. В нем изложено движение точки (простое, составное) и движение твердого тела.

Во втором отделе излагаются взгляды Монжа и Ампера, а также дается общий план книги.

Глава 1. «Передача движения» (с. 54–179): непрерывное прямолинейное, прямолинейное качательное, круговое непрерывное, круговое качательное.

Глава 2. «Преобразование движения» (с. 180–256): прямолинейное непрерывное в круговое непрерывное и наоборот; круговое не-

прерывное в прямолинейное качательное и наоборот; прямолинейное качательное в круговое качательное и наоборот; круговое непрерывное в круговое качательное и наоборот.

Глава 3. «Движения дифференциальные и составные» (с. 257–266).

#### **Глава 1. Передача движения**

1. Непрерывное прямолинейное движение. Передача движения посредством гибких и жидких веществ (неподвижные блоки, подвижные блоки и полиспасты, привод для поднятия земли, передача прямолинейного движения посредством воды). Передача движения через непосредственное соприкосновение (клин).

2. Прямолинейное качательное движение. Передача через непосредственное соединение веревкою или стержнем (копер, паровой копер). Передача прямолинейного качательного движения посредством коромысла (сокращенный параллелограмм, параллелограмм Уатта, механизм Эвенса).

3. Круговое непрерывное движение. Бесконечные веревки, ремни, цепи. Передача между параллельными и непараллельными осями. Передаточное отношение. Шкив переменного диаметра. Шатуны или штанги. Зубчатые колеса (Эвольвентные и циклоидальные зубья. Зазоры в зацеплении. Внутреннее зацепление. Цевочное зацепление. Конические передачи. Передачи со скрещивающимися осями). Бесконечный винт (червячная передача). Коленчатый шарнир Гука и муфты (глухое соединение валов, подвижные соединения, сцепление посредством трения (фрикционные муфты)). Сложные механизмы, употребляемые для передачи кругового движения (бесконечный винт (червячная передача)).

4. Круговое качательное движение (рычажные и зубчато-рычажные механизмы: механизм для подрезания свай, станок для обтачивания дерева).

#### **Глава 2. Преобразование движения**

1. Преобразование вращения в прямолинейное непрерывное. Через посредство твердых и гибких тел (простой ворот, артиллерийский ворот). Через непосредственное соприкосновение (винт, гайка)

2. Преобразование вращения в возвратное прямолинейное. Через посредство твердых брусьев (шатун, кривошип, круглый эксцентрик, двойной эксцентрик Стефенсона, механизм Лагира). Через непосредственное соприкосновение (сердцеобразный эксцентрик, треугольный эксцентрик, двойной кулак, кулачный вал, фрикционный молот, шестерня и зубчатка).

3. Преобразование вращения в возвратно-вращательное движение. Передача движения посредством твердых брусьев (кривошипно-коромысловый, кривошипно-кулисный). Передача движения через непосредственное соприкосновение (кулачковые механизмы для подъема бабы молота, храповые механизмы).

Преобразование возвратно-вращательного движения в возвратно-прямолинейное (соединение коромысла со стержнем поршня).

### Глава 3. Движения дифференциальные и составные

В этой главе рассматриваются планетарные механизмы и, в частности, дифференциалы. Примеры, взятые из практики, хорошо иллюстрируют теоретические начала планетарных механизмов.

Таким образом, этот учебник носит ярко выраженный узкоприкладной характер, не претендуя на серьезное изложение теоретической механики в целом [4]. Ершов оценивал свою работу как азбуку «...машиноведения, без которой, впрочем, нельзя понимать ни состава, ни действия машин, а по изложению принадлежит к числу элементарных сочинений, основанных на начальной математике...» [5].

### Литература

1. Ершов А.С. *Основания кинематики, или Элементарное учение о движении вообще и механизме машин в особенности*. Москва, 1854.
2. Golovin A., Mkrtychyan D. Alexander Yershov (1818–1867). *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science*. Italy, Springer, 2005, p. 135.
3. Тюлина И.А., Чиненова В.Н. О лекционных курсах прикладной механики в Московском университете (до первой трети XX века). *Третий Международный семинар по истории машиноведения*. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, с. 21–33.
4. Чиненова В.Н. А.С. Ершов — представитель практической механики в Московском университете. *История и методология естественных наук*, 1978, вып. 20, с. 214–222.
5. Ершов А.С. О содержании и преподавании практической механики. *Журнал Министерства народного просвещения*, ч. 45, отд. II, 1845, с. 57–70.

## The first Russian textbook on Practical Mechanics

© D.A. Mkrtychian

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

**Abstract.** Alexander Yershov was one of the founders of the Moscow Science School of TMM. His book “Foundation of Kinematics or Elementary theory about motion in general and about mechanisms of machines especially”, that was written for the Emperor’s Moscow University and Emperor’s Moscow Technical Supreme School (EMTS), was the first Russian textbook of practical mechanics. The activity of Moscow Educational Industrial School (MEIS) — later EMTS, which was one of the first higher engineering schools in Russia, is connected with the name of Alexander Yershov. He began his career at the institute in 1845 as a teacher of the practical mechanics, and then became a professor, a class inspector and finally the director. The theoretical education was widened, the course of practical mechanics was increased and teachers’ qualification was raised as a result of his activity as a professor of “Applied Mechanics” and

the director of MEIS. Yershov prepared the reorganization of EMTS and achieved equality of the status of teachers and the status of pupils with the St.-Petersburg institute of technology. Collection of mechanisms of department “Theory of machines and mechanisms” in EMTS was started by Yershov.

**Keywords:** *engineering education, practical mechanics, Imperial Moscow Technical School, A. Yershov, mechanical engineering, industry.*

## **Методика создания базы данных для компьютерного тестирования по теме «Сложное движение точки»**

© Н.И. Бондаренко, С.Л. Косачев, К.Б. Обносков, К.А. Стихно

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: fn3@bmstu.ru

**Аннотация.** Обосновывается необходимость компьютерного тестирования обучающихся вообще и по конкретной теме теоретической механики в частности. Изложена методика создания базы данных для компьютерного тестирования. Один из принципов подбора задач — от простого к сложному — позволяет преподавателю оценить, насколько полно обучаемый овладел теорией и методами решения задач по сложному движению точки. Эта методология позволяет за малое время объективно оценить знания и умения сразу как группы студентов в целом, так и отдельных студентов. В частности, все задачи каждого теста разбиты на четыре группы: определение относительных скоростей и ускорений, определение переносных скоростей и ускорений, определение ускорения Кориолиса и нахождение абсолютных скоростей и ускорений. В заключение приведены типичные задачи из составленной базы данных по всем группам, предлагаемые для компьютерного тестирования по теме «Сложное движение точки».

**Ключевые слова:** *методика создания базы данных, компьютерное тестирование, сложное движение точки, абсолютная скорость, абсолютное ускорение, относительная скорость, относительное ускорение, переносная скорость, переносное ускорение, ускорение Кориолиса.*

Одним из возможных путей повышения качества подготовки студентов технических вузов является использование регулярного контроля знаний, раскрывающее суть конкретного раздела изучаемой дисциплины. С одной стороны, такой контроль позволит самому студенту выявить пробелы в знании учебного материала и будет побуж-

дать его к систематической работе в течение всего процесса изучения дисциплины. С другой стороны, контроль знаний студента позволит преподавателю учесть возможные недочеты в своей работе и в организации процесса в вузе. Все это может быть оптимально реализовано с современных позиций только с помощью компьютерных тестов.

На кафедре «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана подготовлен пакет материалов для компьютерного тестирования по теме «Сложное движение точки». Предложены новые, вновь разработанные, а потому и отсутствующие в Интернете, схемы механических устройств. Многовариантность заданий обеспечивается случайным выбором созданной на кафедре программы тестирования схемы механизма, случайным выбором его геометрических и кинематических параметров. Это позволяет значительно усложнить заимствования готовых решений у кого-либо или где-либо.

Предложенные задачи пакета по теме «Сложное движение точки» могут быть использованы как в обычных рубежном контроле (РК) и семестровом экзамене (без применения компьютера), в текущем РК в форме компьютерного тестирования, так, при online-обучении в форме компьютерного тестирования РК и экзамена.

Первоначально предполагалось, что задача пакета будет только основным вопросом как РК, так и экзамена. Для технических вузов, так всегда было, есть и будет всегда. Но в материалах (билетах) РК в МГТУ им. Н.Э. Баумана, кроме основной задачи, имеются еще теоретические вопросы и микропример, которые позволяют преподавателю достаточно хорошо оценить качество знаний студентов по всей тематике РК. При подготовке материалов задач пакета потребовалось знание промежуточных результатов, которые прямо не входили в вопросы задач. Если в вопросы билета РК вставить требование нахождения этих промежуточных результатов, то получается некоторая замена используемых сейчас твердых копий билетов РК. Но такая замена в настоящее время хороша только для компьютерного тестирования. В докладе на конференции рассмотрено несколько вариантов такой замены.

### **Литература**

1. Бондаренко Н.И., Обносков К.Б., Паншина А.В. О методике создания и практике использования базы данных для компьютерного тестирования по разделу «Плоская статика». *Естественные и технические науки*, 2016, № 12, с. 244–247.
2. Кочанов Ф.П., Обносков К.Б. *Материалы для семестровых заданий по теоретической механике. Часть II*. Москва, Изд-во ВА РВСН им. Петра Великого, 2004.

## The method of creating a database for computer-based testing on the subject of “The complex motion of a point”

© N.I. Bondarenko, S.L. Kosachev, K.B. Obnosov, K.A. Stikhno

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: fn3@bmstu.ru

**Abstract.** The necessity of computer testing of students in General and on a specific topic of theoretical mechanics in particular is justified. The method of creating a database for computer testing is described. One of the principles of problem selection — from simple to complex — allows the teacher to assess how well the student has mastered the theory and methods of solving problems on complex point movement. This methodology allows you to objectively evaluate the knowledge and skills of both a group of students as a whole and individual student in a short time. In particular, all the tasks of each test are divided into four groups: determining relative speeds and accelerations, determining portable speeds and accelerations, determining Coriolis acceleration, and finding absolute speeds and accelerations. In conclusion, we present typical tasks from the compiled database for all groups that are offered for computer testing on the topic “The complex motion of a point”.

**Keywords:** *database creation methodology, computer testing, complex point movement, absolute velocity, absolute acceleration, relative velocity, relative acceleration, portable velocity, portable acceleration, Coriolis acceleration.*

### References

1. Bondarenko N.I., Obnosov K.B., pashina A.V. On the methodology for creating and using a database for computer testing in the section “Flat statics”. *Natural and Technical Sciences*, 2016, no. 12, pp. 244–247.
2. Kochanov F.P., Obnosov K.B. *Materials for semester assignments in theoretical mechanics. Part II*. Moscow, Publishing house of Peter the Great VA RVSN, 2004.

## Преподавать полное уравнение неразрывности Эйлера в вузах

© В.М. Овсянников

Российский университет транспорта «МИИТ», Москва, Россия  
Московская государственная академия водного транспорта, Москва, Россия  
E-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru

**Ключевые слова:** *полное уравнение неразрывности Эйлера, дополнительные главы гидромеханики, преподавание.*

В 1997–1999 гг. В.А. Бубнов [1, 2] обратил внимание на получение Н.Е. Жуковским членов второго порядка малости в дифференциальном уравнении неразрывности для несжимаемой жидкости. В 2006 г. члены второго и третьего порядка малости были обнаружены и в докладе Эйлера, представленном в 1752 г. на латыни в Берлинской Академии наук [3] с выводом полного уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости. Этот доклад до сих пор не получил должного распространения среди математиков и механиков, так как был издан в Петербурге лишь в 1761 г. после публикации второго доклада этого направления на французском языке. В 1755 г. Эйлер сделал в Берлинской Академии наук второй доклад с тем же названием на французском языке, который был более понятен слушателям и вскоре издан в Берлине в виде статьи. Сделав шесть деформаций сдвига и растяжения вдоль координатных осей, Эйлер должен был получить шесть или более членов, отражающих изменение объема, а не три, как дает дивергенция вектора скорости. В докладе 1755 г. в Берлинской АН уравнение неразрывности Эйлером было представлено без уничтоженных предельными переходами членов высокого порядка малости.

Откидывание членов, неизвестных по создаваемому ими эффекту, эквивалентно добавлению в уравнение произвольных членов. Поэтому необходимо проанализировать, к каким эффектам приводят отбрасываемые члены, и решить, важны ли эти эффекты для поставленной задачи.

Малоизвестный латинский текст доклада Эйлера 1752 г. был в 1954 г. кратко пересказан по-английски Кливлендом Трусделлом. Точный перевод на английский язык появился лишь в ноябре 2018 г. в Корнеллском университете США, входящем в Лигу плюща. (В последнее время знаменитый университет прославился проектированием Марсохода.) В нашей стране перевод статьи Эйлера с латыни на русский язык опубликован в 2016 г. [4, 5]. Волны могут появляться в сплошной среде только при проявлении ею сжимаемости. Физический смысл дополнительных членов уравнения неразрывности, вычисленных Эйлером, стал понятен после записи в 2006 г. этого уравнения [6] для сжимаемой жидкости и газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \rho(t-t_0) \left[ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, w)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial(w, u)}{\partial(z, x)} \right] + (t-t_0)^2 \rho \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0.$$

Здесь  $u, v, w$  — компоненты скорости вдоль осей  $x, y, z$ ;  $\rho$  — плотность;  $t-t_0$  — интервал времени деформации контрольной фигуры.

Оказалось, что члены второго порядка малости с якобианами второго порядка приводят к описанию появления периодических автоколебаний, вибраций. Имеется основание предполагать, что член третьего порядка малости может быть ответственен за самопроизвольное зарождение в течение уединенной волны с резким нарастанием ее давления во времени типа солитона. Это предположение основано на попадании члена третьего порядка малости в неоднородную источниковоую часть волнового уравнения третьего порядка.

На появление доклада Эйлера 1752 г. в Берлинской Академии наук с выводом дифференциального уравнения неразрывности несомненно оказало влияние появление в 1748 г. мемуара Даламбера «Рассуждения об общей причине ветров», в котором на практике решения задачи строились дифференциальные соотношения, отражающие сохранение вещества и количества движения. Эйлер сделал это более строго, подробно и отвлеченно от конкретной решаемой задачи.

Наличие членов высокого порядка малости в геометрических построениях Эйлера позволило критически посмотреть на второй известный вывод уравнения неразрывности М.В. Остроградского 1831 г. и увидеть в его построениях тоже появление членов второго и третьего порядков малости при двойном пересечении жидкой частицей границы контрольной фигуры по секущей, уничтожаемом использованием направляющих косинусов и предельными переходами, содержащимися в интегралах. Возврат от интегралов к интегральным суммам в формуле Гаусса — Остроградского дает выражения для дополнительных членов, согласующиеся с результатами Эйлера. Эти члены появляются и в учебнике Л.И. Седова «Механика сплошной среды», обозначенные через  $\varepsilon$  в формуле (8.11) раздела «Теорема Гаусса — Остроградского» до совершения в ней предельных переходов.

Анализ уравнения неразрывности Эйлера с членами высокого порядка малости поставил вопрос об отличии требования интегрального сохранения от дифференциального или локального сохранения. Зародившийся в древности в различных частях мира принцип сохранения относится к интегральному сохранению вещества в одном большом объеме. Письменное отражение он получил впервые с публикации Эмпедокла (490–430 гг. до н. э.) — участника школы Пифагора (570–490 гг. до н. э.). Дифференциальный объем не может быть уединенным, изолированным. Он окружен со всех сторон другими такими же объемами. В соседние объемы возможно перемещение вещества, что демонстрирует локальное несохранение при выполнении интегрального сохранения. Это было отражено в статьях декана Мехмата МГУ Н.А. Слезкина и декана Матмеха ЛГУ С.В. Валландера в их статьях, опубликованных в 1951 г. в «Докладах АН СССР».

Численный метод регуляризации, разрабатываемый в ИПМ им. М.В. Келдыша Т.Г. Елизаровой [7] и ее учениками, использует

дополнительные члены второго порядка малости, совпадающие с вычисленными Эйлером.

В настоящее время имеются все условия для включения в преподавание в ведущих вузах материала по волнообразованию и уравнению неразрывности Леонарда Эйлера с членами высокого порядка малости в качестве дополнительных глав раздела «Механика жидкости и газа». Для этого в 2020 г. опубликовано учебное пособие [5] «Волнообразование и уравнение неразрывности Леонарда Эйлера», материал был доложен на двух последних съездах по механике, проходивших в Казани в 2015 г. и в Уфе в 2019 г., и на международных конференциях по дифференциальным уравнениям.

### Литература

1. Бубнов В.А. Физические принципы гидродинамических движений. В кн.: *Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике*. Москва, 1997, вып. 4, с. 206–269.
2. Бубнов В.А. Кинематика жидкой частицы. В кн.: *Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике*. Москва, 1999, вып. 7, с. 11–29.
3. Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior. *Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae*, 1761, t. 6 (1756–1757); pp. 271–311. Opera omnia, ser. II. Vol. 13, pp. 1–369.
4. Эйлер Л. Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН. Пер. с лат. Е.В. Ивановой и В.М. Овсянникова. В кн.: *Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике*. Москва, 2016, т. 30, с. 9–15.
5. Эйлер Л. *Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН*. Пер. с лат. Е.В. Ивановой и В.М. Овсянникова. 4-е изд., доп. Москва, Издательство «Спутник +», 2020, 203 с.
6. Овсянников В.М. Введение в аксиоматическую механику жидкости, основанную на базисных экспериментах с жидкостью. В кн.: *Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике*, Москва, 2006, т. 15, с. 19–51.
7. Елизарова Т.Г. *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений*. Москва, Научный мир, 2007, 352 с.

## Let's teach Euler's complete continuity equation in high schools

© V.M. Ovsyannikov

Russian University of Transport, Moscow, Russia  
Moscow State Academy of Water Transport, Moscow, Russia  
E-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru

**Abstract.** In 2006, I found the Euler continuity equation for an incompressible fluid, which contains terms of the second and third orders of smallness. It is contained in a 1752 message from Euler to the Berlin Academy of Sciences. High-order terms penetrate the wave equation and generate pressure waves. In 2006, the complete continuity equation was written for a compressible gas and a compressible liquid. We can use it to

calculate self-oscillation and generate sound. We can teach about Euler's complete equation of continuity in high school.

**Keywords:** *Euler's complete continuity equation, additional chapters of hydromechanics, teaching.*

## **Теоретическая механика в Академии: 200-летию ВА РВСН имени Петра Великого**

© В.Н. Горкунов, Т.И. Роганова\*, Г.С. Гизатулина

ВА РВСН им. Петра Великого, Балашиха, Россия

\*E-mail: [dobtrog@yandex.ru](mailto:dobtrog@yandex.ru)

**Аннотация.** Анализируется исторический путь теоретической механики в Академии в лицах с момента ее создания по настоящее время с целью укрепления и развития интереса курсантов к изучению основ этой точной науки в решении практических задач ракетных войск стратегического назначения.

**Ключевые слова:** *теоретическая механика, компетенция, механическое движение, механическое взаимодействие, творчество, наука.*

Необходимость артиллерии для защиты и укрепления военной мощи государства Российского Петр Великий определил созданием артиллерийской бригады. Научное обеспечение пришло значительно позже, когда в 1820 г. по инициативе Великого Князя Михаила Павловича был открыт ряд военных училищ, в том числе артиллерийское Училище (ныне Военная академия Ракетных войск стратегического назначения имени Петра Великого), в котором «основой для всех отделов Артиллерии, как науки должны были служить математика и механика» (историограф Академии Г.Д. Гродский). В первые сто лет своей деятельности академические научно-педагогические школы фактически были единственными отечественными центрами по развитию теории оружия, выработке основ проектирования и производства огнестрельных, ракетных, минных устройств как средств поражения противника.

Главная задача теоретической механики, как науки об общих законах простейшей формы движения материальных тел, состоит в познании количественных закономерностей механических движений. На первом этапе исследования выполняется математическое моделирование и составляются дифференциальные уравнения движения, после чего становится возможным второй этап инженерного анализа — определение характеристик движения. При этом теоретическая меха-

ника широко использует математические методы исследования, не являясь прикладной математикой. Теоретическая механика является фундаментальной дисциплиной. Она формирует не только определяемые ФГОС и КТ (у военных) компетенции на уровне знаний, умений и навыков, но и научное мировоззрение будущего инженера.

В первые годы существования Училища в его учебных планах не было деления механики на теоретическую и практическую (прикладную). В курс механики входили как общая теория равновесия и движения материальных тел, так и учение о простейших и сложных машинах и элементы гидравлики. Учебный процесс включал чтение лекций строго по составленным программам. Слушатели вели за лектором записи, готовились по ним к репетициям (аналог семинара теперь) и экзаменам. По курсу был годовой экзамен и дополнительно сначала два экзамена (по третям), а затем один — в середине года. Изучалась механика в офицерских (т. е. старших) классах.

Математические основы, а позже статику или начала механики начинал читать русский ученый, первый преподаватель баллистики в России, профессор Петербургского университета В.А. Анкудович (1789–1876).

К 1841 г. завершился процесс формирования учебного плана. Изучение механики началось с рассмотрения общих свойств и законов движения; стало уделяться больше внимания принципам механики; законы равновесия стали выводиться из уравнений движения как частный случай. В основном все изменения были направлены на более строгое и научное изложение курса. В Училище прибыл признанный лидер математиков и механиков XIX века М.В. Остроградский. При нем механика отделяется от баллистики и начинает фигурировать в учебном плане как самостоятельная дисциплина. М.В. Остроградский создал целую школу из своих талантливых учеников, привлекая некоторых (один из крупнейших артиллерийских инженеров И.А. Вышнеградский, специалист в области внешней баллистики Н.С. Будаев и др.) из других учебных заведений. По мере развития Училища увеличилось число желающих обучаться в нем, повысился качественный состав поступающих. Часть дисциплин переместили из высших (офицерских) классов в низшие (юнкерские).

В 1860–1870-х годах в программах курса теоретической механики в Академии добавились такие темы, как кинематика точки и твердого тела, динамика точки, общие теоремы динамики системы, учение о моментах инерции, динамика твердого тела, теория относительного движения точки и теория удара.

Теоретическая механика в университетах рассматривалась как прикладная ветвь математики. В то же время развивавшаяся техника требовала решения задач с привлечением экспериментальных иссле-

дований и приближенных расчетов, чем, как считалось на тот момент, должны заниматься не ученые-механики, а инженеры. В Академии это были ее воспитанники, выдающиеся инженеры с глубокими знаниями теоретической механики: Н.В. Майевский, А.В. Гадолин, Л.Л. Кирпичев и другие.

Серьезные изменения в теоретической механике становились неизбежными, и они в 1880–1890-х годах в России были внесены гениальным русским ученым Н.Е. Жуковским, заложившим основы классического преподавания теоретической механики в вузах страны.

Курс механики продолжает носить чисто академический характер и содержит много детальных исследований, весьма далеких от практических задач, решавшихся в Академии. В начале XX века включаются уравнения Лагранжа, канонические уравнения Гамильтона и метод Якоби. Издаются сначала литографированным путем краткие и затем более полные руководства Н.С. Будаева (1900) и П.Ф. Шифа (1903) по курсу теоретической механики, а в 1912 г. издается типографским путем известный 5-томный курс теоретической механики генерал-лейтенанта, профессора С.Г. Петровича, военно-научная деятельность которого включает широкий круг вопросов и проблем, в основном касающихся математики, теоретической механики и баллистики.

В послереволюционный период было издано значительное количество фундаментальных трудов, все новое оперативно вносилось в учебный процесс, закреплялось в учебных пособиях и руководствах. Сформировались научные школы. Начала форсированно развиваться исследовательская деятельность.

В 2020 г. возглавлявшему кафедру теоретической механики девятнадцать лет с 1938 г. заслуженному деятелю науки и техники РСФСР, ученому с мировым именем, профессору Н.А. Слезкину исполнилось бы 115 лет; проработавшему с 1939 г. и возглавлявшему кафедру теоретической механики с 1957 по 1972 г. известному крупному ученому-механику С.М. Таргу исполнилось бы 110 лет. В 1941 г. из числа преподавателей, слушателей академии и курсов воентехников был сформирован сводный стрелковый полк, начальником штаба которого был назначен С.М. Тарг — профессор кафедры, военинженер 2-го ранга. С.М. Тарг был награжден двумя орденами Красной Звезды; орденом Трудового Красного Знамени; шестью медалями, в том числе «За оборону Москвы».

В годы Великой Отечественной войны вуз пережил эвакуацию.

После войны кафедра теоретической механики была организована почти заново. Курс «Аналитической механики», лекции по общей механике, теории гироскопов и инерциальной навигации читал советский и российский ученый-механик, организатор науки и педагог А.Ю. Ишлинский.

В 1960-е годы научно-исследовательская работа на кафедре начинает теснее связываться с деятельностью специальных кафедр Академии. Десятью годами позже появилась новая категория слушателей с высшим образованием — инженеры-исследователи, математики-исследователи с двух и позже трехлетним обучением. А на кафедре — опять кадровые изменения состава. В это непростое время (с 1975 по 1985 г.) кафедрой теоретической механики руководит крупный специалист в области механики деформируемого тела и прикладной механики А.Д. Пospelов, пришедший на кафедру в 1947 г. преподавателем. Разработаны новый курс теоретической механики и механики сплошных сред, материалы по аналитической механике для инженеров-исследователей, дважды в год проводятся научно-технические конференции слушателей. Появляется возможность руководить курсовыми проектами и быть консультантами дипломных работ на спецкафедрах.

После реорганизации 1985 г. образована кафедра механики, в состав предметно-методической комиссии № 1 (ПМК-1) которой вошли преподаватели прежней кафедры теоретической механики.

Для некоторых специальностей было предложено рассматривать теоремы динамики точки и механической системы в одной теме, сократить содержание раздела «Статика» и излагать его как следствие раздела «Динамика», т. е. в виде двух разделов: «Кинематика» и «Кинетика». С середины 1980-х годов в учебный процесс объединенной кафедры усиленно внедряется программирование и ЭВТ, включается курсовая работа по ТРМ с использованием ЭВМ для появившихся в Академии курсантов, активно используются вычислительная техника и наглядные средства обучения.

С начала 2000-х годов теоретическая механика в ПМК механики кафедры № 61 (кафедры естественно-научных дисциплин). Основным направлением научных исследований членов научной школы по механике являются динамика и прочность элементов конструкций. Активными представителями теоретической механики в научной школе стали профессор кафедры теоретической механики (1972), доктор технических наук (1972) Ф.П. Кочанов и ветеран Академии, доцент К.Б. Обносов.

В 2015 г. Академия перебазировалась на новое место. В соответствии с приказом начальника ВА РВСН имени Петра Великого в штат Академии вновь включена кафедра механики. Нынешний полностью обновленный возглавляемый кандидатом технических наук, доцентом В.Н. Горкуновым коллектив кафедры является продолжателем традиций научных школ предшествующих кафедр теоретической механики, сопротивления материалов и прикладной механики Академии. Теоретическую механику курсанты изучают на 1-м и 2-м курсах. Объем для большинства специальностей сильно сокра-

тился, при этом возросло число часов на самостоятельную работу, что для курсантов не всегда эффективно. В программу традиционно включены статика, кинематика, динамика и для некоторых специальностей вопросы аналитической механики. Предусмотрены чтение лекций и практические занятия с преподавателем. Текущий контроль обеспечивается разными видами опроса, тестированием, в том числе компьютерным, и рубежным контролем в виде расчетно-графических работ по трем классическим разделам. Промежуточный контроль осуществляется выполнением и защитой курсовой работы и сдачей экзамена. Ряд специальностей выделяет на теоретическую механику минимум часов, и тогда исключается курсовая работа и вместо экзамена включается зачет с оценкой. Теоретическую механику преподают кандидат физико-математических наук Г.С. Гизатулина, кандидат технических наук Т.И. Роганова и преподаватель — выпускница МГУ — Г.П. Колесникова, квалифицированные специалисты.

Сегодня Академия готовит офицерские кадры командного и инженерного профилей, способных работать на сложной, современной технике, готовых применить ее в любых условиях обстановки. Преподаватели теоретической механики, осознавая всю степень ответственности, понимая, что без постижения курсантами ее основ нет будущего квалифицированного инженера, а следовательно, надежной национальной безопасности страны (сегодня нет ни одного традиционного средства поражения противника, у истоков которого не стоял бы наш выпускник), продолжают и развивают традиции предшественников по поиску путей совершенствования технологий преподавания, применению инновационных технологий и средств информационного обеспечения, разработке учебно-методических материалов для обеспечения успешности учебного процесса, организации научно-исследовательской работы с курсантами в кружках и подготовке их к участию в Московской городской олимпиаде, проведению творческих дискуссий, повышению своего профессионального уровня участием в работе НТС по теоретической механике при Минобрнауки России, поддержанием и развитием связей с родственными кафедрами и коллегами из МЭИ, МГТУ им. Н.Э. Баумана и других вузов, участием в научно-практических конференциях.

**Заключение.** Теоретическая механика в рамках Академии прошла 200-летний путь, претерпев неоднократное рождение заново, и сохранила в Академии свой статус основной фундаментальной инженерной дисциплины, призванной формировать не только компетентностные знания, умения и навыки, но и научное мировоззрение будущего инженера ракетных войск стратегического назначения. Корень успеха — в подборе кадров, в гибкой системе организации учебного процесса, в общности устремлений педагогов всех кафедр в воспитании будущих высококвалифицированных специалистов.

## Литература

1. Обносов К.Б., Копнов Ф.П. *История преподавания теоретической механики в ВА им. Ф.Э. Дзержинского*. Москва, ВА им. Ф.Э. Дзержинского, 1997.
2. Гизатулина Г.С., Роганова Т.И., Колесникова Г.П. Использование информационно-образовательных информационных технологий при обучении дисциплине «Теоретическая механика» в ВА РВСН. *Сборник «Гуманитарный вестник Военной академии Ракетных войск стратегического назначения», № 4 (13)*. Балашиха, ВА РВСН им. Петра Великого, 2018, с. 62–69.

## Theoretical Mechanics at the Academy: the 200th anniversary of the Peter the Great VA RVSН

© V.N. Gorkunov, T.I. Roganova\*, G.S. Gizatulina

VA Peter the Great RVSН, Balashikha, Russia

\*E-mail: dobrrog@yandex.ru

**Abstract.** Analyses the historical path of theoretical history in Academy in persons from the time of its creation to the present, with a view to strengthening and developing the interest of cadets to study the basics of this exact science in solving practical problems of strategic missile forces.

**Keywords:** *theoretical Mechanics, competence, mechanical motion, mechanical interaction, creativity, science.*

## References

1. Обносов К.Б., Копнов Ф.П. *History of teaching Theoretical Mechanics at the Dzerzhinskiy higher school of economics*. Moscow, Dzerzhinskiy higher school of Economics, 1997.
2. Gizatulina G.S., Roganova T.I., Kolesnikova G.P. The use of information and educational information technologies in teaching the discipline “Theoretical mechanics” in the VA RVSН. *Collected works “Humanitarian Bulletin of the Military Academy of strategic Missile forces”*. Balashikha, VA strategic missile forces to them, Peter the Great, no. 4 (13), 2018, pp. 62–69.
3. Копнов В.А. *Theoretical and Applied Mechanics: Letopis VA RVSН 2010–2014 gg.* Moscow, VA named after F.E. Dzerzhinsky, 2014.
4. Kosmodemyansky A.A. *Essays on the history of Mechanics*. Moscow, Nauka, 1982.
5. Budnik F.G., Zigerman Yu.M., Selenskiy E.I. *Collection of problems in theoretical mechanics*. Moscow, Higher school, 1987.

## О законах и основных понятиях классической механики

© А.И. Смелягин

КубГТУ, Краснодар, Россия  
E-mail: asmelyagin@yandex.ru

**Аннотация.** Наука, изучающая механические движения и равновесие материальных тел, называется классической механикой. Фундамент современной механики построен на трудах Галилея, Ньютона,

Эйлера. Анализ законов-аксиом Ньютона показывает, что, строго говоря, они не являются ни законами и ни аксиомами. Это обусловлено тем, что они описывают движение только не существующих в природе объектов, а именно, материальных точек. Основные понятия классической механики в настоящее время точно не определены и не сформулированы. Следовательно, классическая механика нуждается в построении новой теоретической базы. Опираясь на современные знания, в работе уточняются основные понятия и приводятся реальные законы механики.

**Ключевые слова:** законы, взаимодействие, сила, связь, масса, время, пространство, покой, равновесие, меры движения.

Фундамент современной классической механики построен на идеях, трудах, аксиомах и законах Галилея, Ньютона и Эйлера и таких основных понятиях, как: материальное тело; материальная точка; масса; движение; покой; пространство; время; меры движения; связь [1–4].

Анализ классических законов-аксиом Ньютона и современных их формулировок показывает, что они не являются ни законами, ни аксиомами [4].

В [2, 3] отмечается:

- «По мере углубления наших знаний выявляются границы применимости теоретической механики, относительность ее понятий. Выяснилось, что аксиомы или законы классической механики Ньютона не абсолютны»;

- «это не закон (второй закон Ньютона), ибо нет определения силы»;

- законы Ньютона сформулированы для несуществующих в природе материальных точек;

- так называемые основные понятия механики (сила, пространство, время), «смысл которых читателю считается ясным», однозначно не определены.

Тем не менее современная классическая механика базируется на «законах» и понятиях, сформулированных еще в XV–XVII веках. Однако любая развивающаяся наука не может в своей основе иметь законы, представляющие собой «вечные», причем некорректные истины.

Основываясь на современных понятиях и знаниях в [5, 6], сформулированы основные законы механики.

Эти законы имеют вид:

- 1) взаимодействия материальных тел парны, равновелики и противоположно направлены;

- 2) работы внешних и инерционных взаимодействий материальных тел на любом перемещении равны между собой;

2\*) *суммарная работа внешних и инерционных взаимодействий материальных тел в любое мгновение равна нулю.*

Законы движения 2 и 2\* полностью эквивалентны друг другу.

Следствие из законов 2 и 2\*. *Если на исследуемое тело действует внешняя уравновешенная система взаимодействий, то оно неподвижно или движется с постоянной скоростью.*

Следствие вытекает из того, что если на исследуемое тело действует внешняя уравновешенная система взаимодействий, то нет условий для совершения работы, а значит, и нет инерционных взаимодействий, которые приводят тела в движение или изменяют его.

**Выводы.** Проанализированы, уточнены и сформулированы основные законы и понятия классической механики, которые были проверены на реальных механических объектах и системах.

### **Литература**

1. Никитин Н.Н. *Курс теоретической механики*. Москва, Высш. шк., 1990, 607 с.
2. Ишлинский А.Ю. *Механика: идеи, задачи, приложения*. Москва, Наука, 1985, 624 с.
3. Харламов П.В. *Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки*. Киев, Наук. думка, 1995, 407 с.
4. Смелягин А.И. Объекты, для которых сформулированы аксиомы или законы классической механики. *Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал*, 2014, № 1, с. 21–25.
5. Смелягин А.И. Об основных понятиях и законах классической механики. *Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал*, 2020, № 2, с. 25–38.
6. Смелягин А.И. О реальных законах движения. *Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал*, 2020, № 3, с. 11–16.

## **The laws and concepts of classical mechanics**

© A.I. Smelyagin

Kuban State Technological University, Krasnodar, Russia  
E-mail: asmelyagin@yandex.ru

**Abstract.** The science that studies the mechanical, motion, and balance of material bodies is called classical mechanics. The Foundation of modern mechanics is built on the works of Galileo, Newton, and Euler. The analysis of Newton's laws and axioms shows that, strictly speaking, they are neither laws nor axioms. This is due to the fact that they describe the movement of objects that do not exist in nature, namely, material points. The basic concepts of classical mechanics are currently not precisely defined and formulated. Therefore, classical mechanics needs to build a new theoretical base. Based on modern knowledge, the paper clarifies the basic concepts and provides real laws of mechanics.

**Keywords:** *laws, interaction, force, connection, mass, time, space, rest, equilibrium, measures of motion.*

The Foundation of modern classical mechanics is built on the ideas, works, axioms and laws of Galileo, Newton and Euler and such basic concepts as: material body; material point; mass; motion; rest; space; time; measures of motion; connection [1–4].

The analysis of classical laws-Newton's axioms and their modern formulations shows that they are neither laws nor axioms [4].

In [2, 3] it is noted:

- “As our knowledge deepens, the limits of applicability of theoretical mechanics and the relativity of its concepts are revealed. It turned out that the axioms or laws of classical mechanics of Newton are not absolute”;

- “this is not a law (Newton's second law), because there is no definition of force”;

- Newton's laws are formulated for material points that do not exist in nature;

- the so-called basic concepts of mechanics (force, space, time), “the meaning of which is considered clear to the reader”, are not clearly defined.

Nevertheless, modern classical mechanics is based on “laws” and concepts formulated in the XV–XVII centuries. However, any developing science cannot be based on laws that are “eternal”, and not correct truths.

Based on modern concepts and knowledge in [5, 6], the basic laws of mechanics are formulated.

These laws have the form:

1) *interaction of material bodies in pairs, equal and opposite;*

2) *the work of external and inertial interactions of material bodies at any moving equal;*

2\*) *the total work of external and inertial interactions of material bodies at any moment is zero.*

A consequence of the laws 2 and 2\*. *If the body under study is affected by an external balanced system of interactions, it is stationary or moving at a constant speed.*

The consequences follow from the fact that if an external balanced system of interactions acts on the body under study, then there are no conditions for performing work, and therefore there are no inertial interactions that cause the body to move or change it.

**Conclusions.** The basic laws and concepts of classical mechanics are analyzed, refined, and formulated, which have been tested on real mechanical objects and systems.

## References

1. Nikitin N.N. *Course of Theoretical Mechanics*. Moscow, Higher school, 1990, 607 p.
2. Ishlinskiy A.Yu. *Mechanics: ideas, tasks, applications*. Moscow, Nauka, 1985, 624 p.
3. Kharlamov P.V. *Essays on the foundations of Mechanics. Myths, misconceptions, and mistakes*. Kiev, Naukova Dumka, 1995, 407 p.
4. Smelyagin A.I. Objects for which axioms or laws of classical mechanics are formulated. *The science. Technic. Technologies (Polytechnic Bulletin). The scientific journal*, 2014, no. 1, pp. 21–25.
5. Smelyagin A.I. On the basic concepts and laws of classical mechanics. *The science. Technic. Technologies (Polytechnic Bulletin). Scientific journal*, 2020, no. 2, pp. 25–38.
6. Smelyagin A.I. About real laws of movement. *The science. Technic. Technologies (Polytechnic Bulletin). Scientific journal*, 2020, no. 3, pp. 11–16.

## Изложение раздела «Векторная функция скалярного аргумента» в курсе математического анализа

© С.К. Соболев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: sergesobolev@mail.ru

**Аннотация.** Предлагается подробный план преподавания раздела «векторная функция скалярного аргумента» в курсе математического анализа в техническом университете. Особый акцент делается на ослабленную теорему Лагранжа для векторных функций, на строгом выводе формул для дифференциала длины дуги и кривизны кривой. Как приложение подробно рассматривается задача о плавном сопряжении прямолинейных участков железных дорог.

**Ключевые слова:** векторная функция, производная, длина дуги, кривизна, центростремительное ускорение, плавное сопряжение.

Первый семестр курса математического анализа в техническом университете традиционно заканчивается изучением векторной функции скалярного аргумента. Но из-за «пропаж» занятий по различным причинам на нее иногда не остается времени, хотя этот раздел заслуживает тщательного изучения. Вот его оптимальный на наш взгляд план.

Предел, непрерывность и производная векторной функции (ВФ) и ее геометрический смысл, уравнения касательной к кривой. Кинематический смысл первой и второй производной ВФ. Правила дифференцирования, теорема о производной ВФ постоянной длины. Ослабленная теорема Лагранжа для ВФ. Доказательство теоремы о производной длины дуги кривой. Определение и вывод формул для

кривизны кривой. Радиус и окружность кривизны. Вывод разложения вектора ускорения движущейся точки на касательную и нормальную составляющие, центростремительное ускорение. Задача о плавном сопряжении железных дорог: чтобы поезд двигался без боковых толчков, необходимо, чтобы кривизна, а значит, и вторая производная были непрерывны вдоль всего пути. Поэтому для двух прямолинейных участков пути плавное сопряжение их дугой окружности невозможно. Студентам предлагается ее решение с помощью интерполяционного многочлена Эрмита пятой степени.

## Exposition of the Section “The Vector Function of Scalar Argument” in the Calculus

© S.K. Sobolev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: sergesobolev@mail.ru

**Abstract.** A detailed teaching plan of the section “Vector Function of Scalar Argument” in the course of Mathematical Analysis at technical University is proposed. Special emphasis is placed on the weak Lagrange’s theorem for vector functions, the strong proofs of formulas for the differential of the arc length and the curvature of a curve. As an application the problem of smooth connection of straight sections of railways is considered in detail.

**Keywords:** *vector function, derivative, arc length, curvature, centripetal acceleration, smooth connection.*

## Основные этапы разработки методической документации нового направления подготовки бакалавриата по Федеральному стандарту 3++

© Н.В. Архипова, К.А. Стихно

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: fn2cyril@gmail.ru

**Аннотация.** Рассмотрены особенности разработки документации для нового направления бакалавриата по стандарту ФГОС 3++. Освещается процесс формализации основных требований к студентам по итогам обучения, а также формирования основных нормативных документов, определяющих цели и средства обучения. Предлагаются собственные методики формирования матрицы компетенций, самих компетенций и их дескрипторов.

**Ключевые слова:** ФГОС 3++, бакалавриат, профессиональный стандарт, трудовая функция, матрица компетенций.

### Литература

1. ФГОС 3++ по направлению 01.03.03 «Механика и математическое моделирование». URL:  
[http://fgosvo.ru/fgosvo/downloads/1622/?f=%2Fuploadfiles%2FFGOS+VO+3%2B%2B%2FBak%2F010303\\_B\\_3\\_08022018.pdf](http://fgosvo.ru/fgosvo/downloads/1622/?f=%2Fuploadfiles%2FFGOS+VO+3%2B%2B%2FBak%2F010303_B_3_08022018.pdf)
2. *Профессиональные стандарты высшего образования*. URL:  
<http://fgosvo.ru/docs/101/69/2>

## **Main stages of the development of methodical documentation for an opening of a new bachelor education course according to the Federal standard 3 ++**

© N.V. Arkhipova, K.A. Stikhno

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: fn2cyril@gmail.ru

**Abstract.** The paper describes the features of the development of documentation for the new education course of the undergraduate program for the Federal State Educational Standard 3 ++. The process of formalization of the basic requirements for students' education course is described. The formation of the main normative documents that determine the goals and means of education course is highlighted. We also propose our own methods of forming a matrix of competencies, competencies themselves and their descriptors.

**Keywords:** FSES 3 ++, bachelor's degree, professional standard, labor function, competency matrix.

### References

1. *FSES 3 ++ 01.03.03 "Mechanics and mathematical modeling"*. Available at:  
[http://fgosvo.ru/fgosvo/downloads/1622/?f=%2Fuploadfiles%2FFGOS+VO+3%2B%2B%2FBak%2F010303\\_B\\_3\\_08022018.pdf](http://fgosvo.ru/fgosvo/downloads/1622/?f=%2Fuploadfiles%2FFGOS+VO+3%2B%2B%2FBak%2F010303_B_3_08022018.pdf)
2. *Professional standards of higher education*. Available at:  
<http://fgosvo.ru/docs/101/69/2>

## **Разработка и внедрение программного обеспечения для тестирования текущих знаний студентов**

© К.Б. Обносков, К.А. Стихно, М.В. Худорожко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: fn2cyril@gmail.ru

**Аннотация.** Рассмотрен собственный, разработанный на базе языка Python, программный продукт по онлайн-тестированию текущих знаний студентов, который был внедрен в учебный процесс во время перехода на дистанционное обучение весной 2020 г. Приведена структура программного обеспечения (ПО), дано описание взаимодействия пользователей с базами данных (БД) задач и статистики. Особое внимание при разработке уделено независимости от установленного в системе ПО и мерам прокторинга, ограничивающим возможности студентов по подделке результатов тестирования.

**Ключевые слова:** язык Python, онлайн-тестирование знаний, дистанционное обучение.

**Поставленные задачи на этапе разработки.** Весной 2020 г. при переходе на общее дистанционное обучение вследствие распространения новой коронавирусной инфекции возникла острая потребность в новом программном обеспечении (ПО), которое позволяло бы оптимально организовать дистанционную проверку знаний студентов. Наличие такого ПО позволило бы структурировать новый учебный процесс, освободив преподавателей от рутинной проверки и затратных по времени элементов передачи информации к студентам и от них.

В условиях недостатка времени и ресурсов было решено адаптировать к новым условиям имеющиеся собственные программные решения [1]. Нужно было решить следующие основные проблемы: обеспечить удаленное хранение, передачу и верификацию БД задач, статистики и ответов студентов, идентификацию пользователей. Позднее к этим задачам добавились еще обеспечение безопасности данных и прокторинга.

**Идентификация пользователя и логика приложения-клиента.** Проблема идентификации пользователя была решена с помощью системы авторизации студента, включающей в себя заполнение основных учетных данных: ФИО, группу и уникальную почту в студенческом домене (.students.bmstu.ru). Доступ к почте проверяется через отправку четырехзначного кода на указанный почтовый адрес и предложение ввести данный код в появившееся окно. В процессе регистрации студент, вводя код с почты, подтверждает себя ее владельцем. После получения верного кода происходит привязка текущей машины студента к аккаунту в локальной БД пользователей через следующие параметры: mac-адрес сетевого адаптера, ID машины, номер жесткого диска. Данная машина считается личной машиной студента, и для нее начинает действовать биективное правило: одна машина — один пользователь. Процедура авторизации проводится только при первом запуске приложения. В дальнейшем она опускает-

ся, позволяя, однако, студенту изменить свою учебную группу при переходе между семестрами. Идентификация машины считается успешной, если совпадают хотя бы два из трех контрольных параметров.

После успешной авторизации приложение делает запрос на сервер и предлагает одну из доступных тем теста на выбор. После выбора темы сервер генерирует случайный вариант теста и предоставляет его студенту. Окно тестирования позволяет свободно переключаться между задачами, имеется встроенный калькулятор, таймер оставшегося времени. После ответа на все вопросы теста и подтверждения студентом окончания теста происходит общая проверка всех заданий. Результаты пройденного теста представляются студенту в виде таблицы с конкретным указанием как верно решенных задач, так и неверно. Правильные ответы на неверно решенные задачи студентам не показываются.

В конце приложение фотографирует экран с результатами теста, сохраняет его на рабочем столе студента, а также отправляет в общую базу данных, к которой имеет доступ преподаватель.

**Сервер и особенности сетевого взаимодействия.** БД задач, файлы с ответами, копия базы данных результатов и БД пользователей лежат на круглосуточном сервере со статическим IP, обеспечивая бесперебойный круглосуточный доступ к приложению. Обращение к серверу происходит с помощью технологии HTTP запросов. Приложение-клиент в процессе работы отправляет по указанному адресу запрос на отправку задач, файла с ответами, а также само отправляет файл с результатами для хранения на сервере.

Для мониторинга запросов используется Apache web-server. Он принимает запросы клиента и вызывает скрипты-обработчики. Скрипты написаны на языке Python 3.6. Для хранения личных данных студента используется MySQL.

При поступлении нового клиентского запроса проводится попытка идентификации запрашивающей машины в БД имеющихся пользователей. В случае успеха дополнительно проводится проверка последнего доступа к БД задач. В системе установлено ограничение на доступ к тестам в количестве 1 тест в 3 дня. Интервал определяется по времени начала последнего теста. Также на сервере встроены ограничения на суточное количество попыток доступа как по IP-адресу, так и по «железу».

**Элементы прокторинга.** Дистанционная проверка знаний оставляет намного меньше возможностей контроля со стороны преподавателя по сравнению с очной формой сдачи. Для снижения нагрузки на преподавателей по наблюдению за студентами в приложение-клиент были добавлены функции автоматического прокторинга.

Этот функционал несколько ограничивает студентов в процессе тестирования. Ограничения касаются наличия дополнительных вир-

туальных рабочих столов и мониторов. Приложение просит выбрать только один аудио-визуальный канал для связи с преподавателем и принудительно отключает остальные. Во время тестирования все попытки заново открыть каналы связи принудительно завершаются. Приложение не позволяет вывести другие окна поверх себя, однако теоретически смена «фокуса» возможна. Приложение отслеживает такие попытки и при большом количестве потерь фокуса принудительно завершит тест. Подобная же процедура касается подключения второго монитора.

**Эволюция офлайн-приложения.** Вследствие разработки онлайн-версии приложения офлайн-версия приложения [1] также была модернизирована. Теперь приложение для очного приема в компьютерных аудиториях также общается с сервером и вносит результаты в общую базу данных попыток. Потoki данных статистики разнесены с приложением для онлайн-приема, так как аудиторное приложение облегчено в части прокторинга. Отличительной особенностью аудиторного приложения является водяной знак на скриншоте с результатами теста, который позволяет отличить аудиторную версию от онлайн.

**Внедрение в учебный процесс.** В весеннем семестре 2020 г. после перехода к дистанционному формату работы с марта по июль было обработано более 10 000 содержательных обращений к серверу тестирования от более чем 2000 студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана. На весенней экзаменационной сессии в рамках проверки промежуточной успеваемости студентов было проведено экзаменационное тестирование в 120 учебных группах.

В осеннем семестре 2020 г. в связи с переходом к дистанционному формату обучения в ноябре решено продолжить эксплуатацию приложения.

## Литература

1. Стихно К.А., Худорожко М.В. Разработка и внедрение программного обеспечения для очного модульного тестирования знаний студентов. *Международный форум–2019 «Цифровые технологии в инженерном образовании: новые тренды и опыт внедрения»: сб. трудов.* Ю.И. Димитриенко, ред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020, с. 106–108.
2. *Powerful data structures for data analysis, time series, and statistics.* URL: <https://pypi.org/project/pandas/>
3. *Python bindings for the Qt cross platform UI and application toolkit.* URL: <https://pypi.org/project/PyQt5/>

## Об опыте проведения дистанционного экзамена по теоретической механике

© К.А. Стихно, П.М. Шкапов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: fn2cyril@gmail.ru, spm@bmstu.ru

**Аннотация.** Рассмотрен подход к организации устно-письменного экзамена студентов в режиме дистанционного обучения на базе программного обеспечения, разработанного на кафедре теоретической механики. Обсуждаются основные проблемы, возникающие при приеме дистанционного экзамена, и предлагаются варианты их решения на основе имеющегося опыта проведения весенней сессии 2019/20 учебного года в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

**Ключевые слова:** дистанционное обучение, онлайн-тестирование, прокторинг.

В последнее время на кафедре ФН-3 «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского МГТУ им. Н.Э. Баумана активно проводилась разработка и внедрение в учебный процесс новых информационных технологий обучения и контроля знаний студентов. Первоначальное направление в этой работе предполагало широкое использование специализированных аудиторий Университета, оборудованных компьютерами и серверами для разрабатываемого программного обеспечения. С марта 2020 г. эта работа получила новое направление: разработку приложения для дистанционного взаимодействия с обучающимися в процессе консультаций и приема выполненных домашних заданий в режиме удаленного тестирования доступа с домашних компьютеров обучающихся, включающего элементы автоматического прокторинга за этой работой. Весной 2020 г., после полного перехода Университета на дистанционное обучение, в кратчайшие сроки была организована работа по адаптации собственного приложения по аудиторному проведению тестов по теоретической механике, ранее внедренного в учебный процесс, к виду, пригодному для проведения онлайн-тестов при удаленном контроле преподавателем.

В новом комплексе были предусмотрены следующие возможности:

- авторизация студентов в пользовательской базе данных;
- проверка принадлежности пользователей к студентам МГТУ им. Н.Э. Баумана;
- привязка устройства, с которого выполняется тестирование, к аккаунту студента;
- формирование состава вариантов тестовых заданий и времени, отводимого на их выполнение;

- автоматическая проверка и оценка выполненных тестов;
- ограничение по времени на доступ пользователей к базе данных заданий;
- удобный внутренний функционал;
- общие базы данных статистики работы студентов с программой тестирования, в том числе самостоятельной (без преподавателя);
- автоматический прокторинг — отслеживание нежелательных действий студента, принудительная фокусировка на экране теста и т. д.

В мае 2020 г. приложение и сервер тестирования проходили апробацию при проверке текущей успеваемости по теоретической механике примерно в 20 учебных группах первого и второго курсов. По итогам этой работы приложение было дополнено несколькими функциями автоматического прокторинга, способствовавших объективному оцениванию знаний студентов и значительно усложнивших возможности студентов по несанкционированному влиянию на результаты тестирования.

В конце мая на кафедре было принято решение повсеместно использовать данное приложение, в том числе и при проверке промежуточной успеваемости студентов во время летней сессии, для автоматической генерации экзаменационного билета и оценки письменной части экзамена.

Следует особо отметить, что *система тестирования не является самостоятельной системой приема экзамена; это лишь вспомогательное звено*, позволяющее помочь преподавателю в проверке письменных ответов на вопросы теста. При этом на дальнейшей устной части экзамена преподаватель сам оценивает присланные варианты ответов студентов, может уточнять степень самостоятельности их в выполнении тестов и после дополнительных вопросов поставить итоговую оценку.

Работая по данной схеме, преподаватели кафедры в летнюю сессию 2019/20 учебного года смогли успешно провести и принять более 120 дистанционных экзаменов в группах первого и второго курсов в срок и без срывов.

Осенью кафедра разработала обновленную версию приложения для тестирования в аудиториях Университета, использующую общий сервер тестирования и собирающую общую статистику попыток. Положительный опыт работы кафедры по данному направлению отмечен руководством комплекса инновационных разработок в сфере информационных технологий университета.

Преподаватели из группы разработчиков программного обеспечения участвовали во многих научно-методических конференциях разного уровня (от факультетских до международных) по данному направлению, выступали с докладами и имеют публикации [1–3].

Следует констатировать, что результаты применения программного обеспечения, созданного на кафедре, дополненного основными элементами прокторинга, показали высокую эффективность, а его основные параметры можно сравнивать с лучшими зарубежными программами удаленного приема экзаменов типа «Экзамус». При этом программное обеспечение устойчиво работает со всеми основными зарубежными и отечественными платформами дистанционного взаимодействия с обучающимися на имеющихся в их распоряжении домашних компьютерах и ноутбуках, обеспечивающих стандартные видео- и аудиоканалы связи в Интернете.

### **Литература**

1. Стихно К.А., Худорожко М.В. Разработка и внедрение программного обеспечения для очного модульного тестирования знаний студентов. *Международный форум–2019 «Цифровые технологии в инженерном образовании: новые тренды и опыт внедрения»: сб. трудов.* Ю.И. Димитриенко, ред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020, с. 106–108.
2. Бондаренко Н.И., Обносков К.Б., Паншина А.В. Тестовый контроль знаний по пространственной статике в курсе «Теоретическая механика». *Естественные и технические науки*, 2018, № 11, с. 378–380.
3. Косачев С.Л., Паншина А.В., Барышников Ю.Н. Внедрение цифровых технологий в изучение курса теоретической механики. *Международный форум–2019 «Цифровые технологии в инженерном образовании: новые тренды и опыт внедрения»: сб. трудов.* Ю.И. Димитриенко, ред. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020, с. 60–62.

## **On the experience of conducting a remote exam in Theoretical Mechanics**

© К.А. Stikhno, P.M. Shkarov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: fn2cyril@gmail.ru; spm@bmstu.ru

**Abstract.** The approach to the organization of oral-written examination of students in the mode of distance learning on the basis of the software developed at the department is considered. The main problems that arise when taking the distance exam are discussed, and options for solving them are proposed based on the existing experience of the spring session of the 2019/20 academic year at the Bauman Moscow State Technical University.

**Keywords:** *distance learning, online testing, proctoring.*

### **References**

1. Stikhno K.A., Hudorozhko M.V. Razrabotka i vnedrenie programmnoho obespecheniya dlya ochnogo modul'nogo testirovaniya znaniy studentov. *Mezhdunarodnyj forum–2019 “Cifrovyte tekhnologii v inzhenernom obrazovanii: novye trendy i opyt*

- vnedreniya*”, *sbornik trudov*. Yu.I. Dimitrienko, ed. Moscow, BMSTU Publ., 2020, pp. 106–108.
2. Bondarenko N.I., Obnosov K.B., Panshina A.V. Testovyy kontrol' znaniy po prostanstvennoj statike v kurse “Teoreticheskaya mekhanika”. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2018, no. 11, pp. 378–380.
  3. Kosachev S.L., Panshina A.V., Baryshnikov YU.N. Vnedrenie cifrovyyh tekhnologiy v izuchenie kursa teoreticheskoy mekhaniki *Mezhdunarodnyy forum–2019 “Cifrovyye tekhnologii v inzhenernom obrazovanii: novyye trendy i opyt vnedreniya*”, *sbornik trudov*. Yu.I. Dimitrienko, ed. Moscow, BMSTU Publ., 2020, pp. 60–62.

## Теоретическая механика в техническом университете: к 190-летию со дня основания МГТУ им. Н.Э. Баумана

© П.М. Шкапов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: spm@bmstu.ru

**Аннотация.** Рассмотрены вопросы становления и развития курса теоретической механики в Императорском Московском техническом училище с середины XIX до начала XX в. Отмечена определяющая роль Н.Е. Жуковского. Указаны основные предметные области теоретической механики в современных условиях, а также тенденции идентификации дисциплины в МГТУ им. Н.Э. Баумана, в ведущих технических университетах России и за рубежом.

**Ключевые слова:** *теоретическая механика, Н.Е. Жуковский, методика преподавания, организация учебного процесса, технические университеты.*

Формирование теоретической механики в качестве базовой фундаментальной инженерной дисциплины проходило в России с середины XIX по начало XX в. под непосредственным влиянием Николая Егоровича Жуковского, великого русского ученого, выпускника Московского университета.

Согласно историческим фактам и документам, кафедра теоретической механики Императорского Московского технического училища была создана Н.Е. Жуковским в 1878 г. [1]. Великий русский ученый являлся основателем целого ряда научных и научно-педагогических школ в высших учебных заведениях России, прежде всего в Высшем техническом училище и Московском университете. Отличительной особенностью их являлась направленность на вовлечение в совместную научную работу по самой актуальной тематике преподавателей, инженеров и студентов. Формирование таких коллективов, кафедр, развитие новых учебных дисциплин и учебных планов имело самое положительное влияние на развитие высшего

образования во всей России. Жуковский руководил кафедрой теоретической механики, составлял учебные планы, читал лекции и вел практические занятия в течение 43 лет своей жизни до 1921 г. На кафедре в разное время работали многие ученики и последователи Николая Егоровича: С.А. Чаплыгин, А.И. Некрасов, А.П. Котельников, В.П. Ветчинкин, В.Н. Веселовский, а со второй половины XX в. — известные методисты и ученые: А.А. Космодемьянский, В.В. Добролюбов, Г.Д. Блюмин, Н.Н. Никитин, К.С. Колесников и многие другие [2–4]. Сам процесс становление методики преподавания этой дисциплины и развитие научно-педагогической школы кафедры составляют основу истории развития курса теоретической механики в технических вузах России, интересную для ведения просветительской деятельности как в среде обучающихся, так и коллег-механиков из университетов и академических институтов.

Курс теоретической механики за это время в основном сохранил свою структуру и предметную направленность. Основными разделами его остаются *статика, кинематика, динамика*. При этом *статика* читается непосредственно перед сопротивлением материалов и другими прикладными инженерными дисциплинами. Основными модельными представлениями материальных объектов в теоретической механике являются *материальная точка, абсолютно твердое тело и механические системы* как совокупность твердых тел и материальных точек, взаимодействующих и связанных друг с другом. Изложение всех разделов курса приобрело векторную форму. Существенно обогатились и расширились разделы аналитической механики, а также специальные главы по теории удара, теории колебаний систем с конечным числом степеней свободы, устойчивости движения и равновесия механических систем.

В 1980-х годах началось стремительное внедрение информационных технологий в учебный процесс. К сожалению, во многих вузах это произошло за счет снижения содержательной части курсов теоретической механики. На следующем этапе кафедры теоретической механики стали объединять с родственными кафедрами сопротивления материалов, теории механизмов и машин, деталей машин, прикладной математики, а где-то и с кафедрами графики и черчения. Во вновь разрабатываемых курсах, как правило, читаются лишь отдельные главы и разделы теоретической механики, ориентированные на потребности смежных и выпускающих кафедр. Особенно ярко эта тенденция проявляется в бакалаврских курсах по «общей» механике как в нашей стране, так и за рубежом.

В МГТУ им. Н.Э. Баумана, благодаря последовательной конструктивной позиции руководства, поддержанной основными работодателями для выпускников вуза, особенно в оборонных отраслях, удалось сохранить классический полный базовый курс теоретической механи-

ки для специалистов и лишь незначительно сократить курс для бакалавров. Это находит полную поддержку в Научно-методическом совете по теоретической механике при Министерстве науки и высшего образования РФ, а главное — у профилирующих кафедр нашего Университета, выпускники которых востребованы на предприятиях в приоритетных областях развития техники и технологий.

На данном этапе реформирования высшего образования России все это приобретает особое значение, так как МГТУ им. Н.Э. Баумана является флагманом высшего технического образования страны, который в этом году отмечает 190-летие со дня основания, а теоретическая механика является одной из базовых фундаментальных основ этого образования. Это накладывает особую ответственность на кафедру теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского, которая достойно выполняет свою миссию по консолидации профессионального сообщества преподавателей высшей школы и доведения его мнения до общественности России.

### Литература

1. Шкапов П.М. О создании кафедры теоретической механики и одноименной научно-педагогической школы в Императорском Московском Техническом Училище (к 170-летию со дня рождения Николая Егоровича Жуковского). *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2016, № 12. URL: <http://technomag.neicon.ru/doc/852649.html>
2. Колесников К.С., Дубинин В.В., Назаренко Б.П. и др., ред. колл. *Кафедра «Теоретическая механика». Основные этапы развития (1878–2003)*. Москва, Экслибрис-Пресс, 2003, 192 с.
3. Колесников К.С., Панкратов А.А., Шкапов П.М. Научное и научно-педагогическое наследие А.П. Котельникова — заведующего кафедрой теоретической механики МВТУ им. Н.Э. Баумана (к 150-летию со дня рождения). *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2015, № 12. URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/829138.html> DOI: 10.7463/1215.0829138
4. Шкапов П.М. Фронтовик и академик (к 100-летию со дня рождения академика К.С. Колесникова). *Машиностроение и компьютерные технологии*, 2019, № 7, с. 30–42. URL: <https://www.technomagelpu...ticle/view/1508/1280> DOI: 10.24108/0719.0001508

## Theoretical Mechanics at the Technical University: To the 190th anniversary of the founding of the Bauman Moscow State Technical University

© P.M. Shkapov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: [spm@bmstu.ru](mailto:spm@bmstu.ru)

**Abstract.** The main issues of the formation and development of the course of theoretical mechanics at the Imperial Moscow Technical School are considered. The defining role of N.E. Zhukovsky is shown. The main

subject areas of theoretical mechanics in modern conditions, as well as trends in the identification of the discipline in the Bauman MSTU, in the leading technical universities in Russia and abroad are indicated.

**Keywords:** *theoretical mechanics, N.E. Zhukovsky, teaching methods, organization of the educational process, technical universities.*

### References

1. Shkapov P.M. On the creation of the Department of Theoretical Mechanics and the eponymous scientific and pedagogical school in the Imperial Moscow Technical School (to the 170th anniversary of the birth of Nikolai Yegorovich Zhukovsky). *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Bauman*, 2016, no. 12. Available at: <http://technomag.neicon.ru/doc/852649.html>
2. Kolesnikov K.S., Dubinin V.V., Nazarenko B.P., et al., Editorial Board. *Department of "Theoretical Mechanics". Main stages of development (1878–2003)*. Moscow, Exlibris-Press, 2003, 192 p.
3. Kolesnikov K.S., Pankratov A.A., Shkapov P.M. Nauchnoe i nauchno-pedagogicheskoe nasledie A.P. Kotelnikov — head of the Department of Theoretical Mechanics of Bauman Moscow State Technical University (to the 150th anniversary of its birth). *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Bauman*, 2015, no. 12. Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/829138.html>  
DOI: 10.7463/1215.0829138
4. Shkapov P.M. War Veteran and Academician (The centenary of academician K.S. Kolesnikov). *Mechanical Engineering and Computer Science*, 2019, vol. 12, pp. 1-12. Available at: <https://www.technomagelpub.ru/jour/article/view/1509/1285>  
DOI: 10.24108/1219.0001509