

Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», Москва, 2–4 декабря 2020 г. Материалы конференции. Часть 1. П. М. Шкапов, М.И. Дьяченко, составители.  
*Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 3. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-3-2067>

**Международная научная конференция  
«ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ  
ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ»**

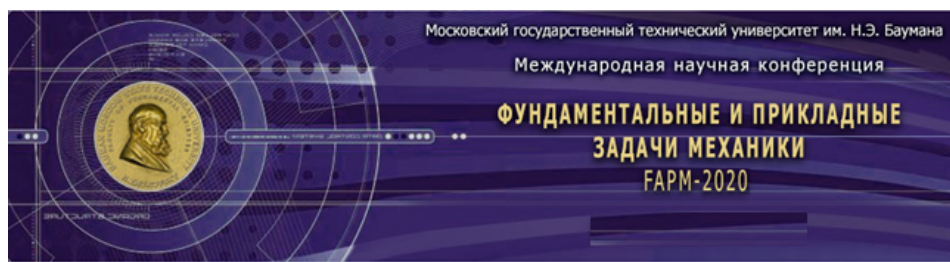
Москва, 2–4 декабря 2020 г.

**МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ**

*В двух частях*

*Часть 1*

*Составители:* П.М. Шкапов, М.И. Дьяченко



**International Scientific Conference  
FUNDAMENTAL AND APPLIED PROBLEMS  
OF MECHANICS (FAPM-2020)**

Moscow, 2–4 December, 2020

**THE MATERIALS OF THE CONFERENCE**

*In two parts*

*Part 1*

*Compiled by* P.M. Shkapov, M.I. Dyachenko



Москва  
ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МГТУ им. Н.Э. Баумана  
2021

**Международные научные конференции «ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ» (Fundamental and applied problems of mechanics — FAPM)** с 2012 г. регулярно проводятся в МГТУ им. Н.Э. Баумана на базе Научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки» и кафедры «Теоретическая механика» имени профессора Н.Е. Жуковского с участием ученых из научных учреждений РАН, университетов РФ, известных зарубежных ученых-механиков.

Основной целью конференции является представление новых результатов исследований по различным направлениям механики, проводимых в российских и зарубежных научных и образовательных учреждениях.

Очередная конференция проходила в год 190-летия со дня основания МГТУ им. Н.Э. Баумана — одного из ведущих технических университетов России, давшего начало многим высшим техническим учебным заведениям, научным и научно-педагогическим школам в области техники и технологий.

В 2020 г. открытие конференции и первое пленарное заседание прошли в очно-дистанционном режиме в конференц-зале Молодежного космического научного центра МГТУ им. Н.Э. Баумана с трансляцией для участников через платформу Zoom. Заседания секций проводились только в дистанционном формате.

Рабочие языки конференции: русский и английский.

Материалы к докладам конференции публикуются в двух частях в авторской редакции. В часть 1 вошли пленарные доклады и материалы секций 1 и 2. В части 2 представлены материалы секций 3–5.

## **ОГЛАВЛЕНИЕ**

Общие сведения о конференции

Пленарные доклады

### **Секция 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

1.1. Математическое моделирование механических систем, управление движением

1.2. Математическое моделирование физических процессов

1.3. Математическое моделирование и анализ

### **Секция 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА**

2.1. Теоретическая механика

2.2. Небесная механика

### **Секция 3. АЭРО- И ГИДРОМЕХАНИКА**

### **Секция 4. ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

### **Секция 5. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ И ИСТОРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ**

## Организаторы конференции

Министерство науки и высшего образования РФ  
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике  
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН  
Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского  
Научно-методический совет по теоретической механике при Минобрнауки РФ

## Международный организационный комитет

Проф. А.А. Александров (председатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. В.О. Гладышев (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. П.М. Шкапов (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Astronom C. Bizouard (Co-Chairman), Observatoire de Paris, France  
Prof. K. Matsumoto, RISE Project, National Astronomical Observatory of Japan, Japan  
Проф. В.С. Асланов, Самарский университет, г. Самара, Россия  
Проф. Б.С. Бардин, МАИ (НИУ), Москва, Россия  
Проф. В.Д. Бертяев, ТулГУ, г. Тула, Россия  
Проф. С.А. Берестова, УрФУ, г. Екатеринбург, Россия  
Проф. И.Г. Благовещенский, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. Ю.И. Димитриенко, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. В.В. Ивашкин, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
Проф. В.Т. Калугин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. В.А. Калининченко, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия  
Проф. Г.Н. Кувыркин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Д-р физ.-мат. наук М.Х. Магомедов, ООО НПФ «Сауно», г. Махачкала, Дагестан, Россия  
Проф. В.И. Майорова, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. С.Н. Саяпин, ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия  
Проф. Н.И. Сидняев, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
Проф. Ю.П. Улыбышев, РКК «Энергия», г. Королёв, Россия  
Проф. Ю.Д. Чашечкин, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия  
Проф. В.Н. Чубариков, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
Проф. А.О. Шимановский, БГУТ, г. Гомель, Республика Беларусь  
  
Ученый секретарь — М.И. Дьяченко, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

### **Академический программный комитет**

- Проф. В.О. Гладышев (председатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. В.Н. Зимин (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. П.М. Шапов (сопредседатель), МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Prof. H. Hanada (Co-Chairman), director of RISE Project, NAO of Japan, Japan
- Astronom C. Bizouard (Co-Chairman), Observatoire de Paris, France
- Prof. Shuanggen Jin, Chinese Academy of Sciences, China
- Академик РАН Р.Ф. Ганиев, ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
- Академик РАН И.Г. Горячева, РНКТПИМ, Москва, Россия
- Академик РАН В.Ф. Журавлёв, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
- Академик РАН С.Т. Суржиков, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
- Академик РАН Д.В. Трещёв, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- Академик РАН С.Л. Чернышев, ЦАГИ, г. Жуковский, Россия
- Чл.-корр. РАН А.П. Крищенко, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Чл.-корр. РАН И.И. Липатов, ЦАГИ, г. Жуковский, Россия
- Чл.-корр. РАН А.Н. Морозов, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Чл.-корр. РАН О.С. Нарайкин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Чл.-корр. РАН В.А. Соловьёв, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. М.М. Благовещенская, МГУПП, Москва, Россия
- Проф. В.С. Зарубин, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
- Проф. Т.А. Исмаилов, ДГТУ, г. Махачкала, Дагестан, Россия
- Проф. В.В. Сазонов, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
- Проф. В.А. Самсонов, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия
- Проф. А.М. Цирлин, ИПС им. А.К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский, Россия
- Проф. В.И. Щербаков, ВКА им. А.Ф. Можайского, С.-Петербург, Россия
- Ученый секретарь — канд. физ.-мат. наук, доц. Е.В. Мелкумова, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

### **СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ**

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА
3. АЭРО- и ГИДРОМЕХАНИКА
4. ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
5. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ И ИСТОРИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ

#### **Сайт конференции:**

<http://fn.bmstu.ru/coferences-sec-fs/item/1011-fapm-2020>

e-mail: [fapm2020@mail.ru](mailto:fapm2020@mail.ru)

## Пленарные доклады

### Моделирование развертывания космических конструкций изменяемой конфигурации с использованием интеллектуальных приводов

© В.Н. Зимин, А.В. Крылов, Г.Н. Кувыркин, А.О. Шахвердов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: zimin@bmstu.ru

**Аннотация.** Особый класс крупногабаритных космических конструкций образуют системы, имеющие различные конфигурации в транспортном и рабочем состояниях. Для обеспечения управляемого безударного развертывания предлагается использовать приводы, активные элементы которых изготовлены из материала никелида титана, обладающего эффектом памяти формы. Для активных элементов интеллектуального привода управляющим воздействием может быть только температурное поле. При этом наряду с задачей деформирования активных элементов необходимо решать задачу теплопроводности. Поэтому численный эксперимент, использующий разрабатываемые математические модели процесса развертывания космических конструкций изменяемой конфигурации с использованием интеллектуальных приводов, является важным этапом обеспечения высоких показателей надежности проектируемых перспективных систем.

**Ключевые слова:** космические конструкции, конфигурация, математическая модель.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (проект 0705-2020-0047).*

#### Литература

1. Баничук Н.В., Карпов И.И., Климов Д.М. и др. *Механика больших космических конструкций*. Москва, Изд-во «Факториал», 1997, 302 с.
2. Schiedeck F., Hemsel T., Wallaschek J. The use of shape memory alloy wires in actuators. In: *Solid State Phenomena*, 2006, vol. 113, pp. 195–198. Trans Tech Publications Ltd.

## Deployment simulation for space structures of transformable configuration with usage of intelligent actuators

© V.N. Zimin, A.V. Krylov, G.N. Kuvyrkin, A.O. Shakhverdov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: zimin@bmstu.ru

**Abstract.** A special class of large-sized space structures is formed by systems that have different configurations in transport and operating states. To ensure a controlled non-impact deployment, it is proposed to use actuators whose active elements are made of material with a shape memory effect — titanium nickelide. For the active elements of intelligent actuators only the temperature field can be used as the control action. And along with the problem of the active element deformation, it is necessary to solve the problem of thermal conductivity. Therefore, a numerical experiment on the base of the developing mathematical models for the deployment of the space structures of transformable configuration with usage of the intelligent actuators is an important stage to ensure high reliability of the developing perspective systems.

**Keywords:** *space structures, configuration, mathematical model.*

*This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project 0705-2020-0047).*

### References

1. Banichuk N.V., Karpov I.I., Klimov D.M., et al. *Mekhanika bol'shikh kosmicheskikh konstruktiv* [Mechanics of large space structures]. Moscow, Faktorial Publ., 1997, 302 p.
2. Schiedeck F., Hemsell T., Wallaschek J. The use of shape memory alloy wires in actuators. In: *Solid State Phenomena*, 2006, vol. 113, pp. 195–198. Trans Tech Publications Ltd.

## Определение наиболее опасных объектов космического мусора на низких орбитах

© Darren McKnight<sup>a</sup>, Rachel Witner<sup>b</sup>, Francesca Letizia<sup>c</sup>,  
Stijn Lemmens<sup>d</sup>, Luciano Anselmo<sup>e</sup>, Carmen Pardini<sup>f</sup>, Alessandro Rossi<sup>g</sup>,  
Chris Kunstadter<sup>h</sup>, Satomi Kawamoto<sup>i</sup>, Vladimir Aslanov<sup>j</sup>, Juan-Carlos  
Dolado Perez<sup>k</sup>, Vincent Ruch<sup>l</sup>, Hugh Lewis<sup>m</sup>, Mike Nicolls<sup>n</sup>, Liu Jing<sup>o</sup>,  
Shen Dan<sup>p</sup>, Wang Dongfang<sup>q</sup>, Andrey Baranov<sup>r</sup>, Dmitriy Grishko<sup>s</sup>

a, b – Centauri; c, d – ESA; e, f – ISTI/CNR; g – IFAC/CNR; h – AXA XL; i – JAXA;  
j – Samara University; k, l – CNES; m – University of Southampton; n – LeoLabs;  
o, p, q – CAS; r – KIAM RAS; s – BMSTU  
E-mail: darren.mcknight@centauricorp.com

**Аннотация.** Целью данного доклада является формирование признанного на международном уровне списка наиболее опасных объектов космического мусора на низких орбитах. Для этого принята попытка обобщения авторитетных методик, которые основаны на разных гипотезах и подходах и дают различные результаты. Значимость этой работы обусловлена участием в ней 19 экспертов из 13 стран/организаций, которые представили 11 независимых оценок, интегрированных в итоге в список топ-50 объектов, которые с наибольшей вероятностью представляют опасность для космической деятельности в околоземном пространстве, так как могут стать основным источником новых фрагментов космического мусора. Каждый из 11 независимых списков на 40...60 % совпадает как минимум с тремя соседними. Несмотря на то что только два подхода преднамеренно не рассматривали отработавшие спутники, 39 из 50 объектов представляют собой ступени ракет-носителей и только 11 объектов — нефункционирующие спутники.

**Ключевые слова:** *высоковоероятные опасные объекты, низкие околоземные орбиты, увод космического мусора.*

## **Search of Most-Concerning Space Debris Objects in Low Earth Orbit**

© Darren McKnight<sup>a</sup>, Rachel Witner<sup>b</sup>, Francesca Letizia<sup>c</sup>,  
Stijn Lemmens<sup>d</sup>, Luciano Anselmo<sup>e</sup>, Carmen Pardini<sup>f</sup>, Alessandro Rossi<sup>g</sup>,  
Chris Kunstadter<sup>h</sup>, Satomi Kawamoto<sup>i</sup>, Vladimir Aslanov<sup>j</sup>, Juan-Carlos  
Dolado Perez<sup>k</sup>, Vincent Ruch<sup>l</sup>, Hugh Lewis<sup>m</sup>, Mike Nicolls<sup>n</sup>, Liu Jing<sup>o</sup>,  
Shen Dan<sup>p</sup>, Wang Dongfang<sup>q</sup>, Andrey Baranov<sup>r</sup>, Dmitriy Grishko<sup>s</sup>

a, b – Centauri; c, d – ESA; e, f – ISTI/CNR; g – IFAC/CNR; h – AXA XL; i – JAXA;  
j – Samara University; k, l – CNES; m – University of Southampton; n – LeoLabs;  
o, p, q – CAS; r – KIAM RAS; s – BMSTU  
E-mail: darren.mcknight@centauricorp.com

**Abstract.** This report integrates a variety of methods to find internationally agreed list of the most dangerous space debris objects in low Earth orbits. These methods each generate different results based on diverse hypotheses and approaches. A state-of-the-art model consolidation approach was applied for the integration of these reputable models. The significance of the results of this effort is noteworthy — 19 experts from 13 countries/organizations had their 11 individual assessments aggregated into a list of the 50 statistically-most-concerning (SMC) objects for debris generation. Upon examination of the original 11 lists, it is noted that all of them had between ~40 to 60% objects in common between some other top-list. In addition, it is also important that, even though only two of

the 11 approaches specifically disregarded payloads, 39 of the top 50 SMC are derelict rocket bodies; only 11 are non-operational payloads.

**Keywords:** *statistically-most-concerning objects, low Earth orbit, space debris remediation.*

## **Эксперименты по регуляризации стоячих гравитационных волн**

© В.А. Калиниченко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: kalin@ipmnet.ru

**Аннотация.** Обсуждаются возможные механизмы регуляризации разрушающихся гравитационных волн на свободной поверхности жидкости ограниченного объема. Представлены результаты экспериментов, проведенных автором в 2018–2020 гг., в ходе которых исследованы: 1) влияние вязкости колеблющейся жидкости; 2) переход к колеблющейся в баротропном режиме двухслойной жидкости; 3) влияние слоя частиц положительной плавучести; 4) эффект плавающей пластины на процесс разрушения и регуляризацию стоячей гравитационной волны Фарадея на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде.

**Ключевые слова:** *регулярные, нерегулярные и разрушающиеся поверхностные волны Фарадея, баротропные волны, высоконцентрированные суспензии, плавающая пластина, предельная крутизна волны, диссипативные эффекты.*

*Работа выполнена по теме государственного задания № АААА-А20-120011690131-7.*

## **Experiments on the regularization of standing gravity waves**

© V.A. Kalinichenko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics  
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: kalin@ipmnet.ru

**Abstract.** Possible mechanisms of regularization of breaking gravity waves on a free surface of a liquid of limited volume are discussed. The results of experiments carried out by the author in 2018–2020 are presented, in which (1) the effect of the viscosity of an oscillating fluid, (2) the transition to a two-layer system oscillating in a barotropic mode,



(3) the effect of a layer of particles of positive buoyancy, and (4) the effect of a floating plate on the process of breaking and regularization of the standing gravity surface Faraday wave in a rectangular vessel are investigated.

**Keywords:** *regular, irregular, and breaking Faraday surface waves, barotropic waves, highly concentrated suspensions, floating plate, limit steepness, dissipative effects.*

*The work was supported by the State Program  
no. AAAA-A20-120011690131-7.*

## **Динамика инерциоида с дебалансом и маховиком на шероховатой плоскости в условиях малой гравитации**

© М.З. Досаев

НИИ механики МГУ, Москва, Россия  
E-mail: dosayev@imec.msu.ru

**Аннотация.** При разработке робота для перемещения по поверхности малых планет (астероидов) помимо малой гравитации необходимо учитывать влияние агрессивной внешней среды. В качестве одного из возможных вариантов для такого робота предложен инерциоид, представляющий собой изолированную капсулу, который движется за счет перемещения внутренних масс и трения различной природы о поверхность планеты. Робот оснащен одним дебалансом и одним маховиком. Алгоритм управления угловым ускорением дебаланса построен в предположении, что робот может оторваться от поверхности и совершить поступательное перемещение. При этом в процессе движения чередуются два режима. На одном режиме реакция опорной плоскости практически равна нулю, робот находится в состоянии «полета». На втором режиме, наоборот, робот прижат к опорной плоскости, при этом дебаланс приводится в состояние, необходимое для возврата в первый режим. Показано, что если для выбранного алгоритма не рассматривать ограничение на максимальное значение ускорения дебаланса, то средняя скорость корпуса также может расти неограниченно. При этом время стояния корпуса сокращается, и растет его горизонтальная скорость «полета».

**Ключевые слова:** *виброробот, сухое трение, математическое моделирование, алгоритм управления.*

*Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной  
научно-образовательной школы Московского университета  
«Фундаментальные и прикладные исследования космоса».*

## **Dynamics on a rough plane of a vibration robot with an unbalance rotor and a flywheel in low gravity conditions**

© M.Z. Dosaev

Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russia  
E-mail: dosayev@imec.msu.ru

**Abstract.** When developing a robot for moving on the surface of small planets (asteroids), in addition to low gravity, it is necessary to take into account the influence of an aggressive environment. As one of the possible options for such a device, a vibration robot is proposed, which is an isolated capsule and moves due to the motion of internal masses and friction of various natures. The robot is equipped with one unbalance rotor and one flywheel. The unbalance angular acceleration control algorithm is built on the assumption that the robot can break away from the surface and perform a translational motion. In this case, two modes alternate during the motion. In the first mode, the reaction of the supporting plane is practically zero; the robot is in the “flight” regime and performs a horizontal displacement. In the second mode, on the contrary, the robot is pressed against the supporting plane, while the unbalance rotor is brought to the state that is necessary to return to the first mode. It is shown that if the limitation on the maximum value of the unbalance acceleration is not considered for the selected algorithm, then the average speed of the body can also grow indefinitely. In this case, the standing time of the body is reduced, and its horizontal “flight” speed increases.

**Keywords:** *vibration robot, dry friction, mathematical model, control algorithm.*

*This study has been partially supported by the Interdisciplinary Scientific and Educational School of Moscow University “Fundamental and Applied Space Research”.*

## СЕКЦИЯ 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

### 1.1. Математическое моделирование механических систем, управление движением

*Руководители:* чл.-корр. РАН А.П. Крищенко,  
д-р физ.-мат. наук проф. В.В. Лапшин

#### Моделирование динамического взаимодействия тканевой воздушнонаполненной подушки с антропометрическим манекеном

© В.В. Селиванов, Д.П. Левин, А.В. Петюков, М.Е. Арцивенко,  
А.А. Гонсалес

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: dr.ni7e@gmail.com

**Аннотация.** В работе сформулирована физико-математическая модель взаимодействия тканевой расширяющейся автомобильной подушки безопасности с биообъектами. Биообъекты представлены с помощью конечно-элементных моделей антропометрических манекенов типа Hybrid III 50<sup>th</sup> Male. В качестве модели материала подушки безопасности использовалась модель многослойного тканевого ортотропного материала. Для численного моделирования процесса функционирования подушки безопасности в среде LS-DYNA использовался метод корпускулярных частиц. Представлены результаты расчета динамического взаимодействия расширяющейся подушки с тремя манекенами, расположенными стоя.

**Ключевые слова:** численное моделирование, метод корпускулярных частиц, конечно-элементная модель антропометрического манекена.

Целью данной работы является разработка методики численного моделирования динамического взаимодействия тканевого расширяющегося воздушнонаполненного объекта с механическими моделями биообъектов. Такие объекты (подушки безопасности) широко используются в качестве основных элементов пассивной системы безопасности в современных автомобилях — SRS (от англ. *Supplementary Restraint System* — дополнительная система удерживания), которая обеспечивает защиту водителя и пассажиров при лобовом столкновении со статичным или движущимся объектом.

Специфика расчетной схемы, рассматриваемой в данной работе, определяется возможным применением подушки безопасности в качестве травмобезопасного ударника в системах оружия нелетального действия.

Рассмотрим следующую расчетную схему: в комнате, в которой находятся несколько человек, подлежащих временной нейтрализации их подвижности, срабатывает свернутая подушка безопасности с площадью поверхности  $1 \text{ м}^2$ , имеющая начальную скорость около  $50 \text{ м/с}$ .

Задача решалась численно, лагранжевым методом, реализованным в программе LS-DYNA. В его основе лежит система уравнений законов сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{aligned}\rho V &= \rho_0; \\ \sigma_{ij,j} + \rho f_i &= \rho \ddot{x}_i; \\ \dot{E} &= V s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - (p + q) \dot{V}; \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} + (p + q) \delta_{ij},\end{aligned}$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$  — текущая и начальная плотности материала соответственно;  $V$  и  $\dot{V}$  — относительный удельный объем и его полная производная по времени соответственно;  $\sigma_{ij,j}$  — компоненты дивергенции тензора напряжений Коши;  $f_i$  — компоненты вектора объемных сил, действующих на тело;  $\ddot{x}_i$  — компоненты ускорения рассматриваемого элемента;  $\dot{E}$  — полная производная по времени удельной внутренней энергии;  $s_{ij}$  — компоненты деватора тензора напряжений;  $\dot{\epsilon}_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформации;  $p$  — текущее давление;  $q$  — добавка к давлению, обусловленная искусственной вязкостью;  $\delta_{ij}$  — дельта-функция Кронекера.

Эта система уравнений дополняется моделями прочности и уравнениями состояния материалов, использовавшихся в расчетах.

В качестве модели материала подушки безопасности использовалась модель многослойного тканевого ортотропного материала. В каждой расчетной ячейке подушки задавалась собственная ортогональная система координат.

Связь напряжений и деформаций определялась как

$$C = T^T C_L T,$$

где  $T$  — матрица преобразования;  $C_L$  — определяющая матрица, заданная через константы материала для ортогональных осей материала

ла  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Обратная матрица для  $C_L$  в ортотропном случае задавалась следующим образом:

$$C_L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_a} & -\frac{\nu_{ba}}{E_b} & -\frac{\nu_{ca}}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{ba}}{E_a} & \frac{1}{E_b} & -\frac{\nu_{cb}}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{ca}}{E_a} & -\frac{\nu_{cb}}{E_b} & \frac{1}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{ab}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{bc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{ca} \end{pmatrix};$$

$$\frac{\nu_{ab}}{E_a} = \frac{\nu_{ba}}{E_b}, \quad \frac{\nu_{ca}}{E_c} = \frac{\nu_{ac}}{E_a}, \quad \frac{\nu_{cb}}{E_c} = \frac{\nu_{bc}}{E_b}.$$

Здесь  $E_a, E_b, E_c$  — модули Юнга в направлении соответствующих осей материала;  $\nu_{ba}, \nu_{ca}, \nu_{cb}$  — коэффициенты Пуассона в координатных плоскостях материала;  $G_{ab}, G_{bc}, G_{ca}$  — модуль сдвига в координатных плоскостях материала.

Константы к данной модели, использовавшиеся в расчете, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты для модели прочности подушки безопасности

Плотность, кг/м <sup>3</sup>	$E_a$ , ГПа	$E_b$ , ГПа	$\nu_{ba}$	$\nu_{ca}$	$G_{ab}$ , ГПа
2000	2	2	0,35	0,35	2

Моделирование биообъектов (людей) в помещении проводилось с помощью конечно-элементных моделей антропометрических манекенов типа *Hybrid III 50<sup>th</sup> Male*. Масса одного манекена составляла 95 кг. Бедро, голень и стопа описывались моделью билинейного упругопластического тела. В качестве модели материала черепа и ребер была выбрана вязкоупругая модель. При этом релаксация модуля сдвига подчинялась уравнению

$$G(t) = G_\infty + (G_0 - G_\infty)e^{-\beta t},$$

где  $G_\infty$  — модуль сдвига при длительном нагружении;  $G_0$  — модуль кратковременного сдвига;  $\beta$  — константа затухания.

Для описания материалов грудной клетки и таза использовалась модель пористого тела, в которой при сжатии связь между напряжениями и деформациями описывалась нелинейной зависимостью, а при растяжении предполагалась линейная связь между напряжениями и деформациями.

Конкретные константы материалов подбирались таким образом, чтобы наиболее точно соответствовать данным калибровочных испытаний: тест на удлинение шеи, тест на сгибание шеи, удар по грудной клетке. Взаимодействие между различными частями манекенов описывалось с помощью штрафного контактного алгоритма. При использовании данного алгоритма сила отталкивания соприкасающихся ячеек материалов прямо пропорциональна глубине их взаимопроникновения. Коэффициент пропорциональности определялся как

$$K = \frac{\rho c A}{\Delta t},$$

где  $\rho$  — плотность материала;  $c$  — скорость звука;  $A$  — площадь ячейки;  $\Delta t$  — шаг интегрирования по времени.

До настоящего времени одним из основных методов, позволяющих моделировать раскрытие подушки, являлся метод контрольного объема. В соответствии с алгоритмом этого метода подушка безопасности рассматривалась как контрольная поверхность, моделируемая набором оболочечных конечных элементов. Давление, соответствующее текущему объему, определялось из уравнения состояния идеального газа и прикладывалось одновременно ко всем ячейкам подушки.

Главными преимуществами данного метода являются его быстрота, устойчивость и хорошая сходимость, а недостатком — некорректное моделирование ситуаций, в которых взаимодействие подушки безопасности и объектов происходит до ее полного разворачивания.

В данной работе использовался метод корпускулярных частиц, который позволяет нивелировать данный недостаток. В отличие от метода, описанного выше, надувание подушки безопасности происходит под действием потока частиц сферической формы, которые по своей сути являются ансамблями множества реальных молекул газа. При этом обеспечивается равенство удельной поступательной кинетической энергии молекул и частиц. Взаимодействия между самими частицами и тканью представляли собой идеально упругие столкновения.

В результате проведенных расчетов было показано, что данный подход позволяет с достаточной точностью для инженерных приложений моделировать раскрытие свернутой подушки безопасности,

а также определять нагрузки (распределения давления, импульса, ускорений), которые действуют на различные части антропометрических манекенов при ударе развернувшейся подушкой безопасности.

## Modeling of dynamic interaction of a fabric airbag with an anthropometric dummy

© V.V. Selivanov, D.P. Levin, A.V. Petukov, M.E. Arcivenko, A.A. Gonsales

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: dr.ni7e@gmail.com

**Abstract.** In this paper, a physical and mathematical model of interaction between a fabric expanding automobile airbag and biological objects is formulated. Bioobjects are represented using finite element models of anthropometric dummies of the Hybrid III 50th Male type. As a model of the airbag material, a model of multi-layer fabric orthotropic material was used. The method of corpuscular particles was used for numerical simulation of the airbag functioning in the LS-DYNA multiphysics simulation software package. The results of calculating the dynamic interaction of an expanding airbag with three standing dummies are presented.

**Keywords:** *numerical modeling, corpuscular particles method, finite element model, an anthropometric dummy.*

The purpose of this work is to develop a method for numerical modeling of the dynamic interaction of a tissue expanding air-filled object with mechanical models of biological objects. Such objects (airbags) are widely used as the main elements of the passive safety system of modern cars – SRS (Supplementary Restraint System), which provides protection for the driver and passengers in a head-on collision with a static or moving object.

The specifics of the design scheme considered in this paper are determined by the possible use of an airbag as a trauma-safe striker in non-lethal weapon systems.

Consider the following calculation scheme: in a room where there are several people who are subject to temporary neutralization of their mobility, a rolled-up airbag with a surface area of 1 m<sup>2</sup>, having an initial speed of about 50 m/s, is triggered.

The problem was solved numerically by the Lagrangian method implemented in the LS-DYNA program. It is based on a system of equations of the laws of conservation of mass, momentum and energy:

$$\rho V = \rho_0;$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{x}_i;$$

$$\dot{E} = V s_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - (p + q) \dot{V};$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} + (p + q) \delta_{ij},$$

where  $\rho$  and  $\rho_0$  — current and initial density of the material, respectively;  $V$  and  $\dot{V}$  — the relative specific volume and its total time derivative, respectively;  $\sigma_{ij,j}$  — components of the Cauchy stress tensor divergence;  $f_i$  — components of the vector of volumetric forces acting the body;  $\ddot{x}_i$  — acceleration components of the element;  $\dot{E}$  — total time derivative of specific internal energy;  $\dot{\epsilon}_{ij}$  — components of the strain rate tensor;  $p$  — current pressure;  $q$  — additive to the pressure due to artificial viscosity;  $s_{ij}$  — components of the stress tensor deviator;  $\delta_{ij}$  — Kronecker Delta function. This system of equations is supplemented by strength models and equations of state of the materials used in the calculations.

As a model of the airbag material, a model of multi-layer fabric orthotropic material was used. Each calculated cell of the pillow had its own orthogonal coordinate system.

The relationship between stress and strain was defined as

$$C = T^T C_L T,$$

where  $T$  — transformation matrix, and  $C_L$  — defining matrix defined by material constants for orthogonal axes of the material  $a$ ,  $b$  and  $c$ . The inverse matrix for the  $C_L$  in the orthotropic case was given as follows:

$$C_L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_a} & -\frac{\nu_{ba}}{E_b} & -\frac{\nu_{ca}}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{ba}}{E_a} & \frac{1}{E_b} & -\frac{\nu_{cb}}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{ca}}{E_a} & -\frac{\nu_{cb}}{E_b} & \frac{1}{E_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{ab}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{bc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{ca} \end{pmatrix};$$

$$\frac{\nu_{ab}}{E_a} = \frac{\nu_{ba}}{E_b}, \quad \frac{\nu_{ca}}{E_c} = \frac{\nu_{ac}}{E_a}, \quad \frac{\nu_{cb}}{E_c} = \frac{\nu_{bc}}{E_b},$$

where  $E_a, E_b, E_c$  — Young's modules in the direction of the corresponding axes of the material;  $\nu_{ba}, \nu_{ca}, \nu_{cb}$  — Poisson coefficients in the coor-



dinate planes of the material;  $G_{ab}, G_{bc}, G_{ca}$  — shear modulus in the coordinate planes of the material. Table 1 shows the constants for this model used in the calculation.

Table 1

**The coefficients for the model of the strength of the airbag**

Density, kg/m <sup>3</sup>	$E_a$ , GPa	$E_b$ , GPa	$\nu_{ba}$	$\nu_{ca}$	$G_{ab}$ , GPa
2000	2	2	0,35	0,35	2

Modeling of biological objects in the room was performed using finite element models of anthropometric dummies of the Hybrid III 50th Male type. The weight of one dummy was 95 kg.

The hip, lower leg and foot were described by a model of a bilinear elastic-plastic body. A viscoelastic model was chosen as the material model for the skull and ribs. The relaxation of the shear modulus obeyed the equation

$$G(t) = G_{\infty} + (G_0 - G_{\infty})e^{-\beta t},$$

where  $G_{\infty}$  — shear modulus under prolonged loading;  $G_0$  — short-term shear modulus;  $\beta$  — attenuation constant.

To describe the materials of the chest and pelvis, a porous body model was used, in which the relationship between stresses and deformations was described by a nonlinear relationship during compression, and a linear relationship between stresses and deformations was assumed during tension.

Specific constants of materials were selected in such a way as to most accurately match the data of calibration tests: neck elongation test, neck flexion test, chest impact. The interaction between different parts of the dummies was described using a penalty contact algorithm. When using this algorithm, the repulsive force of touching cells of materials is directly proportional to the depth of their interpenetration. The proportionality coefficient was defined as

$$K = \frac{\rho c A}{\Delta t},$$

where  $\rho$  — material density;  $c$  — sound speed;  $A$  — area of a cell;  $\Delta t$  — time integration step.

Until now, one of the main methods for modeling airbag opening has been the control volume method. In accordance with the algorithm of this method, the airbag was considered as a control surface modeled by a set of shell finite elements. The pressure corresponding to the current volume was determined from the equation of state of the ideal gas and applied simultaneously to all the cells of the airbag.

The main advantages of this method are its speed, stability and good convergence, and the disadvantage is incorrect modeling of situations in which the interaction of the airbag and objects occurs before it is fully deployed.

In this work, we used the method of corpuscular particles, which allows us to neutralize this disadvantage. In contrast to the method described above, the airbag inflates under the action of a stream of spherical particles, which are essentially ensembles of many real gas molecules. This ensures that the specific translational kinetic energy of molecules and particles is equal. The interactions between the particles themselves and the fabric were perfectly elastic collisions.

As a result of the calculations, it was shown that this approach allows modeling the deployment of a collapsed airbag with sufficient accuracy for engineering applications, as well as determining the loads (pressure, momentum, acceleration distributions) that impact various parts of anthropometric dummies.

## **Об управлении динамикой системы конь — наездник**

© В.К. Бадяева, Р.Г. Мухарлямов

РУДН, Москва, Россия.

E-mail: vlada\_badyaeva@mail.ru

**Аннотация.** Исследуется динамика системы конь — наездник. Проводится анализ стилей движений и взаимодействия ездока с конем. Формируется механическая модель системы, представленная двумя твердыми телами. Определяется изменение мышечной силы всадника, управляющая движением его центра масс по вертикали и обеспечения устойчивости движения. Задача управления рассматривается как обратная задача динамики и состоит в определении выражения управляющей реакции связи при известной силе отталкивания коня от земли. Использование современных методов построения уравнений динамики с учетом стабилизации связей позволяет построить алгоритм решения с необходимой точностью.

**Ключевые слова:** конь, наездник, динамика, система, устойчивость.

Целью данной работы является описание динамики системы конь — наездник и постановка задачи математического моделирования для разработки рекомендаций по проектированию тренажеров, предназначенных для тренировок спортсменов и любителей. К настоящему времени разработаны различные типы тренажеров. Однако известные конструкции задают ограниченные виды движений. Так, до

сих пор не сконструировано движение лошади на скачках, а также движение системы при поворотах и движение по кругу. Поэтому для разработки конструкций тренажеров, соответствующих различным видам движений системы конь — наездник, прежде всего требуется создать эффективную математическую модель.

В работе иллюстрируются некоторые известные тренажеры: тренажер Агашина, тренажер Fortis. Приводятся определения некоторых терминов, используемых в коневодстве: шаг, рысь, галоп, гладкие скачки, аллюр, карьер, выездка, полевая посадка, центр масс всадника, центр масс коня.

*Шаг.* При шаге расстояние по вертикальной оси между центром масс всадника и лошади остается постоянным. Центр масс лошади движется по горизонтали, центр масс всадника движется вперед-назад, совершая колебания вокруг точки равновесия.

*Рысь.* При учебной рыси движение системы похоже на движение при шаге. В этом случае изменяются только скорости, силы взаимодействия и амплитуда колебаний. При строевой рыси центр масс лошади движется так, как при учебной рыси, а центр масс всадника движется вверх-вниз, совершая колебания вокруг точки равновесия. При этом систему можно представить в виде двух тел, связанных между собой двумя пружинами.

*Галоп.* При галопе изменяются силы взаимодействия и скорость движения. Движение всадника похоже и на движение при рыси, и на движение при карьере (на скачках). Центр масс наездника относительно земли движется и по горизонтали, и по вертикали. При этом ноги всадника играют роль пружин. Корпус всадника почти перпендикулярен поверхности седла.

Таким образом, при разных движениях лошади изменяется положение центра масс всадника. Движения лошади в упрощенной модели различаются только силами взаимодействия с всадником и скоростями. В результате исследования сформирована методика анализа движения коня, которой может соответствовать математическая модель тренажера.

Движение системы конь — наездник на скачках, когда лошадь двигается быстрым галопом и всадник наклоняет свой корпус параллельно поверхности земли, моделируется колебательной системой двух твердых тел с упругой связью [1]. Для определения мышечной силы всадника, действующей на корпус лошади, исследуется система двух точек, совершающих движение по вертикали. Динамика системы описывается уравнениями:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -F_1 - m_1 g + R, \quad m_2 \ddot{x}_2 = F_2 - m_2 g - R; \quad (1)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad \dot{x}_1(t_0) = \dot{x}_{10}, \quad \dot{x}_2(t_0) = \dot{x}_{20}, \quad (2)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Здесь  $m_1, m_2, x_1, x_2$  — массы и координаты центров масс наездника и коня;  $F_1, F_2$  — мышечные силы;  $g$  — ускорение свободно падающего тела,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

Изменение силы давления наездника на лошадь  $R = R(t)$  поддается измерению. Закон изменения положения центра масс коня  $x_2 = A \sin(ut)$  определяется по результатам анализа видеоматериалов с конных скачек в Дубае [2]. Так, при  $m_1 = 50 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 500 \text{ кг}$  имеем:

$$A = 0,06 \text{ м}; \quad u = (0,82 \cdot 2\pi) \text{ с}^{-1}.$$

Для определения выражений сил  $F_1, F_2$  используется метод стабилизации связей [3]. Задавая цель управления уравнениями связей

$$h_1(x, t) = 0; \quad h_2(x, t) \equiv x_2 - A \sin(ut) = 0; \quad x = (x_1, x_2), \quad (3)$$

вводятся уравнения программных связей

$$y_i = h_i(x, t), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Правые части уравнений возмущений связей

$$\frac{dy_i}{dt} = \dot{y}_i, \quad \frac{d\dot{y}_i}{dt} = Y_i(\dot{y}, y, \dot{x}, x, t); \quad Y_i(0, 0, \dot{x}, x, t) = 0; \quad y = (y_1, y_2) \quad (5)$$

подбираются так, чтобы тривиальное решение  $y = \dot{y} = 0$  было устойчиво асимптотически и выполнялись условия стабилизации связей (3). Из равенств (1), (3)–(5) следуют выражения сил  $F_1, F_2$ :

$$F_1 = R(t) - m_1 g + \\ + \frac{m_1}{(h_1^1)^{-1}} \left( h_1^2 (Y_2 - Au^2 \sin(ut)) + \dot{x}_j h_1^{jk} \dot{x}_k + 2h_{1t}^k \dot{x}_k + h_{1tt} - Y_1 \right); \\ F_2 = m_2 (g - Au^2 \sin(ut) + Y_2) + R(t).$$

Например, простейшему случаю  $h_1 \equiv x_1 - c$  соответствует закон изменения мышечной силы всадника  $F_1 = R(t) - m_1 (g - Y_1)$ .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ,  
проект № 19-08-00261-а.*

## Литература

1. Алдошин Г.Т. *Теория колебаний. Часть 1. Линейные колебания: учебное пособие*. Санкт-Петербург, Балт. гос. тех. ун-т, 2006, 139 с.
2. Скачки в Дубаи. Электронный ресурс. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=ovUuHNcIHD4&t=>
3. Мухарлямов Р.Г. Управление динамикой системы с дифференциальными связями. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2019, № 4, с. 16–28.

## On dynamics control of horse–rider system

© V.K. Badyaeva, R.G. Mukharlyamov

RUDN University, Moscow, Russia  
E-mail: vlada\_badyaeva@mail.ru

**Abstract.** The dynamics of the horse–rider system is investigated. The analysis of movement styles and interaction between the rider and the horse is carried out. A mechanical model of the system is formed, represented by two solid bodies. The change in the rider's muscle strength is determined, which controls the movement of his center of mass vertically and ensures stability of movement. The control problem is considered as an inverse problem of dynamics and consists in determining the expression of the control constraint reaction at a known force of repulsion of the horse from the ground. The use of modern methods for constructing dynamic equations taking into account the constraint stabilization makes it possible to construct a solution algorithm with the necessary accuracy.

**Keywords:** *horse, rider, dynamics, system, stability.*

The purpose of this work is to describe the dynamics of the horse–rider system and to formulate a mathematical modeling problem for developing recommendations for the design of simulators intended for training athletes and Amateurs. To date, various types of simulators have been developed. However, known constructions set limited types of movements. So, the movement of a horse at a race has not yet been designed. Also, the system is not designed to move when turning and moving in a circle. Therefore, the development of simulator designs that correspond to various types of movements of the horse–rider system first of all requires the creation of an effective mathematical model.

The message illustrates some well-known simulators: the simulator of Agashin, the Fortis simulator. The definitions of some equestrian terms are given: step, trot, gallop, smooth racing, gait, quarry, dressage, field landing, center of mass of the rider, center of mass of the horse.

*Step.* At a step, the distance along the vertical axis between the center of mass of the rider and the horse remains constant. The center of mass of

the horse moves horizontally, the center of mass of the rider moves back and forth, making fluctuations around the equilibrium point.

*Trot.* In a training trot, the movement of the system is similar to that of a step. In this case, only the velocities, interaction forces, and oscillation amplitude change. In a drill trot, the horse's center of mass moves as in a training trot, and the rider's center of mass moves up and down, oscillating around the point of balance. In this case, the system can be represented as two bodies connected by two springs.

*Gallop.* When you gallop, the interaction forces and speed of movement change. The movement of the rider is similar to that of the trot and the movement of the quarry (at the races). The rider's center of mass relative to the ground moves both horizontally and vertically. In this case, the rider's legs play the role of springs. The rider's body is almost perpendicular to the saddle surface.

Thus, with different movements of the horse, the position of the rider's center of mass changes. The horse's movements in the simplified model differ only in the forces of interaction with the rider and speeds. As a result of the research, a method for analyzing the horse's movement was formed, which can correspond to the mathematical model of the simulator.

The movement of the horse–rider system in horse racing, when the horse moves at a fast gallop and the rider tilts his body parallel to the ground, is modeled by an oscillatory system of two rigid bodies with an elastic connection [1]. To determine the rider's muscular force acting on the horse's body, we study a system of two points that move vertically. The dynamics of the system is described by the equations

$$m_1\ddot{x}_1 = -F_1 - m_1g + R; \quad m_2\ddot{x}_2 = F_2 - m_2g - R; \quad (1)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}; \quad x_2(t_0) = x_{20}; \quad \dot{x}_1(t_0) = \dot{x}_{10}; \quad \dot{x}_2(t_0) = \dot{x}_{20}; \quad (2)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Here  $m_1, m_2, x_1, x_2$  are masses and coordinates of the centers of mass of the rider and horse;  $F_1, F_2$  are muscle forces;  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  is acceleration of a free-falling body. The change in the rider's pressure on the horse  $R = R(t)$  can be measured. The law of changing the position of the horse's center of mass  $x_2 = A \sin(ut)$  is determined from the analysis of video materials from horse races in Dubai [2]. For example, if  $m_1 = 50 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 500 \text{ kg}$ , we have:  $A = 0,06 \text{ m}$ ;  $u = (0,82 \cdot 2\pi) \text{ c}^{-1}$ . To determine the expressions of the forces  $F_1, F_2$  the method of constraints stabilization is used [3]. Setting the goal of control by equations

$$h_1(x, t) = 0; \quad h_2(x, t) \equiv x_2 - A \sin(ut) = 0; \quad x = (x_1, x_2), \quad (3)$$

equations of program constraints are introduced:

$$y_i = h_i(x, t); \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Right hand sides of the constraint perturbation equations

$$\frac{dy_i}{dt} = \dot{y}_i, \quad \frac{d\dot{y}_i}{dt} = Y_i(\dot{y}, y, \dot{x}, x, t); \quad Y_i(0, 0, \dot{x}, x, t) = 0; \quad y = (y_1, y_2) \quad (5)$$

selected so that the trivial solution  $y = \dot{y} = 0$  is asymptotically stable and the conditions for constraint stabilization (3) are met. From equalities (1), (3)–(5) the expressions of the forces  $F_1, F_2$  follow:

$$F_1 = R(t) - m_1 g + \\ + \frac{m_1}{(h_1^1)^{-1}} \left( h_1^2 (Y_2 - Au^2 \sin(ut)) + \dot{x}_j h_1^{jk} \dot{x}_k + 2h_{1t}^k \dot{x}_k + h_{1tt} - Y_1 \right);$$

$$F_2 = m_2 (g - Au^2 \sin(ut) + Y_2) + R(t).$$

For example, the simplest case  $h_1 \equiv x_1 - c$  corresponds to the law of change in the rider's muscular force  $F_1 = R(t) - m_1 (g - Y_1)$ .

*This work is supported by RFBR, project 19-08-00261 A.*

## References

1. Aldoshin G.T. *Theory of vibrations. Part 2. Nonlinear oscillations: textbook*. Saint Petersburg, Baltic state tech. un-ty, 2006, 139 p.
2. *Horse races in Dubai*. Available at: <https://www.youtube.com/watch?v=ovUuHNcIHD4&t=>
3. Mukharlyamov R.G. Control of the Dynamics of a System with Differential Constraints. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2019, vol. 58, no. 4, pp. 515–527.

## Компьютерное моделирование разгрузки автомобиля-самосвала на наклонной площадке

© Ю.Н. Барышников

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: mhnts@list.ru

**Аннотация.** В статье рассмотрена проблема потери устойчивости самосвала при разгрузке на наклонной площадке. Основной задачей исследования является определение предельно допустимого угла

наклона площадки. Разработана математическая модель самосвала при разгрузке на площадке с продольным уклоном. В случае прилипания груза к платформе получена аналитическая формула для расчета критического угла наклона площадки. При движении груза предложена процедура пошагового изменения параметров. На основе полученных соотношений составлена программа расчета продольной устойчивости самосвала. Приведены результаты оценки продольной устойчивости самосвала КамАЗ-53605.

**Ключевые слова:** автомобили-самосвалы, устойчивость, несущая система, математические модели.

**Введение.** Опрокидывание (потеря устойчивости) автомобиля в продольной плоскости может наблюдаться в самых различных случаях: при резком торможении на крутом спуске, при движении на крутом подъеме, при движении задним ходом в овраг или в реку [1]. Кроме того, для автомобилей-самосвалов существует опасность опрокидывания в процессе разгрузки. Опрокидывание часто происходит на наклонных площадках либо при просадке задних колес в грунт во время разгрузки. В этой связи основной задачей при оценке устойчивости автомобиля является определение критического угла наклона площадки.

**Продольная устойчивость самосвала.** Рассмотрим схему разгрузки самосвала на продольном уклоне (рис. 1).

Воспользуемся принципом Даламбера [2]:

$$\sum M_Z(m_k \bar{g}) + \sum M_Z(\bar{R}_k) + \sum M_Z(\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (1)$$

Приведем все силы инерции груза ( $\bar{\Phi}_k$ ) к его центру масс  $C$  в виде главного вектора  $\bar{R}^{\text{ин}}$  и главного момента  $\bar{L}_C^{\text{ин}}$ .

Пусть груз — монолитная глыба, симметричная относительно вертикальной плоскости симметрии  $Oxy$  автомобиля. Тогда, как показано в работе [3], главный момент сил инерции груза  $\bar{L}_C^{\text{ин}} = -J_{Cz} \bar{\varepsilon}$  равен нулю ( $\bar{\varepsilon} = 0$ ). В свою очередь, главный вектор сил инерции  $\bar{R}^{\text{ин}} = -m_2 \bar{a}_C$  направлен против движения груза (см. рис. 1), а его модуль  $R^{\text{ин}} = m_2 \ddot{s}$ .

С учетом полученных соотношений уравнение (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} & -\sum_{k=1}^3 m_k g X_k \cos \theta + \sum_{k=1}^3 m_k g Y_k \sin \theta + \\ & + R_1 L - R^{\text{ин}} (y_2 + Y_0 \cos \varphi + X_0 \sin \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$



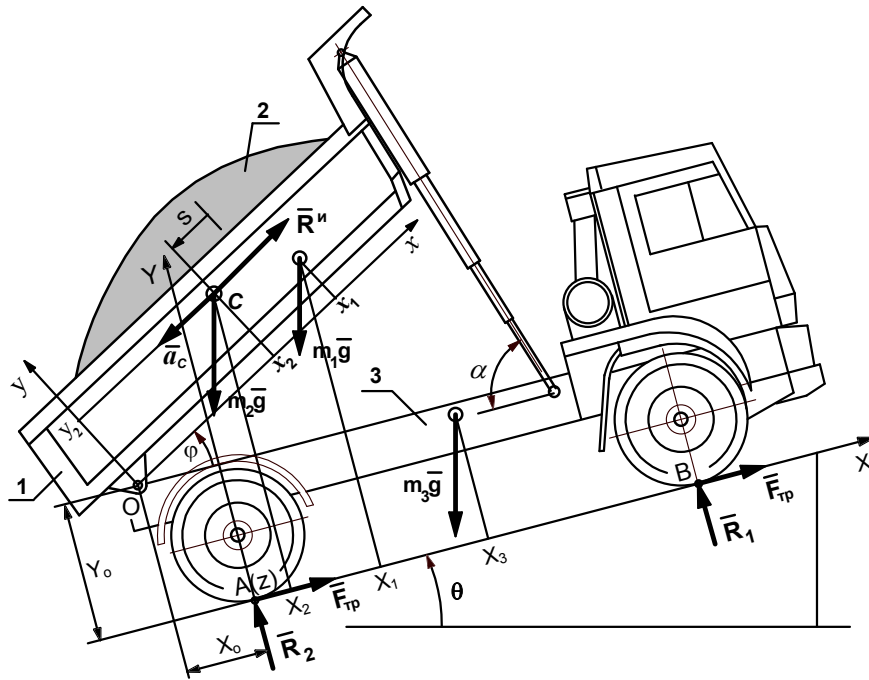


Рис. 1. Расчетная схема разгрузки самосвала:

$m_1$  и  $m_2$  — масса платформы 1 и груза 2;  $m_3$  — масса шасси 3;  $\varphi$  — угол подъема платформы;  $\theta$  — угол наклона площадки разгрузки;  $s$  — перемещение груза;  $R_1$  и  $R_2$  — суммарные реакции на колесах передней и задней осей автомобиля;  $AB = L$  — колесная база

Входящие в уравнение (2) координаты центров масс платформы 1 и груза 2 в неподвижной ( $X_k; Y_k$ ) и в подвижной ( $x_k; y_k$ ) системе координат связаны между собой следующими соотношениями:

$$X_k = x_k \cos \varphi - y_k \sin \varphi - X_0; \quad (3)$$

$$Y_k = x_k \sin \varphi + y_k \cos \varphi + Y_0 \quad (\kappa = 1, 2). \quad (4)$$

При разгрузке самосвала на площадке с критическим углом наклона  $\theta^*$  передние колеса отрываются от опоры и автомобиль теряет устойчивость. При этом реакции  $R_1$  на передних колесах станут равными нулю, и уравнение (2) примет вид

$$-g \cos \theta^* \sum_{\kappa=1}^3 m_{\kappa} X_{\kappa} + g \sin \theta^* \sum_{\kappa=1}^3 m_{\kappa} Y_{\kappa} - m_2 \ddot{s} (y_2 + Y_0 \cos \varphi + X_0 \sin \varphi) = 0. \quad (5)$$

В случае прилипания (примерзания) груза к платформе, когда его перемещение  $s$  равно нулю, из уравнения (5) найдем критический угол наклона площадки:

$$\theta^* = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sum_{k=1}^3 m_k X_k}{\sum_{k=1}^3 m_k Y_k} \right). \quad (6)$$

После подстановки соотношений (3) и (4) в формулу (6) получим:

$$\theta^* = \operatorname{arctg} \left[ \frac{(m_1 x_1 + m_2 x_2) \cos \varphi - (m_1 y_1 + m_2 y_2) \sin \varphi - (m_1 + m_2) X_0 + m_3 X_3}{(m_1 x_1 + m_2 x_2) \sin \varphi + (m_1 y_1 + m_2 y_2) \cos \varphi + (m_1 + m_2) Y_0 + m_3 Y_3} \right]. \quad (7)$$

Результаты расчетов критического угла по формуле (7) позволяют уже на этапе проектирования сделать вывод об устойчивости самосвала при разгрузке.

В случае движения груза для расчета критического угла наклона площадки разработана процедура пошагового изменения углов  $\theta$  и  $\varphi$ . В основе алгоритма решения задачи используется уравнение (5) и соотношения (3) и (4).

На основе предложенной методики выполнен расчет критического угла наклона площадки для самосвала КамАЗ-53605. Результаты расчетов представлены на рис. 2.

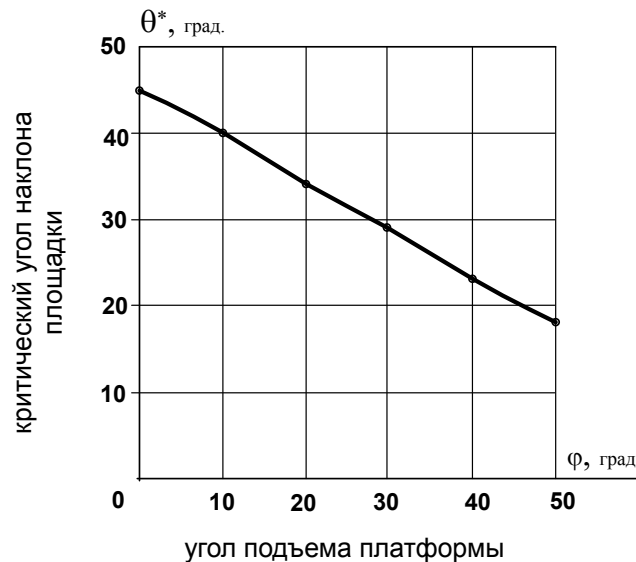


Рис. 2. График изменения критического угла наклона площадки

Из приведенного графика видно, что самосвал КамАЗ-53605 характеризуется высокой устойчивостью на опрокидывание. Так, при подъеме платформы с грузом на максимальный угол  $50^\circ$  автомобиль

сохраняет устойчивость либо на площадке с углом наклона около  $15^\circ$ , либо при просадке задних колес в грунт на 250 мм.

**Заключение.** Таким образом, предложенный метод является эффективным инструментом для экспресс-анализа устойчивости самосвала. Используя формулу (7), можно уже на ранней стадии проектирования автомобиля проводить многовариантные расчеты с целью выбора оптимального компоновочного решения. При таком подходе существенно сокращаются сроки доводки автомобилей и затраты на проведение дорогостоящих испытаний.

### Литература

1. Кравец В.Н. *Теория автомобиля*. Н. Новгород, НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2013, 413 с.
2. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. *Курс теоретической механики*. К.С. Колесников, В.В. Дубинин, ред. 5-е изд., испр. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 584 с.
3. Барышников Ю.Н. Устойчивость автомобиля-самосвала при разгрузке. *Машины и установки: проектирование, разработка и эксплуатация*, 2015, № 3, с. 51–61. DOI: 10.7463/aplts.0315.0783168

## Computer simulation of unloading a dump truck on an inclined platform

© Yu.N. Baryshnikov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: mhst@list.ru

**Abstract.** The article deals with the problem of loss of stability of a dump truck when unloading on an inclined platform. The main task of the study is to determine the maximum permissible angle of inclination of the site. A mathematical model of a dump truck when unloading on a site with a longitudinal slope is developed. In the case of cargo sticking to the platform, an analytical formula is obtained for calculating the critical angle of inclination of the platform. When the cargo is moving, the procedure of step-by-step change of parameters is proposed. Based on the obtained ratios, a program for calculating the longitudinal stability of the dump truck is compiled. The results of assessing the longitudinal stability of the KAMAZ-53605 dump truck are presented.

**Keywords:** *dump trucks, stability, load-bearing system, mathematical models.*

### References

1. Kravets V.N. *Theory of the automobile*. N. Novgorod, N. Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev, 2013, 413 p.

2. Drong V.I., Dubinin V.V., Ilyin M.M., et al. *The course of theoretical mechanics*. K.S. Kolesnikov, V.V. Dubinin, eds. 5th ed., corr. Moscow, BMSTU Publ., 2017, 584 p.
3. Baryshnikov Yu.N. Dump Truck Stability during Unloading. *Machines and Plants: Design and Exploiting*, 2015, no. 3, pp. 51–61. (In Russ.).  
DOI: 10.7463/aplts.0315.0783168

## Модели динамических систем с перераспределением

© М.И. Дьяченко\*, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): s\_masyanya@mail.ru

**Аннотация.** В работе рассмотрены динамические модели РН тяжелого класса с перераспределением топлива из боковых баков 1-й ступени в центральный бак или центральную топливную магистраль 2-й ступени. В первом случае это осуществляется с помощью дополнительного насоса в центральном баке, во втором случае с помощью перепадов давлений в газовых подушках баков 1-й и 2-й ступеней. Данное усложнение подачи топлива увеличивает массу выводимой на орбиты полезной нагрузки [1] и является малоизученной задачей динамики РН. Рассматриваемые модели включают в себя деформируемые и твердые тела, имеющие полости, частично наполненные перераспределяющейся жидкостью, а также гидравлические связи с сосредоточенными параметрами. Предлагаемые модели описываются как дифференциальными уравнениями в частных производных, так и обыкновенными дифференциальными уравнениями [2]. В результате анализа исходных выражений получена система линейных дифференциальных уравнений, которая описывает гидродинамические процессы возмущенного движения топлива в баках, расходных магистралях, трубопроводах подачи топлива между ступенями с учетом продольных колебаний центрального и боковых баков [3].

**Ключевые слова:** гидросвязь, колебания топлива, ракета-носитель, продольные колебания.

Данная работа посвящена созданию и исследованию моделей для описания перераспределения жидкого топлива между боковыми блоками первой ступени и центральным блоком второй ступени. Такая схема пока не использовалась, но рассматривалась:

– в КБ «Салют» на ракете-носителе «Ангара-А5» с переливом топлива до 2012 г. для увеличения грузоподъемности ракеты, в 2015 г. — с сопловыми насадками для полетов на Луну;

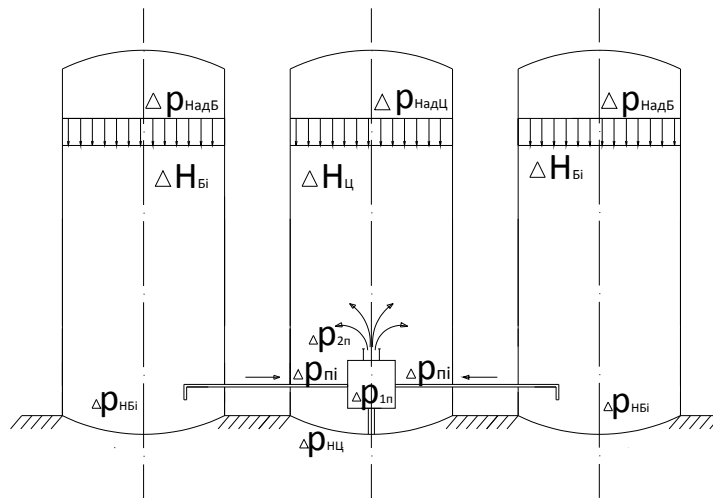
– фирмой SpaceX для модификации с подачей топлива из боковых блоков, что планировалось применить на Falcon Heavy.

В предыдущих работах авторов были получены система линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка во временной области, которая моделирует динамические процессы, происходящие в ракете-носителе пакетной схемы с однокомпанентным жидкостным ракетным двигателем (ЖРД) при перераспределении топлива из боковых блоков (ББ) в центральный (ЦБ).

В случае отсутствия непосредственной гидравлической связи между расходными магистралями ЦБ и ББ остается механическая связь в местах крепления, которая, как следует из полученных уравнений, также может оказывать взаимное влияние на систему подачи топлива и работу двигателей каждого блока.

**Первая модель:** «Жесткие баки + магистраль перераспределения». Рассмотрим динамическую модель, состоящую из неподвижных жестких баков бокового блока, неподвижного жесткого бака центрального блока, соединенных магистралью перераспределения топлива (рис. 1).

Пусть отсутствует движение топлива в расходных магистралях, а также опустим слагаемое в правой части уравнения для ЦБ, связанное с потерями энергии в ББ.



**Рис. 1.** Математическая модель системы перераспределения из жестких баков ББ в жесткий бак ЦБ

Для этого случая полученная система уравнений упрощается и может быть записана в виде

$$\Delta \ddot{H}_{Ц} + 2\varepsilon_{Ц} \Delta \dot{H}_{Ц} + \omega_{Ц}^2 \Delta H_{Ц} = \omega_{Ц}^2 \Delta H_{Бi};$$

$$\Delta \ddot{H}_{Бi} + 2\varepsilon_{Бi} \Delta \dot{H}_{Бi} + \omega_{Бi}^2 \Delta H_{Бi} = \omega_{Бi}^2 \Delta H_{Ц}, \quad i = 1 \dots 4.$$

Изучение подобной модели помогло выяснить основные собственные динамические особенности системы перераспределения топлива. Здесь свободные движения топлива в магистралях перераспределения в предположении отсутствия возмущений со стороны корпуса и расходных магистралей.

В случае возникновения свободных движений топлива в магистралях перераспределения из состояния покоя имеем выражения:

$$\Delta H_{Ц} = \gamma_{Ц}a + \gamma_{Бi}b + \gamma_{Бi} \frac{a-b}{\Omega} \Omega_1 e^{-\varepsilon_1 t} \sin(\Omega t + \varphi);$$

$$\Delta H_{Бi} = \gamma_{Ц}a + \gamma_{Бi}b - \gamma_{Ц} \frac{a-b}{\Omega} \Omega_1 e^{-\varepsilon_1 t} \sin(\Omega t + \varphi),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \Omega / \varepsilon_1.$$

Если в результате мгновенного приложения давления скорости изменения  $\Delta H_{Ц}$ ,  $\Delta H_{Бi}$  приобретут начальные конечные значения, то свободные движения уровня топлива будут следовать зависимости

$$\Delta H_{Ц} = (\gamma_{Ц}a_1 + \gamma_{Бi}b_{1i})(1 - e^{-2\varepsilon_1 t}) / 2\varepsilon_1 + \gamma_{Бi} \frac{a_1 - b_{1i}}{\Omega} e^{-\varepsilon_1 t} \sin(\Omega t);$$

$$\Delta H_{Бi} = (\gamma_{Ц}a_1 + \gamma_{Бi}b_{1i})(1 - e^{-2\varepsilon_1 t}) / 2\varepsilon_1 - \gamma_{Ц} \frac{a_1 - b_{1i}}{\Omega} e^{-\varepsilon_1 t} \sin(\Omega t);$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \Omega / \varepsilon_1.$$

**Вторая модель:** «Жесткие баки + магистраль перераспределения + колебания корпуса» (рис. 2).

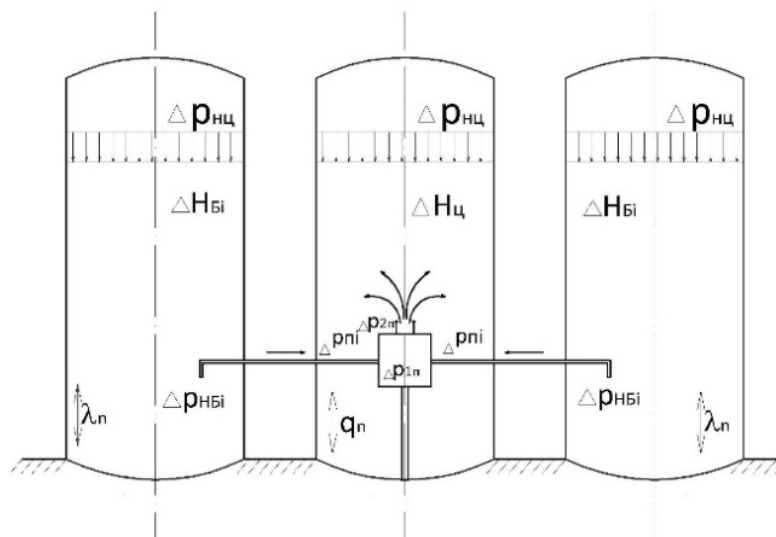
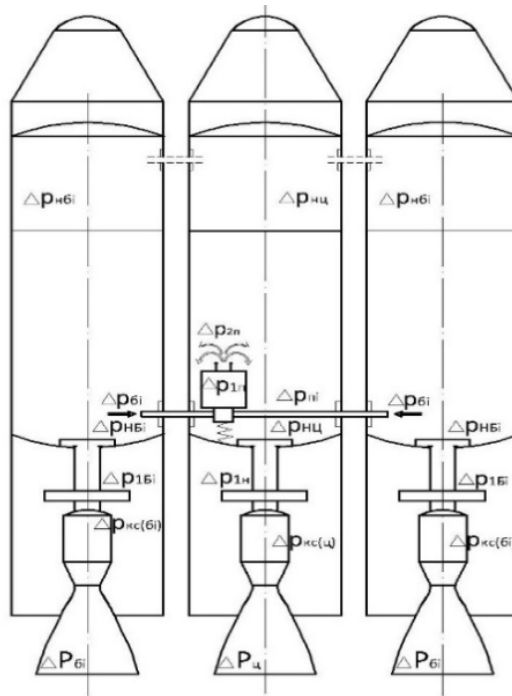


Рис. 2. Математическая модель системы перераспределения из жестких баков ББ в жесткий бак ЦБ с колебаниями корпусов

Приняты свободные колебания в системе перераспределения. Здесь может быть изучено влияние продольных колебаний корпуса на перераспределение топлива:

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{H}_{Ц} + 2\varepsilon_{Ц} \Delta \dot{H}_{Ц} + \omega_{Ц}^2 \Delta H_{Ц} &= \omega_{Ц}^2 \Delta H_{Бi} + C_{Ц\dot{H}} \Delta \dot{H}_{Бi} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_{Ц\ddot{q}_n} \ddot{q}_n + C_{Ц\dot{q}_n} \dot{q}_n + \sum_{i=1}^N C_{Ц\ddot{\lambda}_n^i} \ddot{\lambda}_n^i), \\ \Delta \ddot{H}_{Бi} + 2\varepsilon_{Бi} \Delta \dot{H}_{Бi} + \omega_{Бi}^2 \Delta H_{Бi} &= \omega_{Бi}^2 \Delta H_{Ц} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (C_{Б\ddot{\lambda}_n^i} \ddot{\lambda}_n^i + C_{Б\dot{\lambda}_n^i} \dot{\lambda}_n^i + C_{Б\ddot{q}_n} \ddot{q}_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

**Третья модель:** «Жесткие баки + магистраль перераспределения + расходные магистрали + колебания корпуса». Рассмотрим более сложную математическую модель (рис. 3), учитывающую движение топлива в расходных магистралях и камерах сгорания двигателей.



**Рис. 3.** Математическая модель системы перераспределения с жесткими баками, топливными магистралями до входа в насос

В данной модели добавлены уравнения для отклонений давления на входе в насосы системы подачи топлива (СПТ) ЦБ и  $i$ -го ББ.

Уравнения возмущенного движения гидродинамической системы в этом случае запишутся в следующем виде:

$$\Delta\ddot{p}_{1n} + 2\varepsilon_M \Delta\dot{p}_{1n} + \omega_M^2 \Delta p_{1n} = +c_{1c} \Delta H_{1c};$$

$$\Delta\ddot{p}_{1Bi} + 2\varepsilon_{Mi} \Delta\dot{p}_{1Bi} + \omega_{Mi}^2 \Delta p_{1Bi} = +c_{Bi} \Delta H_{Bi}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\Delta\ddot{H}_{1c} + 2\varepsilon_{1c} \Delta\dot{H}_{1c} + \omega_{1c}^2 \Delta H_{1c} = \omega_{1c}^2 \Delta H_{Bi} + C_{1cp} \Delta\ddot{p}_{1n} + C_{1cp} \Delta\dot{p}_{1n} + C_{1cp} \Delta p_{1n};$$

$$\Delta\ddot{H}_{Bi} + 2\varepsilon_{Bi} \Delta\dot{H}_{Bi} + \omega_{Bi}^2 \Delta H_{Bi} = \omega_{Bi}^2 \Delta H_{1c} + C_{Bip} \Delta\ddot{p}_{1n} + C_{Bip} \Delta\dot{p}_{1n} + C_{Bip} \Delta p_{1n}.$$

Эта система уравнений описывает совместные собственные колебания двух парциальных систем: состоящей из системы подачи топлива с двигательной установкой и системы перераспределения. Система перераспределения выражена через компоненты отклонений уровней топлива.

Приведенные уравнения, описывающие динамику системы перераспределения, в качестве обобщенной координаты содержат отклонения уровня топлива в баках.

### Литература

1. Биркин И.А. Об эффективности перелива топлива между ракетными ступенями. *Актуальные проблемы российской космонавтики. Материалы XXXV Академических чтений по космонавтике. Москва, 2011 г.* Москва, 2011, с. 42–43.
2. Колесников К.С. *Динамика ракет.* Москва, Машиностроение, 2003. 520 с.
3. Дьяченко М.И., Хунг Нгуен Зуй, Темнов А.Н. О движении несжимаемой жидкости в топливных баках с заборными устройствами. *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*, 2017, т. 16, № 2, с. 23–35.

## Models of dynamic system with liquid component redistribution

© M.I. Dyachenko\*, A.N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): s\_masyanya@mail.ru, antt45@mail.ru

**Abstract.** The paper considers dynamic models of a heavy-class launch vehicle (LV) with fuel redistribution from the side tanks of the 1st stage to the central tank or the central fuel line of the 2nd stage. In the first case, this is done with the help of an additional pump in the central tank, in the second case, with the help of pressure drops in the gas cushions of the 1st and 2nd stage tanks. This complication of the fuel supply increases the mass of the payload launched into orbits [1] and is a poorly studied problem of the LV dynamics. The models under consideration include deformable and solid bodies with cavities partially filled with redistributed fluid, as well as hydraulic connections with lumped parameters. The proposed models are described by both partial differential equations and ordinary differential equations [2]. As a result of the analysis of the initial



expressions, a system of linear differential equations was obtained, which describes the hydrodynamic processes of the disturbed movement of fuel in the tanks, flow lines, fuel supply pipelines between the stages, taking into account the longitudinal vibrations of the central and side tanks [3].

**Keywords:** *hydraulic communications, fuel fluctuations, launch vehicle, longitudinal vibrations.*

## References

1. Birkin I.A. On the efficiency of fuel overflow between rocket stages. *Actual problems of the Russian cosmonautics. Materials of the XXXV academic readings in cosmonautics. Moscow, January 2011.* Moscow, 2011, pp. 42–43.
2. Kolesnikov K.S. *The dynamics of rockets.* Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003, p. 520.
3. Dyachenko M.I., Hung Nguyen Duy, Temnov A.N. Fluctuations of liquid fuel in tanks with oil recovery units. *Bulletin of Samara University. Aerospace engineering, technology and mechanical engineering*, 2017, vol. 16, no. 2, pp. 23–35.  
DOI: 10.18287 / 2541-7533-2017-16-2-23-35

## О построении уравнений динамики управляемых систем

© Р.Г. Мухарлямов\*, И.Е. Каспирович

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

\*E-mail: robgar@mail.ru

**Аннотация.** Излагаются методы построения уравнений динамики систем управления и алгоритмы достижения целей управления, заданных уравнениями связей. Уравнения движений системы второго порядка следуют из принципов механики с предварительным определением множества виртуальных перемещений. Введением уравнений программных связей определяются условия стабилизации связей. Приводится решение задачи управления системой с инерционными приводами. Предлагается метод построения дифференциальных уравнений системы с голономными и линейными неголономными программными связями с последующим приведением к заданной структуре. Приводятся результаты решения задачи управления производственными, робототехническими и другими системами.

**Ключевые слова:** *динамика, система, устойчивость, уравнения, связи, стабилизация.*

**Введение.** При численном интегрировании накопление ошибок или отклонений от заданных уравнений связей может привести к неустойчивости численного решения. Чтобы избежать этого накопления, Баумгарте в статье [1] предложил не рассматривать механиче-

ские связи как частные интегралы, а, скорее, приравнять сначала их полные производные по времени к некоторой произвольной линейной форме. Соответствующее соотношение коэффициентов линейной формы может аннигилировать некоторые отрицательные эффекты накопления ошибок. В работе [2] рассмотрены некоторые методы оценки допустимых соотношений подобных коэффициентов. Метод Баумгарте можно использовать для того, чтобы построить систему дифференциальных уравнений по заданному набору связей с априорно устойчивым численным решением относительно уравнений связей. Некоторые обобщенные методы решения обратных задач исследованы в работе [3]. Построенные с помощью подобных методов системы исследуются на приводимость к виду уравнений Лагранжа второго рода с функцией диссипации Релея [4].

**Постановка задачи и выводы.** Пусть механическая система описывается набором обобщенных координат  $q = (q^1, \dots, q^n)$  и скоростей  $\dot{q} = dq/dt = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ . Рассмотрим следующую систему механических связей:

$$h^j = \dot{q}^j - v^j(q), \quad j = 1, \dots, n,$$

где  $v(q)$  — произвольная вектор-функция.

Для решения задачи стабилизации воспользуемся методом Баумгарте с использованием произвольной однородной функции по вектору  $h$ :

$$\dot{h}^j = F^j(h, q, \dot{q}). \quad (1)$$

Семейство дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющих связям  $h = 0$ , с учетом стабилизации (1) можем записать в следующем виде:

$$f_a = \ddot{q}^a - \frac{\partial v^a}{\partial q^b} \dot{q}^b - F^a(h, q, \dot{q}) = 0; \quad a, b = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Исследование системы (2) на редуцируемость к виду уравнений Лагранжа второго рода с диссипативной функцией приводит к выводу о том, что обобщенные условия Гельмгольца ограничивают возможный вид функции  $F$  следующим соотношением:

$$\frac{\partial v^a}{\partial q^b} + \frac{\partial F_a}{\partial h^b} + \frac{\partial F_a}{\partial \dot{q}^b} + \frac{\partial v^b}{\partial q^a} + \frac{\partial F_b}{\partial h^a} + \frac{\partial F_b}{\partial \dot{q}^a} + d_{ab} + d_{ba} = 0, \quad (3)$$

где  $d_{ab} = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}$ ;  $D$  — функция диссипации.

Данное уравнение можно рассматривать как уравнение относительно функции стабилизации  $F$ . Проведенный анализ нетривиальных решений (3) показывает, что лишь линейное относительно связей решение может удовлетворять условию однородности. Таким образом, функция стабилизация может иметь только линейную структуру:  $F_a = k_{ab}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})h^b$ .

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-08-00261-а.*

### Литература

1. Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1972, no. 1, pp. 1–16. DOI: 10.1016/0045-7825(72)90018-7
2. Mukharlyamov R.G. Stabilization of the motions of mechanical systems in prescribed phase-space manifolds. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, no. 70, pp. 210–222. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2006.06.004
3. Llibre J., Ramirez R. *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications*. Volume 313 of Progress in Mathematics. Springer International Publ., Cham, 2016.
4. Crampin M., Mestdag T., Sarlet W. On the generalized Helmholtz conditions for lagrangian systems with dissipative forces. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2010, Bd. 90, S. 502–508. DOI: 10.1002/zamm.200900327.arXiv:1003.1840

## On construction of dynamical equations of controlled systems

© R.G. Mukharlyamov\*, I.E. Kaspirovich

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): robgar@mail.ru

**Abstract.** Methods of dynamics equations constructing for control systems and algorithms for achieving control purpose set by the constraint equations are described. The equations of motion of the second-order system follow from the principles of mechanics with a preliminary definition of the set of virtual displacements. By introducing the equations of program constraints, the conditions for constraint stabilization are determined. A solution to the control problem for system with inertial drives is given. A method is proposed for constructing differential equations of a system with holonomic and linear non-holonomic program constraints with subsequent reduction to a given structure. The results of solving the problem of control for production, robotic and other systems are presented.

**Keywords:** *dynamics, system, stability, equations, relations, stabilization.*

*This work was supported by the grant no. 19-08-00261-a.*

## References

1. Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1972, no. 1, pp. 1–16. DOI: 10.1016/0045-7825(72)90018-7
2. Mukharlyamov R.G. Stabilization of the motions of mechanical systems in prescribed phase-space manifolds. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, no. 70, pp. 210–222. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2006.06.004
3. Llibre J., Ramirez R. *Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications*. Volume 313 of Progress in Mathematics. Springer International Publ., Cham, 2016.
4. Crampin M., Mestdag T., Sarlet W. On the generalized Helmholtz conditions for lagrangian systems with dissipative forces. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2010, Bd. 90, S. 502–508. DOI: 10.1002/zamm.200900327.arXiv:1003.1840

## Управление движением внутренней массы для активного гашения колебаний крупногабаритных несущих конструкций

© С.А. Кумакшев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия  
E-mail: kumak@ipmnet.ru

**Аннотация.** Крупногабаритные нагруженные конструкции, несущие полезную нагрузку, широко применяются на практике. В качестве примера можно привести размещение оптических приборов на длинной штанге для наблюдения за поверхностью Земли с борта космической станции. Такая конструкция подвержена нежелательным колебаниям, размывающим изображения, полученные оптическими приборами. Предлагается способ гашения таких колебаний. Он состоит в управлении движением массы (гасителя) по направляющей, перпендикулярной несущей штанге. Управление происходит посредством силы взаимодействия гасителя с грузом. Построено линейное управление по обратной связи по отклонению и скорости как гасителя относительно конца балки, так и груза относительно станции. В рамках исследования предложены несколько способов управления: максимизирующий степень устойчивости такой колебательной системы, «мягкое» гашение колебаний и комбинированное управление с переключением коэффициентов обратной связи. Эти разные подходы к формированию коэффициентов обратной связи обладают разными преимуществами и недостатками. При максимизации степени устойчивости время переходного процесса относительно мало, но довольно большое отклонение гасителя. При «мягком» гашении амплитуда отклонения гасителя относительно мала, но уве-

личивается время переходного процесса. Комбинированное управление приводит к небольшой амплитуде отклонения гасителя при небольшом времени переходного процесса. Результаты исследования могут быть использованы при выяснении предельных характеристик процесса активного гашения колебаний крупногабаритных несущих конструкций.

**Ключевые слова:** гашение колебаний, линейная обратная связь.

**Геометрия задачи.** Будем рассматривать плоское движение механической системы [1], изображенной на рис. 1. Эта система состоит из абсолютно твердого тела 1, точечной массы 2  $m_0$ , соединенной с телом 1 упругим стержнем (балкой длиной  $l$ ) 3, и точечной массы 4  $m_1$ , которая может перемещаться вдоль направляющей 5 ( $\eta$  — смещение), жестко закрепленной на конце стержня (его смещение  $u(l, t) = \xi$ ) и перпендикулярной его оси. Тело 1 моделирует космический аппарат, точечная масса 2 — платформу с измерительной аппаратурой, стержень 3 — соединительную штангу, а точечная масса 4 — тело гасителя. Предполагается, что движение тела гасителя происходит посредством электрического мотора, где  $V$  — управляющее напряжение;  $R$  — омическое сопротивление обмотки якоря;  $k_1$  и  $k_2$  — постоянные параметры, характеризующие конкретный двигатель.

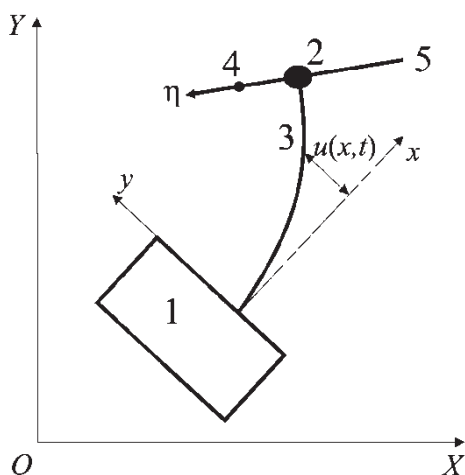


Рис. 1. Геометрия задачи

**Модель в квазистатическом приближении.** Предположим, что линейные и угловые скорости и ускорения космического аппарата равны нулю и на систему не действуют внешние силы и моменты. Тогда задача об управлении колебаниями системы с упругим стержнем сводится к задаче об управлении механической системой с двумя

степенями свободы, уравнение движения которой можно представить в виде

$$\begin{aligned} (1+\mu)\ddot{\xi} + \mu\ddot{\eta} + \xi = 0; \quad \mu(\ddot{\xi} + \ddot{\eta}) + \sigma\dot{\eta} = v; \\ \mu = m_1 / m_0; \quad \sigma = k_1 k_2 / m_0 R; \quad v = k_2 V / m_0 R. \end{aligned} \quad (1)$$

Будем искать управление  $v$  в виде линейной функции фазовых переменных этой системы:

$$v = \mu \left[ a\xi + b\dot{\xi} + \left( \frac{\sigma}{\mu} - c \right) \dot{\eta} - d\eta \right], \quad (2)$$

где  $a, b, c, d$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

**Максимизация степени устойчивости.** Быстроту затухания свободных колебаний системы (1), (2) будем характеризовать величиной, называемой степенью устойчивости, определяемой как взятый со знаком минус максимум вещественных чисел характеристического полинома системы. Можно показать, что устойчивость максимальна, когда все корни одинаковы. В этом случае коэффициенты  $a, b, c, d$  связаны соотношениями

$$(1+\mu)c + \mu b = 4d^{1/4}, \quad (1+\mu)d + \mu a + 1 = 6d^{1/2}, \quad c = 4d^{3/4}. \quad (3)$$

Из этих соотношений параметры  $a, b, c$  однозначно выражаются через  $d$ , а задача определения управления  $v$  в соответствии с равенством (2) сводится к выбору параметра  $d$  (рис. 2). Этот параметр следует выбирать из условия «компромисса» между временем затухания колебаний  $\tau \approx d^{-1/4}$  и амплитудой колебаний массы гасителя.

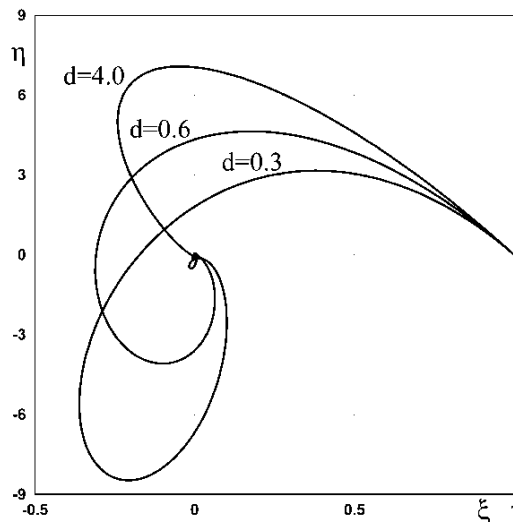
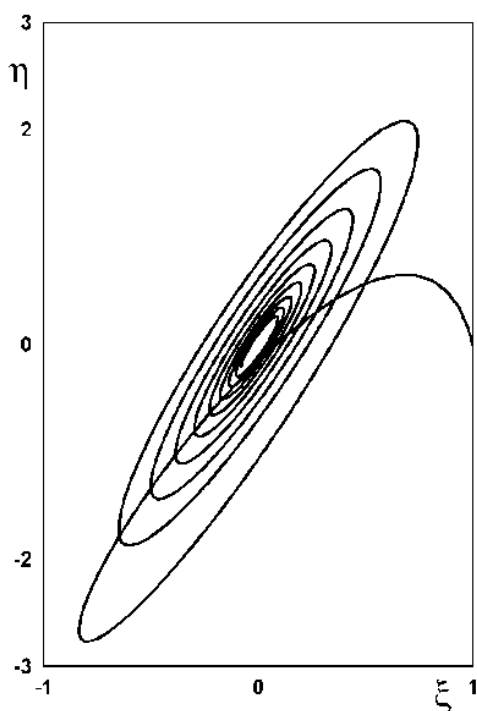


Рис. 2. Фазовые траектории при различных управляющих параметрах

**«Мягкое» гашение колебаний платформы.** Предложенное выше управление допускает существенные отклонения тела гасителя, что объясняется весьма сильной обратной связью по переменным движения платформы ( $\xi$  и  $\dot{\xi}$ ) при малых  $\mu$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  имеют порядок  $1/\mu$ . Ослабим эту обратную связь, полагая  $a=0$  и  $b=1/\sqrt{\mu}$ , а коэффициенты  $c$  и  $d$  будем выбирать так, чтобы нулевое решение системы было асимптотически устойчивым. Назовем такой способ настройки коэффициентов обратной связи «мягким» гашением колебаний платформы (рис. 3). Он приводит к меньшим отклонениям тела гасителя, но увеличивает время переходного процесса.



**Рис. 3.** Фазовые траектории при «мягком» гашении колебаний

**Комбинированное управление.** Для того чтобы избежать недостатков, свойственных управлениям, предложенным выше, можно предложить комбинированное управление (рис. 4). Оно состоит в том, что в процессе колебаний происходит переключение управления с мягкого гашения на режим максимизации устойчивости. При этом время переходного процесса не такое большое, как при мягком гашении колебаний, а амплитуда колебаний — не такая большая, как при максимизации степени устойчивости.

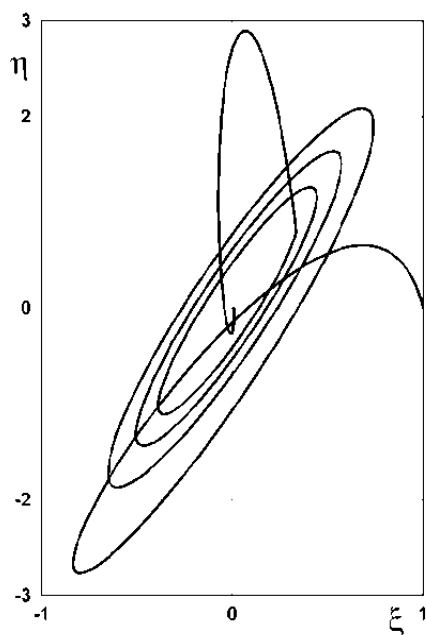


Рис. 4. Фазовые траектории при комбинированном управлении

**Заключение.** Подход, рассмотренный в данной статье, позволяет оценить возможность демпфирования упругих колебаний крупногабаритных несущих конструкций балочного или ферменного типа при помощи активного виброгасителя с поступательно перемещающейся массой.

За управляющую величину принята сила взаимодействия гасителя с грузом. Управление осуществляется путем линейной обратной связи по отклонению и скорости как гасителя относительно конца балки, так и груза относительно неподвижного основания. Коэффициенты обратной связи формируются таким образом, чтобы уменьшить время переходного процесса при ограничении на отклонение гасителя. Предложено комбинированное управление с переключением коэффициентов обратной связи.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00812) и по теме государственного задания АААА-А17-117021310387-0.*

#### Литература

1. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Кумакшев С.А., Чернов А.А. Активное гашение колебаний крупногабаритных несущих конструкций посредством перемещения внутренних масс. *Изв. РАН. Теория и системы управления*, 2000, № 1, с. 135–145.



## Control of internal mass movement for active damping of large-sized load-bearing structures

© S.A. Kumakshev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Russia  
E-mail: kumak@ipmnet.ru

**Abstract.** Large-sized loaded structures that carry a payload are widely used in practice. An example is the placement of optical devices on a long rod for observing the Earth's surface from the space station. This construction is subjected to undesirable vibrations that blur the images obtained by optical devices. A method for dampening such vibrations is proposed. It consists in controlling the movement of the mass (damper) along a guide perpendicular to the load-bearing rod. The force of interaction of the damper with the load performs control. Linear feedback control for the displacement and speed of both the damper relative to the end of the beam and the load relative to the station is constructed. Within the framework of the study, several control methods are proposed: maximizing the degree of stability of such an oscillatory system, "soft" damping of vibrations, and combined control with switching of feedback coefficients. These different approaches to the formation of the feedback coefficients have different advantages and disadvantages. When the degree of stability is maximized, the transition time is relatively short, but the displacement of the damper is quite large. With "soft" damping, the amplitude of the damper displacement is relatively small, but the transition time increases. Combined control leads to small amplitude of the damper displacement with a short transition time. The results of the study can be used to determine the limiting characteristics of the process of active damping of large-sized load-bearing structures.

**Keywords:** vibration damping, linear feedback.

### References

1. Akulenko L.D., Bolotnik N.N., Kumakshev S.A., Chernov A.A. Active damping of vibrations of large-sized load-carrying structures by moving internal masses. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2000, vol. 39, no. 1, pp. 128–138.

## Об уравнениях движения твердого тела

© В.В. Лапшин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: lapshin032@bmstu.ru

**Аннотация.** Традиционно в качестве уравнений движения твердого тела используются теорема о движении центра масс и теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс (осей

Кёнига). Однако при исследовании движение твердого тела в ряде случаев в качестве обобщенных координат целесообразно выбрать координаты некоторой характерной точки твердого тела (полюса), не совпадающей с центром масс, и углы поворота тела вокруг этой точки. В работе получены уравнения движения твердого тела для этих обобщенных координат. Это важно при моделировании движения различных объектов, в том числе транспортных средств. В процессе движения транспортного средства могут изменяться его масс-инерционные характеристики, в том числе положение центра масс и направление главных осей инерции, масса и моменты инерции.

**Ключевые слова:** динамики, уравнения движения, твердое тело.

Обычно для описания движения твердого тела используются теорема о движении центра масс и теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс [1–7]. При этом в качестве обобщенных координат, определяющих положение твердого тела, используются координаты центра масс и три угла поворота тела относительно осей Кёнига (углы Эйлера, углы Крылова, самолетные или ракетные углы). Однако при моделировании движения различных подвижных объектов (самолета, корабля, шагающего аппарата [8, 9] и т. д.) целесообразно в качестве характерной точки твердого тела (полюса) использовать некоторую фиксированную точку твердого тела, не совпадающую с центром масс. Это может быть вызвано разными причинами. Возможно, движение именно этой точки представляет особый интерес при исследовании динамики движения твердого тела. Твердое тело часто рассматривается как модель движения транспортного средства. При этом в процессе движения могут изменяться масс-инерционные характеристики движения твердого тела, в том числе положение центра масс и направление главных осей инерции, масса и моменты инерции. Они могут изменяться либо одновременно в процессе загрузки (разгрузки) транспортного средства, либо в процессе движения в результате сгорания топлива, обледенения, налипания грязи. В последнем случае можно считать, что масс-инерционные характеристики меняются медленно и их производные можно считать равными нулю. При моделировании динамики движения твердого тела начало подвижной системы координат (полюс), связанной с твердым телом, и направление осей остаются неизменными. Это полюс и оси, используемые в системе управления движением транспортного средства (твердого тела). Рассмотрим уравнения движения тела в этом случае.

В работе получены уравнения движения твердого тела в этих обобщенных координатах в проекции на оси подвижной системы координат, связанной с твердым телом.

## Литература

1. Аппель П. *Теоретическая механика. Т. 2.* Москва, Физматгиз, 1960, 487 с.
2. Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В. *Теоретическая механика.* Москва, Издательский центр «Академия», 2010, 432 с.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. *Курс теоретической механики.* Санкт-Петербург, Издательство Лань, 2009, 736 с.
4. Голубев Ю.Ф. *Основы теоретической механики.* Москва, Издательство Московского университета, 2000, 719 с.
5. Колесников К.С., Дубинин В.В., ред. *Курс теоретической механики: учебник для вузов.* Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 758 с.
6. Маркеев А.П. *Теоретическая механика.* Москва — Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 591 с.
7. Никитин Н.Н. *Курс теоретической механики.* Санкт-Петербург, Издательство «Лань», 2011, 720 с.
8. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. *Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата.* Москва, Наука, 1984, 310 с.
9. Лапшин В.В. *Механика и управление движением шагающих машин.* Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012, 199 с.

## The equations of motion of a rigid body

© V.V. Lapshin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: vladimir@lapshin.net

**Abstract.** Traditionally, the equations of motion of a rigid body use the theorem of the center of mass and the theorem of change of angular momentum with respect to the center of mass (Koenig's axes). However, in the study of motion of a rigid body in a number of cases, the generalized coordinates is advisable to choose coordinates of a feature point of a rigid body (pole) does not match the center of mass of the body, and the angles of rotation around this point. We obtain the equations of motion of a rigid body for these generalized coordinates. This is important for mathematical modeling of the motion of various objects, including vehicles. During the motion of a vehicle, its mass-inertial characteristics may change, including the position of the center of mass and the direction of the main axes of inertia, mass and moments of inertia.

**Keywords:** *dynamics, equations of motion, solid.*

Usually, to describe the motion of a rigid body, the theorem on the motion of the center of mass and the theorem on the change in the angular momentum relative to the center of mass (Koenig's axes) are used [1–7]. In this case, the coordinates of the center of mass and three angles of rotation of the body relative to the Koenig axes (Euler angles, Krylov angles, aircraft or rocket angles) are used as generalized coordinates that determine the position of a rigid body.

However, in the investigation of motion of various moving objects (aircraft, ship, walking apparatus [8, 9], etc.), it is advisable to choose coordinates of a feature point of a rigid body (pole) does not match the center of mass of the body, and the angles of rotation around this point.

This can be due to various reasons. May be the movement of this very point is of particular interest in the investigation of the dynamics of motion of a rigid body. A rigid body is often viewed as a vehicle motion model. In this case, in the process of motion, the mass-inertial characteristics of the motion of a rigid body can change, including the position of the center of mass and the direction of the main axes of inertia, mass and moments of inertia. They can be changed either at the same time during loading (unloading) of the vehicle, or during movement as a result of fuel combustion, icing, and dirt adhesion. In the latter case, we can assume that the mass-inertial characteristics change slowly and their derivatives can be considered equal to zero. When simulating the dynamics of a rigid body, the origin of the moving coordinate system (pole) associated with the rigid body and the direction of the axes remain unchanged. These are the pole and axles used in the vehicle (rigid body) motion control system.

In this work, the equations of motion of a rigid body in these generalized coordinates are obtained in the projection on the axis of a moving coordinate system associated with the rigid body.

## References

1. Appel P. *Teoreticheskaya Mekhanika* [Theoretical Mechanics]. Vol. 2. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 487 p.
2. Bolotin S.V., Karapetian A.V., Kugushev E.I., Treschev D.V. *Teoreticheskaya Mekhanika* [Theoretical Mechanics]. Moscow, Akademia Publ., 2010, 432 p.
3. Butenin N.V., Lunts Ia.L., Merkin D.R. *Kurs Teoreticheskoi Mekhaniki* [Course of Theoretical Mechanics]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2009, 736 p.
4. Golubev Yu.F. *Osnovy Teoreticheskoi Mekhaniki* [Foundations of Theoretical Mechanics]. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, 2000, 719 p.
5. Kolesnikov K.S., ed. *Kurs Teoreticheskoi Mekhaniki* [Course of Theoretical Mechanics]. Moscow, BMSTU Publ., 2011, 758 p.
6. Markeev A.P. *Teoreticheskaya Mekhanika* [Theoretical Mechanics], Moscow, Igevs, NITsc "Reguliarnaya i haoticheskaya dinamika" Publ., 2001, 591 p.
7. Nikitin N.N. *Kurs Teoreticheskoi Mekhaniki* [Course of Theoretical Mechanics]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2011, 720 p.
8. Okhotsimsky D.E., Golubev U.Ph. *Mehanika i Upravlenie Dviganiem Avtomaticheskogo Shagayushhego Apparata* [Mechanics and Motion Control of Automatic Walking Vehicle]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 310 p.
9. Lapshin V.V. *Mehanika i Upravlenie Dviganiem Shagayushih Mashin* [Mechanics and Motion Control of Walking Machines]. Moscow, BMSTU Publ., 2012, 199 p.

## Учет изменения нормальной составляющей реакции склона в математической модели равновесного горнолыжного резаного поворота

© С.Д. Леготин<sup>1\*</sup>, К.Б. Обносков<sup>1</sup>, А.А. Ривлин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>Учебный центр Федерации горнолыжного спорта и сноуборда России,  
Москва, Россия

\*E-mail: legotin.msiu@mail.bmstu.ru

**Аннотация.** Представленная работа посвящена корректировке математической модели движения горнолыжника в равновесном резаном повороте при управляемой лыжником ангуляции с учетом фактического изменения величины нормальной реакции склона. Учет текущей величины нормальной реакции склона может приводить как к изменениям траектории движения, так и к изменениям динамики положения тела спортсмена при выполнении горнолыжного поворота. Оценка влияния изменения нормальной реакции склона необходима при описании биомеханики и моделировании горнолыжного поворота.

**Ключевые слова:** биомеханика спорта, слаломная траектория, ангуляция, наклон лыжника, резаный (карвинговый) поворот.

В работе [1] в условиях относительного равновесия движущегося в резаном повороте лыжника, при которых линия действия вектора равнодействующей опорных реакций проходит через центр масс лыжника (т. С), получены формулы для векторного уравнения движения центра масс лыжника в проекциях на оси, касательной ( $\tau$ ) и нормальной ( $n$ ) к проекции траектории движения точки С на склон, а также по направлению ( $z$ ) нормали к склону:

$$ma_{c\tau} = mg \sin \alpha \cos \beta - R_0 \sin \delta \sin \zeta - F_{\text{сопр}}; \quad (1)$$

$$ma_{cn} = -mg \sin \alpha \sin \beta + R_0 \sin \delta \cos \zeta; \quad (2)$$

$$ma_{cz} = -mg \cos \alpha + R_0 \cos \delta. \quad (3)$$

Здесь обозначено:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\zeta$  — соответственно крутизна склона, угол движения (угол между вектором скорости и направлением линии наибольшего ската), угол между вектором опорной реакции  $R_0$  и нормалью к склону и угол осадки, обусловленный наличием силы трения скольжения;  $m$  — масса системы лыжник — лыжи;  $g$  — ускорение свободного падения;  $F_{\text{сопр}}$  — величина силы сопротивления движению;  $a_{c\tau}$ ,  $a_{cn}$ ,  $a_{cz}$  — проекции вектора ускорения на указанные направления.

Из (3) выразим величину  $R_0$  и подставим в (2). Введем ряд допущений. За малостью  $\zeta$  пренебрежем ее влиянием на величину  $a_{cn}$ . Поскольку кривизны траектории движения центра масс и линии резаного движения лыж по склону незначительно отличаются друг [1], будем считать, что траектория движения центра масс практически соответствует линии движения лыж в фазе резаного поворота. Воспользуемся известной связью между радиусом кривизны  $\rho$  линии контакта лыжи со склоном и радиусом  $R$  ее бокового выреза:  $\rho = R \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол закантовки лыжи. Поскольку нормальное ускорение определяется скоростью и радиусом кривизны траектории  $a_{cn} = V^2/\rho$ , с учетом уже отмеченного получим:

$$\frac{V^2}{Rg} = \left[ \operatorname{tg} \delta \left( \cos \alpha + \frac{a_{cz}}{g} \right) - \sin \alpha \sin \beta \right] \cos \theta. \quad (4)$$

Величина угла закантовки  $\theta$  равна сумме угла наклона опорной линии  $\delta$  и угла дополнительной закантовки лыж, обусловленного ангуляцией лыжника (угол  $\varphi$ ):

$$\theta = \delta + \varphi, \quad (5)$$

что позволяет, введя безразмерные параметры, переписать (4) в виде

$$\tilde{V}^2 = [\operatorname{tg} \delta (\cos \alpha + \tilde{a}) - \sin \alpha \sin \beta] \cos(\delta + \varphi). \quad (6)$$

Здесь  $\tilde{V}$  и  $\tilde{a}$  — безразмерная скорость и безразмерное нормальное к склону ускорение центра масс, определяемые как:

$$\tilde{V} = \frac{V}{\sqrt{Rg}}; \quad \tilde{a} = \frac{a_{cz}}{g}. \quad (7)$$

Как показано в [2], уравнение (6) позволяет связать угол наклона опорной линии  $\delta$  и ангуляцию  $\varphi$  с остальными кинематическими параметрами движения, решая его численно совместно с заданной стелевой функцией  $\varphi = \varphi(\delta)$ . Как видно из (6), его численное решение для угла  $\delta$  с учетом связи  $\varphi(\delta)$  зависит от значений текущих параметров  $\tilde{V}$ ,  $\beta$  и  $\alpha$ .

Расстояние  $z$  от центра масс  $C$  до склона определяется длиной  $\ell$  опорного отрезка [3] и его наклоном ( $\delta$ ):  $z = \ell \cdot \cos \theta$ . Тогда нормальный к склону компонент скорости при неизменной длине  $\ell$  определяется как:

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \ell \frac{d(\cos \theta)}{dt} = -\ell \sin \theta \frac{d\theta}{dt}. \quad (8)$$

Выразим длину элемента дуги через скорость движения лыж и время, с одной стороны, и через радиус кривизны и изменение угла движения — с другой:  $V dt = R \cos \theta d\beta$ . Отсюда выразим дифференциал времени и подставим в (8):

$$V_z = -\frac{V \ell \sin \theta}{R \cos \theta} \frac{d\theta}{d\beta} = -\frac{V \ell}{R} \operatorname{tg} \theta \frac{d\theta}{d\beta}. \quad (9)$$

Оценим величину нормального к склону ускорения  $a_{cz}$ :

$$\begin{aligned} a_{cz} &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{V dV_z}{R \cos \theta d\beta} = -\frac{V \ell}{R^2 \cos \theta} \frac{d(V \operatorname{tg} \theta \frac{d\theta}{d\beta})}{d\beta} = \\ &= -\frac{V \ell^2}{R^2 \cos \theta} \left( \operatorname{tg} \theta \frac{dV}{d\beta} \frac{d\theta}{d\beta} + \frac{V}{\cos^2 \theta} \left( \frac{d\theta}{d\beta} \right)^2 + V \operatorname{tg} \theta \frac{d^2 \theta}{d\beta^2} \right) = \\ &= -\frac{V^2 \ell^2}{R^2 \cos^2 \theta} \left( \frac{\sin \theta}{V} \frac{dV}{d\beta} \frac{d\theta}{d\beta} + \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{d\theta}{d\beta} \right)^2 + \sin \theta \frac{d^2 \theta}{d\beta^2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для безразмерных форм ускорения и скорости выражение преобразуется к следующему виду:

$$\tilde{a} = -\frac{\ell \tilde{V}^2}{R \cos^2 \theta} \left[ \frac{1}{\cos \theta} \left( \frac{d\theta}{d\beta} \right)^2 + \frac{\sin \theta}{\tilde{V}} \frac{d\tilde{V}}{d\beta} \frac{d\theta}{d\beta} + \sin \theta \frac{d^2 \theta}{d\beta^2} \right]; \quad (11)$$

$$\tilde{a} = -\frac{\ell}{R} \tilde{V}^2 \tilde{\kappa} \left[ \tilde{\kappa}^2 \left( \frac{d\theta}{d\beta} \right)^2 + \sqrt{\tilde{\kappa}^2 - 1} \left( \frac{1}{\tilde{V}} \frac{d\tilde{V}}{d\beta} \frac{d\theta}{d\beta} + \frac{d^2 \theta}{d\beta^2} \right) \right], \quad (11a)$$

где  $\tilde{\kappa} = \cos^{-1} \theta$  — безразмерная кривизна траектории.

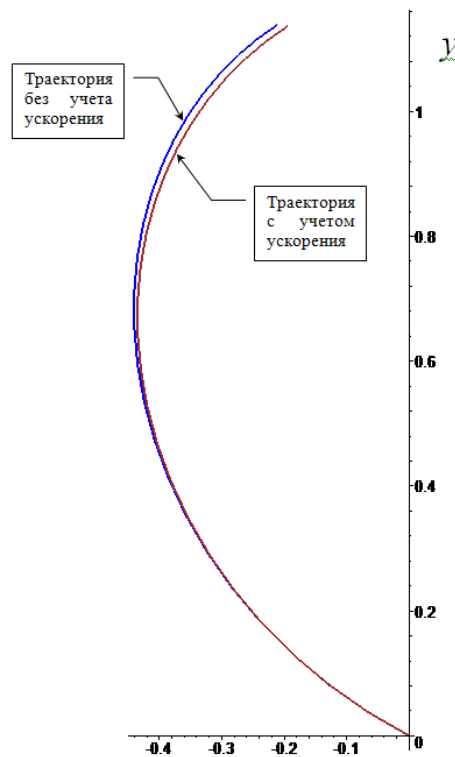
Для выполнения численного дифференцирования проведем замену дифференциалов разностями используемых величин в разностной схеме, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\beta} &\rightarrow \frac{\Delta \theta}{\Delta \beta} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h}; \\ \frac{d\tilde{V}}{d\beta} \frac{d\theta}{d\beta} &\rightarrow \frac{\Delta \tilde{V}}{\Delta \beta} \frac{\Delta \theta}{\Delta \beta} = \frac{(\tilde{V}_{i+1} - \tilde{V}_{i-1})(\theta_{i+1} - \theta_{i-1})}{4h^2}; \\ \frac{d^2 \theta}{d\beta^2} &\rightarrow \frac{\Delta \theta_{i+1} - \Delta \theta_i}{h^2} = \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь шаг аргумента  $\Delta\beta$  при дифференцировании обозначен для краткости как  $h$ .

Тогда значение  $\tilde{a}$  на  $i$ -м шаге из (11а) приобретет вид

$$\tilde{a}_i = -\frac{\ell}{R} \tilde{V}_i \tilde{\kappa}_i \frac{1}{4h^2} \left[ \tilde{\kappa}_i^2 \tilde{V}_i (\theta_{i+1} - \theta_{i-1})^2 + \sqrt{\tilde{\kappa}_i^2 - 1} \left( 4\tilde{V}_i (\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) + (\tilde{V}_{i+1} - \tilde{V}_{i-1}) (\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) \right) \right]. \quad (13)$$



Характерные траектории резаного поворота в безразмерном виде

Программная реализация численного дифференцирования по схеме (13) показала, что наиболее гладкой функция  $\tilde{a}_i(\beta)$  становится при сравнительно крупном шаге дифференцирования порядка  $h \approx 7,5^\circ$ . Учет оцененного таким образом ускорения в согласующем уравнении (6) позволил получить интегральные решения для всех геометрических и кинематических параметров поворота. В частности, на рисунке представлены характерные траектории резаного поворота в безразмерном виде, подсчитанные для одного из стилей его управления, на котором видны лишь незначительные отличия, связанные с учетом изменения нормальной реакции склона.



**Выводы.**

1. Создана математическая модель равновесного резаного горнолыжного поворота с учетом нормальной к склону составляющей ускорения.
2. Реализована компьютерная модель такого поворота.
3. Определены параметры компьютерной модели, обеспечивающие получение приемлемых динамических параметров движения.
4. Установлено, что учет нормальной к склону составляющей ускорения приводит к незначительным изменениям динамических и геометрических параметров движения при резаном повороте.

**Литература**

1. Леготин С.Д., Ривлин А.А., Данилин В.И. Механика горных лыж: резаный поворот без ангуляции. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2017, вып. 7. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2017-7-1632>
2. Legotin S.D., Rivlin A.A., Obnosov K.B. Mechanics of alpine skiing: carve turn with angulation. *Journal of Physics: Conference Series (JPCS)*, 2020, vol. 1705, art. 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1705/1/012034
3. Legotin S.D., Rivlin A.A. Mechanics of stability's loss in the skiing turning. *Journal of Physics: Conference Series (JPCS) 2019*. 2019, vol. 1301, art. 012020. DOI: 10.1088/1742-6596/1301/1/012020

**Accounting for changes in the normal component of the slope reaction in the mathematical model of an equilibrium ski carve turn**© S.D. Legotin <sup>1\*</sup>, K.B. Obnosov <sup>1</sup>, A.A. Rivlin <sup>2</sup><sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia<sup>2</sup>Training Center of Russian Alpine Ski and Snowboard Federation, Moscow, Russia

\*E-mail: legotin.msiu@mail.bmstu.ru

**Abstract.** The presented work is devoted to the correction of the mathematical model of the movement of the skier in the equilibrium carve turn with the angulation controlled by the skier, taking into account the actual change in the value of the normal reaction of the slope. Taking into account the current value of the normal reaction of the slope can lead to both changes in the trajectory of movement and changes in the dynamics of the athlete's body position when performing a ski turn. Assessment of the effect of changes in the normal slope response is necessary in the description of biomechanics and modeling of the ski turn.

**Keywords:** *biomechanics of sport, slalom trajectory, angulation, skier's inclination, carve turn.*

## Спасение шагающего робота из аварийного положения на спине

© Ю.Ф. Голубев<sup>1,2</sup>, В.В. Корянов<sup>1</sup>, Е.В. Мелкумова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ИПМ имени М.В. Келдыша РАН, Россия, Москва,

<sup>2</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, Москва,

E-mail: golubev@keldysh.ru, elena\_v\_m@mail.ru

**Аннотация.** Предложен метод раскачивания шестиногого шагающего робота с целью обеспечить его переворот из положения «вверх ногами». В качестве опоры рассмотрены горизонтальная плоскость и наклонная плоскость с небольшим уклоном в сторону переворота. Показано, что переворот возможен при помощи циклического движения ног, если корпус имеет верхнюю оболочку в виде усеченного цилиндра. Ноги на заранее выбранном краю корпуса, через который должен произойти переворот, являются пассивными и выпрямляются вдоль корпуса для того, чтобы не мешать раскачиванию. Ноги на противоположном краю являются активными, они осуществляют синхронное движение в плоскости, перпендикулярной продольной оси корпуса, при фиксированном угле в колене. Выполнено аналитическое исследование, а также компьютерное моделирование полной динамики робота, контактирующего с опорой, средствами программного комплекса «Универсальный механизм».

**Ключевые слова:** шестиногий робот, аварийная ситуация, переворот корпуса, раскачивание.

**Введение.** При движении робота по бездорожью [1] могут возникать различные аварийные ситуации. Проблематичным является случай, когда робот оказывается в перевернутой позиции с ногами, ориентированными вверх. Для многоногого робота с корпусом в виде выпуклого многоугольника [2] обратный переворот корпуса трудно выполним. Возможен спасительный вариант, когда за счет специальной конструкции ног робот может двигаться как в стандартном, так и в перевернутом положении корпуса [3]. Вместе с тем для облегчения задачи переворота корпуса можно воспользоваться резонансными эффектами, которые возникают при определенной форме корпуса за счет специальных движений ног.

Данная работа развивает результаты, представленные в работах [1, 4, 5], в части построения алгоритмов управления поведением робота в экстремальных ситуациях с использованием методов компьютерного моделирования. Полная динамическая модель робота формируется автоматически средствами комплекса «Универсальный механизм» [6].

Решаемая задача формулируется следующим образом. В результате непредвиденной случайности шагающий робот оказывается лежащим на спине в положении «вверх ногами». Он должен без посторонней помощи за счет имеющихся у него ресурсов по управлению перевернуться в исходное рабочее положение, когда ноги находятся в опоре, а корпус — наверху. Подобного рода ситуации нередко встречаются в мире животных и особенно среди насекомых и рептилий, у которых имеется широкий твердый корпус. Например, жуки или черепахи, и все они в процессе эволюции научились преодолевать подобные затруднения. Методы, которые они используют, включают в себя приемы подтягивания и отжимания от опорной поверхности [7, 8].

Ниже предлагается другой метод переворота робота из аварийного в рабочее положение с использованием динамических эффектов, которые возникают, когда робот, оказавшись в перевернутом положении, начинает без опоры ногами о грунт раскачивать корпус за счет специально сформированного движения ног, обеспечивающего увеличение амплитуды качаний. В результате амплитуда достигает такого значения, что робот обязательно переворачивается. Очевидно, что в рассматриваемом случае простой периодический закон движения ног не приведет к успеху, так как период качаний корпуса будет зависеть от амплитуды. В работе представлен конструктивно построенный алгоритм решения сформулированной задачи. Этот алгоритм был отработан на программном комплексе «Универсальный механизм» [6] с учетом полной динамики системы в целом, имеющей двадцать четыре степени свободы. Результаты компьютерного моделирования свидетельствуют о принципиальной реализуемости предложенного алгоритма управления шагающим роботом.

**Постановка модельной задачи.** Для облегчения процесса переворота корпус шагающего робота в рабочем положении может иметь форму выпуклой вверх части цилиндра, срезанного плоскостью, параллельной оси цилиндра. Рассмотрим следующую модельную задачу. Предположим, что на горизонтальной опорной прямой лежит однородный сегмент круга, имеющий массу  $M$ . Сегмент ограничен дугой окружности радиуса  $R$  и хордой, отстоящей от центра окружности на расстояние  $h$ . Дуга окружности сегмента касается опорной прямой в точке  $A$ . Сегмент может перекачиваться без проскальзывания по опорной прямой, поворачиваясь вокруг центра упомянутой окружности на угол  $\varphi$ , отсчитываемый от вертикального радиуса, направленного в точку  $A$  касания сегмента с прямой. Если  $\varphi = 0$ , то сегмент лежит так, что его хорда параллельна опорной прямой.

К правому концу  $B$  хорды сегмента плоским шарниром прикреплена нога, стержень массы  $m_1$ , который может вращаться

относительно сегмента на угол  $\psi$ . Угол  $\psi$  отсчитывается от внешнего перпендикуляра к хорде сегмента. Когда  $\psi = 0$ , нога направлена перпендикулярно хорде в сторону от опорной прямой. На другом конце хорды в точке  $E$  расположена точечная масса  $m_2$ , уравновешивающая ногу. Центр масс  $D$  ноги расположен на расстоянии  $\rho$  от точки  $B$ . Центр масс  $C$  сегмента расположен на срединном перпендикуляре к хорде на расстоянии  $r$  от центра окружности сегмента. Сегмент имеет момент инерции  $J$  относительно прямой, проходящей через центр масс сегмента перпендикулярно плоскости сегмента. Момент инерции ноги относительно ее центра масс равен  $J_r$ . Заметим, что в соответствии с постановкой задачи допустимая величина  $\operatorname{tg}\varphi$  ограничена пределами

$$-\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} \leq \operatorname{tg}\varphi \leq \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h}.$$

Для значений  $\operatorname{tg}\varphi$ , выходящих из этого диапазона, следует полагать

$$\xi_A = R \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} \sin\varphi, \quad \dot{\xi}_A = 0$$

в системе координат  $O\xi\zeta$  с началом  $O$  в точке касания сегмента с опорной прямой при  $\varphi = 0$ , осью  $O\xi$ , направленной вдоль опорной прямой справа налево, осью  $O\zeta$ , направленной вертикально вверх.

**Раскачивание робота на спине.** Аналитическое описание процесса раскачивания выполняется с помощью теоремы об изменении кинетического момента системы относительно подвижной точки  $A$  [9, 10]. Из анализа модельной задачи следует, что управляющий угол отклонения активных ног нужно переключать между двумя постоянными значениями (они соответствуют предельным положениям активных ног при махах в сторону пассивных ног и обратно) в моменты времени, когда угловая скорость корпуса обращается в нуль. Переключение происходит в виде линейного перехода.

Компьютерное моделирование полной динамики робота проводится с целью уточнения параметров раскачивания при учете наличия трения в контакте (используется встроенная в «Универсальный механизм» [6] модель трения, основанная на вязкоупругом взаимодействии тел в точке контакта, а также учитывается момент трения качения).

В случае опоры в виде горизонтальной плоскости при уменьшении массы ног требуется увеличивать угол отмашки (мах в сторону, противоположную стороне переворота).

Для наклонной плоскости с небольшим (меньше  $15^\circ$ ) уклоном в сторону переворота в начале движения, когда пассивные ноги распрямляются, они касаются коленями плоскости. В компьютерных экспериментах это не мешало дальнейшему раскачиванию. Уклон в данном случае способствует раскачиванию, поэтому достаточно уменьшать угол отмашки по сравнению с раскачиванием на горизонтальной плоскости.

В случае, если в месте исходного контакта робота с опорой находится ямка, эксперименты показали возможность раскачивания в некоторых случаях, когда радиус ямки немного больше радиуса усеченного цилиндра, соответствующего спине робота.

**Заключение.** Представлено решение задачи о спасении автономного шагающего робота, аварийно лежащего на горизонтальной опорной плоскости на спине в положении «вверх ногами». Для спасения робота предложена специальная форма корпуса в виде сложенных по плоскому сечению двух усеченных прямых круговых цилиндров. Разработан и аналитически обоснован [9, 10] метод амплитудного раскачивания системы в окрестности положения аварийного равновесия, позволяющий использовать кинематические и динамические возможности робота для самостоятельного спасения. Установлены отличия в раскачивании при наличии небольшого уклона опорной плоскости в сторону переворота.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ  
(проект № 19-01-00123 А).*

## Литература

1. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. *Экстремальные локомоционные возможности инсектоморфных роботов*. Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018, 212 с.
2. Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф. *Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата*. Москва, Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1984, 312 с.
3. *Robot Kingdom*. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=W9DOG47\\_xJk](https://www.youtube.com/watch?v=W9DOG47_xJk)
4. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. *Транспортировка груза на плоту инсектоморфным роботом*. *Изв. РАН. ТуСУ*, 2018, № 5, с. 136–146.
5. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В. *Переправа автономного шестиногого робота на плоту через водную преграду*. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 3. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-3-1748
6. *Универсальный механизм. Моделирование динамики механических систем*. URL: <http://www.umlabor.ru/pages/index.php?id=3> (дата обращения: 10.02.2020).
7. *Как переворачивается жук (бронзовка)*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=nbExQQ5uqqk>
8. *Черепаха-акробат*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=eFDGRrbcSMQ>
9. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В. *Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения “вверх ногами”*. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*, 2019, № 6, с. 163–176. DOI: 10.1134/S0002338819060052

10. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В. Поведение шестиногого робота в аварийной ситуации. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 3. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-3-1964

## **Rescue of the six-legged robot from an emergency position on the back**

© Yu.F. Golubev<sup>1,2</sup>, V.V. Koryanov<sup>1</sup>, E.V. Melkumova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Lomonosov State University, Moscow, Russia

E-mail: golubev@keldysh.ru, elena\_v\_m@mail.ru

**Abstract.** A method of swinging of the six-legged robot to ensure its overturn from the “upside down” position is proposed. As a support, we consider a horizontal plane and an inclined plane with a slight slope towards the flip. It is shown that the overturn is possible with the help of cyclic movement of the legs, if the body has an upper shell in the form of a truncated cylinder. The legs on the pre-chosen edge of the body through which the flip should occur, are passive, and straightened along the body so that they do not interfere with the flip. The legs on the opposite edge are active; they perform synchronous movement in a plane perpendicular to the longitudinal axis of the body, with a fixed angle in the knee. An analytical study was performed, as well as computer simulation of the full dynamics of the robot in contact with the support by means of the “Universal mechanism” software package.

**Keywords:** *six-legged robot, emergency, flipping of the robot’s body, rocking.*

**Introduction.** When the walking robot moves off-road [1], various emergencies can occur. A problematic case is when the robot is in an upside down position with its legs oriented upwards. For a multi-legged robot with a box-shaped body [2], reverse flipping of the body is difficult. A saving option is possible when due to the special design of the legs the robot can move both in the standard and inverted body positions [3]. Along with that, to facilitate the task of flipping the body, we can use the resonant effects that occur with a specific body shape due to special legs movements.

This article develops the results presented in [1, 4, 5] regarding the construction of algorithms for controlling robot behavior in extreme situations using computer experimentation methods. The full dynamic model of the robot is automatically generated by the complex Universal Mechanism [6].

The problem to be solved is formulated as follows. As a result of unforeseen accident, the walking robot is lying on its back in the “upside down” position. Robot should, without assistance, at the expense of his management resources, turn over to its original working position when its

legs are in support and the body is at the top. Such situations are often found in the animal world, and especially among insects and reptiles, which have a wide solid body. For example, beetles or turtles, and all of them learned how to overcome such difficulties in the process of evolution. The methods they use include pull-ups and push-ups from the support [7, 8].

Below, we propose another method of turning the robot from emergency to working position using dynamic effects that occur when the robot, being in an inverted position, begins to swing the body without supporting its feet on the ground due to a specially formed movement of the legs, providing an increase in the swing amplitude. As a result, the amplitude reaches such a value that the case inevitably turns over. Obviously, in this case, a simple periodic law of movement of the legs will not lead to success, since the period of swing of the body will depend on the amplitude. This work presents a constructively constructed algorithm for solving the formulated problem. This algorithm was worked out using the Universal Mechanism software package [6], taking into account the complete dynamics of the system as a whole, which has twenty four degrees of freedom. The results of computer simulation testify to the fundamental feasibility of the proposed robot control algorithm.

**Formulation of the model problem.** To facilitate the process of revolution, the body of the walking robot in the working position can be in the form of a convex upward part of the cylinder cut off by a plane parallel to the axis of the cylinder. Consider the following model problem. Suppose that on a horizontal reference line lies a homogeneous segment of a circle having mass  $M$ . The segment is bounded by an arc of a circle of radius  $R$  and a chord, which is at a distance  $h$  from the center of the circle. The arc of the segment touches the reference line at a point  $A$ . A segment can roll without slippage along the reference line, rotating around the center of the mentioned circle by an angle  $\varphi$  counted from the vertical radius directed to the point of contact of the segment with the line. If  $\varphi = 0$ , then the segment lies so that its chord is parallel to the support line.

A leg (rod) of mass  $m_1$  is attached to the right end  $B$  of the chord of the segment by a flat hinge. The rod can rotate by angle  $\psi$  relative to the segment. The angle  $\psi$  is measured from the outer perpendicular to the chord of the segment. When  $\psi = 0$ , the leg is directed perpendicular to the chord away from the reference line. At the other end of the chord, a point mass  $m_2$ , is located at the point  $E$  that balances the leg. The center of mass  $D$  of the leg is located at a distance  $\rho$  from the point  $B$ . The center of mass  $C$  of the segment is located on the median perpendicular to the chord at a distance  $r$  from the center of the circle of the segment. A segment has an inertia moment  $J$  relative to a straight line passing

through the center of mass of the segment perpendicular to the plane of the segment. The moment of inertia of the leg relative to its center of mass is  $J_r$ . Note that, in accordance with the statement of the problem, the admissible value  $\text{tg}\varphi$  is limited by the limits

$$-\frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} \leq \text{tg}\varphi \leq \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h}.$$

For values  $\text{tg}\varphi$  outside this range, it should be assumed

$$\xi_A = R \arctg \frac{\sqrt{R^2 - h^2}}{h} \sin\varphi, \quad \dot{\xi}_A = 0$$

in the coordinate system  $O\xi\zeta$  with the origin  $O$  at the point of tangency of the segment with the reference line at  $\varphi = 0$ ,  $O\xi$  axis directed along the reference line from right to left,  $O\zeta$  axis directed vertically upwards.

**Rocking the robot on its back.** The analytical description of the rocking process is performed using the theorem on changes of the system's angular momentum relative to the moving point  $A$  [9, 10]. From the analysis of the model problem, it follows that the control angle of deviation of the active legs must be switched between two constant values (they correspond to the limit positions of the active legs when swinging towards the passive legs and back) at time instants when the angular velocity of the body turns to zero. Switching occurs as a linear transition.

Computer simulation of the full dynamics of the robot is conducted to refine the parameters of rocking taking into account the presence of friction in the contact (using the built-in in "Universal mechanism" [6] friction model based on viscoelastic interaction of bodies at the points of contact, and also taking into account the torque of rolling friction).

In the case of support in the form of a horizontal plane, if the mass of the legs decreases, it is necessary to increase the angle of the reverse swing (swing in the direction opposite to the side of the flip).

For an inclined plane with a slight (less than 15 degrees) slope in the direction of a flip, at the beginning of the movement, when the passive legs are straightened, they touch the plane with their knees. In computer experiments, this did not prevent further rocking. The slope in this case contributes to swinging, so it is enough to reduce the angle of the reverse swing compared to swinging on a horizontal plane.

If there is a pit at the point of initial contact of the robot with the support, experiments have shown the possibility of rocking in some cases, when the radius of the pit is slightly larger than the radius of the truncated cylinder corresponding to the robot's back.



**Conclusions.** The solution of the problem of rescuing an autonomous legged robot, emergency lying on a horizontal supporting plane on his back in the “upside down” position is presented. To save the robot, a special body shape is proposed in the form of two truncated straight circular cylinders folded in a flat section. A method of amplitude swinging of the system in the vicinity of the emergency equilibrium position has been developed and analytically justified [9, 10], which allows using the kinematic and dynamic capabilities of the robot for self-rescue. Differences in swinging due to the small slope of the reference plane in the direction of a flip are established.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00123 A).*

## References

1. Golubev Yu.F., Koryanov V.V. *Extreme locomotion capabilities of insectomorphic robots*. Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS. Moscow, 2018, 212 p. (in Russ.)
2. Okhotsimsky D.E., Golubev Yu.F. *Mechanics and motion control of an automatic walking apparatus*. Moscow, Nauka, 1984, 312 p. (in Russ.)
3. *Robot Kingdom*: Available at: [https://www.youtube.com/watch?v=W9DOG47\\_xJk](https://www.youtube.com/watch?v=W9DOG47_xJk) (accessed 02.10.2020).
4. Golubev Yu.F., Koryanov V.V. Shipping Cargo on a Raft by an Insectomorphic Robot. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, no. 5, pp. 813–821.
5. Golubev Yu.F., Koryanov V.V. An autonomous hexapod robot crossing a water obstacle on a raft. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, iss. 3. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-3-1748 (in Russ.)
6. *Universal mechanism. Modeling the dynamics of mechanical systems*. Available at: <http://www.umlub.ru/pages/index.php?id=3> (accessed 02.10.2020).
7. *How the beetle flips over (bronze)*. Available at: <https://www.youtube.com/watch?v=nbExQQ5uqqk>
8. *Turtle acrobat*. Available at: <https://www.youtube.com/watch?v=eFDGRrbcSMQ>
9. Golubev Y.F., Koryanov V.V., Melkumova E.V. Bringing an insectomorphic robot to a normal position from an abnormal upside down position. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2019, vol. 58, no. 6, pp. 987–999. DOI: 10.1134/S1064230719060054
10. Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Melkumova E.V. Behavior of the six-legged robot in emergency situation. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, iss. 3. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-3-1964

## **О прецизионной угловой ориентации и стабилизации вращающейся антенны РЛС аэростатного базирования**

© С.Н. Саяпин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ИМАШ РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: Sayapin@ Rambler.ru

**Ключевые слова:** аэростатная антенна РЛС, двухступенная пневматическая подвеска вращающейся антенны, аэростатная система угловой ориентации и стабилизации.

В отличие от самолетных, вращающиеся антенны (ВА) РЛС аэростатного базирования имеют возможность круглосуточного обнаружения низколетящих объектов на дальних расстояниях (200...300 км), меньше ограничений по метеоусловиям и экономические преимущества [1, 2]. В то же время аэростаты подвержены в процессе эксплуатации низкочастотным колебаниям по тангажу и крену, амплитуда которых может достигать  $\pm 15^\circ$  при угловой скорости 1 град/с<sup>-1</sup>. Это приводит к отклонению оси вращения ВА РЛС от заданного положения, что недопустимо. Защита от низкочастотных колебаний в настоящее время осуществляется применением стабилизаторов аэростата в виде хвостового оперения [3, 4], а также применением пассивных или активных стабилизирующих подвесок. При этом в пассивных подвесках используют карданный или другой подвес с образованием физического маятника [2, 4], который не способен обеспечить современные требования по точности ориентации и стабилизации оси вращения ВА РЛС (не более 6 угл. мин.). Дополнительное использование следящих электроприводов с самотормозящими механическими передачами или создание активной подвески на основе трипода [5] неизбежно приведет к увеличению ее массы, потребляемой мощности и стоимости.

Решение данной проблемы предлагается осуществить за счет построения системы прецизионной угловой ориентации и стабилизации (СПУОС) ВА РЛС аэростатного базирования в виде двухступенного карданового подвеса с установленными враспор следящими пневмоприводами [6, 7]. При этом пневмоприводы соединены пневмопроводами с источником сжатого воздуха и устройствами пневмоавтоматики, выполненными из стандартных элементов, выпускаемых отечественной автомобильной промышленностью и отвечающих требованиям по надежности и эксплуатационным условиям при длительной (не менее 10 лет) эксплуатации. Ориентация и стабилизация оси вращения ВА РЛС по крену и тангажу в условиях внешних вибрационных воздействий ведется независимо по показаниям двухсте-

пенного гироскопа, жестко установленного вместе с ВА РЛС на платформе внутренней рамки карданового подвеса.

Работает СПУОС ВА РЛС аэростатного базирования следующим образом. По команде с пункта управления кабель-трос отпускается и аэростат поднимается на заданную высоту. При этом управление СПУОС ВА РЛС отключено, а избыточное одинаковое давление в рабочих камерах соответствующих пар пневмоприводов обеспечивает требуемую жесткость оси вращения ВА РЛС и фиксацию ее углового положения относительно несущей конструкции системы. После подъема аэростата на заданную высоту по команде с пункта управления производится включение управления СПУОС оси вращения ВА РЛС от прецизионных гироскопов и потенциометрических датчиков. При этом, в случае отклонения аэростата с несущей конструкцией системы по углу крена, соответствующий прецизионный гироскоп вырабатывает управляющие сигналы, которые через соответствующие сумматор, инвертор и усилители мощности подаются на соответствующие электромеханические преобразователи, осуществляющие управление положением рабочих органов пневмораспределительных устройств. При этом пневмораспределительное устройство пневмопривода соединяет его рабочую камеру с магистральным пневмопроводом и происходит его наполнение из ресивера сжатым газом, поддержание рабочего давления которого осуществляется автоматически периодическим включением компрессора от датчика давления, установленного на магистральном пневмопроводе, а пневмораспределительное устройство пневмопривода соединяет его рабочую камеру с атмосферой и обеспечивает стравливание из нее сжатого газа. В результате происходит согласованное увеличение длины первого пневмопривода пары и уменьшение длины второго. При повороте аэростата по углу крена в обратном направлении происходит, наоборот, уменьшение длины первого пневмопривода пары и уменьшение длины второго. Согласованное изменение длин пневмоприводов пары, внутренние торцы которых шарнирно связаны с рычагом внутренней рамки с платформой, а внешние — с наружной рамкой, обеспечивает поворот внутренней рамки с платформой относительно наружной рамки и несущей конструкции системы в противоположном от поворота аэростата направлении, но с одинаковой угловой скоростью. Благодаря этому обеспечивается стабилизация пространственного положения платформы и, соответственно, вертикальное направление оси вращения антенны РЛС независимо от колебаний аэростата по углу крена. Аналогично работает СПУОС при колебаниях аэростата с ВА РЛС по углу тангажа.

Для защиты СПУОС ВА РЛС от резонансных колебаний в процессе эксплуатации, повышения точности угловой ориентации, а также надежности и снижения габаритно-массовых характеристик

разработаны способ и устройство, включающие установку враспор пневмоупругих элементов в виде резинокордных оболочек, образующих пневмопривод двойного действия [7]. В процессе эксплуатации СПУОС оси вращения ВА РЛС автоматически регулируют частоты ее собственных колебаний, при этом контролируют частоты возбуждений от действия на нее внешних и внутренних возмущающих факторов, сравнивают с ее собственной частотой и при их критическом сближении изменяют жесткость установленных враспор пневмоупругих элементов и, как следствие, собственную частоту подвески путем согласованного увеличения или уменьшения давления сжатого газа в их рабочих камерах из резинокордных оболочек.

Представленная подвеска ВА РЛС универсальна и может быть также использована в других областях, например, в подъемно-транспортных устройствах, предназначенных для работы с объектами повышенной опасности, а также при проведении точных монтажных работ в труднодоступных местах, например, с помощью вертолетов или высотных кранов.

#### **Литература**

1. *Итоги науки и техники. Сборник ВИНТИИ. Серия «Воздушный транспорт»*, т. 18. Москва, 1989, с. 169–172.
2. Бойко Ю.С. *Воздухоплавание в изобретениях*. Москва, Транспорт, 1999, с. 352.
3. DeLaurier J. Prediction of tethered-aerostat response to atmospheric turbulence. *Journal of Aircraft*, 1977, vol. 14, no. 4, pp. 407–409.
4. Кисилев Ю.М., Трепов Г.В., Учватов В.И. и др. *Устройство для радиолокационного картографирования ледового покрова*. Авторское свидетельство СССР на изобретение № 1803343. Опубл. 23.03.1993, бюл. № 11.
5. Никулин Д.К. *Активное гашение колебаний локаторов, размещаемых на привязных аэростатах с использованием механизмов параллельной кинематики: Дис. ... канд. техн. наук*. Москва, ИМАШ РАН, 2008, 114 с.
6. Саяпин С.Н., Синев А.В., Лебедев В.Н. и др. *Устройство угловой стабилизации подвешенного объекта на транспортном средстве*. Патент РФ на изобретение № 2181683, 2002, бюл. изобр. № 12.
7. Саяпин С.Н., Синев А.В. *Способ защиты объекта на маятниковой подвеске от резонансных колебаний и устройство для его осуществления*. Патент РФ на изобретение № 2245470, 2005, бюл. изобр. № 3.

### **On the problem of precision angular orientation and stabilization of rotating radar antenna balloon-based**

© S.N. Sayapin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IMASH RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: Sayapin@rambler.ru

**Keywords:** *balloon radar antenna, two-stage air suspension of a rotating antenna, balloon system of angular orientation and stabilization.*

In contrast to aircraft, aerostat-based radar rotating antennas (RA) have the ability to detect low-flying objects at long distances (200...300 km) around the clock, there are fewer restrictions on weather conditions and economic advantages [1, 2]. At the same time, balloons are subject to low-frequency pitch and roll fluctuations during operation, the amplitude of which can reach  $\pm 15^\circ$  at an angular velocity of 1 degree per  $s^{-1}$ . This leads to a deviation of the axis of rotation of the radar RA from the set position, which is unacceptable. Protection against low-frequency vibrations is currently provided by the use of balloon stabilizers in the form of a tail [3, 4], as well as the use of passive or active stabilizing suspensions. At the same time, passive suspensions use a gimbal or other suspension with the formation of a physical pendulum [2, 4], which is not able to meet modern requirements for the accuracy of orientation and stabilization of the axis of rotation of the radar RA (no more than 6 arc minute). The additional use of tracking electric drives with self-braking mechanical gears or the creation of an active suspension based on a tripod [5] will inevitably lead to an increase in its weight, power consumption and cost.

The solution of this problem is due to the construction precision of the angular orientation and stabilization (CPAOS) RA radar balloon based in a two-step gimbals installed back-to-back servo pneumatic actuators [6, 7]. At the same time, the pneumatic drives are connected by pneumatic lines to a compressed air source and pneumatic automation devices made of standard elements produced by the domestic automotive industry and meeting the requirements for reliability and operating conditions for long-term (at least 10 years) operation. Orientation and stabilization of the rotation axis RA of the radar roll and pitch in terms of external vibration impacts are separated according to the testimony of two-phase gyroscope, rigidly installed with RA radar on the platform of the inner frame gimbals.

The CPAOS RA balloon-based radar works as follows. At the command from the control point, the cable is released and the balloon rises to the specified height. At the same time control CPAOS RA radar disabled, and the same excess pressure in the working chambers of respective pairs of pneumatic actuators provides the required rigidity of the rotation axis RA of the radar and fixing its angular position relative to the supporting structure of the system. After the rise of the balloon to a predetermined height according to the command control switching control CPAOS rotation axis RA of the radar from precision gyroscopes and potentiometers. In this case, if the balloon with the supporting structure of the system is deflected by the angle of roll, the corresponding precision gyroscope generates control signals that are fed through the corresponding adder, inverter and power amplifiers to the corresponding electromechanical converters that control the position of the working bodies of pneumatic distribution devices. While the pneumatic switch device of actuator connects the working chamber with the main pneumatic conduit is released and filling of the

receiver with compressed gas, maintaining the working pressure which is automatic periodic enable of the compressor from a pressure sensor installed in the main pneumatic conduit, and the pneumatic switch device of actuator connects the working chamber with the atmosphere and creates bleeding from her compressed gas. As a result, there is a coordinated increase in the length of the first pneumatic drive of the pair and a decrease in the length of the second. When the balloon is rotated along the roll angle in the opposite direction, the length of the first pneumatic drive of the pair, on the contrary, decreases and the length of the second one decreases. Agreed change of the lengths of the pneumatic actuators of the pair, the inner ends of which are pivotally connected with the lever of the internal frame with the platform, and the outer – with the outer frame provides rotation of the internal frame with the platform relative to the outer frame and supporting structure of the system in the opposite turn direction of the balloon, but with the same angular velocity. This ensures the stabilization of the spatial position of the platform and, accordingly, the vertical direction of the axis of rotation of the radar antenna, regardless of the fluctuations of the balloon in the angle of roll. The same is true for CPAOS when the oscillations of the balloon with RA radar at the corner of the pitch.

To protect the CPAOS RA radar from resonant vibrations during operation, improve the accuracy of angular orientation, as well as reliability and reduce the overall mass characteristics, a method and device have been developed that includes the installation of pneumoelastic elements in the form of rubber-cord shells forming a double-acting pneumatic drive [7]. In the process of operation CPAOS rotation axis RA of the radar automatically adjust the frequency of its oscillation, at the same time control the frequency of the excitations from acting on it external and internal disturbing factors, compared with its own frequency and when their critical convergence change the stiffness installed back-to-back pneumoelastic elements and, as a consequence, the natural frequency of the suspension by a consistent increase or reduce the pressure of compressed gas in their working chambers of the rubber-cord shells.

The presented RA radar suspension is universal and can also be used in other areas, for example, in lifting and transport devices designed to work with high-risk objects, as well as when performing precise installation work in hard-to-reach places, for example, using helicopters or high-rise cranes.

## References

1. *Itogi nauki i tekhniki. Sbornik VINITI. Seriya "Vozdushnyj transport"*, vol. 18. Moscow, 1989, pp. 169–172 (in Russ.)
2. Bojko Yu.S. *Vozduhoplavanje v izobreteniyah*. Moscow, Transport Publ., 1999, pp. 352 (in Russ.)
3. DeLaurier J. Prediction of tethered-aerostat response to atmospheric turbulence. *Journal of Aircraft*, 1977, vol. 14, no. 4, pp. 407–409.

4. Kisilev Yu.M., Trepov G.V., Uchvatov V.I., et al. *Ustrojstvo dlya radiolokacionnogo kartografirovaniya ledovogo pokrova*. Patent of USSR, no. 1803343. 1993 (in Russ.)
5. Nikulin D.K. *Aktivnoe gashenie kolebanij lokatorov, razmeshchaemyh na privyaznyh aerostatah s ispol'zovaniem mekhanizmov parallel'noj kinematiki: Diss. ... cand. eng. sc.* Moscow, IMASH RAS, 2008, 114 p.
6. Sayapin S.N., Sinev A.V., Lebedev V.N., et al. *Ustrojstvo uglovoj stabilizacii podveshennogo ob"ekta na transportnom sredstve*. Patent of Russian Federation, no. 2181683, 2002 (in Russ.)
7. Sayapin S.N., Sinev A.V. *Sposob zashchity ob"ekta na mayatnikovoj podveske ot rezonansnyh kolebanij i ustrojstvo dlya ego osushchestvleniya*. Patent of Russian Federation, no. 2245470, 2005 (in Russ.)

## **Построение и исследование вращательной динамической модели механических систем реальными законами механики**

© А.И. Смелягин

КубГТУ, Краснодар, Россия  
E-mail: asmelyagin@yandex.ru

**Аннотация.** При разработке новых машин обязательно проводят их динамический анализ. Динамический анализ машин проводится с помощью законов, теорем и методов классической механики. Так как современные машины имеют обычно сложные кинематические цепи, то непосредственное применение законов и теорем классической и аналитической механики является сложной и трудоемкой задачей. Поэтому, опираясь на современные знания, понятия и реальные законы механики, в работе разработана однозвенная вращательная динамическая модель машин и с ее помощью проведено теоретическое исследование подъемного устройства.

**Ключевые слова:** динамическая модель, масса, момент инерции, приведенный момент, приведенный момент инерции, закон движения, скорость, ускорение.

Какими бы сложными ни были машины, они состоят только из звеньев и кинематических пар, которые в результате их соединения между собой образуют кинематические цепи [1–4].

Динамический анализ машин (механических систем) проводится методами, разработанными в классической и аналитической механике, которые базируются на законах Ньютона. Анализ законов Ньютона показывает, что они не являются ни законами, ни аксиомами. Следовательно, полученные на их основе теоремы, принципы и уравнения для исследования движения машин являются приближенными. Более того,

так как машины часто имеют развитые и сложные кинематические цепи, то непосредственное применение этих законов, теорем и уравнений механики для их исследования является сложной и трудоемкой задачей. Поэтому в [5] для механических систем и материальных тел были сформулированы новые реальные законы движения и следствия.

Опираясь на знания реальных законов и понятий механики [5, 6] и учитывая, что большинство машин имеют вращательный привод, была построена однозвенная вращательная динамическая модель машин.

Однозвенная динамическая модель машин и механических систем представляет собой вращательную кинематическую пару, которая соединена со стойкой и начальным механизмом (звеном).

Звено вращается вокруг стойки под действием приложенных к нему приведенных моментов внешних сил  $M_n$  и сил инерции  $M_{\Phi n}$  с угловой скоростью и угловым ускорением и имеет приведенный момент инерции  $I_n$ .

Были найдены математические выражения для определения приведенных к начальному звену динамической модели моментов внешних сил  $M_n$  и сил инерции  $M_{\Phi n}$ , а также момент инерции  $I_n$ .

Для определения  $M_n$ ,  $M_{\Phi n}$  и  $I_n$  применялся второй реальный закон движения [5, 6], который утверждает, что работы внешних и инерционных взаимодействий материальных тел на любом перемещении равны между собой.

Проведенные с помощью разработанной динамической модели исследования динамики грузоподъемного механизма показали ее эффективность. Из полученных результатов следует, что исследования динамики машин и механических систем с помощью динамических моделей значительно упрощаются по сравнению с традиционными методами.

## **Литература**

1. Смелягин А.И. *Структура механизмов и машин*. Москва, Высш. шк., 2006, 304 с.
2. Смелягин А.И. *Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование*. Москва, ИНФРА-М, 2019, 263 с.
3. Смелягин А.И. *Структура машин, механизмов и конструкций*. Москва, ИНФРА-М, 2019, 387 с.
4. Смелягин А.И. Об основных понятиях и законах классической механики. *Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал*, 2020, № 2, с. 25–38.
5. Смелягин А.И. О реальных законах движения. *Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). Научный журнал*, 2020, № 3, с. 11–16.



## Construction and research of a rotational dynamic model of mechanical systems using real laws of mechanics

© A.I. Smelyagin

Kuban state technological University, Krasnodar, Russia  
E-mail: asmelyagin@yandex.ru

**Abstract.** When developing new machines, they must be dynamically analyzed. Dynamic analysis of machines is performed using laws, theorems, and methods of classical mechanics. Since modern machines usually have complex kinematic circuits, the direct application of the laws and theorems of classical and analytical mechanics is a complex and time-consuming task. Therefore, based on modern knowledge and concepts of mechanics, we develop a single-link rotational dynamic model of machines and use it to conduct a theoretical study of the lifting device.

**Keywords:** *dynamic model, mass, moment of inertia, reduced moment, reduced moment of inertia, law of motion, speed, acceleration.*

No matter how complex machines are, they consist only of links and kinematic pairs, which as a result of their connection form kinematic chains [1–4].

Dynamic analysis of machines (mechanical systems) is carried out by methods developed in classical and analytical mechanics, which are based on Newton's laws. An analysis of Newton's laws shows that they are neither laws nor axioms. Consequently, the theorems, principles, and equations obtained on their basis for studying the movement of machines are approximate. Moreover, since machines often have developed and complex kinematic circuits, the direct application of these laws, theorems, and equations of mechanics to their study is a complex and time-consuming task. Therefore, in [5, 6], new real laws of motion and consequences were formulated for mechanical systems and material bodies.

Based on the knowledge of real laws and concepts of mechanics [5, 6], and taking into account that most machines have a rotational drive, a single-link rotational dynamic model of machines was constructed.

A single-link dynamic model of machines and mechanical systems is a rotational kinematic pair that is connected to a rack and an initial mechanism (link).

The link rotates around the rack under the action of the applied reduced moments of external forces  $M_n$  and inertia forces  $M_{\phi n}$  with angular velocity and angular acceleration and has a reduced moment of inertia  $I_n$ .

Mathematical expressions were found for determining the moments of external forces  $M_n$  and inertia forces  $M_{\phi n}$ , as well as the moment of inertia  $I_n$ , reduced to the initial link of the dynamic model.

The second real law of motion [5] was used to determine  $M_n$ ,  $M_{\phi n}$  and  $I_n$ , which states that the workings of external and inertial interactions of material bodies at any movement are equal to each other.

Studies of the dynamics of the lifting mechanism carried out using the developed dynamic model have shown its effectiveness.

From the results obtained, it follows that the study of the dynamics of machines and mechanical systems using dynamic models is significantly simplified compared to traditional methods.

### References

1. Smelyagin A.I. *Structure of mechanisms and machines*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2006, 304 p.
2. Smelyagin A.I. *Theory of mechanisms and machines. Course design*. Moscow, INFRA-M Publ., 2019, 263 p.
3. Smelyagin A.I. *Structure of machines, mechanisms and structures*. Moscow, INFRA-M Publ., 2019, 387 p.
4. Smelyagin A.I. On the basic concepts and laws of classical mechanics. *The science. Technic. Technologies (Polytechnic Bulletin). Scientific journal*, 2020, no. 2, pp. 25–38.
5. Smelyagin A.I. On the real laws of motion. *The science. Technic. Technologies (Polytechnic Bulletin). Scientific journal*, 2020, no. 3, pp. 11–16.

## Свойства решений многомерных обобщений логистического уравнения

© А.П. Крищенко, Е.С. Тверская

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: e\_tverskaya@bmstu.ru

**Аннотация.** Рассмотрены многомерные системы дифференциальных уравнений с неотрицательными переменными, которые в одномерном случае содержат известное логистическое уравнение. В общем случае такие системы могут иметь сложную динамику, в том числе и области существования хаотических траекторий. Для этих систем найдены условия ограниченности траекторий, наличия аттрактора, существования внутренних положений равновесия и другие характеристики фазового портрета. Приведены различные примеры систем рассматриваемого типа и численные результаты.

**Ключевые слова:** хаотические траектории, положение равновесия, локализирующее множество, функция Ляпунова, устойчивость.

## Properties of solutions of multidimensional generalizations of the logistic equation

© A.P. Krishchenko, E.S. Tverskaya

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: e\_tverskaya@bmstu.ru

**Abstract.** Multidimensional systems of differential equations with non-negative variables are considered. In the one-dimensional case, these systems contain the well-known logistic equation. In the general case, such systems can have complex dynamics, including the regions of existence of chaotic trajectories. For these systems, conditions are found for bounded trajectories, the presence of an attractor, the existence of internal equilibrium points, and other characteristics of the phase portrait. Various examples of systems of this type and numerical results are given.

**Keywords:** *chaotic trajectories, equilibrium point, localizing set, Lyapunov function, stability.*

## Исследование безопасности процесса отделения крупногабаритных створок защитных обтекателей полезного груза

© С.В. Борзых, К.В. Терешина\*, Ю.Н. Щиблев

ПАО РКК «Энергия» им. С.П. Королёва, Королев, Московская область, Россия

\*E-mail: kovaleva-kv@mai.ru

**Аннотация.** Процесс отделения створок обтекателя — одна из ключевых динамических операций, невыполнение которой автоматически ведет к неудаче миссии. Так как на наземных экспериментальных установках невозможно в полной мере реализовать реальные условия отделения, то для обоснования принятых технических решений используется математическое моделирование. Разработана модель процесса, позволяющая анализировать движение отделяющихся створок относительно носителя с учетом всех силовых факторов. Исследована безопасность процесса, под которой понимается исключение соударений разделяемых объектов. Осуществлен выбор энергетических характеристик средств отделения.

**Ключевые слова:** *створки обтекателя, процесс отделения, безопасность.*

Одним из наиболее ответственных видов процессов отделения является процесс отделения защитных створок обтекателей полезного груза. Обтекатель предназначен для защиты аппарата от ветра, пыли

на стартовом столе, от интенсивных нагрузок (акустических, тепловых и т. д.) на участке выведения. После прохождения атмосферного участка его защитная функция перестает быть необходимой, и он отделяется от ракеты-носителя. Обтекатель имеет значительную длину, поэтому выполняется составным и включает несколько отдельно сбрасываемых створок. Для обеспечения организованного движения отделения створок в первой фазе процесса они разворачиваются относительно осей вращения, размещенных на носителе. Затем, после достижения определенного угла разворота, связь с носителем разрывается, и начинается участок автономного движения створок [1].

Под безопасностью процесса отделения створок понимается отсутствие соударений их как с полезным грузом (космическим аппаратом), так и с носителем, продолжающим полет.

Конструктивно обтекатель представляет собой, как правило, комбинацию оболочек вращения — цилиндров, конусов, сфер. Под ним с некоторым зазором находится зона конструкции космического аппарата. Величина зазора определяется в основном амплитудой упругих колебаний створок обтекателя в процессе отделения. Недостаточный зазор может привести к соударению створок с конструкцией аппарата и вызвать повреждения. Избыточно большой зазор («везем воздух») увеличивает диаметр обтекателя, что влечет за собой увеличение аэродинамического сопротивления, нагрузок на конструкцию, веса.

В связи с этим важен учет упругих свойств в процессе отделения створок, который происходит под действием значительных сосредоточенных сил, создаваемых специальными средствами отделения (СО), установленными в нескольких точках конструкции. Под действием этих сил в конструкции створок могут возникнуть колебания, на возбуждение которых расходуется часть работы СО. Кроме оценки уровня колебаний, требуется определить движение отделившихся створок относительно носителя, чтобы убедиться в отсутствии соударений с ним в дальнейшем относительном движении.

Известны подходы к моделированию процессов отделения с учетом упругих свойств разделяемых конструкций. До настоящего времени работы в этом направлении ограничивались качественными оценками для простых балочных моделей, которыми моделировались ускорители ракет-носителей [1, 2].

В самой общей постановке изучение отделения и направленного перемещения упругих конструкций является сложной задачей, так как такие движения описываются громоздкими «гибридными» системами, включающими как уравнения в частных производных, так и обыкновенные дифференциальные уравнения [1, 3]. Исходя из конструктивных особенностей разделяемых тел и опыта технической реализации процессов разделения, можно сделать предположение о малости упру-

гих деформаций по сравнению с характерными линейными размерами створок, достигающими десятков метров. Таким образом, задача об упругих деформациях может решаться в линейной постановке. Поэтому представляется целесообразным подход, использующий разложение движения упругого тела на естественные составляющие: порождающее движение как твердого тела (описываемое в общем случае нелинейными уравнениями) и малые линейные упругие колебания около порождающего движения, представленные в модальном виде, т. е. в виде разложения по собственным формам колебаний, методы определения которых описаны в литературе [4]. В практических расчетах может использоваться конечное число низших форм, так как частотный спектр створок, как правило, разряженный, и вклад каждой частной формы в общую деформацию быстро падает с увеличением номера формы.

Анализ показывает, что скорость створок после срабатывания средств отделения и траектории движения относительно носителя хорошо согласовывались с твердой моделью створок, а достаточность необходимой величины зазора, определяемой уровнем колебаний, подтверждалась на наземных экспериментальных установках для отработки процесса отделения. Для оптимального выбора требуемой величины зазора уже на этапе предварительного проектирования требуется прогнозный расчет уровня упругих колебаний створок при отделении.

### Литература

1. Колесников К.С., Кокушкин В.В., Борzych С.В., Панкова Н.В. *Расчет и проектирование систем разделения ступеней ракет*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006, 376 с.
2. Кокушкин В.В., Борzych С.В., Петров Н.К., Панкова Н.В. Анализ влияния упругих свойств конструкции воздушно-космического самолета и последней ступени ракеты-носителя на динамику их разделения. *Авиакосмическая техника и технология (Aerospace technology)*, 2001, № 3, с. 35.
3. Доучаев Л.В. *Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами*. Москва, Машиностроение, 1987, 232 с.
4. Бидерман В.Л. *Прикладная теория механических колебаний*. Москва, Машиностроение, 1980, 405 с.

## Research of the safety of the process of separation of large-sized salves of protective payloads

© S.V. Borzykh, K.V. Tereshina\*, Yu.N. Shchiblev

PJSC RKK "Energia", Korolyov, Moscow Region, Russia

\*E-mail: kovaleva-kv@mai.ru

**Abstract.** The process of separating the fairing flaps is one of the key dynamic operations, the failure of which will automatically lead to a mission failure. Since it is impossible to fully implement the real separation conditions at ground-based experimental facilities, mathematical modeling is used to substantiate the adopted technical solutions. A model of the process has been developed, which makes it possible to analyze the movement of the separating flaps relative to the carrier, taking into account all force factors. The safety of the process is investigated, which is understood as the exclusion of collisions of shared objects. The choice of the energy characteristics of the separation means has been carried out.

**Keywords:** *fairing flaps, separation process, safety.*

### References

1. Kolesnikov K.S., Kokushkin V.V., Borzykh S.V., Pankova N.V. *Calculation and design of missile stage separation systems*. Moscow, BMSTU Publ., 2006, 376 p.
2. Kokushkin V.V., Borzykh S.V., Petrov N.K., Pankova N.V. Analysis of the influence of the elastic properties of the structure of an aerospace aircraft and the last stage of the launch vehicle on the dynamics of their separation. *Aerospace technology*, 2001, no. 3, p. 35.
3. Dokuchaev L.V. *Nonlinear dynamics of flying vehicles with deformable elements*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1987, 232 p.
4. Biderman V.L. *Applied theory of mechanical vibrations*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980, 405 p.

## 1.2. Математическое моделирование физических процессов

*Руководители:* чл.-корр. РАН А.Н. Морозов,  
д-р физ.-мат. наук, проф. В.О. Гладышев

### Спектральные исследования четырёхфотонных параметрических процессов в конденсированных диэлектриках

© В.О. Гладышев<sup>1</sup>, В.С. Горелик<sup>1,2\*</sup>, В.Л. Кауц<sup>1</sup>,  
А.В. Каютенко<sup>1</sup>, П.П. Николаев<sup>1</sup>, Е.А. Шарандин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup> ФИАН, Москва, Россия

\*E-mail: gorelik12@bk.ru

**Аннотация.** Приведены результаты исследования спектров вынужденного комбинационного рассеяния при накачке различных монокристаллов и поликристаллических порошков лазерным излучением видимого и УФ-диапазона длин волн для задач параметрической

генерации высокочастотных гравитационных волн при воздействии интенсивного лазерного излучения на конденсированную диэлектрическую среду.

**Ключевые слова:** диэлектрические среды, многофотонные процессы, многофотонная спектроскопия.

В [1] было показано, что при вынужденном комбинационном рассеянии (ВКР) в результате четырехфотонных параметрических процессов возможно образование когерентных высокочастотных гравитационных волн. Для экспериментального подтверждения этого необходимо провести исследования спектров ВКР при накачке различных монокристаллов и поликристаллических порошков лазерным излучением видимого и УФ-диапазона длин волн.

Были проведены измерения спектров ВКР монокристаллов и поликристаллических порошков: кальцита, нитрата бария, бромата натрия, вольфраматов и молибдатов щелочноземельных элементов и др. Ряд спектров ВКР при возбуждении когерентным оптическим излучением УФ-диапазона получен впервые. Полученные результаты измерений позволяют выбрать наиболее перспективные материалы и режимы для параметрической генерации гравитационных волн при ВКР.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-12-00242.*

## Литература

1. Gorelik V.S., Pustovoit V.I., Gladyshev V.O., Morozov A.N., Kauts V.L., Sharandin E.A., Fomin I.V., Portnov D.I. Generation and detection of high frequency gravitational waves at intensive electromagnetic excitation. *Journal of Physics Conference Series*, 2018, vol. 1051, p. 012001. DOI: 10.1088/1742-6596/1051/1/012001

## Spectral studies of four-photon parametric processes in condensed dielectrics

© V.O. Gladyshev<sup>1</sup>, V.S. Gorelik<sup>1,2\*</sup>, V.L. Kauts<sup>1</sup>,  
A.V.<sup>1</sup> Kayutenko, P.P. Nikolaev<sup>1</sup>, E.A. Sharandin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): gorelik12@bk.ru

**Abstract.** Research results of stimulated Raman scattering spectra at pumping various single crystals and polycrystalline powders with laser radiation of visible and UV wavelength range for the tasks of parametric generation of high-frequency gravitational waves under the influence of intensive laser radiation on condensed dielectric medium are covered.

**Keywords:** dielectric media, multiphotonic processes, multiphoton spectroscopy.

It was shown in [1] that stimulated Raman Scattering (SRS) as a result of four-photon parametric processes may produce coherent high-frequency gravity waves. To experimentally confirm this, it is necessary to study the SRS spectra when pumping various single crystals and polycrystalline powders with laser radiation of visible and UV wavelength range.

SRS spectra of single crystals and polycrystalline powders were measured: calcite, barium nitrate, sodium bromate, tungsten and molybdates of alkaline earth elements, etc. Some SRS spectra at excitation of coherent optical radiation of UV range were obtained for the first time. The obtained results allow selecting the most promising materials and modes for parametric generation of gravitational waves at SRS.

*This work was supported by the grant RSCF no. 19-12-00242.*

#### **References**

1. Gorelik V.S., Pustovoyt V.I., Gladyshev V.O., Morozov A.N., Kauts V.L., Sharandina E.A., Fomin I.V., Portnov D.I. Generation and detection of high frequency gravitational waves at intensive electromagnetic excitation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1051, art. no. 012001.  
DOI: 10.1088/1742-6596/1051/1/012001

### **Генерация и детектирование высокочастотных гравитационных волн в нелинейных оптических средах**

© В.И. Пустовойт, В.О. Гладышев, В.С. Горелик, В.Л. Кауц,  
А.В. Каютенко, А.Н. Морозов, П.П. Николаев, И.В. Фомин,  
Е.А. Шарандин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: vkauts@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрены процессы взаимной конверсии высокочастотных гравитационных и электромагнитных волн при распространении в нелинейных оптических средах. Проанализированы возможности создания новых методов генерации и детектирования высокочастотных гравитационных волн оптическими методами.

**Ключевые слова:** гравитационные волны, оптика, конверсия.



## Generation and detection of high-frequency gravitational waves in nonlinear optical media

© V.I. Pustovoit, V.O. Gladyshev, V.S. Gorelik, V.L. Kauts,  
A.V. Kayutenko, A.N. Morozov, P.P. Nikolaev, I.V. Fomin,  
E.A. Sharandin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: vkauts@mail.ru

**Abstract.** The processes of mutual conversion of high-frequency gravitational and electromagnetic waves during propagation in nonlinear optical media are considered. The possibilities of creating new methods for generating and detecting high-frequency gravitational waves by optical methods are analyzed.

**Keywords:** *gravitational waves, optics, conversion.*

## Расчет диэлектрической проницаемости для микроволновой диагностики

© Н.М. Гордеева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: nmgordeeva@bmstu.ru

Для изучения поверхностной и пространственной анизотропии твердых тел широко используют методы микроволновой диагностики. Расширяется и частотный диапазон разных типов аппаратуры, увеличивается и ассортимент исследуемых материалов, который теперь включает не только природные материалы, но и искусственные среды (включающие углеродные нити, нанотрубы и т. п.).

Одно из направлений — исследование электрофизических параметров диэлектрических и полупроводниковых материалов. При расчетах часто используют формулы Максвелла — Гарнета и Бруггемана, которые содержат значение диэлектрической проницаемости.

Функция диэлектрической проницаемости зависит и от температуры, и от частоты поля, и от координат, но при экспериментальных расчетах и в измерениях ее используют в сильно упрощенном виде.

Предлагаемая математическая модель позволяет рассчитать в некоторых случаях значение диэлектрической проницаемости в зависимости не только от температуры и частоты поля, но и в зависимости от пространственной координаты.

**Ключевые слова:** *диагностика, функция диэлектрической проницаемости.*

## Литература

1. Латышев А.В., Гордеева Н.М. Поведение плазмы с произвольной степенью вырождения электронного газа в слое проводящей среды. *Теоретическая и математическая физика*, 2017, т. 192, № 3, с. 506–522.

## The calculation of the dielectric constant for microwave diagnostics

© N.M. Gordeeva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: nmgordeeva@bmstu.ru

Methods of microwave diagnostics are widely used for study of surface and spatial anisotropy of solids. The frequency range of different types of devices is expanding, and the range of materials is also increasing, which now includes not only natural materials, but also artificial ones (including carbon filaments, nanotubes, etc.).

One of the directions is the study of electrophysical parameters of dielectric and semiconductor materials. Calculations often use the Maxwell — Garnet and Bruggeman formulas, which contain the value of the permittivity.

A function of the dielectric permittivity is very complicated. It depends on both the temperature and the frequency of the field, but in experimental calculations and measurements it is used in a very simplified form.

The proposed mathematical model allows us to calculate in some cases the value of the permittivity depending not only on the temperature and frequency of the field, but also depending on the spatial coordinate.

**Keywords:** *diagnostics, permittivity function.*

## References

1. Latyshev A.V., Gordeeva N.M. The behavior of plasma with an arbitrary degree of degeneracy of electron gas in the conductive layer. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2017, vol. 192, no. 3, pp. 1380–1395.

## Метрологическое обеспечение поэлементной калибровки фазохронометрической системы диагностики

© Ю.А. Дудникова<sup>1,2\*</sup>, А.Б. Сырицкий<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>ИПМ РАН, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): juliadudnikova@mail.ru

**Аннотация.** В работе представлен стенд для калибровки энкодеров, применяемых в сфере фазохронометрической диагностики. Приводится краткое описание фазохронометрического метода, основные компоненты и принцип действия фазохронометрической системы. В работе приведено описание экспериментального получения измерительной информации и ее математической обработки. Также получены данные, подтверждающие возможность калибровки энкодеров с помощью этого стенда, и экспериментальные результаты.

**Ключевые слова:** *фазохронометрический метод, калибровка, энкодер, стенд.*

Для того чтобы быть уверенным в корректности получаемых результатов, необходима и очень важна оценка состояния. Благодаря этой оценке можно обеспечить точность измерений в пределах технических характеристик средства измерения. Регулярное проведение оценки состояния, например, калибровки, выполняемой в целях определения действительных значений метрологических характеристик средств измерений, служит для поддержания исправности и производительности прибора.

В гл. 3 ст. 11 ФЗ № 102 «Об обеспечении единства измерений» определены формы государственного регулирования в области обеспечения единства измерений, также следует отметить, что в соответствии с гл. 1 ст. 1 ФЗ № 102 регламентированы сферы государственного регулирования обеспечения единства измерений. Сфера государственного регулирования обеспечения единства измерений распространяется на измерения, которые выполняются при деятельности в области здравоохранения, охраны окружающей среды, обеспечения безопасности труда, экономической, налоговой и иной торгово-финансовой деятельности, оценки соответствия и т. д. (подробнее см. [1]).

Выбранное средство измерения используется в области технологического обеспечения производства. Исходя из этого, в соответствии с вышеизложенным, средства измерений, не предназначенные для применения в сфере государственного регулирования обеспечения единства измерений, могут в добровольном порядке подвергаться калибровке [1].

Фазохронометрическая система, для которой разрабатывается стенд для калибровки, состоит из двух основных модулей: первичного преобразователя (ЛИР-158А) и блока формирования временных интервалов. Такие угловые энкодеры изготавливают по ГОСТ 26242–90 «Преобразователи перемещений. Общие технические условия», который распространяется на преобразователи перемещений, которые являются средством автоматизации и предназначаются для использования в системах автоматического регулирования станков и (или) для

информационной связи по положению между исполнительными механизмами станка, промышленного робота и устройством числового программного управления, а также в системах автоматического или автоматизированного контроля, регулирования и управления других областей техники [2]. Очевидно, что при выпуске из производства преобразователи, несомненно, подлежат контролю. Для данных преобразователей разработана методика поверки «Преобразователи угловых перемещений ЛИР-158. Методы и средства поверки», которая предполагает использование уникального и сложного (так как поддержание стабильного числа механических оборотов влечет за собой высокие требования к конструктивным параметрам и параметрам стабильности электрического тока) оборудования (тахогенератор), поэтому комплектная калибровка является технически сложно реализуемой и экономически невыгодной (необходимость снятия системы со станка, транспортировка к месту калибровки), поэтому в данном случае отдается предпочтение поэлементной калибровке [3].

В рамках данной работы при калибровке энкодера следует использовать метод непосредственного сличения. Основой метода служит одновременное измерение одного и того же значения физических величин  $X$  аналогичным по роду измеряемой величины поверяемым и образцовым приборами. При поверке данным методом устанавливают требуемое значение  $X$ , затем сравнивают показания калибруемого прибора  $X$  с показаниями  $X_0$  образцового и определяют разность  $D = X - X_0$ .

При проведении калибровки была поставлена цель сравнить показания калибруемого энкодера ЛИР-158А 5-го класса точности ( $\pm 15''$ ) с показаниями прецизионного энкодера (рабочий эталон), например, ЛИР-1170 2-го класса точности ( $\pm 1,5''$ ).

Данный способ, во-первых, реализуется с помощью датчика одного производителя (т. е. типы сигнала унифицированы), а также для данного энкодера существует утвержденная методика поверки. Для использования в данной схеме калибровки прецизионный энкодер должен быть поверен согласно своей методике поверки.

Принципиальная схема калибровки заключается в том, что с одной стороны располагается рабочий эталон, а с другой — калибруемый энкодер, которые соединены между собой шаговым двигателем 86HS118-6004B14 с двумя выходными валами и муфтами. На шаговый двигатель подается управляющий сигнал с Блока управления и обработки, вал двигателя делает поворот на заданный угол. Измерения проводятся в десяти точках, равномерно распределенных по всему диапазону измерений [3]. Показания обоих энкодеров в каждой точке записываются и обрабатываются Блоком. В качестве Блока может использоваться Блок формирования временных интервалов (с двумя разъемами для энкодеров и двумя каналами для передачи

данных) при условии его предварительной калибровки. Обработка результатов проводится согласно ГОСТ 8.207–76 [4] с обязательной проверкой результатов измерений на соответствие нормальному закону распределения.

Управляющая программа осуществляет поворот вала шагового двигателя с двумя выходными валами. Программируемый контроллер SMSD-4.2 отлично подходит для его подключения и управления. При работе в программируемом режиме контроллер выполняет последовательность команд, заданных от ПК — угол поворота, направление движения, начальную и максимальную скорость, ускорение. Есть возможность составлять сложные алгоритмы (исполнительные программы) с организацией циклов, синхронизацией с внешними устройствами. Программы управления шаговыми двигателями содержатся в перезаписываемой энергонезависимой памяти контроллера либо могут сохраняться в виде файла на компьютере. Для управления от компьютера предназначена программа SMC Program или иная программа, обеспечивающая передачу данных по RS-232.

Для снятий показаний с датчиков необходим преобразователь, так как обработка данных происходит по цифровым значениям. Установленный угловой датчик ЛИР-158А вырабатывает аналоговый синусоидальный сигнал, затем поступающий на вход блока обработки измерительной информации. Подсистема оцифровки сигнала при помощи аналоговых компараторов либо АЦП (аналого-цифровой преобразователь) преобразует аналоговый сигнал в удобный для дальнейшей обработки цифровой вид. Исходя из характеристик энкодера, наиболее предпочтительным преобразователем является ЛИР-510. Но у данного преобразователя вход для подключения RS422 ПИ TTL, а у энкодера выходной сигнал СН, поэтому необходим нормирующий преобразователь (интерполятор), а именно ЛИР-960, который предназначен для преобразования синусоидальных квадратурных сигналов инкрементных энкодеров типа СН (~1 В) или СТ (~11 мкА) в прямоугольные квадратурные сигналы типа ПИ для их последующей обработки в системах ЧПУ и УЦИ.

По выбранному УЦИ необходимо осуществить снятие показаний. Для этого существует программа «Скиф». Она предназначена для отображения и сбора данных преобразователей перемещения с использованием некоторых устройств цифровой индикации, плат и модулей интерфейса СКБ ИС. Работа с программой проста и интуитивно понятна. Программа работает с линейными и угловыми, инкрементными и абсолютными энкодерами. Для дальнейшей обработки результатов, снятых при калибровке энкодера, была выбрана программа MATLAB. В ней был разработан код программы, на основе которого кода было создано консольное приложение Calibration APP. Обработка результатов в приложении происходит следующим образом:

1) проводят снятие показаний с помощью выбранного УЦИ с калибруемого энкодера ЛИР-158А (А) и с эталонного энкодера ЛИР-1170 (В) за 1 полный оборот (1 оборот = 10 значениям =  $N$ ) и заносят их в отдельный файл, который располагается в папке со специальной программой Calibration APP;

2) повторяют 15 раз процедуру, указанную в п. 1;

3) открывают приложение Calibration APP и затем нажимают кнопку «Калибровать». На экране появляется график зависимости разности показаний ( $\Delta$ ) от количества измерений ( $N$ ), на который нанесены границы допускаемой погрешности  $\Delta\alpha = \pm 0,0073^\circ$ .

По данному графику проводится анализ показаний, по которому видно, что все точки результата лежат в пределах допускаемой погрешности  $\Delta\alpha = 0,0073^\circ$ . Отсюда следует, что данный ЛИР-158А годен. По этому графику проводится анализ показаний, по которому видно, что 1-я точка результата лежит за пределом допускаемой погрешности  $\Delta\alpha = 0,0073^\circ$ , отсюда следует, что данный ЛИР-158А не годен.

#### **Литература**

1. *Федеральный закон № 102-ФЗ (ред. от 13.07.2015). Об обеспечении единства измерений.* Утв. 26.06.2008. 19 с.
2. *ГОСТ 26242–90 Системы числового программного управления. Преобразователи перемещений. Общие технические условия.* Введ. 1991-01-01. Москва, Государственный комитет СССР по управлению качеством продукции и стандартам, 1991, 14 с.
3. *МП 2511/0010-15. Методика поверки. Преобразователи угла поворота измерительные KINAX WT 717-12190E0020M00.* Утв. 2015-10-28. 5 с.
4. *ГОСТ 8.207–76 Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения.* Введ. 1977-01-01. Москва, Государственный комитет стандартов Совета Министров СССР, 1977, 8 с.

### **Metrological support of elementwise calibration of the phase-chronometric diagnostic system**

© Y.A. Dudnikova<sup>1,2</sup>\*, A.B. Siritzky<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): juliadudnikova@mail.ru

**Abstract.** The article presents a stand for calibrating encoders applied in the phasechronometric diagnostics sphere. Short describing of phase-chronometric method, basic components and operating principles of the phasechronometric system are given. Experimental obtaining of measuring

information and its mathematical processing are described. Also data confirming the ability of calibration of encoders by means of this stand and experimental results are obtained.

**Keywords:** *phasechronometric method, calibration, encoder, stand.*

#### References

1. *Federal law no. 102-FZ (as amended on 13.07.2015). On ensuring the uniformity of measurements.* Approved 26.06.2008. 19 p.
2. *GOST 26242–90 System of numerical control. Transducers of displacements. General specifications.* Introduced 1991-01-01. Moscow, State Committee of the USSR for product quality management and standards, 1991, 14 p.
3. *MP 2511/0010-15. Calibration procedure. Measuring angle converters KINAX WT717-12190E0020M00.* Approved 2015-10-28. 5 p.
4. *GOST 8.207–76 State system for ensuring the uniformity of measurements (GSI). Direct measurements with multiple observations. Methods of processing the results of observations. Fundamentals.* 1977-01-01. Moscow, State Committee of standards of the Council of Ministers of the USSR, 1977, 8 p.

### **Магнитные заряды как следствие сохранения массы вращающегося сферического вихря**

© Е. Милюте \*, А.Ю.В. Милюс

МНИГ “LITAVEM-3”, Вильнюс, Литва

\*E-mail: litavem-3@post.com

Представлена физическая модель внутреннего строения вращающегося сферического вихря, являющегося одной из основных форм существования вещества во Вселенной. Обнаружено, что вихревой механизм образования потоков вещества, ответственных за появление магнитных зарядов, отвечает за сохранение массы вращающегося сферического вихря. Показано, как кинетическая энергия вихревой центральной нити преобразуется в магнитную энергию сферического вихря.

**Ключевые слова:** *магнитный заряд, циркуляция, вихревая динамика вещества, магнитные потоки микровихря.*

### **Magnetic charges as a result of conversation of the mass of a rotating spherical vortex**

© E. Milyute \*, A.J.V. Milyus

IRG “LITAVEM-3”, Vilnius, Lithuania

\*E-mail: litavem-3@post.com

A physical model of the internal structure of a rotating spherical vortex, being one of the main forms of existence of substance in the Universe, is presented. In this work it is found that the vortex mechanism of formation of fluxes of substance, responsible for appearance of magnetic charges, answer for conversation of the mass of a rotating spherical; vortex. It is shown how the kinetic energy of the vortex central filament is converted into magnetic energy of a spherical vortex.

**Keywords:** *magnetic charge, circulation, vortex dynamics of substance, magnetic fluxes of microvortex.*

### **К вопросу о природе магнитно-механических отношений микровихря**

© Е. Милюте\*

МНИГ “LITAVEM-3”, Вильнюс, Литва

\*E-mail: litavem-3@post.com

Приведено обсуждение новой характеристики «гироскопической реакции» электромагнитного поля микровихря, которая отвечает за сдвиг собственного магнитного поля, окружающего микровихрь при наложении внешнего магнитного поля.

**Ключевые слова:** *микровихрь, сдвиг магнитного поля микровихря.*

### **On the nature of the magnetic-mechanical relations of a microvortex**

© E. Milyute\*

IRG “LITAVEM-3”, Vilnius, Lithuania

\*E-mail: litavem-3@post.com

A new characteristic of the “gyroscopic reaction” of the electromagnetic field of a microvortex is discussed, which is responsible for the shift of the intrinsic magnetic field surrounding the microvortex with the application of an external magnetic field.

**Keywords:** *microvortex, shift of the magnetic field of a microvortex.*



## Кривая плавления сапфира при высоких давлениях

© Д.Н. Николаев\*, А.В. Острик

Институт проблем химической физики РАН, Черноголовка, Россия

\*E-mail: nik@fcp.ac.ru

**Аннотация.** В работе предлагается метод расчета кривых плавления кристаллических тел на основе теории теплоемкости Дебая и критерия плавления Линдемана. В качестве основных экспериментальных данных используются ударные адиабаты, определяемые в динамических экспериментах, и теплофизические характеристики вещества при нормальных условиях. Математически расчет кривой плавления сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Система решается численно методом Рунге — Кутты. Получено удовлетворительное согласие расчетных и экспериментальных данных по плавлению за фронтом ударной волны в сапфире.

**Ключевые слова:** сапфир, ударно-волновые эксперименты, ударная адиабата, уравнения состояния вещества, фазовые переходы, кривая плавления.

Плавление, являясь фазовым переходом первого рода с изменением агрегатного состояния, существенно влияет на свойства вещества, некоторые характеристики (плотность, энтропия, электропроводность, прозрачность) которых претерпевают скачок на кривой плавления. Необходимость в информации о плавлении при высоких давлениях возникает в физике ударных волн (УВ), физике твердого тела, геофизике, астрофизике, а также во многих прикладных областях инженерной науки. В частности, знание кривых плавления требуется для лучшего понимания структуры планет и построения их тепловых моделей [1].

С ростом давления у кристаллических веществ наблюдаются необычные термодинамические свойства [2, 3], которые отражаются и на поведении кривой давления. Хорошо известен факт аномального поведения кристаллов (например, щелочных металлов), когда при увеличении давления температура плавления уменьшается и кристаллизация вещества происходит с увеличением объема. В самой точке смены наклона кривой плавления разность плотностей кристалла и жидкости обращается в ноль. При атмосферном давлении аномальными веществами являются Si, Bi, Se, H<sub>2</sub>O и др.

Проблеме плавления кристаллов при сжатии посвящено большое количество работ. Для определения кривых плавления вещества под давлением используются в основном следующие методы:

- оптическое или рентгеновское обнаружение плавления при статическом сжатии в алмазной наковальне (ячейке высокого давления);
- наблюдение факта плавления (изменения наклона ударной адиабаты или зависимости температуры ударного сжатия от давления за фронтом УВ), вызванного УВ в динамических экспериментах;
- построение многофазных уравнений состояния (УРС) с выделением границ агрегатных состояний, в том числе между твердой и жидкой фазами;
- расчеты *ab initio* и методом молекулярной динамики.

Для некоторых металлов, например меди, согласие между расчетными и экспериментальными данными оказывается достаточно хорошим [4, 5], но для других переходных металлов (в частности, молибдена) единого мнения по интерпретации полученных данных [6–8] пока не существует.

По ряду причин экспериментальные исследования по плавлению были в основном сосредоточены на меди, железе и некоторых других переходных металлах, охватывая давления более 10 ГПа и температуры выше 1000 К. Поэтому остались недостаточно исследованными даже при сравнительно низких давлениях кривые плавления не менее интересных для теории и практики металлов, например, таких как магний, марганец, золото, серебро, цинк, кадмий, алюминий, индий и свинец.

Важным оконным материалом, используемым в динамических экспериментах с высокими давлениями и температурами, является сапфир. Это жесткий и прозрачный диэлектрик, из которого изготавливается ячейка для размещения и ударного сжатия в ней жидкого водорода, о металлизации которого судят по повышению его электропроводности. Если же под давлением электропроводящей оказывается сама ячейка, то вывод о наступлении металлизации водорода оказывается ложным. Поэтому весьма важен вопрос: сохраняет ли оконный материал сапфир свои свойства при высоких давлениях и температурах, особенно прозрачность и низкую электропроводность? Электропроводность, конечно, чувствительна к состоянию вещества, к его структуре. В условиях динамических экспериментов зачастую трудно определить это состояние. Например, сложно узнать, находится ли сапфир в твердом или жидком состоянии, хотя хорошо известно, что в сильных УВ вещество плавится. В то же время данных о кривой плавления сапфира при высоких давлениях явно недостаточно.

В работе предлагается метод расчета кривых плавления кристаллических тел на основе теории теплоемкости Дебая (в случае металлов также учитывается вклад в теплоемкость электронной подсистемы) и критерия плавления Линдемана [9]. В качестве основных экспериментальных данных используются ударные адиабаты (УА),

определяемые в динамических экспериментах, и теплофизические характеристики вещества при нормальных условиях. Математически задача сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Система решается численно методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности с автоматическим выбором шага интегрирования.

С помощью предложенного метода расчета построены кривые плавления меди, серебра, золота, и сапфира при высоких давлениях. Полученные результаты для меди, серебра и золота используются для валидации метода посредством сравнения с имеющимися расчетными и экспериментальными данными других авторов.

Сапфир ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) является молекулярным кристаллом и диэлектриком с запрещенной зоной шириной 4,8 эВ. Соответственно, при нормальных условиях у него отсутствует электронная часть теплоемкости, и в расчетах она полагалась равной нулю. Экспериментальной информации об УА сапфира достаточно много [10–12]. Проведенный анализ и результаты предварительных расчетов показали, что во всей представляющей интерес области работает аппроксимация Керли (Kerley) [12]

$$D = 7,673 + 1,23U. \quad (1)$$

Однако при невысоких давлениях экспериментальные результаты лучше описывают данные Эрскине (Erskine) [10] с аппроксимацией

$$D = 8,74 + U. \quad (2)$$

Для изучения влияния точности задания УА на кривую плавления расчеты проводились по УА (1) и по комбинации из (1) и (2):

$$\begin{cases} 8,74 + U, & U \leq 4,639 \text{ km}; \\ 7,673 + 1,23U, & U > 4,639 \text{ km}. \end{cases}$$

Различие в температурах плавления сапфира при использовании двух рассматриваемых видов УА не превышает 5 % вплоть до давлений 600 ГПа. Результаты расчетов дают точку пересечения кривой плавления с УА Гюгонио при давлении  $P \approx 500$  ГПа и температуре  $T \approx 10\,000$  К, что соответствует условиям плавления сапфира в УВ, приведенным в [13].

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-08-00964-а.*

## Литература

1. Жарков В.Н. *Внутреннее строение Земли и планет*. 2-е изд., перераб. и доп. Москва, Наука, 1983, 415 с.

2. Стишов С.М. Термодинамика плавления простых. *УФН*, 1974, т. 114, вып. 1, с. 3–40.
3. Максимов Е.Г., Магницкая М.В., Фортвов В.Е. Непростое поведение простых металлов при высоких давлениях. *УФН*, 2005, т. 175, с. 793–813.
4. Japel S., Schwager B., Boehler R., Ross M. Melting of Copper and Nickel at High Pressure: the Role of d-electrons. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, p. 167801.
5. Vocadlo L., Alfe D., Price G.D., Gillan M.J. Ab initio melting curve of copper by the phase coexistence approach. *J. Chem. Phys.*, 2004, vol. 120, p. 2872.
6. Errandonea D., Schwager B., Ditz R., Gessmann C., Boehler R., Ross M. Systematics of transition-metal melting. *Phys. Rev.*, 2001, B 63, p. 132104.
7. Errandonea D. Phase behavior of metals at very high P–T conditions: A review of recent experimental studies. *J. Phys. Chem. Solids*, 2006, vol. 67, iss. 9–10, pp. 2017–2026.
8. Belonoshko A.B., Burakovsky L., Chen S.P., Johansson B., Mikhaylushkin A.S., Preston D.L., Simak S.I., Swift D.C. Molybdenum at High Pressure and Temperature: Melting from another Solid Phase. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 100, p. 135701.
9. Lawson A.C. Physics of the Lindemann melting rule. *Philosophical Magazine*, 2009, vol. 89, pp. 1757–1770.
10. Erskine D. High pressure hugoniot of sapphire. *High-Press. Sci. Techn.*, 1993, ed. S.C. Schmidt et al. AIP Press, NY, 1994, pp. 141–143.
11. Hicks D.G., Celliers P.M., Collins G.W., Eggert J.H. Moon Shock-Induced Transformation of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  and LiF into Semiconducting Liquids. *PRL*, 2003, vol. 91, p. 035502.
12. Kerley G.I. Equation of State and Constitutive Models for Numerical Simulations of Dust Impacts on the Solar Probe. *Report on contract 949182*. Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory, Laurel, MD, 2009.
13. Liu H., Tse J.S., Nellis W.J. The electrical conductivity of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  under shock-compression. *Scientific Reports*, 2015, vol. 5 (1), p. 12823.

## High pressure melting curve of sapphire

© D.N. Nikolaev\*, A.V. Ostrik

Institute of Problems of Chemical Physics of the RAS, Chernogolovka, Russia

\*E-mail: nik@fcp.ac.ru

**Abstract.** The method of calculating the melting curves of crystalline bodies based on the Debye's theory of heat capacity and the Lindeman melting criterion is proposed in the work. Hugoniot adiabates determined in dynamic experiments and thermophysical characteristics of the substance under normal conditions are used as basic experimental data. Mathematically, the calculation of the melting curve is reduced to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. This system is solved numerically by the Runge–Kutta method. Satisfactory agreement of calculated and experimental data on melting behind the shock wave front in sapphire is received.

**Keywords:** *sapphire, shock-wave experiments, Hugoniot adiabat, equations of state, phase transitions, melting curve.*

## References

1. Zharkov V.N. *The inner structure of the Earth and the planets*. Moscow, Science, 1983, 415 p.
2. Stishov S.M. The thermodynamics of melting of simple substances. *Sov. Phys. Usp.*, 1975, 18, pp. 625–643.
3. Maximov E.G., Magnitskaya M.V., Fortov V.E. Non-simple behavior of simple metals at high pressures. *Phys. Usp.*, 2005, vol. 48 (8), pp. 761–780.
4. Japel S., Schwager B., Boehler R., Ross M. Melting of Copper and Nickel at High Pressure: the Role of d-electrons. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, p. 167801.
5. Vocadlo L., Alfe D., Price G.D., Gillan M.J. Ab initio melting curve of copper by the phase coexistence approach. *J. Chem. Phys.*, 2004, vol. 120, p. 2872.
6. Errandonea D., Schwager B., Ditz R., Gessmann C., Boehler R., Ross M. Systematics of transition-metal melting. *Phys. Rev.*, 2001, B 63, p. 132104.
7. Errandonea D. Phase behavior of metals at very high P–T conditions: A review of recent experimental studies. *J. Phys. Chem. Solids*, 2006, vol. 67, iss. 9–10, pp. 2017–2026.
8. Belonoshko A.B., Burakovsky L., Chen S.P., Johansson B., Mikhaylushkin A.S., Preston D.L., Simak S.I., Swift D.C. Molybdenum at High Pressure and Temperature: Melting from another Solid Phase. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 100, p. 135701.
9. Lawson A.C. Physics of the Lindemann melting rule. *Philosophical Magazine*, 2009, vol. 89, pp. 1757–1770.
10. Erskine D. High pressure hugoniot of sapphire. *High-Press. Sci. Techn.*, 1993. S.C. Schmidt, et al, ed. AIP Press, NY, 1994, pp. 141–143.
11. Hicks D.G., Celliers P.M., Collins G.W., Eggert J.H. Moon Shock-Induced Transformation of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  and LiF into Semiconducting Liquids. *PRL*, 2003, vol. 91, p. 035502.
12. Kerley G.I. Equation of State and Constitutive Models for Numerical Simulations of Dust Impacts on the Solar Probe. *Report on contract 949182*. Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory, Laurel, MD, 2009.
13. Liu H., Tse J.S., Nellis W.J. The electrical conductivity of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  under shock-compression. *Scientific Reports*, 2015, vol. 5 (1), p. 12823.

## Использование методов исследования операций для разработки энергетических быстрых реакторов большой мощности

© В.С. Окунев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: okunevvs@bmstu.ru

**Аннотация.** Настоящая работа продолжает исследования, представленные на FARM-2019. Она основана на системном подходе, исследовании операций, теории игр, вариационных методах, теории оптимального управления, логическом моделировании. На начальном этапе решена задача о выборе предпочтительных материалов активной зоны. Подтвержден выбор разработчиков БРЕСТ: свинцовый теплоноситель и MN-топливо. На следующем этапе корректировался

состав материалов. В число управлений оптимизационной задачи были включены свойства материалов (плотность, теплопроводность, теплоемкость, допустимые температуры, сечения взаимодействия и др.). Дополнительные возможности в повышении безопасности требуют использования термостойкого, но более плотного и теплопроводного топлива, чем MN. На третьем этапе были подобраны необходимые материалы. Свинец, извлеченный из ториевых руд, содержит 75...98 % изотопа  $^{208}\text{Pb}$ . Использование такого теплоносителя позволяет снизить пустотный эффект реактивности при наиболее опасном сценарии его реализации с 5  $\beta$  ( $\beta$  — эффективная доля запаздывающих нейтронов) в проекте БРЕСТ-1200 до безопасного значения (менее  $\beta$ ). MN-топливо, поры которого заполнены нанопорошком U, позволит заметно снизить максимальную температуру топлива в аварийных режимах. Это важно в наиболее опасных комбинациях АТWS.

**Ключевые слова:** *исследования операций, быстрые реакторы большой мощности.*

**Введение.** Приемлемость источников энергии будущего определяется их экономической эффективностью, безопасностью и обеспеченностью топливом. Ядерная энергетика считается перспективным источником, способным обеспечить человечество энергией на длительную перспективу. В числе базовых элементов энергетики России второй половины XXI в. рассматриваются реакторы на быстрых нейтронах большой мощности со свинцовым охлаждением и смешанным мононитридным топливом (MN). В ОАО «НИКИЭТ им. Н.А. Доллежала» разработан технический проект БРЕСТ-ОД-300, концептуальные проекты реакторов БРЕСТ-600, -1200. Основное ограничение в использовании объектов ядерной энергетики — безопасность. Обычно она ухудшается при повышении мощности энергоблока. БРЕСТ-1200 характеризуется неприемлемым значением пустотного эффекта реактивности (ПЭР): опасностью осушения части активной зоны. Необходимо исключить тяжелые аварии с недопустимым выбросом радиоактивных веществ за пределы АЭС.

**Математическое обеспечение.** В работе [1] кратко изложена методология, математические модели и коды для разработки ядерных реакторов нового поколения. Она основана на системном подходе, исследовании операций, теории игр, вариационных методах, теории оптимального управления, логическом моделировании. Анализ безопасности проводится уже на стадии концептуальной разработки реактора. Ключевым звеном использования методологии является многократно модернизированный оптимизационный комплекс DRAGON-M, позволяющий решать оптимизационные задачи с ограничениями, моделирующими все возможные аварийные ситуации, в том числе

сопровождающиеся отказом аварийной защиты (АТWS). В условиях неопределенности сценариев развития аварийных режимов [2] настоящая работа является развитием исследований [1].

**Задачи.** На начальном этапе решена задача о выборе предпочтительных материалов активной зоны. Подтвержден выбор разработчиков БРЕСТ: свинцовый теплоноситель и MN-топливо. На следующем этапе корректировался состав материалов. В число управлений оптимизационной задачи были включены свойства материалов (плотность, теплопроводность, теплоемкость, допустимые температуры, сечения взаимодействия и др.). Для реакторов большой мощности в качестве теплоносителя предпочтителен свинец с концентрацией изотопа  $^{208}\text{Pb}$  более 75...80 %. Дополнительные возможности в повышении безопасности требуют использования термостойкого, но более плотного и теплопроводного топлива, чем MN. На третьем этапе были подобраны необходимые материалы.

**Результаты.** Свинец, извлеченный из ториевых руд, содержит 75...98 % изотопа  $^{208}\text{Pb}$ . Использование такого теплоносителя позволяет снизить ПЭР при наиболее опасном сценарии его реализации с  $5\beta$  ( $\beta$  — эффективная доля запаздывающих нейтронов) в проекте БРЕСТ-1200 до безопасного значения (менее  $\beta$ ). MN-топливо, поры которого заполнены нанопорошком U, позволит заметно снизить максимальную температуру топлива в аварийных режимах. Это важно в наиболее опасных комбинациях АТWS.

### Литература

1. Окунев В.С. Математические модели для разработки ядерных реакторов нового поколения. Тезисы докладов международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики». *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 2, с. 184–186. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-2-1960
2. Okunev V.S. Designing of New Generation of the Nuclear Reactors. *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2195, art. no. 020012. <https://doi.org/10.1063/1.5140112>

## Using Operations Research Methods to Design High Power Fast Power Reactors

© V.S. Okunev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: okunevvs@bmstu.ru

**Abstract.** This paper continues investigations presented at FAPM-2019. They are based on a systems approach, operations research, game theory, variational methods, optimal control theory, and logical modeling. At the initial stage, the problem of choosing the preferred core materials was solved. The choice of BREST developers has been confirmed: lead coolant and MN fuel.

At the next stage, the composition of the materials was adjusted. The number of controls of the optimization problem included the properties of materials (density, thermal conductivity, heat capacity, permissible temperatures, interaction cross sections, etc.). Additional safety enhancements require the use of a heat-resistant, but denser and more thermally conductive fuel than MN. At the third stage, the necessary materials were selected. Lead recovered from thorium ores contains 75...98% of the isotope  $^{208}\text{Pb}$ . The use of such a coolant makes it possible to reduce the void reactivity effect in the most dangerous scenario of its implementation from  $5\beta$  ( $\beta$  is the effective delayed neutron fraction) in the BREST-1200 design to a safe value (less than  $\beta$ ). MN-fuel, the pores of which are filled with U nanopowder, will significantly reduce the maximum fuel temperature in emergency modes. This is important in the most dangerous ATWS combinations.

**Keywords:** *operations research, high power fast reactors.*

**Introduction.** The acceptability of future energy sources is determined by their economic efficiency, safety and fuel availability. Nuclear power is considered to be a promising source capable of providing humanity with energy for the long term. Among the basic elements of the Russian energy sector in the second half of the 21st century, high power fast reactors with lead cooling and mixed mononitride fuel (MN) are considered. In JSC "NIKIET" developed a technical design for BREST-OD-300, conceptual designs for reactors BREST-600, -1200. The main limitation in the use of nuclear power facilities is safety. It usually deteriorates with increasing reactor power. For example, the BREST-1200 reactor is characterized by an unacceptable value of the void reactivity effect (VRE): the danger of draining a part of the core. It is necessary to exclude severe accidents with unacceptable release of radioactive substances outside the Nuclear Power Plant.

**Mathematical software.** The paper [1] summarizes the methodology, mathematical models and codes for the development of new generation nuclear reactors. It is based on a systems approach, operations research, game theory, variational methods, optimal control theory, and logical modeling. Safety analysis is already underway at the stage of reactor conceptual design. The key link in the use of the methodology is the multiply modernized DRAGON-M optimization complex, which allows solving optimization problems with constraints that simulate all possible emergency situations, including anticipated transients without scram (ATWS), under conditions of uncertainty of emergency scenarios [2]. The work is a development of research [1].

**Tasks.** At the initial stage, the problem of choosing the preferred core materials was solved. The choice of BREST developers has been con-



firmed: lead coolant and MN fuel. At the next stage, the composition of the materials was adjusted. The number of controls of the optimization problem included the properties of materials (density, thermal conductivity, heat capacity, permissible temperatures, interaction cross sections, etc.). For high-power reactors, lead with a concentration of  $^{208}\text{Pb}$  isotope of more than 75...80% is preferable. Additional safety enhancements require the use of a heat-resistant, but denser and more thermally conductive fuel than MN. At the third stage, the necessary materials were selected.

**Results.** Lead recovered from thorium ores contains 75...98% of the isotope  $^{208}\text{Pb}$ . The use of such a coolant makes it possible to reduce the VRE in the most dangerous scenario of its implementation from  $5\beta$  ( $\beta$  is the effective delayed neutron fraction) in the BREST-1200 design to a safe value (less than  $\beta$ ). MN-fuel, the pores of which are filled with U nanopowder, will significantly reduce the maximum fuel temperature in emergency modes. This is important in the most dangerous ATWS combinations.

#### References

1. Okunev V.S. Mathematical models for the development of new generation of the nuclear reactor. In: Int. Sci. Conf. "Fundamental and Applied Problems of Mechanics (FAPM-2019)". Theses of Reports. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, iss. 2, pp. 184–186. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-2-1960
2. Okunev V.S. Designing of New Generation of the Nuclear Reactors. *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2195, p. 020012. <https://doi.org/10.1063/1.5140112>

## К вопросу о формировании новых физических представлений о скорости, массе и инерции тел

© Ю.Н. Разумный, С.А. Купреев, В.С. Ручинский

Российский университет дружбы народов; МАИ (НИУ), Москва, Россия  
E-mail: 2svr@mail.ru

Выдвинута гипотеза об излучении/поглощении телом элементарных частиц, обладающих спином, в плоскости перпендикулярной вектору скорости движения тела. Приведены примеры из разных областей физики. Рассмотрен эксперимент с движением тел в вакуумной камере. Приведенные примеры наглядно демонстрируют переход количества движения тел в плоскость, перпендикулярную начальному движению тела. Данные примеры вполне согласуются с выдвинутой гипотезой.

Полученные результаты могут быть использованы в экспериментах для поиска низкоэнергетических элементарных частиц и в разработке новых разделов квантовой теории. Предложенная ги-

потеза, приведенные примеры и эксперимент дают основания к формированию новых физических представлений о скорости, массе и инерции тел.

**Ключевые слова:** квантовая механика, скорость тела, удар, импульс тела, спин элементарных частиц.

### Литература

1. Замедленная видеосъемка падения капли. URL: [https://www.youtube.com/watch?v=rIMQob\\_P9C0](https://www.youtube.com/watch?v=rIMQob_P9C0) (дата обращения 21.12.2019).
2. Замедленная видеосъемка выстрела из пистолета. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=hnHXk2bpArA> (дата обращения 21.12.2019).
3. Эксперимент с падением двух различных тел в вакууме. URL: <https://www.discovermagazine.com/the-sciences/watch-a-feather-and-bowling-ball-fall-at-the-same-speed> (дата обращения 21.12.2019).
4. Abbott B.P. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters: journal*, 2016, vol. 116, no. 6. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102

## **On the formation of new physical concepts about the speed, mass, and inertia of bodies**

© Y.N. Razoumny, S.A. Kupreev, V.S. Ruchinskiy

RUDN, MAI (SRU), Moscow, Russia

E-mail: 2svr@mail.ru

A hypothesis has been put forward about the emission/absorption by a body of elementary particles having a spin in a plane perpendicular to the velocity vector of the body. Examples are given from various fields of physics. An experiment with the motion of bodies in a vacuum chamber is considered. Compton wavelength of elementary particles emitted/absorbed by the body is estimated. The proposed hypothesis, the given examples and the experiment give grounds for the formation of new physical ideas about the speed, mass and inertia of bodies.

The results can be used in experiments to search for low-energy elementary particles and in the development of a new quantum theory.

**Keywords:** quantum physics, body velocity, impact, momentum of the body, spin of elementary particles.

## Оценка энтропийной концепции происхождения сил гравитации с позиций системы физических величин и закономерностей

© А.С. Чуев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

**Аннотация.** Оценка строится на анализе публикации Эрика Верлинде «О природе тяготения и законов Ньютона» (перевод М.Х. Шульмана). В этой работе сила гравитации не считается фундаментальной физической силой, а отнесена к проявлению градиента информационной и термодинамической энтропии. Анализ энтропийной концепции выполнен с использованием авторской системы физических величин и закономерностей (ФВиЗ), где физические величины (ФВ) структурированы в своем расположении в виде отдельных системных кластеров. В каждом кластере ФВ характеризуются определенной физической направленностью (смыслом), а внутрикластерные и межкластерные размерностные связи ФВ, визуально представляемые в виде выделенных параллелограммов и линий с определенным соотношением размерностей ФВ, расположенных на смежных и противоположных вершинах, выражают природные закономерности. С точки зрения системы ФВиЗ энтропийная концепция происхождения сил гравитации является вполне обоснованной. Анализ конкретной публикации Э. Верлинде показывает правильность ее основных положений. Правда, встречаются отдельные ошибки в формулах, которые могут быть связаны с погрешностями перевода.

**Ключевые слова:** гравитация, энтропия, система физических величин и закономерностей.

Со времен И. Ньютона силу гравитации принято относить к механике. Однако физический смысл этой силы, включая причину происхождения и возможность управления этой силой, до сих пор остается непознанным. Некоторые ученые считают гравитацию проявлением небольшой разницы во взаимодействии электрических зарядов противоположной полярности. Другие ученые склонны относить эту силу к проявлению теневого эффекта в концепции существования всепроникающего эфира. И совсем немногие связывают происхождение сил гравитации с термодинамической энтропией, обусловленной вероятностными характеристиками. Одной из таких работ является публикация Э. Верлинде [1].

Предлагаемая в работе [1] связь ФВ имеет вид

$$\hbar G = sc^3,$$

где  $s$  — площадь оболочки;  $G$  — константа тяготения И. Ньютона;  $T$  — температура;  $\hbar$  — постоянная Планка.

Наглядная иллюстрация этого соотношения из работы [1] приведена на рис. 1. Но понять что-либо из этого рисунка и приводимых пояснений очень сложно.

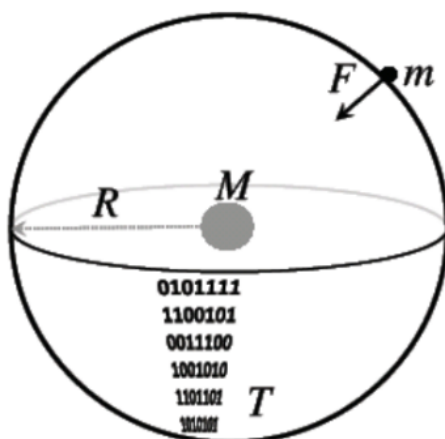


Рис. 1. Частица с массой  $m$  вблизи голографического сферического экрана

Приведем некоторые пояснения из работы [1]. «...Пространство не может возникать само по себе. Оно должно быть чем-то вроде устройства памяти, хранящего количество информации для заданного распределения энергии. Оказывается, что в нерелятивистском случае это устройство представляет собой ньютонов потенциал, а результирующая энтропийная сила именуется тяготением.

Будем отталкиваться от микроскопической информации. Предполагается, что она хранится на голографических экранах. Заметим, что эта информация обладает естественным свойством включения: при забывании некоторых бит (при огрублении за счет уровня дискретизации) количество информации понижается. Такое огрубление может быть получено в результате усреднения, игнорирования вращения (block spin transformation), интегрирования или любой другой процедуры ренормализационной группы. При каждом шаге происходит дальнейшее огрубление исходных микроскопических данных. Огрубленные данные хранятся на маленьких экранах, возникающих при “перемещении” исходного экрана внутрь пространства. Информация, удаляемая при огрублении, заменяется возникающей частью пространства между двумя экранами. Так получается ветвящееся описание пространства за счет поверхностей, состоящих из других

поверхностей. Другими словами, возникает направление в пространстве, которое соответствует переменной “дискретизации”, чему-то вроде параметра обрезания для системы экранов. Изначально в пространстве нет выделенного голографического направления. Однако оно появляется, когда мы говорим о ньютоновом потенциале. Это — естественная переменная, которая измеряет количество дискретизаций на экранах. Следовательно, голографическое направление задается градиентом ньютонова потенциала».

Все изложенное очень темно и непонятно.

Воспользуемся более понятным соотношением ФВ в размерностной системе ФВиЗ, где законы представлены в виде выделенных параллелограммов и линий. В системе ФВиЗ энтропия отнесена к кластеру базовых механических величин и имеет размерность  $ML^2T^{-1}$ . Изображения системы, с учетом ее многослойности, лучше всего приводить бы в цветном исполнении. Но ввиду ограничения на размещение рисунков, приводим систему ФВиЗ в черно-белом исполнении (рис. 2 и 3). Без рисунков системы в этой теме объяснить что-либо вообще невозможно. Это примерно так же, как пытаться объяснить таблицу Д.И. Менделеева только словами.

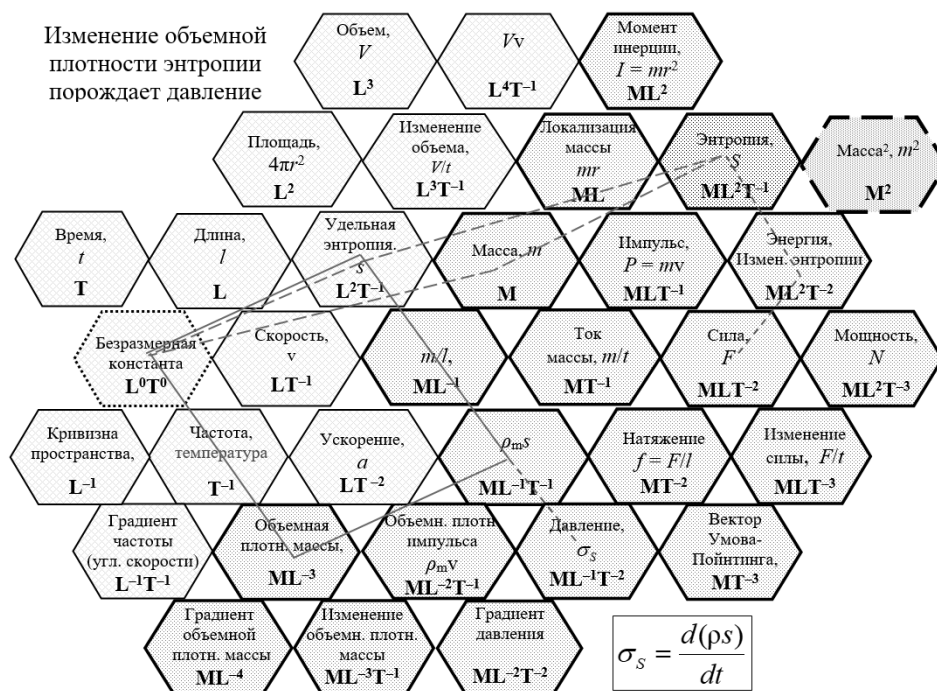


Рис. 2. Расположение и основные системные связи энтропии в системе физических величин и закономерностей (ФВиЗ)

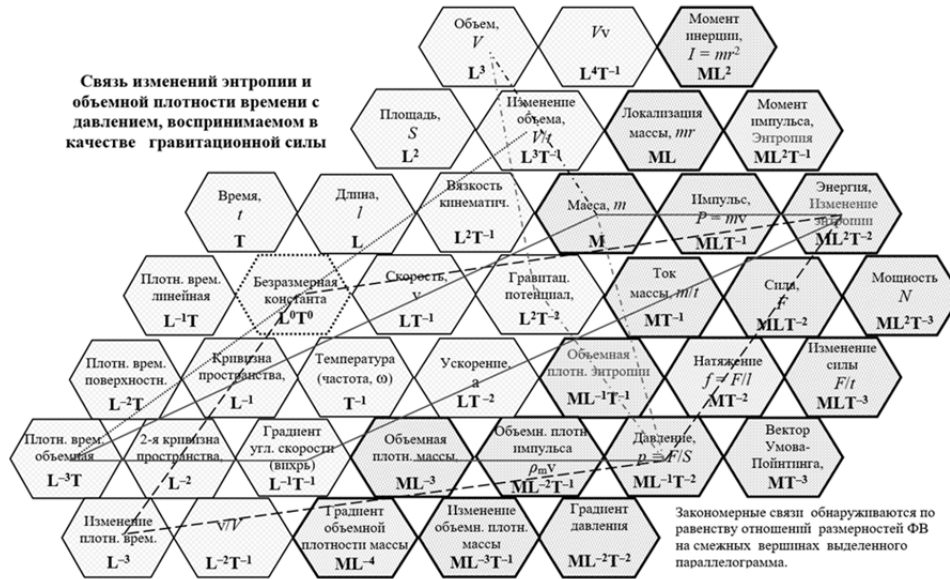


Рис. 3. Сила гравитации как давление, обусловленное объемной плотностью изменения энтропии и изменением объемной плотности времени

Приводимое в работе [1] энергетическое соотношение  $F\Delta x = T\Delta S$  вполне понятно и соответствует данной системе. Однако другое соотношение, по идее имеющее размерность энергии,

$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar a}{c},$$

где  $a$  — ускорение, почему-то не вписывается в нашу систему;  $\hbar$  — постоянная Планка и энтропия имеют одинаковую размерность.

Следующее соотношение Э. Верлинде:

$$\frac{\delta S}{n} = -k_B \frac{\delta \varphi_{\text{грав}}}{2c^2}.$$

Если в этом соотношении  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $c$  — скорость света, а  $n$  — безразмерная величина, то оно соответствует системе ФВиЗ.

Приведем еще одно изображение нашей системы с участием ФВ, связанных с изменением объемной плотности времени. Это научное направление разрабатывалось ленинградским астрономом Н.А. Козыревым и имеет отношение к происхождению энтропийных сил гравитации.

Приводимые на рис. 2 и 3 физические закономерности, в том числе с участием энтропии, наглядно и системно (через размерности) иллюстрируют связь ее параметров и параметров гравитации.

**Вывод.** Энтропийная концепция происхождения сил гравитации в основном находит свое подтверждение размерностной системой физических величин и закономерностей.

### Литература

1. Верлинде Э. *О природе тяготения и законов Ньютона*. (Перевод). URL: [http://timeorigin21.narod.ru/rus\\_translation/Gravity\\_and\\_entropy.pdf](http://timeorigin21.narod.ru/rus_translation/Gravity_and_entropy.pdf)
2. Чуев А.С. *Система ФВУЗ*. URL: <https://bmstu.ru/ps/~chuev/Публикации>

## О возможности достижения швингеровского предела в резонансной твердотельной микрополости

© С.В. Пичкуненко\*, В.В. Филатов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: swetlathok@gmail.com

Предел Швингера — величина напряженности электромагнитного поля, выше которой вакуум проявляет нелинейные свойства. На основе численных расчетов нами была установлена теоретическая возможность достижения швингеровского предела в резонансной микрополости фотонного кристалла при оптическом возбуждении последнего монохроматическим источником с длиной волны, соответствующей краю запрещенной фотонной зоны кристалла. В этом случае при надлежащем охлаждении образца с целью поддержания добротности в его микрополостях формируется поляритонный бозе-конденсат, в котором плотность поляритонных состояний стремится к бесконечности. Полученные результаты открывают возможности твердотельной генерации позитронов для задач коллайдерной физики.

**Ключевые слова:** *предел Швингера, нелинейность вакуума, фотонный кристалл, микрополость, бозе-эйнштейновская конденсация.*

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 19-12-00242).*

## On the possibility to reach the Schwinger limit in the resonant solid microcavity

© S.V. Pichkurenko \*, V.V. Filatov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail: swetlathok@gmail.com

In quantum electrodynamics, the Schwinger limit is a scale above which the electromagnetic field is expected to become nonlinear. Our simulations show the possibility of its reaching by the optical pumping of

a photonic crystal by the monochromatic (laser or LED) source with wavelength matched to the photonic crystal bandgap edge. This way, at active cooling to preserve the crystal's Q-factor, in its microcavities, there form the Bose-Einstein condensation of polaritons with a giant (tends to the infinity) density of states. The results allow to get the solid source of positrons for colliders.

**Keywords:** *Shwinger limit, vacuum non-linearity, photonic crystal, microcavity, Bose-Einstein condensation.*

*The work is supported by the Russian Science Foundation  
(grant No.19-12-00242).*

## **Гравитационные волны в моделях ранней вселенной на основе ЭГБ-гравитации**

© И.В. Фомин\*, В.О. Гладышев, В.Л. Кауц

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: (ingvor@inbox.ru)

**Аннотация.** Рассмотрены инфляционные модели ранней Вселенной на основе теории гравитации Эйнштейна — Гаусса — Бонне. Показана связь данной модификации теории гравитации Эйнштейна с характеристиками реликтовых гравитационных волн.

**Ключевые слова:** *гравитационные волны, ранняя вселенная, модифицированные теории гравитации.*

В настоящее время для построения непротиворечивых моделей эволюции Вселенной используются различные модификации гравитации Эйнштейна. Основой для построения космологических моделей с использованием модификаций ОТО является учет квантовых поправок к теории гравитации Эйнштейна. Геометрической интерпретацией одной из таких поправок является скаляр Гаусса — Бонне, неминимальное взаимодействие которого со скалярным полем (инфлатоном) приводит к расхождению с предсказаниями стандартных инфляционных моделей ранней Вселенной, основанных на гравитации Эйнштейна [1, 2].

В данном докладе представлен анализ влияния неминимальной связи скаляра Гаусса — Бонне и скалярного поля на основные фоновые параметры моделей космологической инфляции и параметры космологических возмущений, что позволяет сопоставить данные модели с современными наблюдениями анизотропии и поляризации реликтового излучения.



Определена процедура реконструкции параметров гравитации Эйнштейна — Гаусса — Бонне на основе измерений характеристик реликтовых гравитационных волн. Обсуждается роль непосредственного детектирования реликтовых гравитационных волн при построении феноменологически корректных космологических моделей.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-29-11015мк.*

## Литература

1. Fomin I.V. Cosmological Inflation with Einstein — Gauss — Bonnet Gravity. *Phys. Part. Nucl.*, 2018, vol. 49, no. 4, p. 525.
2. Fomin I.V., Chervon S.V. Reconstruction of general relativistic cosmological solutions in modified gravity theories. *Phys. Rev. D.*, 2019, vol. 100, no. 2, p. 023511.

## Gravitational waves in models of early universe based on EGB-gravity

© I.V. Fomin\*, V.O. Gladyshev, V.L. Kauts

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail: ingvor@inbox.ru

**Abstract.** Inflationary models of the early universe based on the Einstein—Gauss—Bonnet theory of gravity are considered. The relationship of this modification of Einstein's theory of gravity with the characteristics of relict gravitational waves is considered as well.

**Keywords:** *gravitational waves, early universe, modified gravity theories.*

At present, various modifications of Einstein gravity are used to construct consistent models of the evolution of the universe. The basis for constructing cosmological models using modifications of general relativity is taking into account quantum corrections to Einstein theory of gravity. The geometric interpretation of one of such corrections is the Gauss—Bonnet scalar, whose non-minimal coupling with a scalar field (inflaton) leads to deviations with the predictions of the standard inflationary models of the early universe based on Einstein gravity [1, 2].

This report presents an analysis of the influence of the non-minimal coupling of the Gauss—Bonnet scalar and the scalar field on the main background parameters of cosmological inflation models and parameters of cosmological perturbations, which makes it possible to compare the model data with modern observations of the CMB anisotropy and polarization.

The procedure for reconstructing the parameters of Einstein—Gauss—Bonnet gravity based on measurements of the characteristics of relict gravitational waves is also determined. The role of direct detection of relict

gravitational waves in the construction of phenomenologically correct cosmological models is discussed.

*This work was supported by the grant RFBR no. 19-29-11015 mk.*

## References

1. Fomin I.V. Cosmological Inflation with Einstein — Gauss — Bonnet Gravity. *Phys. Part. Nucl.*, 2018, vol. 49, no. 4, p. 525.
2. Fomin I.V., Chervon S.V. Reconstruction of general relativistic cosmological solutions in modified gravity theories. *Phys. Rev. D.*, 2019, vol. 100, no. 2, p. 023511.

## О возможности получения стоячих гравитационных волн в оптическом резонаторе

© Ю.А. Хрибкова\*, В.В. Филатов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: yulia.hribkova@mail.ru

**Аннотация.** Установлено, что поле стоячей электромагнитной волны в оптическом резонаторе искривляет метрику пространства — времени таким образом, что внутри резонатора формируется стоячая гравитационная волна. Результат позволяет положительно разрешить вопрос о возможности отклонения скорости распространения гравитационных волн от скорости света в вакууме.

**Ключевые слова:** гравитация, микрорезонатор, стоячая волна.

При внешнем оптическом возбуждении одномерного микрорезонатора монохроматическим излучением с длиной волны, полуцелое число раз укладывающейся внутри резонатора, в последнем формируется стоячая электромагнитная волна, которая, как следует из уравнений Эйнштейна для общей теории относительности, искривляет метрику пространства — времени внутри резонатора таким образом, что порождаемое гравитационное поле описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных, представляющим собой волновое уравнение с квадратичным источником. Таким образом, при указанных условиях порожденное в резонаторе гравитационное поле представляет собой стоячую гравитационную волну с неподвижными узлами и пучностями. Тем самым вопрос о принципиальной возможности отклонения скорости распространения гравитационных волн от скорости света в вакууме разрешается положительно.

## On the possibility to get a standing gravitational wave in an optical resonator

© Yu.A. Khribkova\*, V.V. Filatov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail: yulia.hribkova@mail.ru

**Abstract.** The General Relativity shows a standing electromagnetic wave in an optical resonator curves the space-time inside the resonator such a way to form there the standing gravitational wave. This allows to resolve the problem of a possible deviation for a speed of gravitational waves from the speed of light in a vacuum.

**Keywords:** gravitation, microresonator, standing wave.

## Численное моделирование фотон-парафотонных осцилляций в межзвездной среде в присутствии электромагнитного поля

© Д.Р. Ядрихинская\*, В.В. Филатов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: daiaanayadr@bk.ru

Проведено численное моделирование процесса фотон-парафотонных осцилляций в межзвездной среде. Установлено, что поглощение (и последующее испускание) виртуальных фотонов в облаках межзвездного газа приводит к установлению термодинамического равновесия между фотонной и парафотонной компонентами.

Парафотон — аксионоподобная частица, образующаяся в результате неупругого двухфотонного взаимодействия  $\gamma + \gamma \rightarrow a$ . При распространении электромагнитного поля в межзвездной среде возможен процесс поглощения электромагнитным квантом  $\gamma$  виртуального фотона  $\gamma_{virt}$  с образованием парафотона  $a$ , который по прошествии некоторого времени испускает  $\gamma_{virt}$  и возвращается в исходное состояние  $\gamma$ :

$$\gamma + \gamma_{virt} \rightarrow a \rightarrow \gamma + \gamma_{virt}.$$

Таким образом, в межзвездной среде следует ожидать непрерывных фотон-парафотонных превращений, которые, как показывают наши расчеты, приводят к установлению динамического равновесия между фотонной и парафотонной компонентами.

**Ключевые слова:** темная материя, парафотон, фотон-парафотонные осцилляции, равновесие.

## **Numerical simulation for the photon-paraphoton oscillations in the space at the relic background**

© D.R. Yadrikhinskaya\*, V.V. Filatov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail: daiaanayadr@bk.ru

**Abstract.** We simulated the photon-paraphoton oscillations by the virtual photon uptake and its subsequent emission into an interstellar space. The results show, there is a dynamic equilibrium between photons and paraphotons.

**Keywords:** *dark matter, paraphoton, photon-paraphoton oscillations, equilibrium.*

### **1.3. Математическое моделирование и анализ**

*Руководители:* д-р техн. наук, проф. Н.И. Сидняев,  
д-р техн. наук проф. С.Н. Саяпин

## **Управление нестационарным температурным полем в криолитозоне**

© Н.И. Сидняев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: Sidn\_ni@mail.ru

Изложены вопросы надежности геотехнических сооружений с использованием сезонных охлаждающих установок, эксплуатирующихся в сложных климатических условиях с соответствующей геологической средой, представленной вечномерзлыми грунтами Арктики.

Прогнозирование теплового взаимодействия геотехнических сооружений с многолетнемерзлыми грунтами является одной из наиболее сложных задач. Разработки этой проблемы основаны, главным образом, на предположении о стационарности процесса теплообмена и не обеспечивают необходимую точность прогноза, особенно в переходные периоды года. На основании данных натурных наблюдений и математического моделирования должны быть установлены влияние специальных строительных работ на изменение геокриологических условий и общие тенденции этих изменений; особенности теплового взаимодействия подземных участков геотехнических сооружений спе-

циального назначения с грунтами, вызванные изменениями температуры в надземных участках, а также разработка физических и математических моделей для определения глубины протаивания. Задача составления прогноза формулируется как определение изменений температурного режима, площадного распространения, мощности и вертикального строения вечномерзлых грунтов, сезонного и многолетнего промерзания грунтов, их температурно-прочностного состояния и свойств в связи со строительством конкретных объектов военного специального назначения и сооружений в каждом микрорайоне площадки, а также приращений сейсмической интенсивности этих микрорайонов в измененных мерзлотных условиях.

В настоящее время разработано несколько видов сезонно-действующих охлаждающих устройств (сокращенно СОУ), а также ряд модификаций. Данная система состоит из двух основных элементов:

1) охлаждающих труб — это размещенная в основании сооружения испарительная часть. Охлаждающие трубы служат для циркуляции хладагента и замораживания грунта;

2) конденсаторного блока, расположенного над поверхностью грунта и соединенного с испарительной частью. Предназначен для конденсации паров хладагента и перекачки его по системе за счет естественной конвекции и силы тяжести. Хладагент системы — аммиак или углекислота.

Особенностью системы является возможность осуществлять глубинное замораживание грунтов в самых недоступных местах или тех местах, где размещение надземных элементов нежелательно или невозможно, так как все охлаждающие элементы расположены ниже поверхности грунта, а конденсаторный блок может быть вынесен на удаление от сооружения до 70 м. Назначение системы — поддержание заданного температурного режима вечномерзлых грунтов и устранение непредвиденных тепловыделений под фундаментами различных сооружений: резервуаров объемом до 100 000 м<sup>3</sup>, автомобильных и железных дорог (до 1000 м), зданий с полами по грунту шириной до 120 м.

Индивидуальные термостабилизаторы предназначены для замораживания талых и охлаждения пластичномерзлых грунтов под зданиями с проветриваемым подпольем и без него, эстакадами трубопроводов, линий электропередачи и другими сооружениями с целью повышения их несущей способности и предупреждения выпучивания свай.

Термостабилизаторы устанавливаются в грунт вертикально либо наклонно. Они представляют собой индивидуальную однотрубную конструкцию с цельнометаллическим корпусом, заправленную хладагентом: углекислотой или аммиаком. Общая длина термостабилизатора 15...30 м. Высота наземной конденсаторной части с алюминии-

вым оребрением до 3 м. Испарительная часть термостабилизатора находится в грунте и имеет защитное оцинкованное покрытие.

Глубинные СОУ предназначены для замораживания и температурной стабилизации грунтов плотин, устьев скважин глубиной до 100 м для обеспечения их эксплуатационной надежности. Это сезонно-действующее охлаждающее устройство представляет собой герметичную неразъемную сварную конструкцию, заправленную хладагентом. Глубина подземной части более 23 м. В настоящее время разработаны и применяются следующие изделия, а именно:

*групповые СОУ*, состоящие из нескольких индивидуальных термостабилизаторов, каждый из которых замораживает свои горизонты. Опробованы две разновидности групповых СОУ: полной заводской готовности с полиэтиленовой вставкой и общей глубиной замораживания до 50 м и цельнометаллические с полевым монтажом и общей глубиной замораживания до 20 м, хладагент — аммиак;

*коллекторные СОУ*, с помощью коллектора соединенные с аппаратом воздушного охлаждения, в котором обдув оребренных труб производится с помощью вентиляторов. Принудительный обдув воздуха оребренных труб позволяет в самые морозные безветренные периоды, свойственные, например, для Якутии, значительно увеличить теплообмен и получить температуру замораживающих труб, практически равную температуре наружного воздуха. Такая система предназначена для интенсивного первоначального промораживания и дальнейшего экономичного поддержания полученной мерзлой зоны грунта.

Идеальным хладагентом для глубинных СОУ является углекислота, она заполняет всю промораживаемую высоту СОУ, а интенсивная циркуляция хладагента обеспечивается применением специальных внутренних устройств.

В настоящее время выявлено, что инженерно-геокриологические условия строительства являются очень сложными за счет засоленности, заторфованности и льдистости грунтов, а также наличия пластовых льдов. Несущая способность таких грунтов в природном состоянии является очень слабой и значительно снижается при повышении температуры грунтов. Поскольку в процессе монтажа свай буроопускным способом в грунты основания поступает значительное количество тепла, то происходит резкое повышение температур грунтов и снижение несущей способности свай. Восстановить температурное состояние грунтов, а в дальнейшем понизить их температуру и надежно обеспечить несущую способность грунтов возможно только при применении сезонно-охлаждающих устройств.

Инженерно-геокриологические условия строительства характеризуются также как очень сложные, поскольку в основании залегают засоленные грунты, торф и лед. В основании здания аварийно-

спасательной службы (24×76 м), где на значительной площади основания залегают лед, применены горизонтальные и вертикальные системы. В целях исключения пластично-временных деформаций, залегающих в основании пластовых льдов, предложено выполнить распределение нагрузок от тяжело нагруженной пожарной техники путем размещения в основании георешетки с цементно-песчаным заполнителем. Надежность температурного режима ледогрунтовых оснований обеспечивается обязательным размещением в основаниях дополнительных резервных труб, к которым при необходимости могут быть подключены серийно-выпускаемые холодильные машины.

Для анализа формирования ореола оттаивания вокруг подземных объектов проводится расчет динамики трехмерного температурного поля в течение 50 лет и содержания незамерзшей влаги в грунте. При этом рассматривается наиболее опасный случай, когда часть сооружения лежит на границе раздела подземного льда и грунтов с низким содержанием льда. В программе на основании данных по инженерно-геологическим изысканиям восстанавливается трехмерная геометрия инженерно-геологического строения грунтов, а также создается геометрия сооружения. Следует отметить, что геометрия сооружения имеет изгибы как по оси  $Z$ , так и по оси  $Y$ , при этом некоторые участки объекта проходят через подземные льды. Изменение относительного содержания незамерзшей воды в зависимости от температуры для различных типов грунтов задается в программе в табличном виде. На границе области моделирования задаются граничные условия.

**Ключевые слова:** температура, криолитозона, нестационарность, прогноз, управление, расчет.

### Литература

1. Сидняев Н.И., Васильев В.И., Федотов А.А., Васильева М.В., Степанов С.П., Ильина Ю.С. *Моделирование распределения нестационарных температурных полей в криолитозоне при проектировании геотехнических сооружений*. Н.И. Сидняев, В.И. Васильев, ред. Москва, Издательство «КУРС», 2017, 672 с.

## Control of a non-stationary temperature field in the cryolithozone

© N.I. Sidnyaev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: Sidn\_ni@mail.ru

The report describes the issues of reliability of geotechnical structures using seasonal cooling units operating in difficult climatic conditions with the corresponding geological environment represented by permafrost soils of the Arctic.

Forecasting the thermal interaction of geotechnical structures with permafrost is one of the most difficult tasks. The development of this problem is based mainly on the assumption that the heat exchange process is stationary and does not provide the necessary accuracy of the forecast, especially during the transition periods of the year. Based on the data of field observations and mathematical modeling, the influence of special construction works on changes in geocryological conditions and General trends of these changes should be established; features of thermal interaction of underground sections of special-purpose geotechnical structures with soil caused by temperature changes in aboveground sections; development of physical and mathematical models for determining the depth of thawing. The task of making a forecast is formulated as determining changes in the temperature regime, area distribution, thickness and vertical structure of permafrost soils, seasonal and long-term freezing of soils, their temperature and strength state and properties in connection with the construction of specific military special-purpose objects and structures in each microdistrict of the site, as well as increments in the seismic intensity of these microdistricts under changed permafrost conditions.

Currently, several types of seasonally active cooling devices have been developed; the sow has been reduced, as well as a number of modifications. This system consists of two main elements:

1) cooling pipes are the evaporative part located at the base of the structure. Cooling pipes are used to circulate the refrigerant and freeze the ground;

2) a condenser unit located above the ground surface and connected to the evaporation part. Designed for condensing refrigerant vapors and pumping it through the system due to natural convection and gravity.

The system's refrigerant is ammonia or carbon dioxide.

A special feature of the system is the ability to perform deep freezing of soils in the most inaccessible places or in places where the placement of aboveground elements is undesirable or impossible, since all cooling elements are located below the ground surface, and the condenser unit can be removed from the structure up to 70 m. The purpose of the system is to maintain the set temperature regime of permafrost soils and eliminate unexpected heat release under the foundations of various structures: reservoirs with a volume of up to 100,000 m<sup>3</sup>, roads and railways (up to 1000 m), buildings with ground floors up to 120 m wide. Individual heat stabilizers are designed for freezing thawed and cooling plastic-frozen soils under buildings with and without ventilated underground, overpasses of pipelines, power lines and other structures in order to increase their load-bearing capacity and prevent bulging piles.

Heat stabilizers are installed in the ground vertically or obliquely. They are an individual single-tube structure with an all-metal body, filled



with a refrigerant: carbon dioxide or ammonia. The total length of the heat stabilizer is from 15 to 30 m. The height of the ground condenser part with aluminum fins is up to 3 m. The evaporative part of the heat stabilizer is located in the ground and has a protective galvanized coating.

Deep DSS are designed for freezing and temperature stabilization of dams and wellheads up to 100 m deep in order to ensure their operational reliability. This seasonally active cooling device is a sealed, all-in-one welded structure filled with refrigerant. The depth of the underground part is more than 23 m. Currently, the following products are developed and used, namely:

*Group of SOU.* Group sous consist of several individual heat stabilizers, each of which freezes its horizons. Two types of group SDS were tested: full factory readiness with a polyethylene insert and a total freezing depth of up to 50 meters, and all-metal with field installation and a total freezing depth of up to 20 meters, the refrigerant is ammonia;

*Collector sous* are connected to an air-cooling device using a collector, in which finned pipes are blown using fans. Forced air blowing of finned pipes allows you to significantly increase heat exchange in the frostiest windless periods, typical, for example, for Yakutia, and get the temperature of freezing pipes almost equal to the temperature of the outside air. This system is designed for intensive initial freezing and further economical maintenance of the resulting frozen ground zone.

Carbon dioxide is the ideal refrigerant for deep-water DSS, it fills the entire frozen height of the DSS, and intensive circulation of the refrigerant is provided by the use of special internal devices.

Currently, it has been revealed that the engineering and geocryological conditions of construction are very difficult due to salinity, stagnation and iciness of the soil, as well as the presence of reservoir ice. The bearing capacity of such soils in the natural state is very weak, and significantly decreases with increasing soil temperature. Since a significant amount of heat enters the ground of the base during the installation of piles by drilling, there is a sharp increase in soil temperatures and a decrease in the load-bearing capacity of the piles. It is possible to restore the temperature condition of the soil, and then lower its temperature and reliably ensure the bearing capacity of the soil only when using seasonal cooling devices.

Engineering and geocryological conditions of construction are also characterized as very complex, since saline soils, peat and ice lie at the base. Horizontal and vertical systems are used at the base of the emergency service building (24×76 meters), where a large area of the base is covered with ice. In order to exclude plastic — time deformations that occur at the base of reservoir ice, it is proposed to distribute loads from heavily loaded fire equipment by placing a geogrid with a cement-sand aggregate at the base. The reliability of the temperature regime of ice-ground bases is ensured by the mandatory placement of additional backup pipes in the

bases, to which, if necessary, mass-produced refrigerating machines can be connected.

To analyze the formation of a thawing halo around underground objects, the dynamics of a three-dimensional temperature field over 50 years and the content of unfrozen moisture in the ground are calculated. In this case, the most dangerous case is considered when part of the structure lies at the interface between underground ice and low-ice soils. In the program, based on data from engineering and geological surveys, the three-dimensional geometry of the engineering and geological structure of soils is restored, as well as the geometry of the structure was created. It should be noted that the geometry of the structure has bends along both the  $Z$  and  $Y$  axes, and some sections of the object pass through underground ice. The change in the relative content of unfrozen water depending on the temperature for different types of soils is set in the program in tabular form. Boundary conditions are set at the boundary of the modeling area.

**Keywords:** *temperature, cryolithozone, unsteadiness, forecast, control, calculation.*

#### **References**

1. Sidnyaev N.I., Vasil'ev V.I., Fedotov A.A., Vasil'eva M.V., Stepanov S.P., Il'ina U.S. *Modeling the distribution of non-stationary temperature fields in the cryolithozone in the design of geotechnical structures*. N.I. Sidnyaev, V.I. Vasil'ev, red. Moscow, KURS Publ., 2017, 672 p.

## **Математическое моделирование процессов теплопереноса в трехфазном материале с поглощающими проникающее излучение включениями**

© А.В. Аттетков, И.К. Волков, К.А. Гайдаенко\*, А.В. Котович

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: kseniyagaydaenko@gmail.com; fn2@bmstu.ru

**Аннотация.** Предложена математическая модель процесса теплопереноса в трехфазном пористом материале, содержащем поглощающие проникающее излучение включения в виде шарового слоя (регулярная ячеистая схема). Реализуемая математическая модель представляет собой смешанную задачу для системы уравнений в частных производных второго порядка параболического типа при наличии теплового источника в системе. Отмечены трудности, возникающие при аналитическом решении рассматриваемой задачи с применением интегрального преобразования Лапласа по временной переменной. Для преодоления возникших трудностей с использованием общей теории

интегральных преобразований разработано конечное интегральное преобразование по пространственной переменной для многослойной области. Его применение позволяет представить искомое температурное поле объекта исследований в аналитически замкнутом виде.

**Ключевые слова:** *трехфазный материал, лазерное излучение, поглощающие включения в виде шарового слоя, температурное поле, интегральное преобразование.*

### Литература

1. Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А. Процессы теплопереноса в твердом теле с поглощающим проникающее излучение включением в виде шарового слоя. *ТИТ*, 2020, т. 12, № 1, с. 18–24.
2. Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А. Автомодельные процессы теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим включением в виде шарового слоя. *ТИТ*, 2020, т. 12, № 5, с. 219–224.

## Mathematical modelling of heat transfer in three-phase with penetrating radiation absorbing inclusions

© A.V. Attetkov, I.K. Volkov, K.A. Gaydaenko\*, A.V. Kotovich

Bauman Moscow State University, Moscow, Russia  
\*E-mail: kseniyagaydaenko@gmail.com, fn2@bmstu.ru

**Abstract.** A mathematical model of heat transfer in a three-phase porous material containing penetrating radiation absorbing inclusions in a form of spherical layer (regular cellular scheme) is proposed. The implemented mathematical model is a mixed problem for a system of equations in second-order partial derivatives of parabolic type in the presence of thermal source in the system. Difficulties arising in the analytical solution of the problem under consideration with application of Laplace's integral transformation by time variable are noted. A finite integral transformation over a spatial variable for multilayer region has been developed to overcome the difficulties encountered using general theory of integral transformations. Its application allows to represent the desired temperature field of the research object in analytically closed form.

**Keywords:** *three-phase material, laser radiation, absorbing spherical inclusions, temperature field, integral transformation.*

### References

1. Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A. Heat transfer processes in a solid body with an inclusion, absorbing penetrating radiation, as a spherical layer. *TPE*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 18–24.
2. Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A. Self-similar heat transfer processes in a transparent for radiation solid body with absorbing inclusion in the form of a spherical layer. *TPE*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 219–224.

## **Разработка и исследование математических моделей и алгоритмов управления процессом сепарирования сыпучих материалов**

© В.Г. Благовещенский\*, А.Е. Краснов, М.М. Благовещенская,  
С.Д. Савостин

МГУПП, Москва, Россия  
\*E-mail: bvg1996@mail.ru

**Аннотация.** Анализ процесса сепарирования показал, что данный объект является многомерным, стохастическим, нелинейным и обладает рядом прочих «неудобных» свойств. Для создания эффективных систем управления такими объектами требуется развивать методы их идентификации, создания оперативных алгоритмов управления, реализуемых программно-аппаратными комплексами. Разработаны и исследованы математические модели процессов сепарирования различных сыпучих материалов и алгоритмов идентификации этих процессов. На основе полученных результатов разработан алгоритм принятия решений интеллектуальной программно-аппаратной системой управления.

**Ключевые слова:** математическая модель, алгоритмы управления, сепарирование сыпучих материалов.

## **Development and research of mathematical models and control algorithms for the separation of bulk raw materials**

© V.G. Blagoveshchensky\*, A.E. Krasnov, I.G. Blagoveshchensky,  
S.D. Savostin

Moscow State University of Food Production, Moscow, Russia  
\*E-mail: bvg1996@mail.ru

**Abstract.** Analysis of the separation process showed that this object is multidimensional, stochastic, nonlinear and has a number of other “inconvenient” properties. The creation of effective control systems for such objects requires the development of methods for their identification, the creation of operational control algorithms, implemented by software and hardware systems. Mathematical models of separation processes of various bulk materials and algorithms for the identification of these processes have been developed and investigated. Based on the results obtained, an

algorithm for making decisions by an intelligent software and hardware control system was developed.

**Keywords:** *mathematical model, control algorithms, separation of bulk materials.*

## **Математическое моделирование процесса производства халвы**

© В.Г. Благовещенский\*, А.Е. Краснов, И.Г. Благовещенский

МГУПП, Москва, Россия

\*E-mail: bvg1996@mail.ru

**Аннотация.** Исследована проблема нестационарности параметров поступающего сырья на качество готовой продукции в процессе производства халвы. Предложен адаптивный подход к идентификации этих процессов. Показано, что решение данной задачи основано на применении локальной идентификации в задачах построения моделей технологических процессов в реальном масштабе времени с использованием в дальнейшем этих моделей для создания интеллектуальных систем автоматического контроля и прогнозирования качества готовой халвы на всех этапах ее производства с возможностью оперативного управления ходом этих процессов. Получены структурно-параметрические и математические модели основных этапов процессов производства халвы. На основе полученных результатов разработан алгоритм принятия решений интеллектуальной системой при автоматическом контроле и диспетчерском управлении процессами производства халвы.

**Ключевые слова:** *математическая модель, идентификация процессов, халва.*

## **Mathematical modeling of the sunflower halva production process**

© V.G. Blagoveshchensky\*, A.E. Krasnov, I.G. Blagoveshchensky

Moscow State University of Food Production, Moscow, Russia

\*E-mail: bvg1996@mail.ru

**Abstract.** The problem of non-stationarity of parameters of incoming raw materials on the quality of finished products in the production of halva is investigated. An adaptive approach to the identification of these processes is proposed. It is shown that the solution of this problem is based on

the use of local identification in the tasks of constructing models of technological processes in real time with the use of these models in the future to create intelligent systems for automatic control and predicting the quality of finished halva at all stages of its production with the possibility of operational control of the course of these processes. Structural-parametric and mathematical models of the main stages of halva production processes have been obtained. Based on the results obtained, an algorithm for making decisions by an intelligent system was developed for automatic control and dispatch control of technological processes of halva production.

**Keywords:** *mathematical model, process identification, halva.*

## **Модель системы обработки визуальной информации**

© И.Г. Благовещенский\*, Е.А. Назойкин, В.Г. Благовещенский

МГУПП, Москва, Россия  
\*E-mail: igblagov@mgupp.ru

**Аннотация.** В результате выполненных исследований разработана модель системы обработки визуальной информации. От исследуемого объекта на вход модели системы обработки визуальной информации поступает видеопоток, который сначала выделяется в виде последовательности кадров (фреймов) фиксированной размерности. Затем происходит предварительная обработка полученной от объекта информации, его сегментация, извлечение признаков и принятие решений. Здесь могут применяться традиционное количество однородных сегментов, на которые разбивается объект с использованием принципа максимальной апостериорной вероятности. Полученный при этом результат затем использовался в блоке адаптации. Предложенная модель системы обработки визуальной информации была реализована в среде Qt Creator на языке C++.

**Ключевые слова:** *модель, система обработки, визуальная информация.*

## **Visual information processing system model**

© I.G. Blagoveshchensky\*, E.A. Nazoikin, V.G. Blagoveshchensky

Moscow State University of Food Production, Moscow, Russia  
\*E-mail: igblagov@mgupp.ru

**Abstract.** Based on the results of the studies performed, a model of the visual information processing system was developed. From the object under study, a video stream arrives at the input of the model of the visual information processing system, which is first selected as a sequence of

frames (frames) of a fixed dimension. Then there is a preliminary processing of the information received from the object, its segmentation, extraction of features and decision-making. Here, the traditional number of homogeneous segments can be applied, into which the object is divided using the principle of maximum posterior probability. The result obtained is then used in the adaptation block. The proposed model of the visual information processing system was implemented in the Qt Creator environment in C ++.

**Keywords:** *model, processing system, visual information.*

## **Применение падежной грамматики для вывода информации из базы знаний экспертной системы о конструкциях летательных аппаратов**

© Ю.И. Бутенко, Е.Е. Болотова\*

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: bolotovaee@mail.ru

**Аннотация.** В работе раскрыты основные принципы построения баз знаний экспертных систем в области авиационной промышленности. Предложен логико-лингвистический подход к информационному моделированию предметной области при проектировании базы знаний экспертной системы. Описан механизм вывода информации из базы знаний на основе падежной грамматики Ч. Филлмора, позволяющий определить семантико-синтаксическую структуру выводимого предложения. Показано, что посредством расстановки ограничений на число участников ситуации, которые могут присоединять глагол, можно обеспечить эффективный вывод информации из базы знаний.

**Ключевые слова:** *экспертная система, база знаний, летательный аппарат, падежная грамматика.*

Применение систем искусственного интеллекта для поддержки принятия решений в сложных ситуациях необходимо в сфере авиационно-космической промышленности, где требуются обоснованные, логически доказуемые аргументы в оперативном и стратегическом управлении технологиями на авиационно-космических предприятиях. При принятии решений необходимо проведение детального моделирования последствий предполагаемого решения, поиск оптимального пути достижения заданного результата с помощью технологий имитационного моделирования. С подобными задачами успешно справляются экспертные системы — комплексы программных средств, способные частично или полностью заменять специалиста при решении сложных задач, воз-

никающих в процессе проектирования, эксплуатации и диагностики авиационно-космической техники.

Ядром любой системы искусственного интеллекта является база знаний, в которой накапливается вся необходимая информация о той или иной предметной области. Основной задачей проектирования базы знаний в области авиакосмического приборостроения является описание структуры летательного аппарата таким образом, чтобы оно предоставляло наиболее полную и непротиворечивую информацию об описываемом объекте. Конструкции самолетов и космических аппаратов требуют наличия сложных конструктивных элементов. Если применить лингвистические модели в совокупности с математическим аппаратом, возможно достичь более ясного и результативного описания и решения сложной технологической проблемы. Информация воспринимается специалистом на когнитивном уровне посредством основных единиц этого уровня — понятий, идей, концептов, поэтому для представления знаний предлагается применить аппарат семантических сетей, который позволит воссоздать модель, схожую с процессами мышления конструктора, технолога [1]. В инженерии знаний под семантической сетью подразумевается граф с узлами, отображающими объекты предметной области, и дугами, обозначающими отношения между данными понятиями.

Одним из необходимых компонентов базы знаний экспертной системы является механизм вывода, который содержит правила для решения конкретной задачи. Механизм вывода ссылается на информацию из базы знаний и выбирает факты и правила, которые будут применяться при попытке ответить на запрос пользователя. Данный механизм обеспечивает аргументацию информации в базе знаний и позволяет человеку получать информацию из базы знаний в виде предложений, построенных на естественном языке. Одним из наиболее удачных механизмов, позволяющих моделировать смысл высказываний на естественном языке, является механизм, основанный на теории падежных грамматик Ч. Филлмора [2]. В падежной грамматике семантика предложения рассматривается как система семантических валентностей. Валентность определяет число актантов (участников ситуации), которые могут присоединять глагол. Глагол является центром предложения и диктует в силу своего значения набор ролей (глубинных падежей), реализующихся в предложении посредством именных форм. Иными словами, падежная грамматика показывает связь существительного или местоимения с другими словами в предложении. Обрамление падежами подвержено определенным ограничениям, например, каждый семантический падеж может встречаться в предложении только один раз. Некоторые падежи являются обязательными, другие — необязательными. Обязательные



падежи нельзя удалять, так как существует риск получить грамматически неправильные предложения.

Для описания события в каждом фрейме иерархической структуры в первую очередь выделяется действие, которое обычно описывается глаголом. Далее определяются:

- объект, который действует — агенс;
- объект, над которым это действие выполняется — пациенс.

Количество падежей варьирует в трудах отечественных и зарубежных специалистов, однако Ч. Филлмор выделяет 6 универсальных падежей, которые могут быть взяты за основу при проектировании механизма вывода из базы знаний:

- 1) Агентив — объект, который производит действие; актант, участник ситуации;
- 2) Объектив — наиболее размытый падеж; к нему обычно относят все те существительные, не относящиеся к другим падежам;
- 3) Датив — одушевленное существо, затронутое выражаемым глаголом действием или ситуацией;
- 4) Инструменталис — предмет, посредством которого совершается действие;
- 5) Фактив — предмет, возникший в результате действия, прекративший существование или подвергшийся изменению;
- 6) Локатив — место действия, выражаемое глаголом.

На каждое отношение накладывается множество ограничений, например, структура глагола «пилотировать» может включать следующие семантические падежи:

- 1) Агентив — *Летчик* пилотировал самолет;
- 2) Пациентив — *Летчик* пилотировал *самолет*;
- 3) Инструменталис — *Летчик* пилотировал самолет *боковой ручкой управления*;
- 4) Локатив — *Летчик* впервые пилотировал самолет *на аэродроме* с плохим покрытием.

Возможно включение в структуру данного глагола и других семантических падежей, а также атрибутивных отношений, например, «пилотировать каким образом?» — «умело», «профессионально» и т. д. Такие ограничения необходимо накладывать для того, чтобы система могла строить правильные семантико-синтаксические структуры, что обеспечит связность и внутреннюю интерпретируемость знаний в экспертной системе.

## Литература

1. Сидняев Н.И., Бутенко Ю.И., Болотова Е.Е. Экспертная система производного типа для создания базы знаний о конструкциях летательных аппаратов. *Авиакосмическое приборостроение*, 2019, № 6, с. 38–52.
2. Fillmore Ch. The Case for Case. In: *Universals in Linguistic Theory*. New York, Holt, Rinehart, and Winston, 1968, pp. 1–88.

## Use of case grammar to output data from the knowledgebase of expert system on aircraft structures

© Yu.I. Butenko, E.E. Bolotova\*

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): bolotovaee@mail.ru

**Abstract.** The paper describes the basic principles of building knowledge bases of expert systems in the aviation industry. A logical-linguistic approach to information modeling of the subject area in the design of the expert system knowledge is proposed. The mechanism of information output from the expert system based on the case grammar of Ch. Fillmore, which allows to determine the semantic and syntactic structure of the output sentence, is described. It is shown that by placing restrictions on the number of participants in the situation that the verb can attach, it is possible to ensure effective output of information from the knowledge base.

**Keywords:** *expert system, knowledge base, aircraft, case grammar.*

### References

1. Sidnyaev N.I., Butenko Yu.I., Bolotova E.E. Rule-based expert system for creating a knowledge base on aircraft structures. *Aerospace Instrument Making*, 2019, vol. 6, pp. 38–52.
2. Fillmore Ch. The Case for Case. In: *Universals in Linguistic Theory*. New York, Holt, Rinehart, and Winston, 1968, pp. 1–88.

## Транслирование физического явления «флуктуация» на динамику экономической деятельности инновационного высокотехнологичного предприятия ракетно-космической отрасли

© Д.А. Голоднов\*, В.В. Соколянский

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): gda17ea025@student.bmstu.ru

**Аннотация.** Рассмотрена адаптация физического явления «флуктуация» для расчета флуктуаций показателей эффективности деятельности высокотехнологичного предприятия ракетно-космической отрасли. Постулируется, что флуктуационный механизм способствует нарушению стабильности в деятельности предприятия, поэтому возникает необходимость в количественной оценке флуктуаций.

Предложена методика расчета значений флуктуаций показателей эффективности экономической деятельности высокотехнологичного предприятия, обоснованная корреляционным анализом.

**Ключевые слова:** флуктуации, экономика инновационного высокотехнологичного предприятия, показатели экономической эффективности, методика расчета флуктуационного потенциала предприятия, корреляционная матрица, флуктуационный потенциал предприятия, ракетно-космическая отрасль.

Флуктуационные механизмы и динамика показателей экономической эффективности инновационного высокотехнологичного предприятия до сих пор являются малоизученной темой. Ранее производился расчет флуктуаций в зависимости от узкого спектра показателей эффективности экономической деятельности предприятия [1].

Флуктуации как физическое явление представляют собой любое случайное отклонение какой-либо величины. Под флуктуациями в экономике высокотехнологичного предприятия будем понимать отклонение расчетного (ожидаемого) значения экономического показателя от реального [2].

В качестве объектов исследования флуктуаций в микроэкономике было выбрано 10 крупнейших компаний — производителей авиационной и космической техники США и стран Евросоюза. Использовали материалы из открытых источников, размещенных на официальных сайтах компаний, за период 2010–2018 гг.

Предложена инновационная методика расчета флуктуаций параметров эффективности экономической деятельности предприятия.

Для определения взаимосвязи между показателями эффективности экономической деятельности предприятия был проведен корреляционный анализ с последующим составлением корреляционной матрицы. На основании полученных коэффициентов корреляции были составлены эмпирические формулы для определения расчетных (ожидаемых) значений ключевых показателей эффективности экономической деятельности для высокотехнологического предприятия, таких как НИР-мультипликатор, рентабельность персонала, повышение производительности труда, экономия энергетических ресурсов во время производства, стоимость торговой марки, рентабельность продаж, деловая репутация (goodwill), доходы от продаж лицензий и чистая прибыль после уплаты налогов.

Проведено сравнение реальных и ожидаемых значений вышеперечисленных параметров, в результате чего была получена динамика относительных флуктуаций по каждому из указанных экономических показателей для рассматриваемого периода 2010–2018 гг. Путем расчета среднеквадратических флуктуаций был определен флуктуационный потенциал предприятия.

Приведенная методика расчета чувствительна к большинству показателей эффективности экономической деятельности предприятия.

Недостатком приведенной методики расчета флуктуаций может быть пренебрежение воздействием внешней для предприятия среды, поэтому расчет флуктуаций по данной методике не является корректным в кризисные периоды развития экономики.

Выводы о стабильности прогноза того или иного показателя эффективности экономической деятельности высокотехнологичного предприятия возможно сделать, располагая средним значением флуктуации соответствующего показателя. Вместе с тем расчет флуктуационного потенциала предприятия позволяет спрогнозировать возможные отклонения от традиционного экономического расчета и тем самым у предприятия появляется возможность скорректировать распределение ресурсов более рационально и с меньшими рисками.

Показано, что высокотехнологичные инновационные предприятия ракетно-космической отрасли являются оптимальным объектом для применения предложенной методики расчета флуктуаций показателей эффективности экономической деятельности предприятия.

## **Литература**

1. Сабина А.Л., Терехова М.Д. Флуктуационный механизм реализации инновационно-креативного потенциала предприятий оборонно-промышленного комплекса России. *Национальные интересы: приоритеты и безопасность*, 2009, № 24, с. 68–71.
2. Соколянский В.В., Дремин Д.В. Флуктуации в экономике. *Проблемы экономики*, 2014, № 6 (64), с. 107–109.

## **Transmission of the physical phenomenon “fluctuation” to the dynamics of economic activity of an innovative high-tech enterprise of the rocket and space industry**

© D.A. Golodnov\*, V.V. Sokolyansky

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): gda17ea025@student.bmstu.ru

**Abstract.** The adaptation of the physical phenomenon "fluctuation" for calculating fluctuations in the performance indicators of a high-tech enterprise in the rocket and space industry is considered. It is postulated that the fluctuation mechanism contributes to the violation of stability in the activities of the enterprise, therefore, there is a need for a quantitative assessment of fluctuations. A method for calculating the values of fluctuations of indicators of the efficiency of economic activity of a high-tech enterprise, substantiated by correlation analysis, is proposed.

**Keywords:** *fluctuations, economics of an innovative high-tech enterprise, indicators of economic efficiency, methodology for calculating the fluctuation potential of an enterprise, correlation matrix, fluctuation potential of an enterprise, rocket and space industry.*

Fluctuation mechanisms and dynamics of indicators of economic efficiency of an innovative high-tech enterprise are still a poorly explored topic. Earlier, fluctuations were calculated depending on a narrow range of indicators of the efficiency of the economic activity of an enterprise [1].

Fluctuations, as a physical phenomenon, represent any random deviation of any value. By fluctuations in the economy of a high-tech enterprise we mean the deviation of the calculated (expected) value of the economic indicator from the real one [2].

Ten largest companies — manufacturers of aviation and space technology in the USA and the European Union were chosen as the objects of exploration of fluctuations in microeconomics. Materials were obtained from open sources on the official websites of companies for the period 2010–2018.

An innovative method for calculating fluctuations in the parameters of the efficiency of economic activity of an enterprise is proposed.

To determine the relationship between the indicators of the efficiency of the economic activity of the enterprise, a correlation analysis was carried out with the subsequent compilation of a correlation matrix. Based on the obtained correlation coefficients, empirical formulas were drawn up to determine the calculated (expected) values of key indicators of economic activity efficiency for a high-tech enterprise, such as research and development multiplier, personnel profitability, increased labor productivity, saving energy resources during production, brand value, profitability sales, goodwill, license revenues and net income after taxes.

A comparison of the real and expected values of the above parameters was carried out, as a result of which the dynamics of relative fluctuations for each of the indicated economic indicators for the period under review 2010–2018 was obtained. By calculating the mean square fluctuations, the fluctuation potential of the enterprise was determined.

The given calculation method is sensitive to most indicators of the efficiency of the economic activity of the enterprise.

The disadvantage of this methodology for calculating fluctuations may be neglect of the impact of the external environment for the enterprise; therefore, the calculation of fluctuations using this method is not correct in crisis periods of economic development.

Conclusions of the stability of the forecast of any indicator of the efficiency of the economic activity of a high-tech enterprise can be made by having the average value of the fluctuation of the corresponding indicator.

At the same time, the calculation of the fluctuation potential of the enterprise makes it possible to predict possible deviations from the traditional economic calculation, and, thus, the enterprise has the opportunity to adjust the allocation of resources more rationally and with fewer risks.

It is shown that high-tech innovative enterprises of the rocket and space industry are the optimal object for applying the proposed methodology for calculating fluctuations of indicators of the efficiency of the economic activity of an enterprise.

#### **References**

1. Sabinina A.L., Terekhova M.D. The fluctuation mechanism for the implementation of the innovative and creative potential of the enterprises of the military-industrial complex of Russia. *National interests: priorities and security*, 2009, no. 24, pp. 68–71.
2. Sokolyansky V.V., Dremmin D.V. Fluctuations in economics. *Problems of Economics*, 2014, no. 6 (64), pp. 107–109.

### **Применение задачи аналитического регулирования оптимального перемещения лекарственных средств в биологической системе в открытой области**

© К.З. Каспирович

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия  
E-mail: kamilaska24@gmail.com

**Аннотация.** В данной статье, благодаря использованию метода параметризации, т. е. описания выделенных элементов системы, элементарных воздействий на нее с помощью определенных величин (параметры могут быть как непрерывные, так и дискретные), и установлению аналитическим и графическим способом различного рода зависимостей между введенными клеточными характеристиками, составлена математическая модель биологической клетки. Построение предложенной системы приводит к решению математической задачи, в которой понятие оптимальности сводится к достижению наименьшего времени прибытия в заданное состояние.

**Ключевые слова:** критерий оптимальности, регулирование, теория управления, клеточная среда, кинетика распределения, открытая система.

**Введение и постановка задачи.** Системы, определяемые связями, бывают открытые и закрытые. Живой организм как система постоянно находится под воздействием внешней среды и представляет саморегулирующуюся динамичную открытую систему. Его структу-

ры и элементы, находящиеся во взаимодействии, стремятся прийти в состояние с минимальным значением свободной энергии, соответствующим устойчивому живому существу. Таким образом, система во взаимодействии с внешней средой принимает оптимальное устойчивое состояние. Рассматривая систему с точки зрения связей, можно ввести понятие «среды» — внутренней и внешней. Так, изучая функционирование клетки с точки зрения обмена веществ, можно элемент «мембрана» отнести к границе, разделяющей внутреннюю среду (содержимое клетки) и внешнюю (межклеточное пространство). Клетка также относится к открытым системам, так как она не может функционировать без связи с внешней средой.

Необходимо найти закон оптимального управления лекарственными средствами в организме человека после попадания в кровь для их наилучшего проникновения в заданные клетки и распределения веществ в отсеках клетки, что приведет к их эффективной работе, а значит, продуктивному лечению.

Применим метод вариационной задачи Лагранжа и составим функцию для динамической системы. Рассмотрим замкнутую регулируемую клеточную систему, в которой возмущенное движение вещества задано совокупными уравнениями в обобщенных координатах:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_k &= a_{k-1,0}\eta_1 + a_{k-1,1}\eta_2 + a_{k-1,2}\eta_3 + a_{k-1,3}\eta_4 + \dots + a_{k-1,l}\eta_k + m_{k-1}\xi; \\ \dot{\lambda}_k &= -a_{0,k-1}\lambda_1 - a_{1,k-1}\lambda_2 - a_{2,k-1}\lambda_3 - a_{3,k-1}\lambda_4 + \dots - a_{l,k-1}\lambda_k + 2c_{k-1}\eta_k; \\ 2\ddot{\xi} &= 2C\xi - m_0\lambda_1 - m_1\lambda_2 - m_2\lambda_3 - \dots - m_{k-1}\lambda_k,\end{aligned}$$

где  $a_{k,l}, m_k, c_k$  — постоянные заданные числа, отражающие скорость переноса, качество связывания с мембраной и число центров связывания, на которые пока не наложено каких-либо условий;  $\eta_k$  — параметр, характеризующий ячейку клетки, куда проникает вещество;  $\lambda_k$  — величина, связанная с ячейками и регулирующая правильное перемещение лекарственного средства;  $\xi$  — функция управления, задающая оптимальное проникновение и распределение веществ в нужных клетках. Количество коэффициентов отражает количество отсеков в клетке.

Задача состоит в нахождении управления, отвечающего принятому критерию оптимальности и гарантирующего существование заданных свойств возмущенного движения (переходного процесса) применительно к клеточной среде организма. Совокупность объекта управления оптимального элемента, которым является клетка, и оптимальной функции управления, в которой учитываются такие параметры, как связывание вещества с клеткой, центры связывания, по-

стоянная скорости переноса, составляет оптимальную систему управления процессом кинетики проникновения и распределения лекарственных веществ в ячейках клетки. Задача оптимизации может быть трактована как двухточечная граничная проблема, к решению которой применимы все методы вариационного исчисления.

Общее решение уравнений задачи в таком случае будет состоять из линейной комбинации экспоненциальных функций вида

$$\eta_k = \sum_{i=0}^3 \Delta_k(\mu_i) c_i e^{\mu_i t} = \Delta_k(\mu_0) c_0 e^{\mu_0 t} + \Delta_k(\mu_1) c_1 e^{\mu_1 t} + \Delta_k(\mu_2) c_2 e^{\mu_2 t} + \Delta_k(\mu_3) c_3 e^{\mu_3 t} + \dots + \Delta_k(\mu_n) c_n e^{\mu_n t},$$

где  $n$  — коэффициент, который находят из определителей матрицы и ее миноров;  $i$  задается количеством корней характеристического уравнения. Уравнения задачи должны быть разрешимы относительно функций  $\eta_k, \xi, \lambda_k$ .

Искомое уравнение оптимального управления системой живой клетки имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & \mu_0 \Delta_k(\mu_0) c_0 e^{\mu_0 t} + \mu_1 \Delta_k(\mu_1) c_1 e^{\mu_1 t} + \mu_2 \Delta_k(\mu_2) c_2 e^{\mu_2 t} + \\ & + \mu_3 \Delta_k(\mu_3) c_3 e^{\mu_3 t} + \mu_0 \Delta_{k+1}(\mu_0) c_0 e^{\mu_0 t} + \mu_1 \Delta_{k+1}(\mu_1) c_1 e^{\mu_1 t} + \\ & + \mu_2 \Delta_{k+1}(\mu_2) c_2 e^{\mu_2 t} + \mu_3 \Delta_{k+1}(\mu_3) c_3 e^{\mu_3 t} + \mu_0 \Delta_{k+2}(\mu_0) c_0 e^{\mu_0 t} + \\ & + \mu_1 \Delta_{k+2}(\mu_1) c_1 e^{\mu_1 t} + \mu_2 \Delta_{k+2}(\mu_2) c_2 e^{\mu_2 t} + \mu_3 \Delta_{k+2}(\mu_3) c_3 e^{\mu_3 t} + \\ & + \mu_0 \Delta_{k+3}(\mu_0) c_0 e^{\mu_0 t} + \mu_1 \Delta_{k+3}(\mu_1) c_1 e^{\mu_1 t} + \mu_2 \Delta_{k+3}(\mu_2) c_2 e^{\mu_2 t} + \\ & + \mu_3 \Delta_{k+3}(\mu_3) c_3 e^{\mu_3 t} + \dots + \mu_n \Delta_{p+3}(\mu_n) c_n e^{\mu_n t}, \end{aligned}$$

где  $p$  определяется из матрицы.

Окончательный вид уравнения регулятора зависит также от количества ячеек в клетке. Три отсека клетки, разделенные мембранами, учитываются всегда: митохондрии, ядро и плазма.

Полученное решение в совокупности с исходными уравнениями образует устойчивую систему автоматического регулирования или управления биологической клеточной системой.

**Заключение.** Излагается закон регулирования (управления) в его аналитическом виде как некоторая функция исходных координат системы регулирования, т. е. сформировано дифференциальное уравнение функции управления движением, проникновением веществ непосредственно в нужные клетки и распределением в них в соответствии с заданным оптимизирующим функционалом. Изучена задача аналитического построения оптимальных систем, определенных в открытой области.



Рассмотренный метод оказывается полезным на практике и может быть применен в лечебных целях в медицине.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-08-00261 А.*

## Литература

1. Мухарлямов Р.Г. Дифференциально-алгебраические уравнения программных движений Лагранжевых динамических систем. *Мех. твердые вещества*, 2011, № 46, с. 534–543.
2. Каспирович И.Е. Применение стабилизации ограничений к неголономной механике. *Труды 2-й Международной конференции по промышленному машиностроению, приложениям и производству, ICIEAM 2016*.
3. Lin S.T., Huang J.N. Стабилизация метода Баумгарта с использованием подхода Рунге — Кутты. *J. Mech. Des.* (Транс. Американское Общество Инженеров-Механиков), 2002.

## Application of the problem of analytical regulation of optimal expansion of drugs in a biological system in an open area

© K.Z. Kaspirovich

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia  
E-mail: kamilaska24@gmail.com

**Abstract.** In this paper, by using the parametrization method, i.e., describing the selected elements of the system and elementary effects on it using parameters (parameters can be either continuous or discrete) and establishing analytical and graphical methods of various kinds of dependencies between the entered cellular parameters, a mathematical model of a biological cell is compiled. The construction of the proposed system leads to the solution of a mathematical problem for which the concept of optimality is reduced to achieving the shortest time of arrival in a given state.

**Keywords:** *optimality criterion, regulation, control theory, cellular environment, distribution kinetics, open system.*

*This work is supported by RFBR, project no. 19-08-00261 А.*

## References

1. Mukharlyamov R.G. Differential-algebraic equations of programmed motions of Lagrangian dynamical systems. *Mekh. Solids*, 2011, no. 46, pp. 534–543.
2. Kaspirovich I.E. Application of Constraint Stabilization to Nonholonomic Mechanics. *Proceedings of the 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Production, ICIEAM 2016*.
3. Lin S.T., Huang J.N. Stabilization of the Baumgart Method Using the Runge–Kutta Approach. *J. Mech. Des. Transl. American Society of Mechanical Engineers*, 2002.

## **Построение локализирующих множеств для одной популяционной модели**

© В.А. Панкратов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: v.a.pankratov@bmstu.ru

**Аннотация.** Рассмотрена задача построения локализирующих множеств для нелинейной системы дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающей популяционную модель взаимодействия трех биологических видов в океане. Особенностью предметной области модели является положительность фазовых переменных. В рамках исследования была построена система локализирующих множеств, изучено поведение траекторий системы вне расширенного локализирующего множества. Приведены примеры численного моделирования для содержательных значений параметров системы.

**Ключевые слова:** локализирующее множество, инвариантные компакты, положения равновесия.

## **Construction of localization sets for one population model**

© V.A. Pankratov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: v.a.pankratov@bmstu.ru

**Abstract.** The problem of constructing localizing sets for a nonlinear system of differential equations of the third order, describing a population model of interaction of three biological species in the ocean, is considered. A feature of the subject area of the model is the positivity of phase variables. Within the framework of the study, a system of localizing sets was built, and the behavior of the trajectories of the system outside the extended localizing set was investigated. Examples of numerical modeling are given for meaningful values of the system parameters.

**Keywords:** localizing set, invariant compacts, equilibrium position.

## Подходы к оценке стоимости клиентского капитала зарубежных высокотехнологичных инновационных предприятий аэрокосмической отрасли

© В.В. Соколянский, М.К. Костоусов,  
П.А. Коробкова, Р.А. Комаров\*

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): komarov.roman99@yandex.ru

**Аннотация.** Представлены различные подходы к оценке стоимости клиентского капитала зарубежных высокотехнологичных инновационных предприятий аэрокосмической отрасли. Оценка стоимости клиентского капитала выполнена на основе метрики CLV (пожизненная ценность клиента) посредством подходов BN (Berger, Nasr, 1998), GL (Gupta, Lehmann, 2003). Дополнительно описаны подходы VK (Venkatesan, Kumar, 2004), BGT (Blattberg, Getz, Thomas, 2001) и RLZ (Rust, Lemon, Zeithaml, 2000) к оценке стоимости клиентского капитала по метрике CLV. Предложен оптимальный метод оценки клиентского капитала для предприятий аэрокосмической отрасли.

**Ключевые слова:** клиентский капитал, метрика CLV, аэрокосмическая отрасль.

Для достижения высоких результатов экономико-производственной деятельности предприятиям необходимо осуществлять взаимодействие с клиентами. Уровень взаимодействия оценивается клиентским капиталом предприятия. Оценка такого параметра, как ценность клиента, позволит спрогнозировать будущую деятельность компании и максимизировать ее прибыль [1].

Клиентский капитал предприятия представляет собой суммарную приведенную стоимость пожизненных потребительских ценностей, сгенерированных клиентской базой компании. В основе концепции клиентского капитала лежит фундаментальное положение о том, что потребители являются главным источником текущих и будущих денежных потоков компании [2]. В связи с этим рост клиентского капитала является базовой маркетинговой целью для коммерческих организаций, в частности для аэрокосмической отрасли.

О.К. Ойнер определила основные стадии работы с клиентами, в результате которых могут быть созданы отношения, одинаково выгодные для предприятия и для потребителя: 1) привлечение новых клиентов; 2) удержание прежних клиентов; 3) развитие взаимоотношений [3].

Доля затрат предприятия на вовлечение новых клиентов должна быть лидирующей в перечне расходов в его бюджете, поскольку обладание значительным сегментом рынка является главенствующей

коммерческой задачей любой организации, ведущей экономико-производственную деятельность.

Главными показателями результативности процессов привлечения новых клиентов и удержания прежних являются качество привлеченных клиентов и занимаемая предприятием доля рынка. Критерием того, что работа с клиентом имеет некоторый результат с точки зрения увеличения финансовых показателей, считают достижение высокого уровня его жизненной ценности для предприятия (CLV) [1].

Рассмотрен агрегированный метод к оценке CLV. В качестве подходов к расчету CLV выбраны GL-подход, предложенный С. Гупта и Д. Лемоном (Sunil Gupta, Donald R. Lehmann), и BN-подход, разработанный П. Бергером и Н. Насром (P.D. Berger, N.I. Nasr), как наиболее оптимальные с точки зрения количества данных для мониторинга.

В качестве объектов изучения клиентского капитала высокотехнологических предприятий выбраны предприятия аэрокосмической отрасли США и Евросоюза (Aerojet, Airbus SE, The Boeing Company, HEICO Corporation, Honeywell, Lockheed Martin Corporation, Northrop Grumman Corporation, Safran SA). Были использованы параметры экономической деятельности предприятий, взятые из корпоративных журналов за период с 2010 по 2016 г.

Было выполнено сравнение VK-, BGT-, RLZ-, BN- и GL-подходов к оценке стоимости клиентского капитала предприятий аэрокосмической отрасли. Получены значения CLV высокотехнологических инновационных предприятий, рассчитанные методами BN и GL, с 2010 по 2016 г.

Недостатком рассмотренных методов оценки клиентского капитала является ограниченность их применения в связи с отсутствием достаточного перечня информации о клиентах рассмотренных предприятий, однако их применение в полной мере позволяет оценить уровень пожизненной ценности клиентов для предприятия и спрогнозировать данный показатель на будущий период развития экономико-производственной организации, приняв во внимание сложившиеся тенденции в формировании клиентского капитала за прошедшие годы.

## **Литература**

1. Макарова Я.В. Формирование клиентского капитала организации: теоретические основания и модельный инструментарий оценки. *Науковедение*, 2016, № 4, с. 1–17.
2. Созонов Ю.С. Оценка клиентского капитала компании. *Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика*, 2014, № 6, с. 80–96.
3. Ойнер О.К. *Управление результативностью маркетинга*: учебник для магистров. Москва, Юрайт, 2012, 343 с.

---

## **Approaches to assessing the client capital of foreign high-tech innovative enterprises in the aerospace industry**

© V.V. Sokolyansky, M.K. Kostousov, P.A. Korobkova, R.A. Komarov\*

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): komarov.roman99@yandex.ru

**Abstract.** Various approaches to assessing the value of client capital of foreign high-tech innovative enterprises in the aerospace industry are presented. The assessment of the cost of client capital was carried out on the basis of the CLV (Customer Lifetime Value) metric using BN (Berger, Nasr, 1998), GL (Gupta, Lehmann, 2003) approaches. Additionally, VK (Venkatesan, Kumar, 2004), BGT (Blattberg, Getz, Thomas, 2001) and RLZ (Rust, Lemon, Zeithaml, 2000) approaches to assessing the cost of client capital using the CLV metric are described. An optimal method for assessing client capital for aerospace enterprises is proposed.

**Keywords:** *client capital, CLV, aerospace industry.*

To achieve high results in economic and production activities, enterprises need to interact with customers. The level of interaction is assessed by the client's capital of the enterprise. Assessment of such a parameter as customer value will allow predicting the future activities of the company and maximizing its profit [1].

An enterprise's customer capital is the total present value of the lifetime customer value generated by a company's customer base. At the heart of the concept of customer equity is the fundamental premise that consumers are the primary source of a company's current and future cash flows [2]. In this regard, the growth of client capital is a basic marketing goal for commercial organizations, in particular for the aerospace industry.

O.K. Oiner determined the main stages of working with clients, as a result of which relationships can be created that are equally beneficial for the enterprise and for the consumer: (1) attracting new customers; (2) retention of previous clients; (3) development of relationships [3].

The share of the enterprise's costs for attracting new customers should be leading in the list of expenses in its budget, since the possession of a significant market segment is the main commercial task of any organization conducting economic and production activities.

The main indicators of the effectiveness of the processes of attracting new customers and retaining old ones are the quality of the attracted customers and the market share occupied by the company. The criterion that work with a client has some result in terms of increasing financial performance is considered to be the achievement of a high level of its vital value for the enterprise (CLV) [1].

An aggregated method for CLV estimation is considered. The GL approach proposed by Sunil Gupta and Donald R. Lehmann and the BN approach developed by P.D. Berger and N.I. Nasr were selected as the most optimal in terms of the amount of data for monitoring.

US and EU aerospace companies (Aerojet, Airbus SE, The Boeing Company, HEICO Corporation, Honeywell, Lockheed Martin Corporation, Northrop Grumman Corporation, Safran SA) were selected as objects of study of the client capital of high-tech enterprises. The parameters of the economic activity of enterprises were used, taken from corporate magazines issued from 2010 to 2016.

A comparison of VK, BGT, RLZ, BN and GL approaches to assessing the value of client capital for aerospace enterprises was carried out. The CLV values of the high-tech innovative enterprises, calculated by the BN and GL methods from 2010 to 2016, were obtained.

The disadvantage of the considered methods for assessing client capital is their limited application due to the lack of a sufficient list of information about the clients of the considered enterprises, however, their application fully allows us to assess the level of lifetime value of clients for the enterprise and predict this indicator for the future period of development of the economic and production organization, taking into account the current trends in the formation of client capital over the past years.

#### References

1. Makarova Ya.V. Formation of client capital of the organization: theoretical foundations and model assessment tools. *Naukovedenye*, 2016, no. 4, pp. 1–17.
2. Sozonov Yu.S. Customer equity evaluation. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Series 6*, 2014, no. 6, pp. 80–96.

### **Статистический метод ранней диагностики дефектных букс подвижного состава железных дорог**

© Д.В. Креопалов<sup>1\*</sup>, А.Ю. Долганин<sup>2</sup>, Ю.Н. Долганин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им.Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>АО «Московский завод «Сапфир», Москва, Россия

\*E-mail: dkreopalov@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрен метод, позволяющий обеспечить на базе пирометрического канала раннюю диагностическую оценку дефектности букс. Метод построен с использованием гипотезы о постоянстве коэффициента вариации распределений букс по температуре нагрева, вызванного работой силы трения в подшипниках. Метод позволяет выявлять скрытые дефекты букс с заданной доверительной вероятностью, не требуются дополнительные измерения температуры окружающей среды и скорости поезда.

**Ключевые слова:** температурные распределения букс, постоянство коэффициента вариации, ранняя диагностика дефектности букс.

Современные системы теплового контроля букс подвижного состава железных дорог, несмотря на интенсивную идущую компьютеризацию, идеологически мало в чем изменились по отношению к работе обходчика, ощупывающего и обстукивающего буксы на остановках, разве что они стали оперативнее. Их назначение осталось прежним: обнаружить перегретые буксы и сообщить оператору и машинисту об опасной ситуации.

Однако замена в железнодорожном транспорте букс скольжения буксами качения существенно снизило время перехода от перегретого состояния подшипника в аварийное, так что возникла необходимость раннего обнаружения дефектности букс непосредственно в процессе движения.

Считается, что потенциал тепловых измерений здесь полностью исчерпан, поэтому активно исследуются альтернативные методы ранней диагностики дефектности букс: от вибрационных и акустических до рентгеновских и радиационных.

Однако появление интеллектуальных и адаптивных измерительных систем позволяет вернуться к вопросу о возможности применения тепловых методов не только как детекторов предаварийного состояния буксовых подшипников, но и в качестве средства раннего неразрушающего контроля и диагностирования [1, 2].

В настоящей работе рассмотрен способ, позволяющий обеспечить на базе пирометрического канала раннюю диагностическую оценку дефектности букс. При разработке и отладке способа использовался большой статистический материал (около 3 тыс. поездов со скоростями в диапазоне 20...220 км/ч и при температуре окружающей среды от  $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $+40\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). Особенностью измерительного канала являлась возможность измерения температуры корпуса букс (не температуры перегрева относительно, например, рамы тележки, а собственной температуры буксы). Метрологические характеристики измерительного канала обеспечивали соотношение  $\delta_{\text{си}} < 3\Delta_{\text{д}}$  (здесь  $\delta_{\text{си}}$  — погрешность измерительного канала, а  $\Delta_{\text{д}}$  — диффузность объектов измерения: корпусов букс и рам тележек).

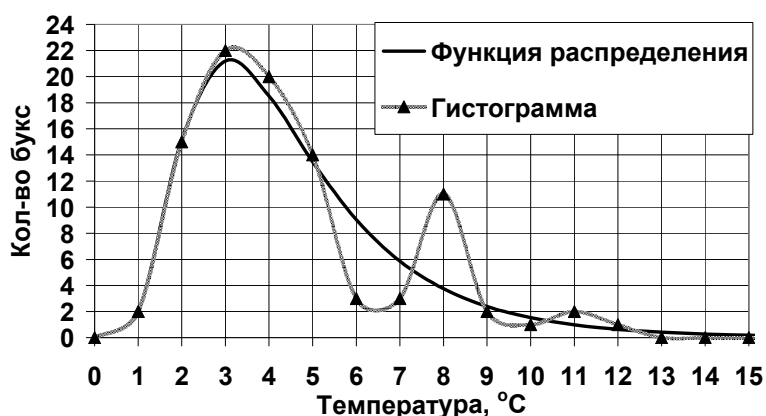
Способ основан на следующих положениях.

1. Из экспериментальных распределений букс по температуре, полученных по одной стороне поезда, вычленяется температурное распределение букс, вызванное только работой силы трения. Затем подбирают теоретическую функцию распределения.

2. Для температур выше среднего значения выделяются интервалы, где ординаты экспериментального распределения букс превыша-

ют ординаты теоретического распределения. Пример такой реализации приведен на рисунке для поезда, движущегося со скоростью 117 км/ч при температуре окружающей среды 10 °С и имеющего с каждой стороны по 96 букс. В температурных интервалах 7,2...9 °С и 10,5...12 °С можно наблюдать почти двукратное превышение количества букс над теоретическим распределением (математическое ожидание экспериментального распределения равно 4,55 °С). Это означает, что из 16 букс, имеющих температуру перегрева от 7,2 °С до 9 °С, половина букс попала туда не случайно, а по причине некоторого увеличения силы трения. В интервал 10,5...12 °С тоже неслучайно попали две из четырех букс. Номера букс, попавших в указанные температурные интервалы (в данном случае их число равно 20), фиксируются.

3. Измерения по пп. 1–2 повторяются в измерительных камерах. Номера букс, стабильно находящихся в списке избыточных, следует считать скрыто дефектными. Доверительная вероятность такого утверждения даже при равновероятном распределении для трех последовательных реализаций превышает 0,98.



Функция и гистограмма распределения букс по температуре для скорости 117 км/ч и  $T_{oc} = 10\text{ °С}$

Рассмотрение особенностей физических процессов нагрева букс, подкрепленное статистическими исследованиями, позволило авторам:

– сформировать достоверную гипотезу о постоянстве коэффициента вариации равновероятных температурных распределений нагруженных букс, который для относительного квантиля ( $P = 0,95$ )

$$\text{составляет } v_i = \frac{\sqrt{D_i}}{Mx_i} = 0.495^{+0,020}_{-0,025};$$

– разработать на ее основе метод выявления скрыто дефектных букс с заданной доверительной вероятностью (по причине некоторого увели-



чения силы трения). При этом метод не требует дополнительных измерений температуры окружающей среды и скорости поезда.

### Литература

1. Долганин А.Ю., Долганин Ю.Н., Креопалов Д.В., Савченко М.А. Интеллектуальные системы как основа аппаратуры нового поколения для контроля букс подвижного состава железных дорог. *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн.*, 2011, № 11. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/261887.html>
2. Лейфер Л.А., Кашникова П.М. Определение остаточного срока службы машин и оборудования на основе вероятностных моделей. ЗАО «Приволжский центр финансового консалтинга и оценки», 2007. URL: [http://www.labrate.ru/leifer/leifer\\_kashnikova\\_article\\_2007-1\\_residual\\_service\\_life.htm](http://www.labrate.ru/leifer/leifer_kashnikova_article_2007-1_residual_service_life.htm)

## Statistical method of early diagnostics of defect bearings of a carriage rolling stock of iron roads

© D.V. Kreopalov<sup>1\*</sup>, A.Yu. Dolganin<sup>2</sup>, Yu.N. Dolganin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>JSC “MZ “Sapphir”

\*E-mail: [dkreopalov@mail.ru](mailto:dkreopalov@mail.ru)

**Abstract.** The method permitting to provide on the basis of the channel of a pyrometer an early diagnostic estimate of presence of defects of bearings is described. The method is built with usage of a hypothesis about persistence of coefficient of a variation of allocations of bearings on heating temperature caused by operation of frictional force in bearings. The method allows to tap latent defects of bearings with a given confidence coefficient and does not require padding measurements of an ambient temperature and speed of a train.

**Keywords:** *temperature allocations of bearings, persistence of coefficient of a variation, early diagnostics of presence of defects of bearings.*

### References

1. Dolganin A.Yu., Dolganin Yu.N., Kreopalov D.V., Savchenko M.A. Intelligent systems as the basis of a new generation of equipment for monitoring the axle boxes of railway rolling stock. *Science and Education. Bauman Moscow State Technical University. Electron. Journal*, 2011, no. 11. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/261887.html>
2. Leifer L.A., Kashnikova P.M. *Determination of the residual service life of machines and equipment based on probabilistic models*. ZAO “Privolzhsky tsentr finansovogo konsaltinga i otsenki”, 2007. Available at: [http://www.labrate.ru/leifer/leifer\\_kashnikova\\_article\\_2007-1\\_residual\\_service\\_life.htm](http://www.labrate.ru/leifer/leifer_kashnikova_article_2007-1_residual_service_life.htm)

## **Построение математической модели термомеханических процессов в композите с включениями в виде эллипсоидов вращения**

© Д.А. Кувшинникова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: kuvshinnikovadasha@gmail.com

В настоящее время в качестве конструкционных и функциональных материалов для различных технических устройств находят широкое применение консолидированные структурно-чувствительные материалы, физико-механические свойства которых существенно зависят от их внутренней структуры. К ним в первую очередь относят наноструктурные композиты с разнообразным армированием высокопрочными волокнами; материалы, модифицированные частицами различного типа (углеродными нанотрубками, фуллеренами и т. п.) [1]. Разработка технологии создания наноструктурных композитов с возможностью предсказания их термомеханических характеристик особо актуальна для отраслей, предъявляющих высокие требования к экранирующим, поглощающим, изолирующим свойствам материалов, используемых в качестве конструкционных при жестких ограничениях на массово-габаритные характеристики.

Описание термомеханических свойств таких материалов возможно в рамках нелокальных моделей. Такие модели базируются на методах обобщенной механики сплошной среды и получили свое начало в работах А.К. Эрингена [2]. Дальнейшее развитие идей нелокальной термодинамики приведено в работах [3, 4]. Ключевыми моментами в этом методе являются установление связи между характеристиками микро- и макроуровня, а также учет эффектов пространственной нелокальности среды.

В работе рассмотрен подход к моделированию термомеханических процессов в композитных материалах с упорядоченными включениями в виде эллипсоидов вращения. Данный подход основан на моделях обобщенной механики сплошной среды [5] и позволяет учесть процессы, протекающие на микроуровне, посредством внутренних параметров состояния и интегральных слагаемых, учитывающих влияние эллипсоидных включений с помощью так называемой «функции влияния» в соответствующей области. Получена система интегро-дифференциальных уравнений для описания термоупругости в композитном материале с включениями в виде эллипсоидов вращения. Рассмотрена возможность перехода к моделированию температурных напряжений при задании соответствующих граничных и начальных условий. Для двумерной постановки задачи предложена

функция влияния, основанная на многомерном распределении Гаусса. Такая функция позволяет учитывать влияние включений в форме эллипсоидов вращения на распределение теплоты и напряжений в анизотропном твердом теле.

**Ключевые слова:** композит, математическая модель, обобщенная механика сплошной среды, термоупругость.

*Работа выполнена в рамках государственного задания вузам  
№ 0705-2020-0032.*

## Литература

1. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. Пер. с англ. Москва, Наука, 1982, 336 с.
2. Eringen A.C. *Nonlocal continuum field theories*. New York–Berlin–Heidelberg, Springer-Verlag, 2002, 376 p.
3. Кувыркин Г.Н. *Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении*. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993, 142 с.
4. Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Kuvshinnikova D.A. Mathematical model of the heat transfer process taking into account the consequences of nonlocality in structurally sensitive materials. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series.*, 2018, vol. 991 (1). DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012050
5. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008, 512 с.

## Mathematical model of thermomechanical processes in the composites with the ellipsoid inclusions

© D.A. Kuvshinnikova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail (speaker): kuvshinnikovadasha@gmail.com

Currently, consolidated structurally sensitive materials are widely used as structural and functional materials for various technical devices. The physical and mechanical properties of such materials depend significantly on their internal structure. These materials primarily include nanostructured composites with a variety of high-strength fiber reinforcement: materials modified with various types of particles (carbon nanotubes, fullerenes, etc.) [1]. The development of technology for creating nanostructured composites with the ability to predict their thermomechanical characteristics is particularly relevant for industries that place high demands on the shielding, absorbing, and insulating properties of materials. Such materials are used as structural materials with strict restrictions on mass and dimensional characteristics.

The thermomechanical properties of such materials can be described using non-local models. Such models are based on methods of generalized continuum mechanics. This approach was first developed in the works of A.K. Eringen [2]. Further development of the ideas of experimental thermodynamics is given in [3, 4]. The key points in this method are the establishment of a relationship between the characteristics of the micro and macro levels. It is also important to consider the effect of spatial nonlocality of the environment.

This paper considers an approach to modeling thermomechanical processes in composite with the spheroid inclusions. This approach is based on models of generalized continuum mechanics [5] and allows us to consider processes occurring at the micro level by means of internal state parameters and integral terms. Integral terms consider the influence of ellipsoid inclusions using the “influence function” in the corresponding domain. A system of integro-differential equations for describing thermoelasticity in composites with the ellipsoid inclusions. The possibility of switching to modeling temperature stresses when setting the appropriate boundary and initial conditions is considered. For a two-dimensional problem statement, an influence function based on a multidimensional Gaussian distribution is proposed. This function considers the influence of ellipsoid inclusions on the distribution of heat and stress in an anisotropic solid.

**Keywords:** *composite, mathematical model, generalized continuum mechanics, thermoelasticity.*

*The work was carried out within the framework of a state order from the Ministry of Science and Education of Russia, project no. FSN no. 0705-2020-0032.*

## References

1. Christensen R. *Introduction to the mechanics of composites*. Moscow, Nauka Publ., 1982, 336 p.
2. Eringen A.C. *Nonlocal continuum field theories*. New York–Berlin–Heidelberg, Springer-Verlag, 2002, 376 p.
3. Kuvyrkin G.N. *Thermomechanics of a deformable solid under high-intensity loading*. Moscow: BMSTU Publ., 1993, 142 p.
4. Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Kuvshynnikova D.A. Mathematical model of the heat transfer process taking into account the consequences of nonlocality in structurally sensitive materials. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, 2018, vol. 991 (1). DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012050
5. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Mathematical models of mechanics and electrodynamics of a continuous medium*. Moscow, BMSTU Publ., 2008, 512 p.

## Исследование влияния согласованности воздействия зрителей на динамическую реакцию трибун спортивных сооружений

© С.А. Монин\*, Е.В. Позняк

ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ», Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): MoninSA@mpei.ru

**Аннотация.** Приведено комплексное исследование поведения модели трибуны спортивного сооружения под действием нагрузки, создаваемой зрителями. При расчете учтен случайный характер параметров нагружения.

**Ключевые слова:** статистическое моделирование, коэффициент динамичности, случайная нагрузка, трибуны спортивных сооружений, коэффициент рассогласованности, MATLAB, Simulink.

**Введение.** Большепролетные спортивные и культурно-массовые сооружения с трибунами в виде консоли с большой стрелой вылета или с подвесными трибунами могут испытывать значительные динамические нагрузки при прыжках или ритмичных танцевальных движениях зрителей. Такие конструкции имеют малую жесткость и низкие собственные частоты, которые могут совпадать с частотами движений зрителей. В таких случаях зрители могут спровоцировать резонансные явления в конструкции, приводящие к колебаниям с большой амплитудой и даже локальным разрушениям [1].

В отечественных нормативных документах отсутствует обоснованная методика расчета трибун спортивных сооружений на воздействия зрителей. Цель настоящего исследования — оценка коэффициентов динамичности при согласованных действиях зрителей на трибуны спортивных сооружений. Поставленная задача решается с применением статистического моделирования.

**Постановка, решение задачи и основные выводы.** В качестве модели трибуны была выбрана шарнирно-опертая балка двутаврового сечения, нагруженная девятью сосредоточенными силами, соответствующими нагрузкам, создаваемым девятью зрителями, совершающими прыжки. Воздействие от каждого зрителя представлено в виде полусинусоидального импульса [2]:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha} G \sin\left(\frac{\pi t}{\alpha T_p} + \varphi\right), & 0 \leq t \leq \alpha T_p; \\ 0, & \alpha T_p \leq t \leq T_p. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $G$  — вес зрителя;  $\alpha$  — коэффициент, зависящий от вида активности зрителя;  $T_p$  — период нагрузки;  $t$  — время;  $\varphi$  — фаза, характеризующая запаздывание зрителя.

В настоящей работе рассматривается наиболее опасный случай — высокие прыжки, когда  $\alpha = 0,25$ , а период  $T_p$  составляет 0,5 с, т. е. частота прыжков равна 2 Гц.

Для решения задачи была разработана конечно-элементная модель балки в ПК MATLAB. Численные эксперименты проводились в среде моделирования Simulink. В ходе каждого эксперимента было получено численное решение уравнения движения балки под действием сосредоточенных полусинусоидальных импульсов во временной области при случайных фазе и амплитуде. Коэффициент динамичности определялся как отношение максимального динамического прогиба к статическому в центральном сечении балки.

Балка моделировалась в двух конфигурациях — нерезонансной и резонансной. В первом случае длина балки была подобрана такой, что низшая собственная частота была гораздо выше частоты нагружения (2 Гц). Во втором случае балка имела большую длину, подобранную таким образом, чтобы наименьшая собственная частота колебаний балки была близка к частоте нагружения и приблизительно равнялась 2 Гц. Для обеих конфигураций было проведено по 10 численных экспериментов, в результате которых были определены коэффициенты динамичности. В исследовании учитывался случайный характер параметров нагружения: масса зрителей являлась величиной, равномерно распределенной от 70 до 100 кг, запаздывание зрителей равномерно распределено от 0 до 1 секунды. После выполнения серий численного моделирования была проведена статистическая обработка данных — определены среднеквадратичные отклонения и математические ожидания коэффициентов динамичности. Средний коэффициент динамичности модели балки нерезонансной конфигурации оказался почти в 2 раза меньше коэффициента динамичности модели балки резонансной конфигурации.

Для обеих конфигураций было проведено по одному особому численному эксперименту, соответствующему абсолютно согласованному воздействию зрителей (с нулевым запаздыванием). В результате были получены коэффициенты динамичности для абсолютно согласованного воздействия, что позволило определить коэффициент рассогласованности в виде отношения среднего коэффициента динамичности к коэффициенту динамичности при согласованном воздействии зрителей. В ходе исследования установлено, что рассогласованное движение зрителей может снизить коэффициент динамичности до 60 %, а зависимость величины коэффициента динамичности от средней ве-

личины запаздывания хорошо аппроксимируется экспоненциальной зависимостью.

Расчет для одного из наборов фаз и амплитуд (и для резонансного, и для нерезонансного вариантов конфигураций трибуны) был проведен в программном комплексе ANSYS, позволяющем оценить влияние геометрической нелинейности на коэффициент динамичности. Установлено, что при учете геометрической нелинейности коэффициент динамичности снижается: на 6,5 % для нерезонансной конфигурации и на 64 % — для резонансной.

**Заключение.** В работе обсуждаются результаты численного моделирования колебаний трибун спортивных сооружений при воздействии динамической нагрузки от зрителей, зависящей от случайных параметров. Исследование показало, что для устранения возможных резонансных явлений необходимо отстраивать систему от резонанса так, чтобы диапазон собственных частот спортивных трибун был максимально удален от частот движения зрителей. Кроме того, следует учитывать, что согласованные движения зрителей могут быть опасны для конструкции.

### Литература

1. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Анализ динамической реакции трибун спортивных сооружений на согласованные действия зрителей. *Фундаментальные, поисковые и прикладные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2015 году: сб. науч. тр. РААСН*. Москва, АСВ, 2016, с. 543–547.
2. Ellis B.R., Ji T. Human-Structure Interaction in Vertical Vibrations. *Proc. Institution of Civil Engineer: Structures and Buildings*, 1997, no. 122 (1), pp. 1–9.
3. Poznyak E.V., Monin S.A. Statistical modeling of a dynamic response of stadium grandstands to human load. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*, 2018, vol. 4 (40), pp. 98–108.

## Investigation of an influence of the audience's impact coherence on the dynamic response of the sports grandstands

© S.A. Monin\*, E.V. Poznyak

National Research University Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): sa\_monin@mail.ru

**Abstract.** The paper gives a comprehensive study of the sports grandstand response under the load created by the audience. The calculation takes into account random parameters of the load.

**Keywords:** *statistical modeling, amplification factor, random load, sports grandstands, numerical experiment, incoherency factor, MATLAB, Simulink*

## References

1. Nazarov Yu.P., Poznyak E.V. Analysis of the dynamic response of the stands of sports facilities to the concerted actions of the audience. *Fundamental'nye, poiskovye i prikladnye issledovaniya RAASN po nauchnomu obespecheniyu razvitiya arkhitektury, gradostroitel'stva i stroitel'noy otrasli Rossiyskoy Federatsii v 2015 godu: sb. nauch. tr. RAASN* [RAASN fundamental, exploratory and applied research on scientific support of architecture, urban planning and construction industry development in the Russian Federation in 2015]. Moscow, ASV Publ., 2016, pp. 543–547.
2. Ellis B.R., Ji T. Human-Structure Interaction in Vertical Vibrations. *Proc. Institution of Civil Engineer: Structures and Buildings*, 1997, no. 122 (1), pp. 1–9.
3. Poznyak E.V., Monin S.A. Statistical modeling of a dynamic response of stadium grandstands to human load. *Russian Journal of Building Construction and Architecture*, 2018, vol. 4 (40), pp. 98–108.

## **Клеточный автомат «Жизнь» как инновационный инструмент для визуализации динамики развития высокотехнологичного предприятия ракетно-космической отрасли**

© Е.Д. Сокуренок\*, В.В. Соколянский

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: sokurenkoed@student.bmstu.ru

**Аннотация.** Описано использование компьютерных игр для визуализации деятельности высокотехнологичного предприятия. Компьютерная игра «Жизнь», представляющая собой клеточный автомат авторства Джона Конвея, предложена для визуализации экономико-производственной деятельности компании. Язык описания игры «Жизнь» адаптирован с Altair BASIC на современный C++. На примере компьютерной игры показано, что клеточный автомат приемлем для визуализации деятельности предприятия ракетно-космической отрасли и способен к отражению многомерной экономической информации.

**Ключевые слова:** клеточный автомат «Жизнь», компьютерные игры, динамика, высокотехнологичное инновационное предприятие, ракетно-космическая отрасль, визуализация экономической информации, корпорация Boeing.

Появление компьютерных игр дает возможность создания инновационных экономико-математических инструментов. Компьютерные деловые игры SimSity, Dwarf Fortress и «Виртономика» построены на основе экономической модели, позволяют пользователю отрабатывать навыки принятия управленческих решений и ком-



плексного экономического анализа в меняющейся системе игрового процесса.

В основе ряда современных компьютерных игр лежит технология клеточного автомата. Клеточный автомат — это дискретная динамическая система, представляющая собой совокупность аналогичных клеток, одинаковым образом соединенных между собой. Каждая клетка является конечным автоматом, состояния которого определяются состояниями соседних клеток и, возможно, ее собственным состоянием [1].

Джон фон Нейман доказал возможность существования самовоспроизводящихся автоматов с помощью «кинематических» моделей машин, которые могут построить копию самих себя. Упростив идеи, предложенные Нейманом, британский математик Джон Конвей в 1970 г. создал клеточный автомат «Жизнь».

Клеточный автомат «Жизнь» можно использовать как инновационный способ визуализации многомерной экономической информации. Ранее многомерная экономическая информация была представлена в виде лиц Чернова — своеобразного эмоционального интерфейса, что является логическим продолжением работ математика Г. Чернова [2].

Компьютерная игра «Жизнь» представляет собой простой клеточный автомат с непредсказуемым поведением, в котором человек не принимает участия. В компьютерной игре существует два правила, определяющие «рождение» и «смерть». Отметим, что игра «Жизнь» оказала влияние на развитие математики и информатики, а структуры, наблюдаемые в этой игре, встречаются в биологии, астрономии, физике и химии.

Проведена аналогия между сменяющимися поколениями «живых» клеток в игре Дж. Конвея и представления деятельности высокотехнологичного предприятия как живого организма. В целях корректной инсталляции экономических переменных в игру «Жизнь» игра была переведена из изначального языка программирования Altair BASIC в современный C++.

Объектом исследования является высокотехнологичное инновационное предприятие — корпорация Boeing. Параметры экономической деятельности предприятия взяты из открытых источников за период 2010–2016 гг.

Для проведения экономико-математического эксперимента многомерная экономическая информация, отражающая деятельность предприятия Boeing на протяжении шести лет, была представлена следующими блоками: НИОКР, персонал, удельный вес интеллектуальной собственности в составе активов предприятия, эффективность инноваций, инновационный потенциал, конкурентные факторы в развитии высокотехнологичного предприятия, риск проектов, связанный с разработкой и внедрением новой высокотехнологичной продукции, показатели операционной эффективности, критерии инвестиционной

привлекательности и маркетинг технологий. Параметры экономической деятельности, входящие в блоки, были нормированы перед инсталляцией в игру.

Визуализация многомерной экономической информации с помощью клеточного автомата — инновационной программы «Жизнь» позволяет показать развитие высокотехнологичной компании. Оригинальность подобной визуализации улучшает восприятие передаваемой экономической информации пользователем.

## **Литература**

1. Шаляпина Н.А., Громов М.Л. «Жизнь» в тензорах: реализация клеточных автоматов на видеокартах. *Труды института системного программирования РАН*, 2019, т. 31, № 3, с. 217–228.
2. Загородников С.А., Соколянский В.В. Лица Чернова как эмоциональный интерфейс при построении модели высокотехнологичного инновационного предприятия машиностроительной отрасли. *Экономика высокотехнологичных производств*, 2020, т. 1, № 2, с. 77–90.

## **Cellular automaton “Life” as an innovative tool for visualizing the dynamics of development of a high-tech enterprise in the rocket and space industry**

© E.D. Sokurenko\*, B.B. Sokolyansky

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\*E-mail: sokurenkoed@student.bmstu.ru

**Abstract.** The paper describes the use of computer games for visualizing the activities of a high-tech enterprise. The computer game “Life” representing a cellular automaton by John Conway, is proposed for visualizing the economic and production activities of the company. The language for describing the game “Life” is adapted from Altair BASIC to modern C ++. It is shown that the cellular automaton is acceptable for visualizing the activities of an enterprise in the rocket and space industry and is capable of reflecting multidimensional economic information on the example of a computer game.

**Keywords:** *cellular automata, Conway's Game of Life, computer games, dynamics, high-tech innovative enterprise, rocket and space industry, visualization of economic information, Boeing corporation.*

The advent of computer games makes it possible to create innovative economic and mathematical tools. Computer business games such as *SimSity*, *Dwarf Fortress* and *Virtonomics* are built on the basis of an economic model that allow the user to practice the skills of making managerial decisions and complex economic analysis in a changing gameplay system.

The basis of a number of modern computer games is the technology of a cellular automaton. A cellular automaton is a discrete dynamic system, which is a collection of connected in the same way similar cells. Each cell is a finite automaton, the states of which are determined by the states of neighboring cells and, possibly, its own states [1].

John von Neumann proved the possibility of the existence of self-reproducing automata by means of “kinematic” machine models that can build up themselves. Simplifying the ideas proposed by Neumann, British mathematician John Conway in 1970 created the cellular automaton “Life”.

Cellular automaton “Life” can be used as an innovative way to visualize multidimensional economic information. Earlier, multidimensional economic information was represented as Chernoff's faces, which is a kind of emotional interface, which is a logical continuation of the works of the mathematician G. Chernoff [2].

The computer game “Life” is a simple cellular automaton with unpredictable behavior, in which a human does not participate. There are two rules in the computer games that describe the “birth” and “death.” The game “Life” influenced the development of mathematics and computer science, and the observed in this game structures are found in biology, astronomy, physics and chemistry.

An analogy was drawn between the alternating generations of “living” cells in Conway's game and the presentation of a high-tech enterprise as a living organism. The game “Life” was transferred from the original Altair BASIC programming language to modern C ++ in order to correctly install economic variables.

The object of the research is a high-tech innovative enterprise-corporation Boeing. The parameters of the economic activity of the enterprise were taken from open sources for the period from 2010 to 2016.

To make an economic and mathematical experiment, multidimensional economic information reflecting the activities of the Boeing enterprise for six years was represented by the following blocks: R&D, personnel, the share of intellectual property in the company's assets, innovation efficiency, innovation potential, competitive factors in development of a high-tech enterprise, project risk associated with the development and implementation of new high-tech products, operational efficiency indicators, investment attractiveness criteria and technology marketing. The parameters of economic activity included in the blocks were normalized before installation into the game.

Visualization of multidimensional economic information using the cellular automaton-innovation program “Life” allows showing the development of a high-tech company. The originality of such visualization improves the perception of the transmitted economic information by the user.

## **References**

1. Shalyapina N.A., Gromov M.L. “Life” in tensor: implementing cellular automata on graphics adapters. *Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS*, 2019, vol. 31, no. 3, pp. 217–228.
2. Zagorodnikov S.A., Sokolyansky V.V. Chernoff's faces as an emotional interface when building a model of a high-tech innovative enterprise in the machine-building industry. *High-Tech Enterprises Economy*, 2020, vol. 1, no. 2, pp. 77–90.

## СЕКЦИЯ 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

### 2.1. Теоретическая механика

*Руководители:* д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Самсонов,  
д-р физ.-мат. наук, проф. Р.Г. Мухарлямов

### Обобщенная модель автоколебаний Ван-дер-Поля и Релея

© С.В. Нестеров<sup>1</sup>, В.Г. Байдулов<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>ИПМех РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

\*E-mail: bayd@ipmnet.ru

**Аннотация.** Предложена модель, обобщающая известные уравнения нелинейной теории колебаний (Ван-дер-Поля и Релея), предельные циклы которой — кривые фазовой плоскости, определяемые полной энергией колебаний в случае отсутствия диссипации/притока энергии в систему. Изменяя параметры системы и вид силового воздействия можно задавать устойчивые к возмущениям характеристики колебаний. Рассмотрены фазовые портреты системы, включая случай многосвязных предельных циклов.

**Ключевые слова:** автоколебания, уравнение Ван-дер-Поля, уравнение Релея, волновой твердотельный гироскоп.

### Generalized Van der Pol and Rayleigh Self-Oscillation Model

© S.V. Nesterov<sup>1</sup>, V.G. Baydulov<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Ishlinsky institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

\* E-mail: bayd@ipmnet.ru

**Abstract.** The model of equation which generalizes the well-known equations of the theory of nonlinear oscillations (Van der Pol and Rayleigh) is proposed. The limit cycles of proposed model are the curves on phase plane determined by the total energy of the oscillation in the adiabatic case. The stable due to perturbations characteristics of the oscillations

tions can be set by varying of parameters of the system and the form of force action. The phase portraits of the system are considered, including the case of multiply connected limit cycles.

**Keywords:** *self-oscillations, van der Pol equation, Rayleigh equation, wave solid-state gyroscope.*

## **Исследование устойчивости положений равновесия твердого тела с центром масс на главной оси инерции с вибрирующей точкой подвеса**

© М.В. Беличенко

Московский авиационный институт, Москва, Россия  
E-mail: tuzemec1@rambler.ru

**Аннотация.** Исследовано движение твердого тела, точка подвеса которого совершает вибрации. Исследуется случай тела с центром масс на главной оси инерции. Рассмотрен случай вибраций, включающий в себя широкий спектр движений точки подвеса, такие как движение вдоль горизонтальной или вертикальной прямой, движение по горизонтальному или вертикальному эллипсу, произвольное движение в горизонтальной плоскости, а также ряд трехмерных движений точки подвеса. В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений движения решен вопрос о существовании и устойчивости положений относительного равновесия тела. Получено, что в системе может быть от четырех до восьми качественно различных положений равновесия. Получены достаточные и необходимые условия устойчивости найденных положений.

**Ключевые слова:** *вибрации, положения равновесия, устойчивость.*

История исследования динамики твердого тела с вибрирующей точкой подвеса насчитывает уже более 100 лет. Было подробно исследовано движение математического маятника при наличии вибраций точки подвеса [1]. В последнее время активно ведется исследование динамики твердых тел различной геометрии масс при различных случаях вибраций точки подвеса. А.П. Маркеевым [2] была получена приближенная автономная система уравнений, в которой влияние вибраций точки подвеса представлено в виде дополнительного вибрационного потенциального поля. В рамках этой приближенной системы уравнений проведено множество исследований существования и устойчивости различных частных типов движения тел различной геометрии масс при разных случаях вибраций точки подвеса [3–5].

В данной работе рассматривается движение тяжелого твердого тела с центром масс на главной оси инерции, точка подвеса  $O$  которого совершает высокочастотные вибрации в трехмерном пространстве относительно фиксированной точки пространства  $O_*$ . Зададим движение точки подвеса в неподвижной системе координат  $O_*XYZ$ , ось  $O_*Z$  которой вертикальна, в виде вектора  $O_*O = (u(t), v(t), w(t))^T$ . В рамках приближенной автономной системы уравнений движения [2] влияние вибраций точки подвеса зависит от шести параметров — средних значений попарных произведений компонент скорости точки подвеса за период

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}^2 \rangle &= a_x, & \langle \dot{v}^2 \rangle &= a_y, & \langle \dot{w}^2 \rangle &= a_z, & \langle \dot{u} \dot{v} \rangle &= a_{xy}, \\ \langle \dot{u} \dot{w} \rangle &= a_{xz}, & \langle \dot{v} \dot{w} \rangle &= a_{yz}. \end{aligned}$$

В работе рассматривается частный случай вибраций, при котором  $a_{xy} = a_{xz} = a_{yz} = 0$ . Этот случай включает в себя движение точки подвеса вдоль горизонтальной или вертикальной прямой, по горизонтальному или вертикальному эллипсу, произвольное движение точки подвеса в горизонтальной плоскости, а также ряд движений в трехмерном пространстве. В рамках приближенной автономной системы уравнений движения рассмотрен вопрос о существовании и устойчивости положений относительного равновесия тела.

Исследование показало, что в зависимости от вибрационных параметров может существовать от четырех до восьми качественно различных положений равновесия. Для четырех равновесий, существующих при любых значениях вибрационных параметров, радиус-вектор центра масс занимает нижнее и верхнее вертикальные положения, а главные оси инерции, не содержащие центр масс, сонаправлены с осями  $OX$  и  $OY$ . В случае, когда разность  $a_x - a_z$  (или  $a_y - a_z$ ) по модулю достаточно велика, в системе присутствуют два боковых положения равновесия, при которых радиус-вектор центра масс тела лежит в плоскости  $OXZ$  (или  $OYZ$ ). Если эта разность положительна, то радиус-вектор центра масс лежит в нижней полуплоскости, а если отрицательна — в верхней полуплоскости.

Для положений равновесия выписан гамильтониан возмущенного движения и исследованы необходимые и достаточные условия устойчивости по отношению к пространственным возмущениям. Необходимые условия устойчивости получены в виде условия равенства нулю действительных частей корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущенного движения.

Достаточные условия устойчивости найдены в виде условий, что квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения положительно определена.

Получено, что достаточные условия устойчивости в случае малых интенсивностей вибраций выполняются для одного из двух нижних вертикальных положений равновесия, остальные положения неустойчивы. В случае если параметр  $a_z$  значительно превосходит параметры  $a_x$  и  $a_y$ , одно из верхних положений становится устойчивым. Для боковых положений равновесия условия устойчивости выполняются лишь для одного положения, при котором радиус-вектор центра масс находится в нижней полуплоскости. Необходимые условия устойчивости совпали с достаточными для всех положений равновесия тела.

*Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116).*

#### **Литература**

1. Холостова О.В. *Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом*. Москва – Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2016, 308 с.
2. Маркеев А.П. Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса. *Прикладная математика и механика*, 2011, т. 75, № 2, с. 193–203.
3. Беличенко М.В., Холостова О.В. Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса. *Нелинейная динамика*, 2017, т. 13, № 1, с. 81–104.
4. Вишенкова Е.А., Холостова О.В. О влиянии вертикальных вибраций на устойчивость перманентных вращений твердого тела вокруг осей, лежащих в главной плоскости инерции. *Вестник Удмуртского университета. Механика*, 2017, вып. 1, с. 98–120.
5. Kholostova O.V. On the Dynamics of a Rigid Body in the Hess Case at High-Frequency Vibrations of a Suspension Point. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2020, vol. 16, no. 1, pp. 59–84.

### **Investigation of stability of equilibrium positions of a rigid body with a mass center on the main axis of inertia with a vibrating suspension point**

© M.V. Belichenko

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia  
E-mail: tuzemec1@rambler.ru

**Abstract.** The paper considers the motion of a rigid body with suspension point committing fast vibrations. The case of a body with the center of mass on the main axis of inertia is investigated. The case of vibra-



tions, including a wide range of the suspension point movements, such as motion along a horizontal or vertical straight line, motion on a horizontal or vertical ellipse, an arbitrary motion in the horizontal plane, and a number of three-dimensional suspension point motions. In the framework of an approximate autonomous system of differential equations of motion, the question of the existence and stability of the relative equilibrium positions of the body is solved. It is found that the system can have from four to eight qualitatively different equilibrium positions. Sufficient and necessary stability conditions of the found positions are obtained.

**Keywords:** vibrations, equilibrium positions, stability.

*The research was carried out at the Moscow aviation Institute (national research University) with a grant from the Russian science Foundation (project no. 19-11-00116).*

## References

1. Kholostova O.V. *Zadachi dinamiki tverdykh tel s vibriruyushchim podvesom* [Problems of dynamics of a rigid body with a vibrating suspension point]. Moscow–Izhevsk, Institut komp'uternykh issledovaniy, 2016, 308 p.
2. Markeyev A.P. The equations of the approximate theory of the motion of a rigid body with a vibrating suspension point. *J. Appl. Maths.-Mechs.*, 2011, vol. 75, no. 2, pp. 193–203.
3. Belichenko M.V., Kholostova O.V. On the stability of stationary rotations in the approximate problem of motion of Lagrange's top with a vibrating suspension point. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 13, no. 1, pp. 81–104 (in Russ.).
4. Vishenkova E.A., Kholostova O.V. On the influence of vertical vibrations on the stability of permanent rotations of a rigid body about axes lying in the main plane of inertia. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, no. 1, pp. 98–120 (in Russ.).
5. Kholostova O.V. On the Dynamics of a Rigid Body in the Hess Case at High-Frequency Vibrations of a Suspension Point. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 16, no. 1, pp. 59–84.

## Матричный метод построения уравнений динамики сноубордиста

© А.В. Борисов<sup>1</sup>, И.Е. Каспирович<sup>2</sup>, Р.Г. Мухарлямов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Филиал ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ» в г. Смоленске, Смоленск, Россия

<sup>2</sup>Институт физических исследований и технологий,  
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

**Аннотация.** Предложен метод составления уравнений движения системы твердых тел с неголономной связью. Построение уравнений динамики предполагает использование матричной формы записи. На основании анализа систем с одним, двумя, тремя звеньями выводятся

обобщения для матриц, содержащихся в матричном методе для построения системы с произвольным конечным количеством звеньев. Составлен алгоритм описания модели сноубордиста с произвольным конечным количеством звеньев сложной конструкции переменной длины, скользящего на абсолютно твердой лыже. В зоне контакта лыжи со снегом возникает неголономная связь. Рассматривается задача построения устойчивого движения системы со звеньями переменной длины с использованием метода стабилизации связей. Управление реализуется изменением длины звеньев и изменением углов между звеньями. Соединения звеньев моделируется двумя цилиндрическими шарнирами, обеспечивающими значительную механическую прочность, простоту конструкции и расположения управляющих приводов.

**Ключевые слова:** *матричный метод, неголономная система, неголономная связь, сноубордист, звено переменной длины, шарнир, система дифференциальных уравнений движения, произвольное количество звеньев, лыжа.*

**Введение.** Проблема разработки эффективных методов составления систем дифференциальных уравнений движения для антропоморфных механизмов с большим числом звеньев является актуальной вследствие громоздкости таких систем, требующих значительных затрат ресурсов и времени. Методы построения систем дифференциальных уравнений движения антропоморфного механизма с голономными связями, основанные на матричном и рекуррентном методах, описаны в [1]. Задаче моделирования динамики механизма с учетом неголономной связи посвящена работа [2]. В ней предлагается метод решения задачи управления динамикой системы с программными связями. Предлагаемый доклад посвящен применению матричного метода для построения системы дифференциальных уравнений движения модели сноубордиста с конечным количеством звеньев переменной длины.

**Описание модели лыжника-сноубордиста со звеньями переменной длины на лыже.** Модель сноубордиста, состоящая из  $k$  подвижных звеньев переменной длины, шарнирно закрепленная на абсолютно твердой инерционной лыже. Вращение звеньев происходит в шарнирах, в которых приложены по два момента, обеспечивающие поддержание звена в вертикальной плоскости и повороты звена в плоскости движения. Имеется продольная сила, действующая вдоль стержня и обеспечивающая изменение его длины. На  $i$ -ом стержне находится произвольное количество сосредоточенных масс  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Массы считаются сосредоточенными: в точках:  $A_i = C_{i1}$  располагается масса  $m_{i1}$ , в точке  $C_{i2}$  масса  $m_{i2}$ , ..., в точке  $C_{i\alpha_i}$  масса  $m_{i\alpha_i}$ .

$i = 1, 2, \dots, k$ . Положение масс на стержне задается постоянными множителями  $n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{i\alpha_1}$  соответственно ( $0 \leq n_{i\beta} \leq 1, \beta = 1, 2, \dots, \alpha_i, i = 1, 2, \dots, k$ ). Первый индекс у множителя обозначает номер звена, второй — номер массы на звене. Пусть лыжа с координатами  $x_{A_1}, y_{A_1}$  и углом поворота  $\varphi_0$  движется в плоскости  $XOY$ . Положение звена  $A_1A_2$  определяется двумя углами:  $\varphi_1$  — углом между осью  $OX$  и проекцией звена  $A_1A_2$  на плоскость  $XOY$ , отсчитываемым от оси  $OX$  против хода часовой стрелки;  $\psi_1$  — углом между звеном  $A_1A_2$  и его проекцией на плоскость  $XOY$ , отсчитываемым от проекции звена  $A_1A_2$  на плоскость  $XOY$  против хода часовой стрелки; изменением его длины  $l_1$  и координатами полюса  $A_1(x_{A_1}, y_{A_1})$ . Положение звена  $A_2A_3$  определяется двумя углами:  $\varphi_2, \psi_2$  и изменением его длины  $l_2$ . Аналогично определяется положение остальных звеньев.

Лыжа моделирует сноуборд и жестко закрепленные на нем две стопы спортсмена. Звено  $A_1A_2$  моделирует обе голени лыжника,  $A_2A_3$  соответствует двум бедрам. Такой выбор модели нижних конечностей обусловлен тем, что обе ноги спортсмена жестко закрепляются на лыже и идут параллельно до тазобедренного сустава.

Вращающий момент, который приложен к лыже и создается ногами, управляет движением и определяется составляющими  $M_{1\psi}$  и  $M_{1\varphi}$ , действующими в голеностопном суставе. Все суставы моделируются комбинациями двух цилиндрических шарниров, обеспечивающих необходимую подвижность модели опорно-двигательного аппарата человека.

Неголономная связь вдоль поверхности контакта лыжи и снега обеспечивает траекторию сноубордиста, которая описывается синусоидой. Используя уравнение неголономной связи по поверхности контакта лыжи и снега, накладывающее ограничение на вариации координат с использованием уравнений Рауса, получена матричная форма записи уравнений движения на основе анализа моделей с одним, двумя и тремя звеньями переменной длины. Определены выражения для элементов каждой матрицы, содержащейся в системе дифференциальных уравнений движения механической системы, полученных на основе анализа моделей с одним, двумя, тремя звеньями переменной длины для использования в матричном методе [1].

Далее проведено численное моделирование движения сноубордиста с заданным количеством звеньев, где используется метод стабилизации связей [2].

**Заключение.** Таким образом, разработан матричный метод составления системы дифференциальных уравнений сноубордиста, моделирующей реальные движения человека. Модель сноубордиста может быть полезной в различных областях деятельности человека.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ,  
проект № 19-08-00261 А.*

## **Литература**

1. Борисов А.В., Розенблат Г.М. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им. *Прикладная математика и механика*, 2017, т. 81, № 5, с. 511–522.
2. Мухарлямов Р.Г. Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2015, № 1, с. 15–28.

## **Matrix method for constructing dynamical equations of snowboarder**

© A.V. Borisov<sup>1</sup>, I.E. Kaspirovich<sup>2</sup>, R.G. Mukharlyamov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Branch OF National Research University “Moscow Power Engineering Institute”  
in Smolensk, Smolensk, Russia

<sup>2</sup>Институт Institute of Physical Research and Technologies,  
Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russia

**Abstract.** A method for setting equations of motion for a system of solids with nonholonomic constraints is proposed. The construction of dynamical equations involves the application of a matrix form of recording. Based on the analysis of systems with one, two, or three links, generalizations are derived for the matrices contained in the matrix method for constructing a system with an arbitrary finite number of links. An algorithm for describing the model of a snowboarder with an arbitrary finite number of links of a complex structure with variable length, sliding on an absolutely solid ski, is compiled. A non-holonomic constraint occurs in the ski-snow contact zone. The problem of constructing a stable motion of a system with variable-length links using the link stabilization method is considered. The control is implemented by changing the length of the links and changing the angles between the links. The connection of the links is modeled by two cylindrical joints, which provide significant mechanical strength, simplicity of design and location of the control drives.

**Keywords:** *matrix method, non-holonomic system, non-holonomic connection, snowboarder, variable length link, hinge, system of differential equations of motion, arbitrary number of links, ski.*

**Introduction.** The problem of developing effective methods for composing systems of differential equations of motion for anthropomorphic mechanisms with a large number of links is relevant due to the cumbersome nature of such systems, which require significant resources and time. Methods for setting systems of differential equations of motion of an an-

thropomorphic mechanism with holonomic constraints based on matrix and recurrent methods are described in [1]. The paper [2] is devoted to the problem of modeling the dynamics of the mechanism with regard for non-holonomic constraints. It offers a method for solving the problem of controlling the dynamics of a system with program constraints. This paper is devoted to the application of the matrix method for constructing a system of differential equations of motion for a snowboarder model with a finite number of links of variable length.

**Description of the model of a skier-snowboarder with links of variable length on skis.** A model of a snowboarder consisting of  $k$  movable links of variable length, pivotally fixed on a completely solid inertial ski. The rotation of the links occurs at joints, which are attached at two points to maintain the link in a vertical plane and turns the link in the plane of motion. There is a longitudinal force acting along the rod and providing a change in its length. There are arbitrary numbers of concentrated masses  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) possessed at  $i$ -th rod. The masses are considered to be concentrated: at points  $A_i = C_{i1}$  we have a mass  $m_{i1}$ , at point  $C_{i2}$  — mass  $m_{i2}$ , ..., at point  $C_{i\alpha_i}$  — mass  $m_{i\alpha_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . The position of the masses on the rod is given by constant multipliers  $n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{i\alpha_i}$  respectively ( $0 < n_i < 1, \beta = 1, 2, \dots, \alpha_i, i = 1, 2, \dots, k$ ). The first index of the multiplier indicates the number of the link, the second one — the number of the mass on the link. Let the ski has coordinates  $x_{A_1}, y_{A_1}$  and a rotation angle  $\varphi_0$ , and it moves in the plane  $XOY$ . The position of the link  $A_1A_2$  is determined by two angles:  $\varphi_1$  — angle between axis  $OX$  and a projection of the link  $A_1A_2$  to the plane  $XOY$ , measured from the  $OX$  axis counterclockwise;  $\psi_1$  — the angle between the link  $A_1A_2$  and its projection on the  $XOY$  plane, calculated from the projection of the link  $A_1A_2$  on the  $XOY$  plane counterclockwise; the change in its length  $l_1$  and the coordinates of the pole  $A_1(x_{A_1}, y_{A_1})$ . The position of the link  $A_2A_3$  is determined by two angles:  $\varphi_2, \psi_2$  and the change in its length  $l_2$ . The position of the other links is determined in the same way.

The ski simulates a snowboard and two athlete's feet rigidly fixed on it. The  $A_1A_2$  link models both legs of the skier, link  $A_2A_3$  corresponds to two thighs. This choice of the lower limb model is due to the fact that both legs of the athlete are rigidly fixed to the skis and run parallel to the pelvic-femoral joint.

The torque that is applied to the ski and created by the leg controls the movement and is determined by the components  $M_{1\psi}$  and  $M_{1\varphi}$  acting in the ankle joint. All joints are modeled by combinations of two cylindrical joints that provide the necessary mobility of the model of the human musculoskeletal system.

Nonholonomic constraint along the contact surface of the ski and snow provides the trajectory of the snowboarder described by a sinusoid. Using the equation of nonholonomic constraints over the contact surface of snow and snow, which imposes a restriction on coordinate variations, a matrix form of writing the equations of motion is obtained using the Routh equations based on the analysis of models with one, two and three links of variable length. Expressions are defined for the elements of each matrix contained in the system of differential equations of motion of a mechanical system obtained from the analysis of models with one, two, or three variable-length links for use in the matrix method [1]. Then, a numerical simulation of the motion of a snowboarder with a given number of links was performed using the link stabilization method [2].

**Conclusion.** Thus, a matrix method for setting a system of differential equations for a snowboarder that simulates real human movements has been developed. The model of a snowboarder can be useful in various areas of human activity.

*This work was supported by the RFBR, project no. 19-08-00261 A.*

#### References

1. Borisov A.V., Rosenblat G.M. Matrix method for composing differential equations of exoskeleton motion and its control. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, vol. 81, no. 5, pp. 511–522.
2. Muharlyamov R.G. Modeling of control processes, stability and stabilization of systems with program constraints. *Bulletin RAS. Theory and Control Systems*, 2015, no. 1, pp. 15–28.

### Зависимость границы области достижимости линейной системы второго порядка от параметров

© В.В. Александров, Д.И. Бугров\*, С.К. Пилюгина

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): dmitry.bugrov@math.msu.ru

**Аннотация.** Рассмотрено решение задачи о нахождении «наибольшей» и «наименьшей» областей достижимости системы второго порядка при заданных ограничениях на коэффициенты системы.

**Ключевые слова:** область достижимости, линейная система, качество робастной устойчивости.

#### Литература

Александров В.В., Бугров Д.И., Пилюгина С.К. Область достижимости линейной системы второго порядка с неопределенностью. *XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. Т. 1. Уфа, РИЦ БашГУ, 2019, с. 162–163.

## Dependence of the second-order linear system attainability region boundary on the parameters

© V.V. Aleksandrov, D.I. Bugrov\*, S.K. Pilyugina

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

\*E-mail: dmitry.bugrov@math.msu.ru

**Abstract.** The problem of finding the “largest” and “smallest” regions of attainability has been solved for the second order system under given restrictions for system’s coefficients.

**Keywords:** attainability region, linear system, quality of robust stability.

### References

Aleksandrov V.V., Bugrov D.I., Pilyugina S.K. Attainability region for a second-order linear system with uncertainty. *XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics*. V. 1. Ufa, BashGU Press, 2019, pp. 162–163.

## Управление ветромобилем, стабилизирующее неустойчивое стационарное движение

© С.А. Голованов<sup>1</sup>, Л.А. Климина<sup>2</sup>, В.А. Самсонов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
E-mail: serj-great@mail.ru, klimina@imec.msu.ru

**Аннотация.** Рассмотрена математическая модель ветромобиля, на корпусе которого установлена горизонтально-осевая ветротурбина. Вал турбины соединен редуктором с осью ведущих колес ветромобиля. Колеса движутся без проскальзывания вдоль горизонтальной прямой. Система помещена в поток ветра, направление которого параллельно направлению движения корпуса машины. В отсутствие управления система может обладать несколькими стационарными режимами движения. В том числе существуют режимы, на которых скорость корпуса направлена против скорости ветра. Среди таких режимов есть неустойчивые. Предложена стратегия стабилизации неустойчивого стационарного движения. Управление осуществляется за счет воздействия на ползун, который может перемещаться вдоль направляющей, установленной на корпусе ветромобиля. Получены условия на коэффициенты обратной связи в законе управления, обеспечивающие стабилизацию неустойчивого стационарного движения.

**Ключевые слова:** ветромобиль, стационарные режимы, устойчивость, стабилизация.

## Control of a wind car for stabilization of an unstable steady motion

© S.A. Golovanov<sup>1</sup>, L.A. Klimina<sup>2</sup>, V.A. Samsonov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Mechanical and Mathematical Department  
of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

<sup>2</sup> Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia  
E-mail: serj-great@mail.ru, klimina@imec.msu.ru

**Abstract.** The mathematical model of a wind car is studied. A wind turbine is mounted at the body of the car. The shaft of the turbine is connected with the shaft of leading wheels using a reduction gear. The wheels move without slipping along the horizontal line. The system is located in a wind flow. The wind velocity is directed along the line of motion of the car. Several steady motions of the car are possible without any control. In particular, there are steady motions for which car moves against the wind. There are unstable regimes among them. The control strategy is proposed for stabilization of such unstable steady motions. The control is implemented by applying a force to a slider that moves along a guide line located on the car. Conditions upon the feedback coefficients are obtained that ensure stabilization of an unstable steady motion.

**Keywords:** wind car, steady motion, stability, stabilization.

## О динамике ВЭУ с рабочим элементом в виде двухзвенного аэродинамического маятника

© А.П. Голуб, Ю.Д. Селюцкий

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
E-mail: holub.imech@gmail.com, seliutski@imec.msu.ru

**Аннотация.** Рассмотрен двухзвенный маятник, на втором звене которого закреплено симметричное крыло (так называемый двухзвенный аэродинамический маятник). Оси вращения обоих звеньев вертикальны. Первое звено маятника соединено с ротором электрогенератора таким образом, что движение этого звена преобразуется во вращение ротора в одном направлении. Система помещена в стационарный поток среды. Известно, что при надлежащем выборе значений параметров системы маятник совершает периодические колебания (в том числе и при сравнительно небольших скоростях ветра). Проведено численное моделирование таких колебаний при различных значениях параметров системы. Получены оценки вырабатываемой мощности.

**Ключевые слова:** колебания, ветроэнергетика, аэроупругость.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00538.*



## On dynamics of a wind power generator using double aerodynamic pendulum as working element

© A.P. Holub, Yu.D. Selyutskiy

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia  
E-mail: holub.imech@gmail.com, seliutski@imec.msu.ru

**Abstract.** A double pendulum is considered with a symmetrical wing fixed on the second link (so called double aerodynamic pendulum). Axes of rotation of both links are vertical. The first link of the pendulum is connected with the rotor of an electric generator in such a way that motion of this link is converted into unidirectional rotation of the rotor. The system is placed into steady flow. It is known that, for certain values of parameters of the system, the pendulum performs periodic oscillations (including under relatively small wind speeds). Numerical simulation of such oscillations is performed for different values of parameters of the system. Estimates for the output power are obtained.

**Keywords:** *oscillations, wind power, aeroelasticity.*

*This work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 18-01-00538.*

## Исследование уравнения Матье вблизи границ второй и третьей резонансных зон

© Л.Ф. Давудова<sup>1\*</sup>, В.М. Буданов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): ldavudova96@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрено дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами. Показано его сведение к нелинейному уравнению первого порядка. Построены четвертое приближение для второй резонансной зоны и третье приближение для третьей резонансной зоны уравнения Матье, описывающие поведения решений в окрестности границ этих зон.

**Ключевые слова:** *параметрический резонанс, уравнение с периодическими коэффициентами.*

К системам линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами приводит ряд задач механики. Одной из типичных задач, сводящихся к рассмотрению этих уравнений, явля-

ется задача о поперечных колебаниях стержня, находящегося под воздействием продольных периодических сил. В этой задаче дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня может быть сведено к следующему виду:

$$\ddot{x}(t) + p(t)x(t) = 0, \quad (1)$$

что представляет собой известное уравнение Хилла (1886), введенного им в связи с изучением движения Луны. Хилл дал метод решения, используя определители бесконечного порядка, т. е. систему уравнений:

$$x_i = \sum c_{ir}x_r + b_i, \quad \sum |c_{ir}| < 1, \quad 1 \leq i < \infty.$$

Частным случаем уравнения Хилла является уравнение Матье

$$\ddot{x}(t) + [\omega^2 + \mu \cos(vt)] x(t) = 0, \quad (2)$$

введенное в 1873 г. в связи с исследованием колебаний эллиптической мембраны, где  $\mu$  — амплитуда возбуждения;  $\omega$  — собственная частота;  $v$  — внешняя частота.

Как уравнение Матье, так и уравнение Хилла являются частными случаями дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами:

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0, \quad (3)$$

где  $p(t)$  и  $q(t)$  — периодические функции времени с периодом  $T$ .

Для уравнения (3) отсутствуют методы построения точного аналитического решения или определения устойчивости этого решения. В данной работе рассматривается уравнение Матье (2) и описан подход, который позволяет строить приближенные решения как внутри границ резонансных зон, так и снаружи.

В настоящей работе исследуется уравнение (2). Целью является исследование характера решений в областях второй и третьей резонансных зон. Исследования проводятся методом, предложенным в [1]. Полученные результаты сравниваются с результатами численного интегрирования и с теми, которые имеются в литературе [2].

Рассмотрим уравнение (1). Сделаем в нем следующую замену переменных:

$$x = A \cos \psi, \quad \dot{x} = -A\theta \sin \psi, \quad \psi = \theta t + \alpha, \quad (4)$$

где  $\theta$  — постоянная, но заранее не заданная частота;  $A$ ,  $\alpha$  — новые переменные.

Разрешая относительно переменных  $A$ ,  $\dot{\alpha}$  и вводя новую переменную  $s = \ln A$ , имеем:

$$s = \frac{1}{2} \left[ -p + p^* \cos 2\psi + \frac{1}{\theta} (q - \theta^2) \sin 2\psi \right];$$

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\theta} (q - \theta^2) (1 + \cos 2\psi) - p^* \sin 2\psi \right]; \quad (5)$$

$$\psi = \theta t + \alpha.$$

Система (5) точна, так как получена формальной заменой переменных, ее особенностью является отделенное уравнение для фазы.

Теперь рассмотрим случай, когда

$$p(t) = 0, q(t) = \omega^2 + \mu^* \cos vt,$$

где  $\omega$  — собственная частота;  $\mu$  — амплитуда возбуждения;  $v$  — частота возбуждения. Можем записать:

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \mu \cos vt) x = 0.$$

В соответствии с этим система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{1}{2\theta} (\omega^2 - \theta^2 + \mu \cos vt) \sin 2\psi; \\ \alpha &= \frac{1}{2\theta} (\omega^2 - \theta^2 + \mu \cos vt) (1 + \cos 2\psi); \\ \psi &= \theta t + \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

или систему

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{1}{2\theta} \left[ (\omega^2 - \theta^2) \sin 2(\theta t + \alpha) + \right. \\ &+ \left. \frac{\mu}{2} \sin [(2\theta + v)t + 2\alpha] + \frac{\mu}{2} \sin [(2\theta - v)t + 2\alpha] \right]; \\ \dot{\alpha} &= \frac{1}{2\theta} \left[ (\omega^2 - \theta^2) [1 + \cos 2(\theta t + \alpha)] + \mu \cos vt + \right. \\ &+ \left. \frac{\mu}{2} \cos [(2\theta + v)t + 2\alpha] + \frac{\mu}{2} \cos [(2\theta - v)t + 2\alpha] \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

В системе (7) второе уравнение отделяется и его решение является ключевым для анализа уравнения Матье. Если это решение найдено как функция времени  $\alpha(t)$ , то амплитуда  $A(t)$  определяется по формуле  $s = \ln A$  и вычисляется по первому уравнению последней системы. И по формулам (4) получаем решения исходного уравнения Матье.

Решение системы (7) прежде всего ее второго уравнения, будем искать методом последовательных приближений. Слагаемые, содержащие явно входящее время, назовем быстрыми, остальные — медленными. Будем искать переменные  $\alpha$ ,  $s$  в виде суммы быстрых  $\alpha_f$ ,  $s_f$

и медленных  $\alpha_s, s_s$  составляющих. Быстрые составляющие вычисляются интегрированием быстрых слагаемых, считая медленные константами. В уравнениях для медленных составляющих  $\alpha_s, s_s$  учитываются и медленные слагаемые в правых частях уравнений системы (7), и усредненные по явно входящему времени добавки от быстрых составляющих  $\alpha_f, s_f$ . Указанный алгоритм принципиально сходен с алгоритмом Пикара, который сходится всегда, поэтому есть основания надеяться, что изложенный метод сойдется и для немалого параметра.

### Литература

1. Буданов В.М. Редукция уравнения Матъе к нелинейному уравнению первого порядка. *Вест. Моск. универ. матем. механ.*, 2016, № 1.
2. Маркеев А.П. *Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс*. Москва – Ижевск, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2009, 396 с.

## Mathieu equation solutions near the boundaries of the second and third resonance zones

© L.F. Davudova<sup>1\*</sup>, V.M. Budanov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): ldavudova96@mail.ru

**Abstract.** The paper considers the second order differential equation with periodic coefficients. It is shown how to reduce this equation to the first order nonlinear equation. We constructed the fourth approach to the second resonance zone and the third approach to the third resonance zone of Mathieu's equation.

**Keywords:** *parametric resonance, equation with periodic coefficients.*

### References

1. Budanov V.M. Transformation of Mathieu equation to nonlinear equation of first order. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2016, no. 1.
2. Markeev A.P. *Lineinye gamil'tonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoychivosti dvizheniya sputnika otositel'no tsentra mass (Linear Hamiltonian systems and some problems of stability of satellite motion relative to the center of mass)*. Moscow–Izhevsk, Institute of Computer Science, 2009, 396 p.

## Оценка рабочих режимов двухроторной ветряной турбины типа Савониуса

© Л.А. Климина\*, М.З. Досаев, А.П. Голуб, Б.Я. Локшин,  
В.А. Самсонов, Ю.Д. Селюцкий

НИИ механики МГУ, Москва, Россия

\*E-mail: klimina@imec.msu.ru

**Аннотация.** Рассмотрена электромеханическая система — ветротурбина с вертикальной осью вращения, взаимодействующая со стационарным потоком ветра. Ветроприемный элемент состоит из двух турбин Савониуса. Обе турбины вращаются вокруг одной и той же вертикальной оси. На валу одной турбины находится ротор электрогенератора, а на валу другой — статор генератора. Взаимодействие между двумя вращающимися телами описывается электромеханическим крутящим моментом, который пропорционален относительной угловой скорости ротора генератора по отношению к статору. Аэродинамическая нагрузка на турбины Савониуса описывается с использованием квазистатического подхода. Уравнения динамики системы усредняются по углам поворота турбин. Неподвижные точки усредненной системы анализируются как приближение режимов работы устройства.

**Ключевые слова:** математическая модель, аэродинамическая нагрузка, метод усреднения, неподвижные точки.

## Evaluation of operating modes of a two-rotor wind turbine of the Savonius type

© L.A. Klimina\*, M.Z. Dosaev, A.P. Holub, B.Ya. Lokshin,  
V.A. Samsonov, Yu.D. Selyutskiy

Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russia

\*E-mail: klimina@imec.msu.ru

**Abstract.** Mechanical system interacting with a steady wind flow is studied. The system consists of two Savonius turbines. Both of them can perform autorotation around the same vertical axis. Shaft of one turbine carries a rotor of an electric generator and shaft of the other carries a stator of the generator. Interaction between two rotating bodies is described by the electromechanical torque that is proportional to the relative angular speed of the rotor of the generator with respect to the stator. Aerodynamic load upon Savonius turbines is described using the quasi-steady approach. Dynamical equations of the system are averaged over angles of rotation of

turbines. Fixed points of the averaged system are analyzed as the approximation of operation modes of the device.

**Keywords:** *mathematical model, aerodynamic load, method of averaging, fixed points.*

## **Равновесие динамически несимметричного тела с упругими опорами на шероховатой плоскости**

© М.З. Досаев\*, В.А. Самсонов, Б.Я. Локшин

НИИ механики МГУ, Москва, Россия

\*E-mail: dosayev@imec.msu.ru

**Аннотация.** Рассмотрена механическая система, состоящая из прямоугольного твердого тела и двух невесомых стержней, соединенных с телом посредством пружин. Стержни опираются на шероховатую горизонтальную поверхность. Контакт стержней с плоскостью описывается с помощью закона Кулона. Центр тяжести тела смещен от его геометрического центра на некоторое расстояние вдоль одной из сторон. Найдено изолированное положение равновесия системы. Если начальный наклон тела не отвечает этому равновесию, то по крайней мере одна опора должна проскальзывать. Определены граничные значения коэффициента трения, меньше которых начинают скользить обе опоры. Численно исследован процесс перехода системы из заданного начального положения в положение равновесия.

**Ключевые слова:** *сила трения, сила упругости, условия равновесия, реакция опоры.*

## **Balance of a dynamically asymmetric body with elastic supports on a rough plane**

© M.Z. Dosaev\*, V.A. Samsonov, B.Ya. Lokshin

Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russia

\*E-mail: dosayev@imec.msu.ru

**Abstract.** A mechanical system consisting of a rigid body and two weightless rods connected to the body by means of springs is considered. The rods rest on a rough horizontal surface. The contact of the rods with the plane is described by Coulomb's law. The center of mass of the body is displaced from its geometric center by some distance along one side of the body. An isolated equilibrium position of the system is found. If the initial

position of the body differs from this balance then at least one supporting leg must begin to slide. The boundary values of the friction coefficient are determined, such that at lower values of the coefficient, both support legs begin to slide. The process of transition of the system from a given initial position to an equilibrium position is studied numerically.

**Keywords:** *friction force, elastic force, balance conditions, support reaction.*

## **Об изменении множества сингулярных конфигураций манипулятора при его установке на подвижную платформу**

© О.М. Капустина<sup>\*</sup>, А.И. Кобрин

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

<sup>\*</sup>E-mail: KapustinaOM@mpei.ru

**Аннотация.** Для последовательного манипулятора, состоящего из пяти звеньев, связанных соединениями вращательного типа, показано, что при установке манипулятора на подвижную платформу с меканум колесами некоторые его конфигурации становятся несингулярными. Этот результат обобщает и дополняет выводы, полученные для других моделей мобильных манипуляторов.

**Ключевые слова:** *манипулятор, платформа с меканум колесами, сингулярные конфигурации.*

Сингулярными называют конфигурации, в которых ранг матрицы Якоби отображения пространства обобщенных координат в пространство параметров локации рабочего органа становится меньше полного. Задача нахождения сингулярных конфигураций возникает уже на этапе проектирования роботов. При разработке алгоритмов управления движением механизмов также следует учитывать существование таких конфигураций, планируя движение с целью их исключения.

Отмечено [1], что в ряде случаев установка манипулятора на мобильную платформу приводит к исчезновению некоторых сингулярностей.

В настоящей работе аналогичный вывод получен для мобильного манипулятора KUKA youBot путем сравнения условий понижения ранга матриц Якоби стационарного и мобильного манипуляторов. Исследование проведено аналитическим методом.

Положение мобильного манипулятора KUKA youBot в абсолютном пространстве определим восьмимерным вектором обобщенных координат

$$\mathbf{Q} = (X_C, Y_C, \theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)^T,$$

где  $X_C, Y_C$  — координаты фиксированной точки  $C$  верхнего горизонтального основания платформы относительно неподвижной системы координат  $Oxyz$ ,  $Oxy$  — горизонтальная координатная плоскость;  $\theta$  — угол поворота платформы относительно оси  $Oz$ ;  $\theta_1$  — угол поворота плоскости руки манипулятора относительно платформы;  $\theta_i (i = 2, \dots, 5)$  — углы поворота звеньев относительно друг друга;  $T$  — знак транспонирования.

Положение стационарного манипулятора относительно системы координат  $Oxyz$  зададим пятимерным вектором

$$\mathbf{Q}_a = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)^T.$$

Для определения положения рабочего органа как твердого тела относительно системы координат  $Oxyz$  введем вектор размерности  $6 \times 1$ :

$$\mathbf{X} = (X_E, Y_E, Z_E, \psi, \theta, \varphi)^T,$$

$X_E, Y_E, Z_E$  — координаты фиксированной точки  $E$  рабочего органа;  $\psi, \theta, \varphi$  — углы Эйлера рабочего органа.

В [2] построена и приведена к ступенчатому виду матрица Якоби  $\mathbf{J} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{X}$  мобильного манипулятора. В настоящей работе аналогичным образом получена и преобразована матрица Якоби  $\mathbf{J}_a = \partial \mathbf{Q}_a / \partial \mathbf{X}$  стационарного манипулятора. На основе анализа случаев понижения ранга матриц  $\mathbf{J}, \mathbf{J}_a$  показано, что в переменных  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  множество сингулярных конфигураций стационарного манипулятора содержит множество сингулярных конфигураций мобильного манипулятора. В частности, для манипулятора с неподвижным основанием сингулярной является не только конфигурация  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ , рассмотренная в [2, 3] для мобильного манипулятора, но и, например, конфигурация  $\theta_3 = 0$ , в которой третье звено вытянуто вдоль второго.

*Исследование сингулярной кинематики мобильных манипуляторов следует проводить на основе математической модели, учитывающей подвижность основания.*

## Литература

1. Bayle B., Fourquet J., Renaud M. Manipulability analysis for mobile Manipulators. *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automa-*



- tion (Cat. No. 01CH37164), Seoul, South Korea, 2001, vol. 2, pp. 1251–1256.  
DOI: 10.1109/ROBOT.2001.932782
2. Капустина О.М. Анализ сингулярных конфигураций мобильного манипулятора KUKA youBot. *Вестник МЭИ*, 2019, № 1, с. 93–97.  
DOI: 10.24160/1993-6982-2019-1-93-97
  3. Kapustina O.M., Kobrin A.I. Research on Mobile Manipulators Singular Kinematics by Computer Algebra Systems. *2020 V International Conference on Information Technologies in Engineering Education (Inforino)*. Moscow, Russia, 2020, pp. 1–4.  
DOI: 0.1109/Inforino 48376.2020.9111727

## On the change of the singular configurations set of the manipulator when it is mounted on a moving platform

© О.М. Капустина\*, А.И. Кобрин

National Research University MPEI, Moscow, Russia

\*E-mail: KapustinaOM@mpei.ru

**Abstract.** For a serial manipulator, consisting of five links, connected by revolute-type joints it is shown that when the manipulator is mounted on a moving platform with mecanum wheels, some its configurations become nonsingular. This result generalizes and supplements the conclusions obtained for other models of mobile manipulators.

**Keywords:** manipulator, platform with mecanum wheels, singular configurations.

### References

1. Bayle B., Fourquet J., Renaud M. Manipulability analysis for mobile Manipulators. *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 01CH37164)*. Seoul, South Korea, 2001, vol. 2, pp. 1251–1256  
DOI: 10.1109/ROBOT.2001.932782
2. Капустина О.М. An analysis of singular configurations of the KUKA youBot mobile manipulator. *MPEI Vestnik*, 2019, vol. 1, pp. 93–97 (in Russ.).
3. Kapustina O.M., Kobrin A.I. Research on Mobile Manipulators Singular Kinematics by Computer Algebra Systems. *2020 V International Conference on Information Technologies in Engineering Education (Inforino)*. Moscow, 2020, pp. 1–4.  
DOI: 0.1109/Inforino48376.2020.9111727

## Динамика плавного разворота

© А.Е. Ламоткин\*, Н.Е. Мисюра, Е.А. Митюшов

Уральский федеральный университет имени первого Президента России

Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

\*E-mail (докладчика): alexeylamotkin@yandex.ru

**Аннотация.** В работе рассматривается управление разворотом твердого тела. За управляющее воздействие принимается внешний момент, действующий на тело. Ставится задача о нахождении функ-

ции управления, обеспечивающей плавный разворот (т. е. начальные и конечные угловые ускорения тела равны нулю). Решение сводится к решению обратной задачи динамики, в результате которого устанавливается связь между законом плавного поворота и законом управления, обеспечивающего данное движение.

**Ключевые слова:** *плавный разворот, обратная задача динамики, кватернионы.*

Задача об управлении сферическим движением твердого тела очень важна и имеет широкое прикладное значение прежде всего в вопросах космической навигации. Существует множество работ, в которых рассматриваются различные подходы к решению этой задачи. Один из таких подходов основан на решении обратной задачи динамики [1], когда сначала ищется программная траектория, удовлетворяющая заданным условиям, а затем по этой траектории строится управление, обеспечивающее движение по этой траектории.

Способ построения программной траектории для плавного разворота твердого тела (т. е. когда начальные и конечные угловые ускорения тела равны нулю) был предложен авторами в работе [2]. Уникальность предложенного способа заключается в применении изоморфизма  $Sp(1)/\pm 1 \leftrightarrow SO(3) \leftrightarrow D: r \leq \pi$  и использовании в качестве конфигурационного пространства поворотов трехмерного шара радиуса  $\pi$ . Такой способ позволяет получать трехмерное представление траекторий вращения твердого тела, что может быть полезно при решении различных прикладных задач. В упомянутой работе предложен метод получения программной траектории в виде полинома пятой степени, однако не рассмотрено управление, которое должно обеспечить движение по данной траектории. Основной целью этой работы является восполнение указанного пробела.

Считаем, что управляемая система описывается динамическими уравнениями Эйлера  $M_1 = I_1 \dot{\Omega}_1 + \Omega_2 \Omega_3 (I_3 - I_2)$ ,  $M_2 = I_2 \dot{\Omega}_2 + \Omega_3 \Omega_1 (I_1 - I_3)$ ,  $M_3 = I_3 \dot{\Omega}_3 + \Omega_1 \Omega_2 (I_2 - I_1)$ , а в качестве управления рассматриваем главный момент внешних сил  $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$ , действующих на тело. Для определения управления, обеспечивающего движение по программной траектории, находим законы изменения угловой скорости твердого тела и ее производной, а затем решаем обратную задачу динамики, определенную динамическими уравнениями Эйлера.

Решение обратной задачи динамики для траектории из работы [2] позволяет найти управляющие воздействия, обеспечивающие движение по этой траектории, а также оценить возможность реализации предложенной программной траектории.

## Литература

1. Velishchanskii M.A., Krishchenko A.P., Tkachev S.B. Synthesis of spacecraft reorientation algorithms using the concept of the inverse dynamic problem. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2003, no. 42, pp. 811–818.
2. Lamotkin A.E., Misyura N.E., Mityushov E.A. Designing the program trajectory for steering a spacecraft under arbitrary boundary conditions. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2002, 747 (1).  
DOI: 10.1088/1757-899X/747/1/012087

## Dynamics of smooth turn

© A.E. Lamotkin\*, N.E. Misyura, E.A. Mityushov

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia

\*E-mail (speaker): alexeylamotkin@yandex.ru

**Abstract.** This work deals with the control of the rigid body rotation. An external momentum affecting on the body is taken as a control. The problem is posed of finding a control function that provides a smooth turn (i.e., the initial and final angular accelerations of the body are equal zero). The solution of this problem is reduced to the solution of the inverse problem of dynamics. As a result, we obtain a connection between the smooth turn and the control function that provides this movement.

**Keywords:** *smooth turn, inverse dynamics problem, quaternions.*

The problem of controlling the spherical motion of a rigid body is very important and has wide applied significance, primarily in space navigation. There are many works that consider different approaches to solving this problem. One of such approaches is based on the solution of the inverse problem of dynamics [1], when first a program trajectory is sought that satisfies the given conditions, and then controls are constructed along this trajectory, ensuring movement along this trajectory.

A method for constructing a programmed trajectory for a smooth turn of a rigid body (ie, when the initial and final angular accelerations of the body are equal to zero) was proposed by the authors in [2]. The uniqueness of the proposed method lies in the use of isomorphism  $Sp(1)/\pm 1 \leftrightarrow SO(3) \leftrightarrow D: r \leq \pi$  and the use of a three-dimensional ball of radius  $\pi$  as the configuration space of rotations. This method allows one to obtain a three-dimensional representation of the trajectories of a rigid body, which can be useful in solving various applied problems. In the work, a method for obtaining a programmed trajectory in the form of a fifth-degree polynomial is proposed, however, the control that should ensure movement along this trajectory is not considered. The main goal of this work is to fill this gap.

We assume that the controlled system is described by the dynamic Euler equations  $M_1 = I_1\dot{\Omega}_1 + \Omega_2\Omega_3(I_3 - I_2)$ ,  $M_2 = I_2\dot{\Omega}_2 + \Omega_3\Omega_1(I_1 - I_3)$ ,  $M_3 = I_3\dot{\Omega}_3 + \Omega_1\Omega_2(I_2 - I_1)$ , and as a control we consider the momentum of external forces  $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$  acting on the body. To determine the control that provides motion along the programmed trajectory, we find the laws of change in the angular velocity of a rigid body and its derivative, and then solve the inverse problem of dynamics, determined by the dynamic Euler equations.

The solution of the inverse problem of dynamics for a trajectory from [2] makes it possible to find control actions that ensure movement along this trajectory and allows one to assess the possibility of implementing the proposed program trajectory.

## References

1. Velishchanskii M.A., Krishchenko A.P., and Tkachev S.B. Synthesis of spacecraft reorientation algorithms using the concept of the inverse dynamic problem. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2003, no. 42, pp. 811–818.
2. Lamotkin A.E., Misyura N.E., and Mityushov E.A. Designing the program trajectory for steering a spacecraft under arbitrary boundary conditions. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2002, 747 (1). DOI: 10.1088/1757-899X/747/1/012087

## Анализ устойчивости по Якоби математического маятника с демпфированием

© П.М. Шкапов<sup>1</sup>, А.В. Сулимов<sup>1,2</sup>, В.Д. Сулимов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Севастополе, Севастополь, Россия  
E-mail: spm2@bk.ru

**Аннотация.** Исследована устойчивость по Якоби одномерной динамической системы — математического маятника с демпфированием. Рассмотрены траектории системы с исходными и возмущенными параметрами в окрестности устойчивого положения равновесия. Приведен численный пример.

**Ключевые слова:** математический маятник, линейно-вязкое сопротивление, геометрический инвариант, устойчивость по Якоби.

Один из методов исследования устойчивости динамических систем наряду с классическим подходом на основе метода Ляпунова [1] представляет теория Косамби — Картаана — Черна (теория ККЧ) [2, 3], при этом в общем случае конфигурационное пространство системы не

является евклидовым. Фундаментальным является предположение о существовании взаимно-однозначного соответствия между динамической системой второго порядка и уравнениями геодезических в ассоциированном пространстве Финслера. В рамках теории ККЧ реализован дифференциально-геометрический подход к вариационным дифференциальным уравнениям, описывающим отклонение целой траектории динамической системы от ближайших траекторий. Применение теории ККЧ актуально во многих практических приложениях, где требуется идентифицировать области, в которых имеют место одновременно устойчивость по Ляпунову и устойчивость по Якоби.

Геометрические структуры, вводимые теорией ККЧ, представляются в терминах параметров исследуемой системы. Дифференциальные уравнения движения динамической системы могут быть приведены к виду

$$\ddot{x}^i + 2G^i(x^j, \dot{x}^j, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где каждая функция  $G^i(x^j, \dot{x}^j, t)$  имеет класс гладкости  $C^\infty$ ,  $\dot{x}^i = dx^i/dt$ ,  $\ddot{x}^i = d^2x^i/dt^2$ .

Для уравнений вида (1) рассматриваются задачи об инвариантах системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка при несингулярном преобразовании координат:

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x}^i = f^i(x^j).$$

В качестве примера в данной работе исследуется одномерная динамическая система — классический математический маятник с демпфированием (линейно-вязким сопротивлением), состоящий из жесткого (безмассового) стержня длины  $l$ , вращающегося вокруг горизонтальной оси неподвижного плоского шарнира, совмещенного с одним из концов стержня (точкой подвеса), и несущего на противоположном конце материальную точку некоторой конечной массы. Рассматриваемая неконсервативная система находится в вертикальной плоскости и включает в себя звено, реализующее линейно-вязкое сопротивление. Обобщенной координатой является угол  $\theta$  отклонения стержня от вертикальной оси, проходящей через точку подвеса маятника.

Линеаризованное дифференциальное уравнение движения системы имеет вид [4]

$$a\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c\theta = 0,$$

где  $a$  — обобщенный коэффициент инерции;  $b$  — обобщенный коэффициент линейно-вязкого сопротивления;  $c$  — квазиупругий коэффициент.

В эквивалентной канонической форме запишем это уравнение так:

$$\ddot{\theta} + 2\eta\dot{\theta} + \omega^2\theta = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\omega$  — круговая частота собственных колебаний,  $\omega = \sqrt{a/c} = \sqrt{g/l}$ ,  $g$  — ускорение свободного падения;  $\eta = b/(2a)$  — коэффициент затухания.

В соответствии с теорией ККЧ уравнение движения (2) для рассматриваемой системы с одной степенью свободы можно записать в форме (1):

$$\ddot{\theta} + 2G^1(\theta, \dot{\theta}, t) = 0,$$

где

$$G^1 = \frac{1}{2}(2n\dot{\theta} + \omega^2\theta). \quad (3)$$

По теории ККЧ коэффициент нелинейной связности определяется в виде

$$N_1^1 = \frac{\partial G^1}{\partial \dot{\theta}} = n, \quad (4)$$

коэффициент кривизны нуль-связности

$$Z_1^1 = \frac{\partial G^1}{\partial \theta} = \frac{1}{2}\omega^2, \quad (5)$$

а коэффициент связности Бервальда равен нулю [3].

Итак, для одномерной системы второй геометрический инвариант, т. е. тензор кривизны отклонения с учетом (4) и (5), представляется скалярной величиной, определенной в следующем виде [3]:

$$P_1^1 = (N_1^1)^2 - Z_1^1 = \eta^2 - \omega^2. \quad (6)$$

Пусть  $\chi = \frac{\eta}{\omega}$ ,  $\chi \geq 0$ . Тогда

$$P_1^1 = \eta^2 - \omega^2 = \omega^2(\chi - 1)(\chi + 1). \quad (7)$$

Полученный результат (7) позволяет выполнить анализ устойчивости системы по Якоби с использованием оценки кривизны отклонения. При исследовании динамики одномерных систем, движение которых описывается линейным дифференциальным уравнением вида (2), рассматривают три характерных случая [4].

1. *Случай малого сопротивления:*  $\eta < \omega$ . Это соответствует условию  $\chi < 1$ , т. е., согласно (17), кривизна отклонения определяется отрицательной величиной  $P_1^1 < 0$ . Следовательно, в соответствии с приведенным выше определением *система устойчива по Якоби*.

2. *Случай большого сопротивления:*  $\eta > \omega$ . При этом  $\chi > 1$  и  $P_1^1 > 0$ , следовательно, *система неустойчива по Якоби*.

3. *Случай критического сопротивления:*  $\eta = \omega \Leftrightarrow \chi = 1 \Rightarrow P_1^1 = 0$ , т. е. система также *неустойчива по Якоби*.

В обобщение выполненного анализа устойчивости рассматриваемой системы можно сделать следующие выводы:

- в случае малого сопротивления система одновременно линейно устойчива (в окрестности положения равновесия) и устойчива по Якоби;
- при большом и критическом сопротивлении система линейно устойчива (в окрестности положения равновесия) и неустойчива по Якоби.

**Численный пример.** Пусть задана система, называемая далее исходной, для которой длина стержня маятника  $l = 1$  м. Рассматривается случай малого сопротивления: принято  $\chi = 0,2$ .

Вычисление кривизны отклонения в соответствии с (7) дает

$$P_1^1 = \frac{g}{l}(\chi - 1)(\chi + 1) \approx -9,4176 \text{ [с}^{-2}\text{]}.$$

Начальные условия для определения постоянных интегрирования задаются в виде:  $t = 0$ ,  $\theta(0) = \theta_0 = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = \pi/10 \text{ [с}^{-1}\text{]}$ . Тогда  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = \dot{\theta}_0 / \omega_1$ . Изменение во времени обобщенной координаты представлено функцией

$$f(t) = \theta(t) = C_2 e^{-\eta t} \sin \omega_1 t,$$

где  $\eta = \chi \omega = \chi \sqrt{g/l} \approx 0,626418 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_1 = \sqrt{g/l} \sqrt{1 - \chi^2} \approx 3,06881 \text{ с}^{-1}$ ;  $C_2 \approx 0,1024$  рад.

Вводится в рассмотрение первая возмущенная система, при этом возмущение определяется изменением длины стержня маятника:  $l_{p1} = 1,4$  м. Вычисленное значение кривизны отклонения

$$\left(P_1^1\right)_{p1} = \frac{g}{l_{p1}}(\chi - 1)(\chi + 1) \approx -6,7269 \text{ [с}^{-2}\text{]}.$$

Изменение во времени обобщенной координаты при тех же начальных условиях здесь представлено функцией

$$f_1(t) = C_2 e^{-\eta t} \sin \omega_1 t,$$

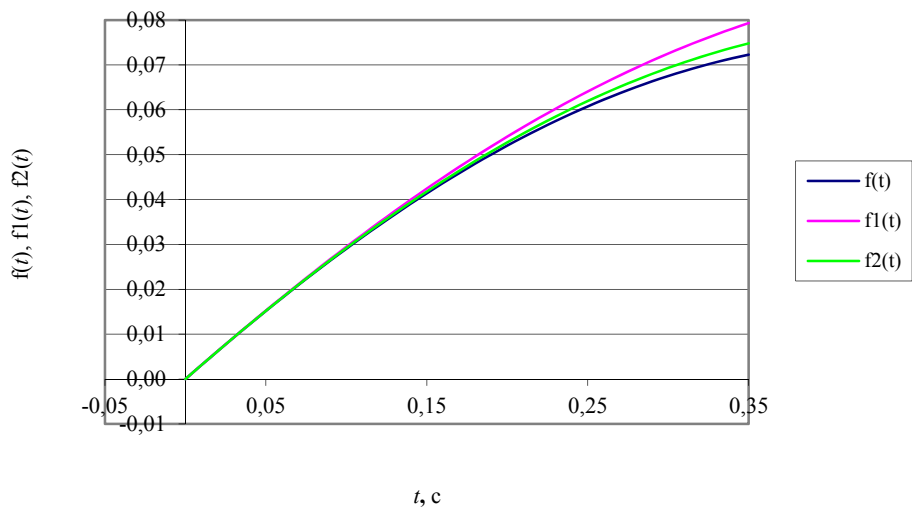
где  $\eta = \chi\omega = \chi\sqrt{g/l_{p1}} \approx 0,529420 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_1 = \sqrt{g/l_{p1}}\sqrt{1-\chi^2} \approx 2,59362 \text{ с}^{-1}$ ;  
 $C_2 \approx 0,1211 \text{ рад}$ .

Для второй возмущенной системы задано  $l_{p2} = 1,12 \text{ м}$ . Тогда:

$$\left(P_1^1\right)_{p2} = \frac{g}{l_{p2}}(\chi-1)(\chi+1) \approx -8,4086 \text{ [с}^{-2}\text{]}.$$

Соответствующее изменение во времени обобщенной координаты при тех же начальных условиях имеет вид  $f_2(t) = C_2 e^{-\eta t} \sin \omega_1 t$ ,  
 $\eta = \chi\omega = \chi\sqrt{g/l_{p2}} \approx 0,591910 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega_1 = \sqrt{g/l_{p2}}\sqrt{1-\chi^2} \approx 2,89975 \text{ с}^{-1}$ ;  
 $C_2 \approx 0,1083 \text{ рад}$ .

Графики функций  $f(t)$ ,  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  (вычисления на временном интервале от нуля до 0,35 с) приведены на рис. 1.



**Рис. 1.** Изменение во времени обобщенной координаты в случае малого сопротивления для исходной и возмущенных систем

Далее рассматривается случай большого сопротивления: задано  $\chi = 1,1$ .

Для исходной системы в соответствии с (7) имеет место

$$P_1^1 = \frac{g}{l}(\chi-1)(\chi+1) \approx 2,0601 \text{ [с}^{-2}\text{]}.$$



При этом корни (действительные) характеристического уравнения определяются в следующем виде

$$\lambda_{1,2} = \omega(-\chi \pm \sqrt{\chi^2 - 1}) = \frac{g}{l}(-\chi \pm \sqrt{\chi^2 - 1}).$$

Для тех же начальных условий, что и в случае малого сопротивления, вычисление неизвестных постоянных интегрирования дает:  $C_1^* \approx -0,1172$  рад;  $C_2^* = -C_1^*$ . Изменение во времени обобщенной координаты представляется функцией  $f(t) = \theta(t) = C^*(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$ ; здесь  $C^* = C_1^*$ .

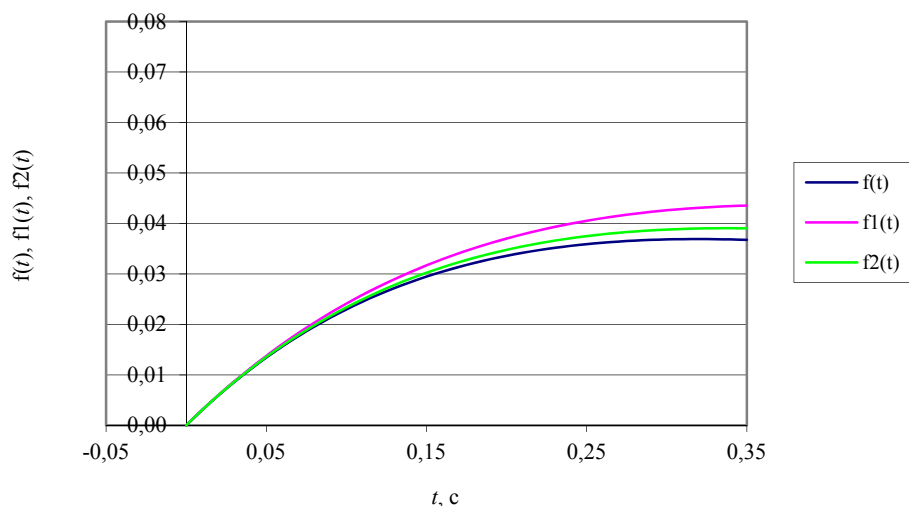
Для первой возмущенной системы ( $l_{p1} = 1,4$  м) имеет место

$$\left(P_1^1\right)_{p1} = \frac{g}{l_{p1}}(\chi - 1)(\chi + 1) \approx 1,4715 \text{ с}^{-2}, \quad C^* = C_1^* \approx -0,1295 \text{ рад.}$$

Аналогичные величины для второй возмущенной системы:

$$\left(P_1^1\right)_{p2} = \frac{g}{l_{p2}}(\chi - 1)(\chi + 1) \approx 1,8394 \text{ с}^{-2}; \quad C^* = C_1^* \approx -0,1172 \text{ рад.}$$

В случае большого сопротивления изменение во времени обобщенной координаты для исходной системы, а также первой и второй возмущенных систем представлено соответственно функциями  $f(t)$ ,  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ . Графики этих функций (определены на временном интервале от нуля до 0,35 с) приведены на рис. 2.



**Рис. 2.** Изменение во времени обобщенной координаты в случае большого сопротивления для исходной и возмущенных систем

**Заключение.** Исследована устойчивость по Якоби одномерной динамической системы — математического маятника с демпфированием. В соответствии с теорией Косамби — Картана — Черна определены в явном виде коэффициенты нелинейной связности, кривизны нуль-связности и кривизны отклонения. Подход позволяет определить условия, при которых исследуемая система одновременно устойчива по Ляпунову и по Якоби.

### Литература

1. Hafstein S.F., Valfells A. Efficient computation of Lyapunov functions for nonlinear systems by integrating numerical solutions. *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 97, no. 3, pp. 1895–1910.
2. Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.
3. Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, Art. ID 1656014 (24 pages).
4. Колесников К.С., Дубинин В.В., ред. Курс теоретической механики: учебник для вузов. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 580 с.

## Jacobi stability analysis of the damped mathematical pendulum

© P.M. Shkapov<sup>1</sup>, A.V. Sulimov<sup>1,2</sup>, V.D. Sulimov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, Branch in Sevastopol, Russia

E-mail: spm2@bk.ru

**Abstract.** The Jacobi stability of one-dimensional dynamical system (the damped mathematical pendulum) is investigated. The trajectories of the system with initial parameters and with perturbed parameters are considered in the neighborhood of the position of stable equilibrium. The numerical example is presented.

**Keywords:** *mathematical pendulum, linearly viscous resistance, geometric invariant, Jacobi stability.*

### References

1. Hafstein S.F., Valfells A. Efficient computation of Lyapunov functions for nonlinear systems by integrating numerical solutions. *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 97, no. 3, pp. 1895–1910.
2. Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.
3. Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, Art. ID 1656014 (24 pages).
4. Kolesnikov K.S., Dubinin V.V., eds. Kurs teoreticheskoy mekhaniki [A Course in Theoretical Mechanics. Tutorial]. Moscow, BMSTU Publ., 2017, 580 p.

## Исследование устойчивости по Якоби нелинейного двойного маятника

© П.М. Шкапов<sup>1</sup>, А.В. Сулимов<sup>1,2</sup>, В.Д. Сулимов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Севастополе, Севастополь, Россия

E-mail: spm2@bk.ru

**Аннотация.** Рассмотрена задача на исследование устойчивости по Якоби нелинейного двойного маятника. Уравнения эволюции во времени описаны на основе уравнений Эйлера — Лагранжа. В решении применяется подход на основе теории Косамби — Картана — Черна (теории ККЧ), который является эффективным математическим методом исследования динамических систем с использованием геометрических инвариантов.

**Ключевые слова:** динамическая система, устойчивость по Якоби, геометрический инвариант, нелинейный двойной маятник.

Рассматривается классическая математическая модель системы с двумя степенями свободы — нелинейный двойной маятник, составленный из двух одинаковых маятников. Каждый маятник состоит из жесткого невесомого стержня, несущего на конце материальную точку. Рассматриваемая детерминированная система может демонстрировать два вида движения: регулярное поведение и глобальный хаос [1]. Существенно, что применение экспонент Ляпунова для установления режима хаотического поведения нелинейного двойного маятника оказывается недостаточно [2, 3]. Этим обусловлена необходимость применения теории Косамби — Картана — Черна (теории ККЧ) к анализу устойчивости.

**Уравнения движения двойного маятника.** Рассматриваются вопросы устойчивости по Якоби двумерных динамических систем. Одним из важных примеров двумерной нелинейной динамической системы является двойной маятник, демонстрирующий хаотическое поведение [4]. Динамика нелинейного двойного маятника описывается дифференциальными уравнениями второго порядка. Исследуемый двойной маятник показан на рис. 1.

Двойной маятник состоит из двух математических маятников  $M_1$  и  $M_2$ . Жесткий стержень маятника  $M_1$  имеет длину  $l_1$  и несет на конце материальную точку массы  $m_1$ ; аналогичные параметры маятника  $M_2$  — соответственно  $l_2$  и  $m_2$ . Стержни предполагаются безмассовыми. Рассматриваемая система двойного маятника находится

в вертикальной плоскости и считается консервативной. Обобщенными координатами двойного маятника являются углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  отклонения стержней от вертикали. Кинетическая энергия двойного маятника определяется в виде [5]:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]; \quad (1)$$

потенциальная энергия имеет вид

$$U = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2 gl_2 \cos \theta_2. \quad (2)$$

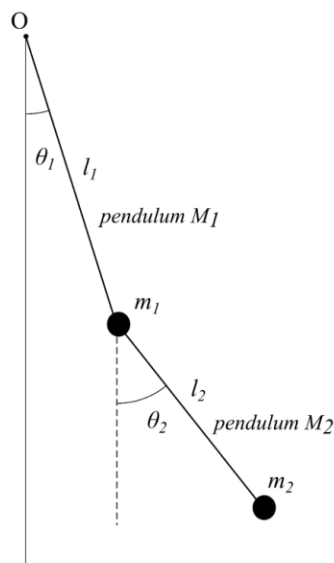


Рис. 1. Схема нелинейного двойного маятника

Уравнения движения системы могут быть получены с использованием уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

где  $L$  — лагранжиан системы,  $L = T - U$ .

Далее рассматривается частный случай: предполагается, что  $m_1 = m_2$  и  $l_1 = l_2 = l$ . Тогда дифференциальные уравнения движения двойного маятника, полученные с использованием (3), имеют вид:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{1}{\alpha} \left[ \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + 2\gamma \sin \theta_1 - \gamma \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right], \quad (4)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{\alpha} \left[ 2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \right. \\ \left. + 2\gamma \sin \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2\gamma \sin \theta_2 \right], \quad (5)$$

где  $\gamma = g/l$  и  $\alpha = 2 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2)$ .

**Геометрические объекты нелинейного двойного маятника.** Геометрические объекты системы определяются из уравнений движения (4), (5). Конкретные алгоритмы вычисления нелинейной связности, кривизны нуль-связности и связности Бервальда приведены в [3, 4]. Для анализируемого случая компоненты тензора  $P_j^i$  представлены громоздкими выражениями, поэтому ниже приведены данные, определяющие собственные значения  $\lambda_i$ , ( $i=1, 2$ ), указанного тензора:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2},$$

где элементы  $\tau$  и  $\Delta$  для тензора  $P_j^i$  определены в виде

$$\tau = -\frac{2}{[-2 + \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]^2} \left\{ 2\gamma \cos \theta_1 [1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)] + \right. \\ \left. + \cos(\theta_1 - \theta_2) [2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \right\}, \\ \Delta = -\frac{\gamma \cos \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) [2\dot{\theta}_1^2 + 2\gamma \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]}{[-2 + \cos^2(\theta_1 - \theta_2)]^3}.$$

**Границы устойчивости по Якоби для начальных условий.** Динамика нелинейного двойного маятника рассматривается для следующих типичных начальных значений  $\theta_0$  обобщенных координат  $\theta_1$  и  $\theta_2$ :

$$(I) \theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0 = \frac{\pi}{4},$$

$$(II) \theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0 = \frac{5}{4}\pi.$$

В последующих вычислениях принимается:  $g = 9,81$  и  $l = 1$ .

Для случаев (I) и (II) анализ устойчивости по Якоби нелинейного двойного маятника проводится с использованием результатов вычисления собственных значений тензора  $P_j^i$ . Значения обобщенных ко-

ординат  $\theta_1$  и  $\theta_2$  не выходят за пределы ограниченной области:  $-\pi \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$ . Поведение двойного маятника определяется только колебательными движениями маятников  $M_1$  и  $M_2$ . Изменение собственных значений  $\lambda_i$  и  $\lambda_2$  тензора  $P_j^i$  показано на рис. 2 при  $-\pi \leq \theta_1(0), \theta_2(0) \leq \pi, \theta_1(0) = \theta_2(0)$ .

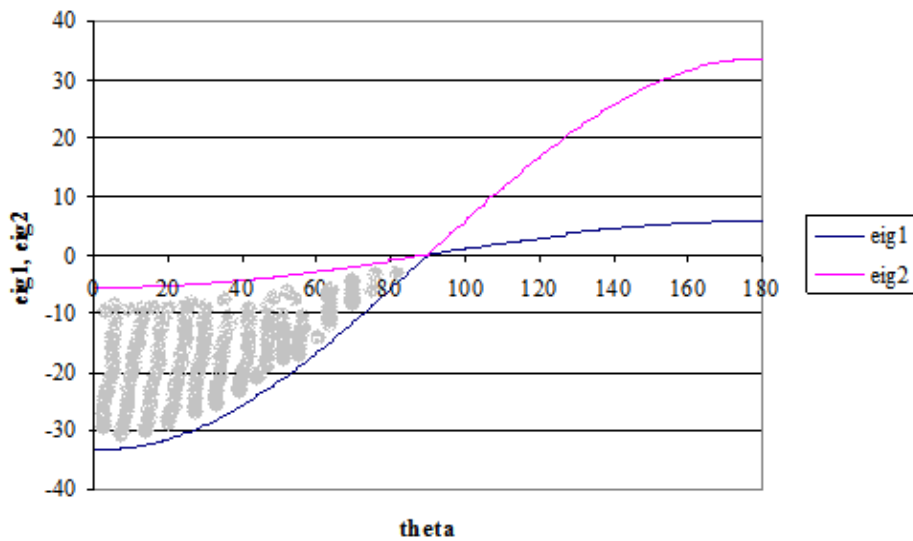


Рис. 2. Изменение собственных значений  $\lambda_i$  и  $\lambda_2$  тензора  $P_j^i$  (обозначены eig1 и eig2, соответственно) при  $-\pi \leq \theta_1(0), \theta_2(0) \leq \pi, \theta_1(0) = \theta_2(0)$

На рис. 2 видно, что система устойчива по Якоби, если  $-\pi \leq \theta_1(0) = \theta_2(0) < \pi/2$ . Граница перехода от устойчивости по Якоби к неустойчивости по Якоби определена начальными значениями обобщенных координат  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \pi/2$ : имеет место  $\lambda_i = \lambda_2 = 0$ , т. е. собственные значения тензора  $P_j^i$  являются кратными.

Изменение собственных значений  $\lambda_i$  и  $\lambda_2$  тензора  $P_j^i$  при  $\theta_1(0) = \theta_0 = \frac{\pi}{4}$  и  $0 \leq \theta_2(0) \leq \pi$  показано на рис. 3.

На рис. 3 видно, что система становится неустойчивой по Якоби, если  $\theta_2(0) \geq 3\pi/4$  (т. е.  $\theta_2(0) \geq 135^\circ$ ). Конкретно, при  $\theta_2(0) = 3\pi/4$  имеет место  $\lambda_2 = 0$  (соответствует eig2 = 0 на рис. 3).

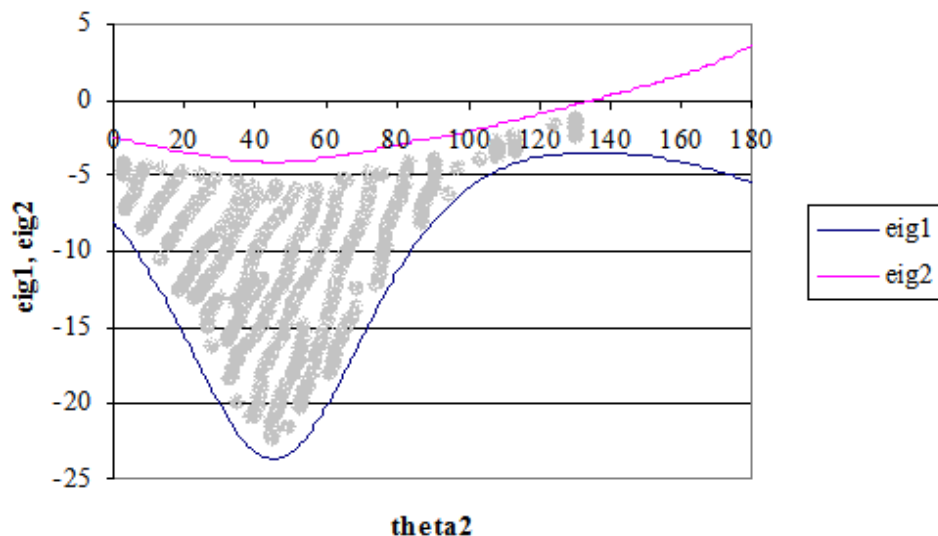


Рис. 3. Изменение собственных значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  тензора  $P_j^i$

$$\text{при } \theta_1(0) = \theta_0 = \frac{\pi}{4} \text{ и } 0 \leq \theta_2(0) \leq \pi$$

**Заключение.** Исследована устойчивость по Якоби двумерной динамической системы — нелинейного двойного математического маятника. В соответствии с теорией Косамби — Картана — Черна определены в явном виде коэффициенты нелинейной связности, кривизны нуль-связности и кривизны отклонения. Подход позволяет определить условия, при которых исследуемая система одновременно устойчива по Ляпунову и по Якоби.

### Литература

1. Hafstein S.F., Valfells A. Efficient computation of Lyapunov functions for nonlinear systems by integrating numerical solutions. *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 97, no. 3, pp. 1895–1910.
2. Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.
3. Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, Art. ID 1656014 (24 pages).
4. Yajima T., Yamasaki K. Jacobi stability for dynamical systems of two-dimensional second-order differential equations and application to overhead crane system. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 4, Art. ID. 1650045 (16 pages).
5. Колесников К.С., Дубинин В.В., ред. *Курс теоретической механики*. Москва, Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 580 с.

## Restoration of parameters of Jacobi stable nonlinear double pendulum using hybrid algorithms of global optimization

© P.M. Shkapov<sup>1</sup>, A.V. Sulimov<sup>1,2</sup>, V.D. Sulimov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Lomonosov Moscow State University, Branch in Sevastopol, Sevastopol, Russia  
E-mail: spm2@bk.ru

**Abstract.** The problem of restoration of parameters of Jacobi stable nonlinear double pendulum is considered. Equations of time evolution are described on base of Euler–Lagrange equations. When solving the problem, an approach on base of the Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory is applied, this is an effective method for studying dynamical systems with the use of geometric invariants.

**Keywords:** dynamical system, Jacobi stability, geometric invariant, nonlinear double pendulum.

### References

1. Hafstein S.F., Valfells A. Efficient computation of Lyapunov functions for nonlinear systems by integrating numerical solutions. *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 97, no. 3, pp. 1895–1910.
2. Abolghasem H. Liapunov stability versus Jacobi stability. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 13–32.
3. Harko T., Pantaragphong P., Sabau S.V. Kosambi–Cartan–Chern (KCC) theory for higher order dynamical systems. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 2, Art. ID 1656014 (24 pages).
4. Yajima T., Yamasaki K. Jacobi stability for dynamical systems of two-dimensional second-order differential equations and application to overhead crane system. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2016, vol. 13, no. 4, Art. ID 1650045 (16 pages).
5. Kolesnikov K.S., Dubinin V.V., eds. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* [A Course in Theoretical Mechanics. Tutorial]. Moscow, BMSTU Publ., 2017, 580 p.

## О построении периодических движений спутника, рождающихся из его конической прецессии, в случае кратного внешнего резонанса

© Б.С. Бардин<sup>1,2</sup>, А.А. Антипов<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>МАИ (НИУ), Москва, Россия

<sup>2</sup>ИМАШ РАН, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): antipant@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрено движение динамически симметричного твердого тела (спутника) вокруг своего центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Центр масс спутника движется



по кеплеровской эллиптической орбите малого эксцентриситета. Исследована задача о существовании и построении периодических движений спутника, рождающихся из его конической прецессии на круговой орбите. Рассмотрен случай кратного внешнего резонанса, при котором частоты собственных колебаний спутника в окрестности конической прецессии близки соответственно к частоте и к удвоенной частоте внешнего возмущения, вызванного эллиптичностью орбиты. Разработан алгоритм построения периодических движений спутника, в случае кратного внешнего резонанса. Получены явные асимптотические формулы, описывающие периодические движения спутника, близкие к его конической прецессии.

**Ключевые слова:** *внешний резонанс, коническая прецессия, периодические движения.*

Рассматривается движение спутника, моделируемого динамически симметричным твердым телом, в центральном ньютоновском гравитационном поле. Линейные размеры спутника малы по сравнению с величиной радиус-вектора его центра масс, поэтому можно предположить, что движение спутника вокруг центра масс не влияет на движение самого центра масс. Далее предполагается, что центр масс спутника движется по заданной кеплеровской орбите. Если орбита центра масс круговая, то существуют стационарные движения спутника, которые являются регулярными прецессиями. Возможны три типа регулярных прецессий: коническая, цилиндрическая и гиперболоидная [1].

В случае конической прецессии ось динамической симметрии спутника перпендикулярна вектору скорости его центра масс и образует фиксированный угол с нормалью к плоскости орбиты, при этом спутник равномерно вращается вокруг своей оси динамической симметрии. На эллиптической орбите коническая прецессия невозможна, но представляет интерес задача о построении периодических движений спутника вблизи его конической прецессии. Если орбита центра масс спутника слабоэллиптическая, т. е. эксцентриситет орбиты  $e$  достаточно мал ( $e \ll 1$ ), то с помощью метода малого параметра периодические движения, близкие к конической прецессии, могут быть получены аналитически. Для нерезонансного случая существует единственное периодическое движение указанного типа, которое может быть построено в виде ряда по целым степеням  $e$  [2]. Если частота собственных колебаний в окрестности конической прецессии близка к частоте внешнего возмущения, вызванного эллиптичностью орбиты, то имеет место внешний резонанс. В этом случае, в зависимости от значений параметров задачи, существуют одно или три периодических движения, близких к конической прецессии [3]. Эти движения могут быть представлены сходящимися рядами по дроб-

ным степеням эксцентриситета. В [3, 4] на основании методики работ [5–7] указанные периодические движения были построены в форме асимптотических разложений по степеням  $e^{1/3}$ , а также в аналитической форме было получено уравнение поверхности разветвления, разделяющей трехмерное пространство параметров задачи на две подобласти, в одной из которых существует только одно семейство периодических движений, а в другой — три.

В данной работе рассматривается неисследованный ранее случай кратного резонанса, когда одна из частот собственных колебаний спутника в окрестности конической прецессии близка к частоте внешнего возмущения, вызванного эллиптичностью орбиты, а другая собственная частота близка к удвоенной частоте внешнего возмущения.

Исследован вопрос о существовании периодических движений спутника, близких к его конической прецессии. Установлено, что в случае кратного резонанса существует два периодических движения, представимых в виде рядов по дробным степеням  $e$ , которые начинаются с членов порядка  $e^{1/3}$ . Показано также, что при определенных значениях параметров задачи существует периодическое движение спутника, которое может быть представлено в виде сходящегося ряда по дробным степеням  $e$ , начинающегося с членов порядка  $e^{2/3}$ . Предложен конструктивный алгоритм построения периодических движений в случае кратного внешнего резонанса и выполнена программная реализация этого алгоритма в системе аналитических вычислений MAPLE 15. С помощью данного алгоритма получены явные асимптотические формулы, описывающие указанные периодические движения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00637.*

## **Литература**

1. Белецкий В.В. *Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле*. Москва, МГУ, 1975, 308 с.
2. Сарычев В.А. Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника. *Космич. исслед.*, 1965, т. 3, № 5, с. 667–673.
3. Чеховская Т.Н. Резонансные периодические движения осесимметричного спутника на эллиптической орбите. *Космич. исслед.*, 1986, т. 24, № 1, с. 15–23.
4. Bardin B.S., Antipov A.A. On resonant periodic motions close to conical precession of a dynamically symmetric satellite in a weakly elliptic orbit. *2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2020, vol. 927, Art. ID 012016.
5. Маркеев А.П., Чеховская Т.Н. О резонансных периодических решениях Гамильтоновых систем, рождающихся из положения равновесия, *ППМ*, 1982, вып. 46, с. 27–33.
6. Бардин Б.С. О ветвлении периодических решений системы, близкой к системе Ляпунова. *ПММ*, 1975, т. 63, № 4, с. 538–547.
7. Бардин Б.С. *Периодические решения систем, близких к системам Ляпунова*. Москва, Изд-во МАИ, 2005, 60 с.

## On the construction of periodic motions of a satellite emanating from its conical precession in the case of multiple external resonance

© B.S. Bardin<sup>1,2</sup>, A.A. Antipov<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>MAI (NRU), Moscow, Russia

<sup>2</sup>IMASH RAS, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): antipant@mail.ru

**Abstract.** The motion of a dynamically symmetric rigid body (satellite) around its center of mass in a Central Newtonian gravitational field is considered. The center of mass of the satellite moves along the Kepler elliptical orbit of small eccentricity. The problem of the existence and construction of periodic motions of a satellite emanating from its conical precession in a circular orbit is investigated. The case of multiple external resonance is considered, in which the natural vibration frequencies of a satellite approximately a conical precession are close to the frequency and double the frequency of the external perturbation caused by the ellipticity of the orbit, respectively. An algorithm for constructing periodic satellite motions in the case of multiple external resonances is developed. Explicit asymptotic formulas describing periodic motions of the satellite close to its conical precession are obtained.

**Keywords:** conical precession, external resonance, periodic motions.

*This work was supported by the Russian Foundation for basic research, project no. 20-01-00637.*

### References

1. Beletsky V.V. *Motion of a satellite relative to the center of mass in a gravitational field*. Moscow, MSU, 1975, 308 p.
2. Sarychev V.A. Asymptotically stable stationary rotations of the satellite *Kosm. Issled.*, 1965, vol. 3, pp. 667–673.
3. Chekhovskaia T.N. Resonant periodic motions of an axisymmetric satellite in an elliptical orbit *Kosm. Issled.*, 1986, vol. 24, pp. 15–23.
4. Bardin B.S., Antipov A.A. On resonant periodic motions close to conical precession of a dynamically symmetric satellite in a weakly elliptic orbit. *2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2020, vol. 927, Art. ID 012016.
5. Markeev A.P., Chekhovskaya T.N. On resonant periodic solutions of Hamiltonian systems emanating from equilibrium position *J. Appl. Math. Mech.* 1982, vol. 46, pp. 27–33.
6. Bardin B.S. Bifurcation of periodic solutions of a system close to a Lyapunov system *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 63, pp. 517–525.
7. Bardin B.S. *Periodic solutions of systems close to Lyapunov systems*. Moscow, Moscow Aviation Institute Press, 2005, p. 60.

## О бифуркации и устойчивости в линейном приближении центральных конфигураций в ограниченной круговой задаче четырех тел

© Б.С. Бардин<sup>1,2</sup>, Е.В. Волков<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>МАИ, Москва, Россия

<sup>2</sup>ИМАШ РАН, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): evvolkov94@mail.ru

**Аннотация.** Рассмотрена плоская ограниченная круговая задача четырех тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Одно из четырех тел обладает бесконечно малой массой и не влияет на движение трех других тел, которые движутся по круговым орбитам, образуя постоянную лагранжеву конфигурацию. В данной задаче возможны центральные конфигурации, когда все четыре тела, двигаясь по круговым орбитам, образуют четырехугольник неизменной формы и размеров. Выполнено исследование задачи о бифуркации и устойчивости в линейном приближении данных центральных конфигураций. Результаты исследований представлены в виде диаграмм устойчивости, построенных в плоскости параметров задач.

**Ключевые слова:** задача четырех тел, центральная конфигурация, устойчивость по Ляпунову, бифуркация.

Рассматривается плоская ограниченная круговая задача четырех тел. Предполагается, что тело пренебрежимо малой массы движется в гравитационном поле трех притягивающих центров, взаимодействующих по закону всемирного тяготения и движущихся по круговым орбитам, образуя постоянную лагранжеву конфигурацию (равносторонний треугольник). Предполагается, что лагранжева конфигурация устойчива, т. е. массы притягивающих центров удовлетворяют условию Рауса [1]. Уравнения движения допускают частные решения, описывающие положения относительного равновесия тела малой массы во вращающейся вместе с притягивающими центрами системе координат. В положении относительного равновесия тело малой массы образует с притягивающими центрами конфигурацию неизменной формы и размеров, так называемую центральную конфигурацию. При выполнении условий Рауса существует восемь различных центральных конфигураций [2], которые будут устойчивыми, если устойчиво соответствующее положение относительного равновесия. Ранее в [2–5] рассматривались вопросы существования и устойчивости центральных конфигураций.

В данной работе для всех значений параметров, удовлетворяющих условию Рауса, исследуется вопрос о бифуркации и устойчивости центральных конфигураций. Было установлено, что бифуркация

возможна только в предельном случае, когда масса одного из притягивающих центров обращается в ноль. В этом случае приходим к ограниченной задаче трех тел, а рассматриваемые центральные конфигурации вырождаются в треугольные (лагранжевы) или коллинеарные (эйлеровы) точки либрации. При этом бифуркация происходит по следующему сценарию: четыре из восьми центральных конфигураций переходят в одну из треугольных точек либрации.

В линейном приближении была исследована задача об устойчивости рассматриваемых центральных конфигураций. В силу выполнения условий Рауса эта задача сводится к исследованию устойчивости соответствующих положений относительного равновесия тела малой массы во вращающейся вместе с притягивающими центрами системе координат. В окрестности положений относительного равновесия были получены уравнения в вариациях и проведен аналитический и численный анализ коэффициентов соответствующего характеристического уравнения при всех возможных значениях параметров задачи. В результате проведенного анализа было установлено, что существует восемь положений равновесия, из которых пять всегда неустойчивы, а три в зависимости от значений параметров могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Для этих конфигураций в двумерном пространстве параметров задачи были построены диаграммы устойчивости, на которых указаны области неустойчивости и области устойчивости в линейном приближении.

Полученные выводы об устойчивости хорошо согласуются с известными результатами для предельного случая равных масс двух притягивающих центров [4, 6, 7].

*Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116).*

## Литература

1. Routh E.J. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1875, vol. 6, pp. 86–97.
2. Budzko D.A. Linear stability analysis of equilibrium solutions of restricted planar four-body problem. *Computer Algebra Systems in Teaching and Research*, 2009, vol. 1.
3. Leandro E.S.G. On the central configurations of the planar restricted four-body problem. *Journal of Differential Equations*, 2006, vol. 226, pp. 323–351.
4. Brumberg V.A. Permanent configurations in the problem of four bodies and their stability. *Soviet Astronomy*, 1957, no. 1, pp. 57–79.
5. Grebenikov E.A., Gadowski L., Prokopenya A.N. Studying the stability of equilibrium solutions in a planar circular restricted four-body problem. *Nonlinear Oscillations*, 2007, vol. 10, no. 1, pp. 66–82.
6. Bardin B.S., Volkov E.V. Stability Study of a Relative Equilibrium in the Planar Circular Restricted Four-Body Problem. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 927.
7. Bardin B.S., Esipov P.A. Investigation of Lyapunov stability of a central configuration in the restricted four-body problem. *AIP Conference Proceedings*, 2018.

## On bifurcation and stability in the linear approximation of central configurations in the restricted circular four-body problem

© B.S. Bardin<sup>1,2</sup>, E.V. Volkov<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>MAI, Moscow, Russia

<sup>2</sup>IMASH RAN, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): evvolkov94@mail.ru

**Abstract.** The paper considers a restricted planar circular four-body problem when they are interacting according to the law of universal gravitation. One of the four bodies has an infinitesimal mass and does not affect the motion of the other three bodies, which move in circular orbits, forming a Lagrangian configuration. In this problem, central configurations are possible, when all four bodies, moving in circular orbits form a quadrilateral of the same shape and size. The problem of bifurcation and stability in the linear approximation of these Central configurations is investigated. The research results are presented in the form of stability diagrams constructed in the plane of the problem parameters.

**Keywords:** four-body problem, central configuration, Lyapunov stability, bifurcation.

*This work was supported by the grant of the Russian Scientific Foundation (project no. 19-11-00116) at the Moscow Aviation Institute (National Research University).*

### References

1. Routh E.J. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1875, vol. 6, pp. 86–97.
2. Budzko D.A. Linear stability analysis of equilibrium solutions of restricted planar four-body problem. *Computer Algebra Systems in Teaching and Research*, 2009, vol. 1.
3. Leandro E.S.G. On the central configurations of the planar restricted four-body problem. *Journal of Differential Equations*, 2006, vol. 226, pp. 323–351.
4. Brumberg V.A. Permanent configurations in the problem of four bodies and their stability. *Soviet Astronomy*, 1957, no. 1, pp. 57–79.
5. Grebenikov E.A., Gadowski L., Prokopenya A.N. Studying the stability of equilibrium solutions in a planar circular restricted four-body problem. *Nonlinear Oscillations*, 2007, vol. 10, no. 1, pp. 66–82.
6. Bardin B.S., Volkov E.V. Stability Study of a Relative Equilibrium in the Planar Circular Restricted Four-Body Problem. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 927.
7. Bardin B.S., Esipov P.A. Investigation of Lyapunov stability of a central configuration in the restricted four-body problem. *AIP Conference Proceedings*, 2018.

## О движении тела с внутренней подвижной массой по горизонтальной поверхности при наличии анизотропного сухого трения

© Б.С. Бардин<sup>1,2</sup>, А.А. Рачков<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>МАИ (НИУ), Москва, Россия

<sup>2</sup>ИМАШ РАН, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): alexey-rachkov@yandex.ru

**Аннотация.** Проведено исследование динамики механической системы, состоящей из твердого тела и материальной точки, которая движется внутри тела по окружности, расположенной в вертикальной плоскости. Тело перемещается по горизонтальной шероховатой поверхности, со стороны которой на него действует сила сухого анизотропного трения. Определены возможные периодические режимы движения тела, а также найдены соответствующие им области параметров задачи. Дано полное качественное описание каждого периодического режима. В частности, показано, что периодические режимы являются предельными движениями. В зависимости от значений параметров тело выходит на предельный режим за конечный промежуток времени, либо асимптотически приближается к нему. Установлено, что во всех периодических режимах движения тело за один период оборота внутренней массы по окружности перемещается в положительном направлении.

**Ключевые слова:** сухое трение, анизотропное трение, периодическое движение, мобильные роботы.

Рассматривается движение механической системы, состоящей из твердого тела (корпуса) и материальной точки, движущейся внутри тела по окружности, центр которой совпадает с центром масс тела. Предполагается, что корпус перемещается по горизонтальной шероховатой поверхности, а относительное движение точки происходит в вертикальной плоскости с постоянной по модулю скоростью. Между корпусом и поверхностью действует сила сухого анизотропного трения, т. е. предполагается, что коэффициент трения зависит от направления движения корпуса. Данная механическая система является простейшей моделью мобильного робототехнического устройства — капсульного робота, который не имеет внешних движителей (колес, гусениц, ног) и перемещается посредством относительного движения внутренних элементов.

Исследованию динамики тел, содержащих внутренние элементы, посвящено множество работ. Библиографию по этому вопросу можно найти в [1–3]. Для рассматриваемой механической системы полное

качественное исследование динамики было выполнено для случая, когда трение между корпусом и поверхностью является изотропным и описывается классическим законом Кулона [3–5]. В работе [6] аналогичное исследование было выполнено в предположении, что на корпус действуют как силы сухого кулоновского, так и силы вязкого трения. Рассматривались также периодические движения по наклонной шероховатой плоскости в случае изотропного сухого трения [7].

В настоящей работе выполнено исследование движения корпуса с периодически изменяющейся скоростью. Установлено, что в зависимости от значений параметров задачи возможны следующие периодические режимы движения.

1. Корпус перемещается только в положительном направлении, совершая остановки через равные промежутки времени. После остановки корпус в течение конечного интервала времени находится в состоянии покоя (залипает), а затем продолжает движение. Интервалы движения и покоя корпуса периодически повторяются, т. е. корпус совершает остановки через равные промежутки времени. Моментам остановок корпуса соответствует одно и то же положение внутренней массы на окружности.

2. Корпус перемещается как в положительном, так и в отрицательном направлениях, совершая две остановки за время полного оборота внутренней массы по окружности. После каждой остановки корпус остается в покое в течение конечного интервала времени, после которого начинает движение в противоположном направлении. Интервалы движения и покоя корпуса повторяются периодически, а моментам остановок корпуса соответствуют одни и те же положения внутренней массы на окружности.

3. Корпус перемещается как в положительном, так и в отрицательном направлениях, совершая две остановки за время полного оборота внутренней массы по окружности. В момент остановки корпуса после движения в положительном направлении он не залипает, а сразу начинает движение в отрицательном направлении. В случае остановки корпуса после движения в отрицательном направлении он залипнет, т. е. будет находиться в покое в течение конечного интервала времени, после которого начинает движение в противоположном направлении. Интервалы движения и покоя корпуса повторяются периодически, а моментам остановок корпуса соответствуют одни и те же положения внутренней массы на окружности.

4. Корпус перемещается как в положительном, так и в отрицательном направлениях без залипания, совершая две остановки за время полного оборота внутренней массы по окружности. После каждой остановки корпус сразу начинает движение в противоположном направлении. Интервалы движения повторяются периодически,



а моментам остановок корпуса соответствуют одни и те же положения внутренней массы на окружности.

Установлено, что во всех перечисленных выше периодических режимах движения корпус за один период оборота внутренней массы по окружности перемещается в положительном направлении. Если корпус может начать движение из состояния покоя, то любое движение корпуса при произвольной начальной скорости и фиксированных значениях параметров задачи перейдет в один из этих режимов за конечный интервал времени или будет асимптотически к нему стремиться. Если корпус не может начать движение из состояния покоя, то вне зависимости от величины начальной скорости он совершит остановку через конечный интервал времени и далее будет находиться в состоянии покоя.

В трехмерном пространстве параметров задачи были найдены области, в которых реализуется один из периодических режимов движения и численно построены их границы. Также было установлено, что для фиксированного набора значений параметров задачи может существовать только один периодический режим движения.

*Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116).*

## Литература

1. Черноушко Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс. *ДАН*, 2016, т. 470, № 4, с. 406–410.
2. Болотник Н.Н., Черноушко Ф.Л. Новые задачи динамики и управления для локомоторных систем без внешних движителей. В сб.: *Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды XI Международной Четаевской конференции*, 2017, с. 28–39.
3. Bardin B.S., Panev A.S. On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle. *Vibroengineering PROCEDIA*, 2016, vol. 8, pp. 135–141.
4. Бардин Б.С., Панев А.С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности. *Труды МАИ*, 2015, выпуск № 84.
5. Bardin B.S., Panev A.S. On the motion of a body with a moving internal mass on a rough horizontal plane. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 519–542.
6. Бардин Б.С., Панев А.С. О поступательном прямолинейном движении твердого тела, несущего подвижную внутреннюю массу. *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2019, т. 65, № 4, с. 557–592.
7. Бардин Б.С., Рачков А.А. О движении тела с подвижной внутренней массой по наклонной шероховатой плоскости. *Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 3–8 июля 2020 г.)*. Изд-во ВлГУ, 2020, с. 25–26.

## On the motion of a body with an internal moving mass on a horizontal plane in the presence of anisotropic dry friction

© B.S. Bardin<sup>1,2</sup>, A.A. Rachkov<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

<sup>2</sup>Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): alexey-rachkov@yandex.ru

**Abstract.** The dynamics of a mechanical system consisting of a solid body and a material point that moves inside the body along a circle located in a vertical plane is studied. The body moves along a horizontal rough plane, from which the force of dry anisotropic friction acts on it. Possible periodic modes of motion of the body are determined, and the corresponding regions of the problem parameters are found. A complete qualitative description of each periodic mode is given. In particular, it is shown that periodic modes are limiting motions. Depending on the values of the parameters, the body reaches the limit mode in a finite period of time, or asymptotically approaches it. It is established that in all periodic modes of motion, the body moves in a positive direction during one period of rotation of the internal mass around the circle.

**Keywords:** *dry friction, anisotropic friction, periodic motion, mobile robots.*

We consider the motion of a mechanical system consisting of a solid body and a material point moving inside the body along a circle, the center of which coincides with the center of mass of the body. It is assumed that the body moves along a horizontal rough plane, and the relative movement of the point occurs in the vertical plane with a constant velocity module. A dry anisotropic friction force acts between the body and the surface, i.e. it is assumed that the coefficient of friction depends on the direction of movement of the body. This mechanical system is the simplest model of a mobile robotic device — a capsule robot that does not have external movers (wheels, tracks, legs) and moves through the relative movement of internal elements.

Many works are devoted to the study of the dynamics of bodies containing internal elements. A bibliography on this subject can be found in [1–3]. For the considered mechanical system, a complete qualitative study of the dynamics was performed in the case when the friction between the body and the surface is isotropic and is described by the classical Coulomb law [3–5]. In [6], a similar study was performed under the assumption that both dry Coulomb and viscous friction forces act on the body. Periodic motions along an inclined rough plane in the case of isotropic dry friction were also considered in [7].

In this article, we study the movement of the body with a periodically changing speed. It is established that depending on the values of the problem parameters, the following periodic motion modes are possible.

1. The body moves only in a positive direction, making stops at equal intervals of time. After stopping, the body is at rest (stuck) for a finite time interval, and then continues to move. The intervals of movement and rest of the body are periodically repeated, i.e. the body makes stops at regular intervals. The same position of the internal mass on the circle corresponds to the moments when the body stops.

2. The body moves in both positive and negative directions, making two stops during a complete revolution of the internal mass around the circle. After each stop, the body remains at rest for a finite time interval, after which it starts moving in the opposite direction. The intervals of movement and rest of the body are repeated periodically, and the moments of stopping the body correspond to the same positions of the internal mass on the circle.

3. The body moves in both positive and negative directions, making two stops during a complete revolution of the internal mass around the circle. When the body stops moving in the positive direction, it does not stick, but immediately starts moving in the negative direction. If the body stops after moving in the negative direction, it will stick, i.e. it will be at rest for a finite time interval, after which it starts moving in the opposite direction. The intervals of movement and rest of the body are periodically repeated, and the moments of stops of the body correspond to the same positions of the internal mass on the circle.

4. The body moves in both positive and negative directions without sticking, making two stops during a full revolution of the internal mass around the circle. After each stop, the body immediately starts moving in the opposite direction. The intervals of movement are repeated periodically, and the moments of stopping the body correspond to the same positions of the internal mass on the circle.

It is established that in all the above-mentioned periodic modes of motion, the body moves in a positive direction during one period of rotation of the internal mass along the circumference. If the body can start moving from a state of rest, then any motion of the body at an arbitrary initial speed and fixed values of the problem parameters will switch to one of these modes in a finite time interval or will asymptotically tend to it. If the body cannot start moving from a rest state, then regardless of the initial speed, it will stop after a finite time interval and then remain at rest.

In the three-dimensional space of the problem parameters, we found areas where one of the periodic motion modes is realized and numerically constructed their boundaries. It was also found that for a fixed set of problem parameter values, there can only be one periodic motion mode.

*The work is carried out at the Moscow Aviation Institute (National Research University) at the cost of the grant of the Russian Scientific Foundation (project no. 19-11-00116).*

## References

1. Chernousko F.L. Motion of a body along a plane under the influence of movable internal masses. *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, no. 10, pp. 494–498.
2. Bolotnik N.N., Chernousko F.L. New problems of dynamics and control for limbless locomotion systems. In: *Analytical mechanics, stability and control. Proceedings of the XI International Chetaev conference*, 2017, pp. 28–39.
3. Bardin B.S., Panev A.S. On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle. *Vibroengineering PROCEDIA*, 2016, vol. 8, pp. 135–141.
4. Bardin B.S., Panev A.S. On periodic motions of the body with movable internal mass over a horizontal surface. *Trudy MAI*, 2015, no. 84.
5. Bardin B.S., Panev A.S. On the motion of a body with a moving internal mass on a rough horizontal plane. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 519–542.
6. Bardin B.S., Panev A.S. Translation rectilinear motion of a solid body carrying a movable inner mass. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2019, vol. 65, no. 4, pp. 557–592.
7. Bardin B.S., Rachkov A.A. On the motion of the body with moving internal mass on a rough angled plane. *2020 Abstracts of the International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems*, 2020, pp. 25–26.

## Задача оптимальной встречи в горизонтальной плоскости при наличии фазовых ограничений

© Э.И. Макиева\*, О.Ю. Черкасов

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): elinamakieva@live.com

**Аннотация.** Задача оптимальной встречи двух материальных точек, движущихся в горизонтальной плоскости, рассмотрена в нелинейной постановке. Скорости точек постоянны по модулю. Время процесса фиксировано. Начальные условия заданы, конечные принимаются свободными. Целью управления является минимизация конечного расстояния между Игроком 1 (И1), для которого ищется оптимальная стратегия, и Игроком 2 (И2), использующим метод пропорционального наведения. Предполагается, что имеются фазовые ограничения на угол между линией визирования (ЛВ) и вектором скорости И1.

**Ключевые слова:** принцип максимума Понтрягина, метод пропорционального наведения, фазовый портрет, задача оптимального управления.

**Постановка задачи.** Работа продолжает исследования, начатые в работе [1]. Уравнения движения игроков имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = a(\sin \alpha - b \sin \beta) / r, \\ \dot{\eta} = (\sin \alpha - b \sin \beta) / r, \\ \dot{x}_1 = \cos(\eta + \alpha), \\ \dot{y}_1 = \sin(\eta + \alpha), \\ \dot{x}_2 = \cos(\eta + \beta), \\ \dot{y}_2 = \sin(\eta + \beta), \\ \dot{\alpha} = (-\sin \alpha + b \sin \beta) / r + u. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $r$  — безразмерное расстояние между игроками;  $\alpha$  — угол между вектором скорости первого игрока и линией визирования;  $\beta$  — угол между вектором скорости второго игрока и линией визирования;  $a$  — постоянная, связанная с константой  $k$  закона пропорционального наведения выражением  $a = k - 1$ ,  $a > 0$ ;  $b$  — отношение скоростей второго и первого игроков,  $b > 1$ ;  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  — координаты первого и второго игроков соответственно;  $\eta$  — угол между линией визирования и фиксированной осью;  $u$  — управление. Фазовые ограничения на переменную  $\alpha$  симметричны и имеют вид:  $\alpha_- \leq \alpha(t) \leq \alpha_+$ .

Краевые условия для системы (1) имеют вид

$$\begin{aligned} r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \eta(0) = \eta_0, \quad x_1(0) = x_{10}, \\ y_1(0) = y_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad y_2(0) = y_{20}, \quad \alpha(0) \end{aligned} \quad (2)$$

свободно.

Игрок 1 реализует метод пропорционального наведения, а стратегия Игрока 2 подлежит определению для минимизации расстояния за фиксированное время с И1:

$$J = r(T) \rightarrow \min_{u \in U}. \quad (3)$$

**Анализ задачи.** Управление  $u$  входит в правую часть только одного уравнения рассматриваемой системы, что позволяет опустить это уравнение и перейти к редуцированной системе, в которой фазовые ограничения исходной задачи переходят в ограничения на управление для редуцированной системы, в которой в качестве управления принят угол между вектором скорости Игрока 1 и линией визирования  $\alpha$ .

Рассматривая первые семь уравнений системы с управлением  $\alpha$ , приходим к регулярной задаче оптимального управления с ограничениями на управление.

Первые два уравнения системы (1) отделяются от остальных. Если экстремальный закон  $r(t), \alpha(t), \beta(t)$  найден, то остальные переменные задачи можно найти с помощью квадратур. Задача оптимального управления принимает следующий вид:

на траекториях системы

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = a(\sin \alpha - b \sin \beta) / r; \end{cases} \quad (4)$$

с начальными условиями

$$r(0) = r_0, \beta(0) = \beta_0, \quad (5)$$

минимизировать функционал (3). Конечные условия системы (4) свободны.

Функция Понтрягина  $H$  для задачи (3)–(5) имеет вид

$$H = \psi_r (\cos \alpha - b \cos \beta) + \psi_\beta a(\sin \alpha - b \sin \beta) / r = C,$$

где  $C$  — константа.

Уравнения для сопряженных переменных запишутся в виде:

$$\dot{\psi}_r = a(\sin \alpha - b \sin \beta) \psi_\beta / (r)^2, \quad (6)$$

$$\dot{\psi}_\beta = b(-\psi_r \sin \beta + \psi_\beta a \cos \beta / r). \quad (7)$$

Из условий трансверсальности получим следующие соотношения:

$$\psi_r(T) = -1, \psi_\beta(T) = 0. \quad (8)$$

Условия максимума функции  $H$  по управлению  $\alpha$  имеют вид:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow (\psi_\beta a \cos \alpha) / r - \psi_r \sin \alpha = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} \leq 0 \Leftrightarrow -(\psi_\beta a \sin \alpha) / r - \psi_r \cos \alpha \leq 0. \quad (10)$$

Из соотношений (9) получаем

$$\psi_\beta = (r \psi_r \operatorname{tg} \alpha) / a. \quad (11)$$

Из (9) и условий трансверсальности (8) следует  $\operatorname{tg} \alpha(T) = 0$ ,  $\psi_r \cos \alpha > 0$ , откуда  $\alpha(T) = \pi$ . Дифференцируя соотношение (11) по времени как сложную функцию по аргументу  $t$  в силу (4), (6), (7), получаем выражение для  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} (\psi_\beta)^* &= (r \psi_r \operatorname{tg} \alpha / a)^* \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \dot{\psi}_\beta &= \psi_r r (\operatorname{tg} \alpha)^* + \psi_r \dot{r} \operatorname{tg} \alpha + (\psi_r)^* r \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow a\dot{\psi}\beta = \dot{\alpha}r\psi_r / (\cos\alpha)^2 + \psi_r \operatorname{tg}\alpha \cdot \dot{r} + r\operatorname{tg}\alpha \cdot \dot{\psi}_r \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow a(ab\cos\beta\psi_r / r - b\sin\beta\psi_r) = r\psi_r\dot{\alpha} / (\cos\alpha)^2 + \\
&\quad + \operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha - b\cos\beta)\psi_r + \psi_r a \operatorname{tg}\alpha(\sin\alpha - b\sin\beta) / r \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \dot{\alpha}r\psi_r / (\cos\alpha)^2 = r\psi_r a^2 b \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\beta / r - ab\sin\beta\psi_r - \operatorname{tg}\alpha(\cos\alpha - \\
&\quad - b\cos\beta)\psi_r - r^2 a(\operatorname{tg}\alpha)^2(\sin\alpha - b\sin\beta) / (r^2 a) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \dot{\alpha} = \left[ b(a+1)\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - b\sin\beta(a(\cos\alpha)^2 - \right. \\
&\quad \left. - (\sin\alpha)^2) - \sin\alpha \right] / r \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \dot{\alpha} = b(a+1)\cos\alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) / r - (\sin\alpha - b\sin\beta) / r. \quad (12)
\end{aligned}$$

С помощью принципа максимума Понтрягина оптимальная задача для редуцированной системы сводится к краевой:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos\alpha - b\cos\beta, \\ \dot{\beta} = a(\sin\alpha - b\sin\beta) / r, \\ \dot{\alpha} = b(a+1)\cos\alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) / r - (\sin\alpha - b\sin\beta) / r; \end{cases}$$

$$r(0) = r_0, \beta(0) = \beta_0, \alpha(T) = \pi$$

с фазовыми ограничениями  $\alpha \leq \alpha(t) \leq \bar{\alpha}$ , которые теперь рассматриваются не как фазовые ограничения, а как ограничения на управление.

Поскольку конечным условием на положение вектора скорости первого игрока является  $\alpha(T) = \pi$ , были выбраны ограничения  $3\pi/4 \leq \alpha(t) \leq 5\pi/4$ .

Таким образом, при  $\alpha(t) \in (3\pi/4, 5\pi/4)$  решается система:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos\alpha - b\cos\beta, \\ \dot{\beta} = a(\sin\alpha - b\sin\beta) / r, \\ \dot{\alpha} = b(a+1)\cos\alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) / r - (\sin\alpha - b\sin\beta) / r. \end{cases} \quad (13)$$

В случае когда  $\alpha(t) \notin (3\pi/4, 5\pi/4)$ , интегрируется система

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos\bar{\alpha} - b\cos\beta, \\ \dot{\beta} = a(\sin\bar{\alpha} - b\sin\beta) / r, \\ \bar{\alpha} = 3\pi/4, \text{ если } \alpha(t) \leq 3\pi/4, \\ \bar{\alpha} = 5\pi/4, \text{ если } \alpha(t) \geq 5\pi/4. \end{cases} \quad (14)$$

На следующем шаге интегрируется система (13). Начальными значениями для нее принимаются значения переменных, которые были получены при интегрировании системы (14). Если в результате интегрирования  $\alpha(t)$  снова не лежит в интервале  $(3\pi/4, 5\pi/4)$ , то вновь переходят к системе (14).

При  $b > 1$  функция  $\alpha(t)$  является монотонной функцией времени. Следовательно, оптимальная траектория содержит не более одной дуги движения по ограничению.

После определения регулярного управления в оптимальной задаче для редуцированной системы было найдено управление в исходной задаче с фазовыми ограничениями для исходной системы.

Согласно уравнениям для  $\dot{\alpha}$  (12) и из системы (1):

$$u = [b(a+1)\cos\alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) / r - (\sin\alpha - b\sin\beta) / r] - [(-\sin\alpha + b\sin\beta) / r] = \\ = b(a+1)\cos\alpha \sin(\alpha - \beta), \text{ при } \alpha(t) \in (3\pi/4, 5\pi/4).$$

Если  $\alpha(t) \notin (3\pi/4, 5\pi/4)$ , то

$$u = \dot{\alpha} - (-\sin\alpha + b\sin\beta) / r = 0 - (-\sin\bar{\alpha} + b\sin\beta) = \sin\bar{\alpha} - b\sin\beta.$$

Таким образом, в работе исследована нелинейная задача встречи движущихся объектов с фиксированной стратегией наведения у одного игрока и оптимальной — у другого при наличии фазовых ограничений на угол между линией визирования и вектором скорости направляемого игрока. В результате редукции фазовые ограничения исходной задачи перешли в ограничения на управление для редуцированной системы. С помощью принципа максимума Понтрягина оптимальная задача для редуцированной системы была сведена к краевой задаче с ограничениями на управление. После определения регулярного управления в оптимальной задаче для редуцированной системы было найдено управление в исходной задаче.

## Литература

1. Макиева Э.И., Черкасов О.Ю. Об одной нелинейной задаче оптимальной встречи. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 4. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-4-1974

## An optimal rendezvous problem in the horizontal plane with phase restrictions

© E.I. Makieva\*, O.Yu. Cherkasov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): elinamakieva@live.com

**Abstract.** A non-linear model of optimal rendezvous problem of two material points moving in the horizontal plane is analyzed. The velocities



of both players have a constant modulus. Rendezvous time is fixed. The initial conditions are given; the final ones are taken free. The problem is to minimize the final distance between players. Player 2 uses proportional navigation law. It is assumed that there are phase restrictions on the angle between the line of sight (LOS) and the velocity vector Player 1.

**Keywords:** Pontryagin maximum principle, proportional navigation law, phase portrait, optimal control problem.

**Problem formulation.** This work continues the research begun in [1]. The equations of motion of the players are:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = a(\sin \alpha - b \sin \beta) / r, \\ \dot{\eta} = (\sin \alpha - b \sin \beta) / r, \\ \dot{x}_1 = \cos(\eta + \alpha), \\ \dot{y}_1 = \sin(\eta + \alpha), \\ \dot{x}_2 = \cos(\eta + \beta), \\ \dot{y}_2 = \sin(\eta + \beta), \\ \dot{\alpha} = (-\sin \alpha + b \sin \beta) / r + u, \end{cases} \quad (1)$$

where  $r$  is a dimensionless distance between the players;  $\alpha$  — the angle between the velocity vector of the Player 1 (P1) and the LOS;  $\beta$  — the angle between the velocity vector of the Player 2 (P2) and the LOS;  $a$  is a constant linked with the proportional navigation gain  $k$  by the formula  $a = k - 1$ ,  $a > 0$ ;  $b$  is a positive constant representing the ratio of the P2 velocity magnitude to the P1 velocity magnitude,  $b > 1$ ;  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  — coordinates of the first and the second players, respectively;  $\eta$  — the angle between the LOS and the fixed axis;  $u$  is considered as a control variable. The phase restrictions on the variable  $\alpha$  are symmetric and have the form  $\alpha_- \leq \alpha(t) \leq \alpha_+$ .

The boundary conditions for the system (1) have the form

$$\begin{aligned} r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \eta(0) = \eta_0, \quad x_1(0) = x_{10}, \\ y_1(0) = y_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad y_2(0) = y_{20}, \quad \alpha(0) \end{aligned} \quad (2)$$

is not fixed.

Player 1 uses the proportional navigation law, and the strategy of P2 is to be determined to minimize the distance for a fixed time with P1:

$$J = r(T) \rightarrow \min_{u \in U} \quad (3)$$

**Problem analysis.** Control variable  $u$  is included in the right-hand side of only one equation of the system under consideration, which allows

us to omit this equation and consider a reduced system, in which the phase restrictions of the original problem transfer into control restrictions for the reduced system, in which  $\alpha$  — the angle between the velocity vector of P1 and LOS is considered as a control variable.

Considering the first seven equations of the system (1) with control variable  $\alpha$ , we get a regular optimal control problem with control restrictions.

The first two equations of system (1) are separated from the others. If the extremal law  $r(t), \alpha(t), \beta(t)$  is found, then the remaining variables of the problem can be found by integrating. The optimal control problem takes the following form: to minimize the functional (3) on the trajectories of the system

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = a(\sin \alpha - b \sin \beta) / r \end{cases} \quad (4)$$

with initial conditions

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \quad (5)$$

The Pontryagin's function  $H$  for problem (3-5) is

$$H = \psi_r (\cos \alpha - b \cos \beta) + \psi_\beta a (\sin \alpha - b \sin \beta) / r = C,$$

where  $C$  is a constant.

The equations for the conjugate variables are

$$\dot{\psi}_r = a (\sin \alpha - b \sin \beta) \psi_\beta / (r)^2, \quad (6)$$

$$\dot{\psi}_\beta = b (-\psi_r \sin \beta + \psi_\beta a \cos \beta / r). \quad (7)$$

From the transversality conditions we obtain the following relations:

$$\psi_r(T) = -1, \quad \psi_\beta(T) = 0. \quad (8)$$

The maximum conditions of  $H$  function of the variable  $\alpha$  are as follows:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow (\psi_\beta a \cos \alpha) / r - \psi_r \sin \alpha = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} \leq 0 \Leftrightarrow -(\psi_\beta a \sin \alpha) / r - \psi_r \cos \alpha \leq 0. \quad (10)$$

From relations (9) one can get

$$\psi_\beta = (r \psi_r \operatorname{tg} \alpha) / a. \quad (11)$$

From (9) and transversality conditions (8) it follows that  $\operatorname{tg} \alpha(T) = 0$ ,  $\psi_r \cos \alpha > 0$ , therefore  $\alpha(T) = \pi$ . By differentiating relation (11) with respect to  $t$  according to (4), (6), (7), the equation for the control variable could be obtained:

$$\begin{aligned}
 (\psi_\beta)^{\cdot} &= (r\psi_r \operatorname{tg} \alpha / a)^{\cdot} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow a\dot{\psi}_\beta = \psi_r r (\operatorname{tg} \alpha)^{\cdot} + \psi_r \dot{r} \operatorname{tg} \alpha + (\dot{\psi}_r) r \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow a\dot{\psi}_\beta = \dot{\alpha} r \psi_r / (\cos \alpha)^2 + \psi_r \operatorname{tg} \alpha \cdot \dot{r} + r \operatorname{tg} \alpha \cdot \dot{\psi}_r \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow a(ab \cos \beta \psi_\beta / r - b \sin \beta \psi_r) = r\psi_r \dot{\alpha} / (\cos \alpha)^2 + \\
 &\quad + \operatorname{tg} \alpha (\cos \alpha - b \cos \beta) \psi_r + \psi_\beta a \operatorname{tg} \alpha (\sin \alpha - b \sin \beta) / r \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \dot{\alpha} r \psi_r / (\cos \alpha)^2 = r\psi_r a^2 b \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \beta / r - ab \sin \beta \psi_r - \operatorname{tg} \alpha (\cos \alpha - \\
 &\quad - b \cos \beta) \psi_r - r^2 a (\operatorname{tg} \alpha)^2 (\sin \alpha - b \sin \beta) / (r^2 a) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \dot{\alpha} = \left[ b(a+1) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - b \sin \beta (a(\cos \alpha)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - (\sin \alpha)^2) - \sin \alpha \right] / r \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \dot{\alpha} = b(a+1) \cos \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) / r - (\sin \alpha - b \sin \beta) / r. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Thus, the optimal control problem is reduced to the following boundary value problem for a system of three differential equations:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = a(\sin \alpha - b \sin \beta) / r, \\ \dot{\alpha} = b(a+1) \cos \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) / r - (\sin \alpha - b \sin \beta) / r \end{cases}$$

$$r(0) = r_0, \beta(0) = \beta_0, \alpha(T) = \pi$$

with phase restrictions  $\alpha_- \leq \alpha(t) \leq \bar{\alpha}$ , which are now considered not as phase restrictions, but as control restrictions.

Since the final condition on the position of the first player's velocity vector is  $\alpha(T) = \pi$ , the restrictions  $3\pi/4 \leq \alpha(t) \leq 5\pi/4$  were chosen.

Thus, when  $\alpha(t) \in (3\pi/4, 5\pi/4)$  we consider the system:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = a(\sin \alpha - b \sin \beta) / r, \\ \dot{\alpha} = b(a+1) \cos \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) / r - (\sin \alpha - b \sin \beta) / r. \end{cases} \quad (13)$$

When  $\alpha(t) \notin (3\pi/4, 5\pi/4)$  we consider the system:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \bar{\alpha} - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = a(\sin \bar{\alpha} - b \sin \beta) / r, \\ \bar{\alpha} = 3\pi/4, \text{ если } \alpha(t) \leq 3\pi/4, \\ \bar{\alpha} = 5\pi/4, \text{ если } \alpha(t) \geq 5\pi/4. \end{cases} \quad (14)$$

At the next step, system (13) is integrated, the initial values for which are the values of the variables that were obtained during the integration of system (14). If, as a result of integration,  $\alpha(t)$  again does not lie in the interval  $(3\pi/4, 5\pi/4)$ , the system (14) is used next.

For  $b > 1$ , the function  $\alpha(t)$  is a monotonic function of time. Therefore, the optimal trajectory contains at most one arc of motion along the restriction.

After determining the regular control in the optimal problem for the reduced system, the control for the original system was found.

According to the equations for  $\dot{\alpha}$  (12) and from system (1):

$$u = [b(a+1) \cos \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) / r - (\sin \alpha - b \sin \beta) / r] - [(-\sin \alpha + b \sin \beta) / r] = b(a+1) \cos \alpha \sin(\alpha - \beta), \text{ при } \alpha(t) \in (3\pi/4, 5\pi/4).$$

When  $\alpha(t) \notin (3\pi/4, 5\pi/4)$ , then

$$u = \dot{\alpha} - (-\sin \alpha + b \sin \beta) / r = 0 - (-\sin \bar{\alpha} + b \sin \beta) = \sin \bar{\alpha} - b \sin \beta.$$

Thus, the nonlinear rendezvous problem of moving points was investigated. As a result of the reduction, the phase restrictions of the original problem are transformed into control restrictions for the reduced system. Using the Pontryagin's maximum principle, the optimal problem for the reduced system was brought to a boundary value problem with control restrictions. After determining the regular control in the optimal problem for the reduced system, the control was found in the original problem.

## References

1. Makieva E.I., Cherkasov O.Yu. On a nonlinear problem of optimal rendezvous. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2020, iss. 4. DOI: 10.18698/2308-6033-2020-4-1974

## О динамике колесной тележки, приводимой в движение ротором Савониуса

© А.Ф. Зубков, А.П. Голуб, А.А. Мастерова, Ю.Д. Селюцкий

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
E-mail: masterovaanya@yandex.ru, seliutski@imec.msu.ru

**Аннотация.** Рассмотрена колесная тележка, которая приводится в движение установленным на ней ротором Савониуса, соединенным с ведущими колесами. Предполагается, что тележка движется вдоль горизонтальной прямой. Аэродинамическое воздействие на ротор описывается с помощью разработанной ранее эмпирической модели, учитывающей зависимость аэродинамических сил и момента как от угла поворота ротора, так и от его угловой скорости. Приведено описание стационарных режимов движения объекта и проанализирована зависимость средней скорости движения тележки от параметров системы.

**Ключевые слова:** колесный робот, ветроэнергетика, ротор Савониуса.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-31-90073.*

## On dynamics of a wheeled cart driven by a Savonius rotor

© A.F. Zubkov, A.P. Holub, A.A. Masterova, Yu.D. Selyutskiy

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia  
E-mail: masterovaanya@yandex.ru, seliutski@imec.msu.ru

**Abstract.** A wheeled cart is considered which is driven by a Savonius rotor mounted on it and connected with driving wheels. It is supposed that the wheel moves along a horizontal line. The aerodynamic load upon the rotor is described with the previously developed empirical model taking into account dependence of aerodynamic forces and torque on both the angle of rotation and the angular speed of the rotor. Steady motions of the object are described, and the dependence of the cart average speed on parameters of the system is analyzed.

**Keywords:** wheeled robot, wind power, Savonius rotor.

*This work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 19-31-90073.*

## Динамика колесного аппарата на начальной стадии заноса

© А.В. Влахова, А.П. Новодерова\*

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): an.novoderova@yandex.ru

**Аннотация.** Проведено аналитическое исследование динамики двухосного четырехколесного аппарата на начальной стадии заноса, происходящего при блокировке или пробуксовке колес одной из осей, либо при попадании на «микст» — участок опорой плоскости, содержащий области с разными коэффициентами трения (рассматривается случай, когда коэффициент трения для одного из колес ведущей оси оказывается меньше коэффициента трения для других колес). Рассмотрены алгоритмы, препятствующие развитию заноса, для различных случаев взаимодействия колес с опорной плоскостью.

**Ключевые слова:** занос колесного аппарата, трение верчения, модель увода, микст.

Работа посвящена методическим и прикладным аспектам описания динамики двухосного четырехколесного аппарата (автомобиля, робота и т. д.) на начальной стадии заноса, происходящего при блокировке или пробуксовке колес одной из осей, либо при попадании на «микст» — участок опорой плоскости, содержащий области с разными коэффициентами трения [1–3]. Предложены подходы к математическому моделированию динамики аппарата, основанные на методах фракционного анализа (разделения движений). Эти методы, объединяющие методы теории размерностей и подобия и методы теории возмущений, позволяют понизить порядок исследуемых уравнений, провести их аналитическое исследование, оценить погрешность и пределы применимости полученных результатов, а также обсудить возможность использования тех или иных гипотез о свойствах исследуемой системы.

Исследована начальная стадия заноса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими колесами одной оси в случаях, когда колеса другой оси сохраняют или теряют сцепление с опорной плоскостью (начинают скользить). Даны количественные оценки влияния параметров конструкции и угла поворота передних колес аппарата на его занос и сформулирован алгоритм его подавления. Рассмотрено влияние трения верчения в областях контакта колес с опорной плоскостью на занос аппарата.

Построены аналитические модели переходных процессов выравнивания контактных сил или изменения угловой скорости выходного

вала двигателя и модели поперечной и угловой динамики корпуса аппарата на «миксте» для случая, когда коэффициент трения для одного из колес ведущей оси оказывается меньше коэффициента трения для других колес. Получены оценки импульса угловой скорости, приобретаемого корпусом после завершения переходных процессов, для различных условий взаимодействия колес ведущей оси с опорной плоскостью. Проведен анализ более медленной поперечной и угловой динамики корпуса аппарата, выделены случаи, когда трение вращения в областях контакта колес с опорной плоскостью оказывает существенное влияние на его занос.

В целом работа имеет теоретический характер, но полученные результаты позволяют дать ряд практических рекомендаций для построения алгоритмов работы систем управления рулем (поворотом передних колес вокруг вертикальной оси) и систем управления вращением колес.

### Литература

1. Влахова А.В., Новодерова А.П. Моделирование заноса аппарата с повернутыми передними колесами. *Изв. РАН. МТТ*, 2019, № 1, с. 23–49.
2. Влахова А.В., Новодерова А.П. Занос колесного аппарата на миксте. *Вест. Моск. ун-та. Сер. I. Математика. Механика*, 2020, № 5, с. 38–50.
3. Новожилов И.В., Павлов И.С., Фрольцов В.А. О поведении автомобиля на «миксте». *Изв. РАН. МТТ*, 2001, № 3, с. 61–67.

## Wheeled vehicle dynamics at the initial stage of skidding

© A.V. Vlakhova, A.P. Novoderova\*

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): an.novoderova@yandex.ru

**Abstract.** An analytical description of the dynamics of two-axle four-wheel vehicle at the initial stage of skid is given. It occurs when wheels of one of its axes block or slip, or in contact with “ $\mu$ -split surface” — a section of the reference plane containing areas with different friction coefficients (we consider the case when the coefficient of friction for a wheel of driving axle is less than the coefficient of friction for the other wheels). Algorithms that prevent its development are found. The results are compared for different conditions of interaction between the wheels and the reference plane.

**Keywords:** *wheeled vehicle skidding, spinning friction, slip model,  $\mu$ -split road surface.*

The work is devoted to the methodological and applied aspects of describing the dynamics of a biaxial four-wheeled vehicle (car, robot, etc.) at the initial stage of a skid that occurs when the wheels of one of its axis are

blocked or slipped, or in contact with “ $\mu$ -split surface” [1–3]. The “ $\mu$ -split surface” is a section of the reference plane containing areas with different friction coefficients. Approaches to mathematical modeling of the vehicle dynamics based on methods of fractional analysis (separation of movements) are proposed. These approaches combine the methods of the theory of dimensions and similarity and the methods of perturbation theory. This allows us to lower the order of the equations under study, to conduct their analytical study, to estimate the error and the limits of applicability of the results obtained. The discussion of the possibility of using one or another hypothesis about the properties of the system under study is carried out.

The initial stage of skidding of the vehicle with locked or slipped wheels of one axis in cases when the wheels of the other axis lose or don't lose contact with the reference plane (start to slip) is investigated. Quantitative estimates of the influence of the design parameters and the rotation angle of the front wheels of the vehicle on its skidding are given and the algorithm for its suppression is formulated. The influence of spinning friction in the areas of contact of wheels with the reference plane on the vehicle skidding is considered.

For the case when the friction coefficient for one of the wheels of the driving axis is less than the friction coefficient for the other wheels analytical models of transient processes of alignment of contact forces or changes of the angular velocity of the output shaft of the engine are given. Models of the transverse and angular dynamics of the vehicle body on “ $\mu$ -split surface” are constructed. Estimates of the angular velocity impulse acquired by the body after the completion of transient processes are obtained for various conditions of interaction of the wheels of the driving axis with the reference plane. The analysis of the slower transverse and angular dynamics of the vehicle body is carried out. The cases are identified when the spinning friction in the areas of contact of the wheels with the reference plane has a significant effect on its skidding.

In general, the work is of a theoretical nature, but the results obtained allow us to give a number of practical recommendations for constructing algorithms for the operation of steering systems (turning the front wheels around a vertical axis) and wheel rotation control systems.

## References

1. Vlakhova A.V., Novoderova A.P. The skidding modelling of an apparatus with turned front wheels. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, no. 1, pp. 19–38.
2. Vlakhova A.V., Novoderova A.P. Skid of a vehicle in the process of “mixed”. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 2020, no. 5, pp. 38–50.
3. Novozhilov I.V., Pavlov I.S., Frol'cov V.A. On the behaviour of an automobile on a  $\mu$ -split road surface. *Mechanics of Solids*, 2001, no. 3, pp. 61–67.



## Сравнение некоторых поведений планетарного механизма при внутреннем и внешнем зацеплениях сателлита

© Н.И. Бондаренко, К.Б. Обносков, А.В. Паншина

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: bondarenkon@bmstu.ru, KOB1-Naz@km.ru, panalv@mail.ru

**Аннотация.** Проведен анализ потенциальной энергии механизма планетарного типа, расположенного в вертикальной плоскости, при двух различных его конфигурациях со сходными значениями параметров: с внутренним и с внешним зацеплениями сателлита. Рассмотрен вопрос бифуркации его колебаний.

**Ключевые слова:** равновесие, устойчивое равновесие, потенциальная энергия, локальный минимум, бифуркация.

Механизмы планетарного типа могут являться частью бортовых планетарных передач тяжелых автомобилей [1]. В работе изучается изменение потенциальной энергии [2] таких механизмов, а значит, и их движений, при варьировании величин некоторых характерных параметров.

Рассматриваемый механизм планетарного типа расположен в вертикальной плоскости [3] (рис. 1, 2). Сателлит 1 радиуса  $r$  и массой  $M_1$  может кататься без проскальзывания по неподвижной цилиндрической поверхности радиуса  $R$ . Его ось скреплена с водилом 2 массой  $M_2$  и длиной  $L$ . Водило может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси  $Oz$ . На рис. 1 сателлит имеет внутреннее зацепление с цилиндрической поверхностью, а на рис. 2 — внешнее. К сателлиту жестко прикреплен невесомый стержень 5 с грузом 3 массой  $M_3$ . Груз фиксируется на стержне на расстоянии  $l_3$  от оси сателлита. На водиле на расстоянии  $OD = l_4$  находится противовес 4 массой  $M_4$ . При  $\varphi = 0$  ось сателлита  $A^*$  лежит на одной вертикали и ниже оси  $O$  водила 2 (см. рис. 2).

Обобщенная координата — угол отклонения  $\varphi$  водила 2 от вертикали. Активные силы — только силы тяжести. Потенциальная энергия системы:

$$\begin{aligned}
 \Pi(\varphi) = g \left[ (M_1 + M_2 + M_3)(R \mp r) - M_2 L / 2 - M_4 l_4 \right] (1 - \cos \varphi) + \\
 + g M_3 l_3 \left[ 1 - \cos \left( \frac{R \mp r}{r} \varphi \right) \right]. \quad (1)
 \end{aligned}$$

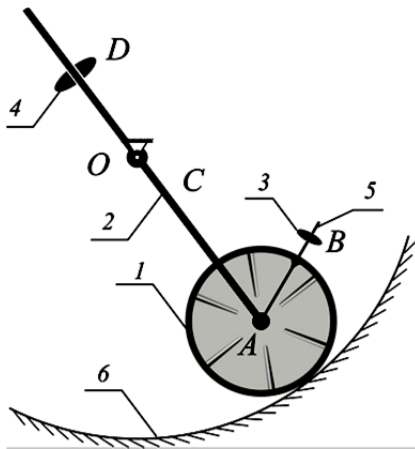


Рис. 1. Модель механизма с внутренним зацеплением

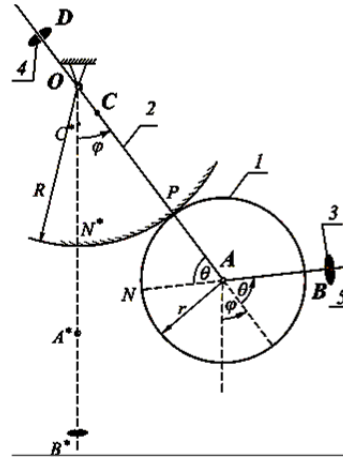


Рис. 2. Схема механизма с внешним зацеплением

Верхний знак «-» соответствует внутреннему зацеплению сателлита (см. рис. 1), а нижний знак «+» соответствует внешнему зацеплению (см. рис. 2).

Рассмотрим зависимость потенциальной энергии механизма от радиуса сателлита  $r$  при обоих зацеплениях. Возьмем параметры:

$$M_1 = 0,2; M_2 = 0,5; M_3 = M_4 = 0,4 \text{ (кг)}; R = 0,65; l_3 = 0,2; l_4 = 0,15;$$

$$L = 1,8 \text{ (м)}.$$

Графики потенциальной энергии  $\Pi(\varphi)$  с внутренним и внешним зацеплением сателлита изображены на рис. 3.

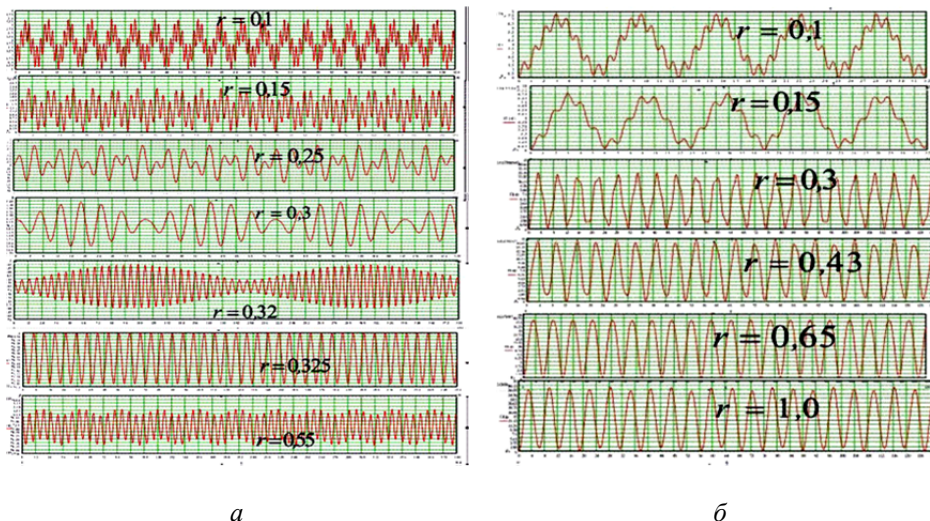


Рис. 3. Графики потенциальной энергии  $\Pi(\varphi)$  при внутреннем (а) и внешнем (б) зацеплениях

В обоих случаях при  $r \ll l_3$  (груз 3 снаружи сателлита)  $\Pi(\varphi)$  имеет несколько экстремумов при  $\varphi \in [0, \pi]$ . С увеличением  $r$  их число сокращается. При  $r = l_3$  (груз 3 на ободке) минимум  $\Pi(\varphi)$  только при  $\varphi = 0$  и  $\varphi \approx 2,8$  в обоих случаях. При  $r \approx 0,29$  м для внутреннего зацепления  $\varphi = 0$  обращается в точку максимума  $\Pi(\varphi)$ . Вблизи  $\varphi = \pi$  имеется либо максимум, либо минимум, что зависит от соотношения  $R$  и  $r$ . Кроме того, при обоих зацеплениях наблюдаем периодичность. При внутреннем зацеплении (рис. 3, а) период с увеличением  $r$  значительно возрастает. Так, для  $r = 0,1$  м период  $T \approx 12,5$  рад, для  $r = 0,32$  м  $T \approx 204$  рад. Особая ситуация при  $r = R/2$  м, когда  $\Pi(\varphi) \approx 1,18 \cos \varphi - 0,711$  ( $T = \pi$  рад).

При внешнем зацеплении (рис. 3, б) период с увеличением  $r$  вначале возрастает. Так, для  $r = 0,1$  м  $T \approx 12,5$  рад, для  $r = 0,3$  м  $T \approx 37,5$  рад. А затем уменьшается: для  $r = 0,43$  м  $T \approx 12,5$  рад. При внутреннем зацеплении (см. рис. 3, а) при некоторых значениях  $r$  (например, при  $r = 0,32$ ) в поведении  $\Pi(\varphi)$  наблюдается «биение», что объясняется сложением косинусов с близкими значениями аргументов:  $\Pi(\varphi) \approx 1,44 \cos \varphi + 0,78 \cos(1,031\varphi) - 0,66$ . В обоих случаях, когда  $\Pi(\varphi)$  сводится к произведению косинусов и синусов с близкими аргументами, на графике можно видеть «змейку».

Рассмотрим поведение  $\Pi(\varphi)$  в окрестности точки  $\varphi = 0$  с внутренним зацеплением сателлита при малых изменениях радиуса  $r$  (рис. 4).

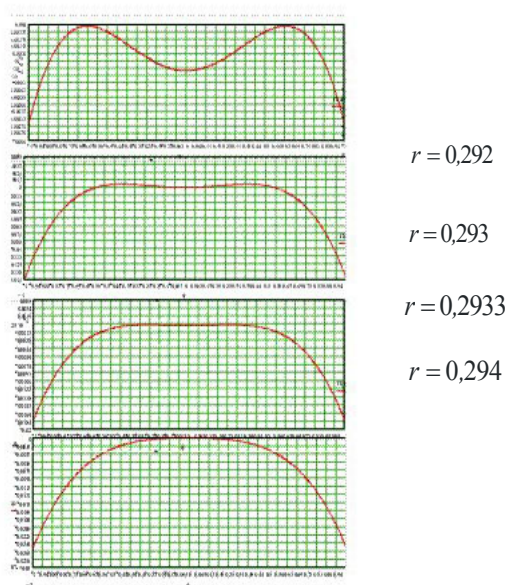


Рис. 4. Потенциальная энергия  $\Pi(\varphi)$  в окрестности  $\varphi = 0$

Точка  $\varphi = 0$  — особая точка. При  $r < 0,2933$  — это точка устойчивого положения равновесия, а при  $r > 0,2933$  — неустойчивого, т. е. наблюдается бифуркация — ситуация, когда при переходе через параметр  $r^* = 0,2933$  (м) свойства потенциальной энергии качественно изменяются. Периодические движения системы в окрестности этой точки в результате даже незначительных изменений размеров сателлита становятся невозможными, и система далее может повести себя непредсказуемо.

### Литература

1. Крайнев А.Ф. *Словарь — справочник по механизмам*. Москва, Машиностроение, 1987, 560 с.
2. Бабаков И.М. *Теория колебаний*. Москва, Дрофа, 2004, 591 с.
3. Бондаренко Н.И., Обносов К.Б., Паншина А.В. Сравнительный анализ числа положений устойчивого равновесия механизма при численном изменении его характерного параметра. *Естественные и технические науки*, 2015, № 10 (88), с. 18–22.

## Comparison of some behaviors of planetary mechanism at internal and external gearing of satellite

© N.I. Bondarenko, K.B. Obnosov, A.V. Panshina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: bondarenkon@bmstu.ru, KOB1-Naz@km.ru, panalv@mail.ru

**Abstract.** The potential energy of a planetary type mechanism located in a vertical plane is analyzed for two different configurations with similar parameter values: with internal and external gearing of the satellite. The question of bifurcation of its oscillations is considered. The features of changes in the potential energy, and hence its possible movements, are demonstrated, even with minor variations in the values of some characteristic parameters.

**Keywords:** *equilibrium, stable equilibrium, potential energy, local minimum, bifurcation.*

## Моделирование поворота головы человека решением оптимальной задачи для определения начала поворота в условиях невесомости по инерциальным данным

© А.Е. Прохорова\*, В.В. Латонов, А.П. Кручинина

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
\*E-mail (докладчика): sascha.prohorowa@yandex.ru, a.kruch@moids.ru

**Аннотация.** Рассмотрена задача определения поворота головы по данным трехосного акселерометра и трехосного датчика угловой скорости в условиях орбитального полета. Построена математическая модель поворота головы. Проведено сравнение критериев, позволяющих детектировать поворот на модельных и экспериментальных данных.

**Ключевые слова:** моделирование поворота головы, поворот в условиях невесомости, инерциальные данные, датчик угловой скорости.

В условиях орбитального полета у космонавтов наблюдается болезнь движения [1]. Причины этого состояния лежат, следуя [1], в компенсации в орбитальных условиях ускорения свободного падения за счет постоянного вращения станции вокруг Земли. В этих условиях нарушается работа вестибуло-окулярного рефлекса (ВОР), отвечающего, в частности, за стабилизацию линии зрения на объекте, позволяя человеку рассматривать предметы, читать и совершать еще множество действий.

Показано, что, используя гальваническую вестибулярную стимуляцию, теоретически возможно инициировать вестибулярный отклик. Для коррекции необходимо гарантированно определять начало поворота головы на наиболее раннем этапе [2].

Рассмотрим поворот головы в поперечной плоскости (поворот из стороны в сторону). Как на поверхности Земли, так и в условиях орбитального полета, если корпус космонавта закреплен, математическое описание будет для этих случаев совпадать. Голову будем моделировать осесимметричным твердым телом массы  $M$ , с моментом инерции  $I$ , ось вращения проходит через позвоночник, расположенный на расстоянии  $r_c$  от центра масса, вокруг этой оси голова поворачивается на угол  $\varphi$ . Значения взяты в соответствии с [3]. Запишем уравнение Лагранжа второго рода для рассматриваемого объекта:

$$I\ddot{\varphi} + M\dot{\varphi}r_c^2 = U.$$

Здесь  $U$  — суммарный момент сил, приложенных к голове со стороны мышц шеи. Целенаправленное движение головы, вслед за [Бахил], будем моделировать задачей быстродействия в следующей постановке:

$$\begin{aligned} (I + M r_c^2)\ddot{\varphi} &= U, & |U| &\leq U^*, \\ \begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \dot{\varphi}(0) = 0, \\ \varphi(T_k) = A, \\ \dot{\varphi}(T_k) = 0, \end{cases} & & J = \int_0^{T_k} dt \rightarrow \min_U. \end{aligned}$$

Ограничение  $U^*$  подбиралось для одного поворота и, как показало последующее решение задачи, оказалось применимо для других поворотов в той же плоскости. Оптимальным в этой задаче будет релейное управление с одним переключением. Решение выписывается аналитически:

$$\begin{array}{l} \text{До момента переключения} \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi^I = \frac{U^* t^2}{2} \\ \dot{\varphi}^I = U^* t \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{После переключения} \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi^{II} = A + \frac{U^* T_k^2}{2} - \frac{U^* t^2}{2} \\ \dot{\varphi}^{II} = U^* T_k - U^* t \end{array} \right. \end{array}$$

Экспериментальные данные были получены с помощью трехкомпонентных датчиков угловой скорости и линейного ускорения, с частотой съема показаний 1666 Гц. Моделирование поворотов головы на различные углы и последующее сравнение с экспериментальными данными, что на повороте от 1 до 2 радиан среднее суммы квадратов невязок составляет 0,015 радиана. Продолжительность поворота составляет 0,3–0,4 с. (Данные приведены для серии из девяти последовательных поворотов.)

Для определения начала поворота головы предлагается использовать три подхода: измерения угловой скорости, углового и линейного ускорений. Анализ угловых ускорений требует дифференцирования, а в данной статье ограничимся исследованием только «сырых» данных. Для детектирования начала поворота головы один из выбранных сигналов пропускается через фильтр, вычисляющий среднеквадратичное отклонение. Выходной сигнал сравнивается с заранее заданным пороговым значением, которое выступает критерием начала поворота.

В качестве критерия выберем 20 % от максимального значения среднеквадратичного отклонения в модели для угла поворота в 1,5 радиана.

В таблице представлены моменты времени в отсчетах, когда удалось по разным данным определять начало поворота головы.

В столбце «Модель» отмечен отсчет, с которого определяется поворот в модельной задаче. Фактически это минимальная задержка, с которой данный метод определяет поворот. В столбцах с пометкой (данные) приведены номера отсчетов, в которых удалось детектировать поворот, частота дискретизации данных — 1666 Гц.

Ширина окна в отсчетах	Модель. Минимальная задержка, с	Среднеквадратичное отклонение угловой скорости (данные)	Среднеквадратичное отклонение линейного ускорения (данные)
30	0,004	44	50
40	0,005	47	43
50	0,006	50	42

Таким образом, в результате применения простой модели для выбора порогового значения критерия начала поворота был подтвержден результат работы [2], что наиболее раннее детектирование поворота возможно по данным акселерометров. Использование более сложной модели, например, которая будет учитывать, что ограничена скорость изменения момента мышц, приложенного к голове, должна уточнить выбранные пороги. Из-за отсутствия в выбранной модели ограничений, полученные максимальные ускорения превышают наблюдаемые в эксперименте.

*Публикация подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития Научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (распоряжение Правительства РФ от 24 октября 2020 г. № 2744-р) и в рамках исследований, выполненных в (КЭ) «Вектор-МБИ-1» на российском сегменте Международной космической станции.*

#### Литература

1. Корнилова Л.Н., Козловская И.Б. Нейросенсорные механизмы космического адаптационного синдрома. *Физиология человека*, 2003, т. 29, № 5, с. 17–29.
2. Александров В.В. и др. Исследование возможностей использования гравито-инерциального механорецептора в условиях микрогравитации для детектирования движений космонавта. *Тезисы докладов IX Международного аэрокосмического конгресса IAC'18*. Москва, 2018, с. 129–131.
3. Clauser C.E., et al. Weight, volume, and centre of mass of segments of the human body. *AMRL technical report TR-69-70*. 1969.

### Задача о брахистохроне с ограничениями на угол наклона траектории

© Н.В. Смирнова\*, О.Ю. Черкасов

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): nina.smirnova247@yandex.ru

**Аннотация.** Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и вязкого трения, пропорционального скорости. В качестве управления рассматривается скорость изменения угла наклона траектории. Задача состоит в максимизации горизонтальной дальности за заданное время или в минимизации времени перехода на заданное расстояние по горизонтали (задача о брахистохроне). Предполагается, что имеются фазовые ограничения на угол наклона траектории. В научной литературе известны постановки задачи о брахистохроне без трения при наличии фазовых ограничений. В различных работах рассматрива-

лись ограничения на координаты, например, ограничения вида  $y \geq ax + b$ . При этом учет фазовых ограничений производился при помощи численных процедур. В настоящей работе строится синтез оптимального управления с фазовыми ограничениями на угол наклона траектории, аналитически устанавливается количество дуг движения по ограничению.

**Ключевые слова:** оптимальный синтез, брахистохрона, фазовые ограничения, принцип максимума Понтрягина, краевая задача.

Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и вязкого трения, пропорционального скорости. В качестве управления рассматривается скорость изменения угла наклона траектории. Задача состоит в максимизации горизонтальной дальности за заданное время или в минимизации времени перехода на заданное расстояние по горизонтали (задача о брахистохроне). Предполагается, что имеются фазовые ограничения на угол наклона траектории. В научной литературе известны постановки задачи о брахистохроне без трения при наличии фазовых ограничений. В работе [1] рассматривались ограничения на угол наклона траектории, в [2, 3] ограничения вида  $y \geq ax + b$ . При этом учет фазовых ограничений производился при помощи численных процедур. В настоящей работе строится синтез оптимального управления с фазовыми ограничениями на угол наклона траектории, аналитически устанавливается количество дуг движения по ограничению. Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид [4]

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta; \\ \dot{y} = v \sin \theta; \\ \dot{v} = -v - \sin \theta; \\ \dot{\theta} = u, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x$  — дальность;  $y$  — высота;  $v$  — модуль скорости;  $\theta$  — угол наклона траектории, на который наложено фазовое ограничение вида  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ;  $u$  — управление, ограничения на управление отсутствуют.

Начальные условия для системы (1) имеют вид

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0. \quad (2)$$

Значения  $\theta(0)$ ,  $y(T)$ ,  $v(T)$  свободны.

В данной задаче цель управления:

$$J = -x(T) \rightarrow \min, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$



Иными словами, смысл функционала (3) — максимизация конечной дальности движения  $x(T)$ . Время окончания процесса  $T$  фиксировано.

Переходя к редуцированной системе с управлением  $\theta$ , получаем регулярную оптимальную задачу с ограничениями на управление. С помощью принципа максимума задача оптимального управления сводится к краевой задаче для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{v} = -v - \sin \theta, \\ \dot{\psi}_v = \psi_v - \cos \theta; \end{cases}$$

$$\psi_v(T) = 0, \quad v(0) = v_0, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$\theta = \begin{cases} \theta_1, & -\arctg(\psi_v / v) < \theta_1; \\ -\arctg(\psi_v / v), & -\arctg(\psi_v / v) \in [\theta_1, \theta_2]; \\ \theta_2, & -\arctg(\psi_v / v) > \theta_2. \end{cases}$$

В результате применения принципа максимума аналитически устанавливается, что оптимальная траектория может содержать не более одной дуги движения по нижнему ограничению и не более двух дуг движения по верхнему ограничению. При отсутствии сопротивления показывается, что оптимальная траектория содержит не более одной дуги с движением по каждому из ограничений.

### Литература

1. Cheng D. Conrad. Optimum translation and the brachistochrone. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA). *Aerospace Sciences Meeting*, 1964. DOI: 10.2514/6.1964-49
2. Dreyfus S. The Numerical Solution of Variational Problems. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1962, pp. 30–45.
3. Fabien B.C. Numerical Solution of Constrained Optimal Control Problems with Parameters. *Applied Mathematics and Computation*, 1996, pp. 43–62.
4. Зароднюк А.В., Бугров Д.И., Черкасов О.Ю. О свойствах реакции опорной кривой в задаче о брахистохроне в сопротивляющейся среде. *Фундаментальная и прикладная математика*, 2018, т. 22, № 2, с. 147–158.

## The Brachistochrone problem with constraints on the trajectory inclination angle

© N.V. Smirnova\*, O.Yu. Cherkasov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): nina.smirnova247@yandex.ru

**Abstract.** The motion of a material point in a vertical plane under the action of gravity and viscous friction, proportional to the speed, is considered. The rate of change of the trajectory inclination angle is considered

as a control. The task is to maximize the horizontal range in a given time, or to minimize the time it takes to move to a given horizontal distance (the brachistochrone problem). It is assumed that there are phase constraints on the angle of inclination of the trajectory. In the scientific literature, formulations of the problem of a frictionless brachistochrone in the presence of phase constraints are known. Constraints on the coordinates were considered in different works, for example, constraints like  $y \geq ax + b$ . In this case, the phase constraints were taken into account using numerical procedures. In the present work, we construct a synthesis of an optimal control with phase constraints on the trajectory inclination angle, and analytically determine the number of arcs of motion along the constraint.

**Keywords:** *optimal synthesis, brachistochrone, phase constraints, Pontryagin's maximum principle, boundary value problem.*

The motion of a material point in a vertical plane under the action of gravity and viscous friction, proportional to the speed, is considered. The rate of change of the trajectory inclination angle is considered as a control. The task is to maximize the horizontal range in a given time, or to minimize the time it takes to move to a given horizontal distance (the brachistochrone problem). It is assumed that there are phase constraints on the angle of inclination of the trajectory. In the scientific literature, formulations of the problem of a frictionless brachistochrone in the presence of phase constraints are known. In [1], constraints on the angle of inclination of the trajectory were considered, in [2, 3] — constraints  $y \geq ax + b$ . In this case, the phase constraints were taken into account using numerical procedures. In the present work, we construct a synthesis of an optimal control with phase constraints on the trajectory inclination angle, and analytically determine the number of arcs of motion along the constraint. The system of equations of the motion in dimensionless variables has the form [4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta; \\ \dot{y} = v \sin \theta; \\ \dot{v} = -v - \sin \theta; \\ \dot{\theta} = u. \end{cases} \quad (1)$$

Here  $x$  — horizontal distance,  $y$  — vertical altitude,  $v$  — module of the velocity,  $\theta$  — the angle of inclination, which has a phase constraint  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ,  $u$  — control, which has no constraints.

Boundary conditions for the system (1) are as follows:

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0. \quad (2)$$

We consider  $\theta(0)$ ,  $y(T)$ ,  $v(T)$  to be free.

The cost functional has the following form:

$$J = -x(T) \rightarrow \min, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Thus, the optimization problem is to maximize the range  $x(T)$ . The final time  $T$  we consider to be fixed.

Passing to a reduced system with control  $\theta$  we obtain a regular optimal problem with control constraints. Using the maximum principle, the optimal control problem is reduced to a boundary value problem for a system of two nonlinear differential equations:

$$\begin{cases} \dot{v} = -v - \sin \theta, \\ \dot{\psi}_v = \psi_v - \cos \theta; \end{cases}$$

$$\psi_v(T) = 0, \quad v(0) = v_0, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$\theta = \begin{cases} \theta_1, & -\operatorname{arctg}(\psi_v / v) < \theta_1, \\ -\operatorname{arctg}(\psi_v / v), & -\operatorname{arctg}(\psi_v / v) \in [\theta_1, \theta_2], \\ \theta_2, & -\operatorname{arctg}(\psi_v / v) > \theta_2. \end{cases}$$

As a result of the application of the maximum principle, it is analytically shown that the optimal trajectory can contain no more than one arc of motion along the lower constraint and no more than two arcs of motion along the upper constraint. In the absence of resistance, it is shown that the optimal trajectory contains at most one arc with motion along each of the constraints.

## References

1. Cheng D. Conrad. Optimum translation and the brachistochrone. American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA). *Aerospace Sciences Meeting*, 1964. DOI: 10.2514/6.1964-49
2. Dreyfus S. The Numerical Solution of Variational Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1962, pp. 30–45.
3. Fabien B.C. Numerical Solution of Constrained Optimal Control Problems with Parameters. *Applied Mathematics and Computation*, 1996, pp. 43–62.
4. Zarodnyuk A.V., Bugrov D.I., Cherkasov O.Yu. *Fundamental and Applied Math.*, 2018, vol. 22, no. 2, pp. 147–158.

**О численном построении областей существования  
и орбитальной устойчивости периодических движений  
автономной гамильтоновой системы  
с двумя степенями свободы**

© Е.А. Сухов

МАИ (НИУ), Москва, Россия  
E-mail: Sukhov.george@gmail.com

**Аннотация.** В настоящей работе предложена методика численного построения областей существования и орбитальной устойчивости семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Построение искомым областей осуществляется в два этапа. На первом этапе в окрестности известных положений равновесия или стационарных движений строятся так называемые опорные периодические движения. На втором этапе опорные движения численно продолжают в пространстве параметров задачи вдоль границ своих областей существования и орбитальной устойчивости. Также предложен алгоритм поиска начальных условий периодических движений вблизи точек бифуркации. В качестве иллюстрации исследованы семейства периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий динамически симметричного спутника. Построены области существования и орбитальной устойчивости указанных семейств в трехмерном пространстве параметров задачи.

**Ключевые слова:** периодические движения, гамильтонова механика, численное построение, орбитальная устойчивость, регулярные прецесии.

Рассматривается задача о построении областей существования семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Строгому аналитическому решению данной задачи посвящены многие работы [1–4]. Однако получить аналитическое представление искомым периодических движений возможно лишь в частных случаях. Для построения семейств периодических движений при всех допустимых значениях параметров задачи необходимо применить численный метод.

В настоящей работе предложена методика численного построения границ областей существования семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при любых допустимых значениях параметров задачи. Построение искомым границ осуществляется в два этапа.

На первом этапе пространство параметров задачи разбивается на двумерные плоскости, в которых выполняются все последующие построения. Затем строятся так называемые опорные периодические движения. В окрестности известных стационарных движений и положений равновесия опорные движения могут быть построены аналитически, например, следуя методике работ [1–3].

На втором этапе с помощью метода [5, 6] опорные движения численно продолжают по параметрам вдоль границ своих областей существования. Следуя [7, 8], граница области существования семейства периодических движений определяется так называемым критерием завершения семейства. На практике при приближении к данным границам зачастую возникает необходимость уменьшать шаг приращения параметров, что существенно увеличивает время обхода при движении вблизи границ и делает нецелесообразными частые проверки критерия завершения. В связи с этим в данной работе предложен алгоритм обхода, основанный на движении параллельно касательным к границе области существования. На каждом шаге данного алгоритма движение в пространстве параметров подразделяется на два этапа. На первом этапе приближенно определяется нормаль и касательная к границе области существования исследуемого семейства. На втором этапе осуществляется численно продолжение семейства вдоль его границы таким образом, что движение происходит на расстоянии  $h$  от касательной. Окончание шага алгоритма определяется прохождением пути  $s$  (длины шага,  $s > h$ ), либо достижением границы. Критерием завершения алгоритма служит возврат в окрестность исходной точки или прохождение суммарного пути  $S$  ( $S \gg s$ ). Выбор значений параметров  $h$  и  $s$  производится исходя из требуемой скорости вычислений и точности построения границы.

Используемый в данной работе метод численного продолжения также позволяет получать выводы об орбитальной устойчивости исследуемых периодических движений. Обход границ областей орбитальной устойчивости осуществляется аналогично обходу границ областей существования, однако величина  $h$  полагается равной нулю.

В частном случае завершение семейства периодических движений может быть связано с его бифуркацией [5]. Для построения периодических движений, рождающихся в результате бифуркации исходного семейства, в данной работе применен метод сечений Пуанкаре. В частности, для определения начальных условий орбитально устойчивых периодических движений предложен следующий численный алгоритм поиска неподвижных точек отображений Пуанкаре. На первом шаге данного алгоритма фазовое пространство задачи разбивается сеткой, в узлах которой строятся локальные сечения Пуанкаре. Затем на множестве  $P$  точек каждого из локальных сече-

ний строится триангуляция Делоне [9]  $D_1$ , границей которой является минимальная выпуклая оболочка множества  $P$ . Далее для какого-либо внутреннего узла триангуляции  $D_1$  вновь строится сечение Пуанкаре. Если все точки данного сечения лежат внутри границы триангуляции, то полученная область рассматривается как область регулярного движения. На втором шаге для каждой из областей регулярного движения вышеописанное построение повторяется, пока площадь  $S_i$  новой триангуляции  $D_i$  не будет удовлетворять критерию  $S_i < k S_1$ , где  $S_1$  — площадь триангуляции  $D_1$ , а  $0 < k < 1$  — коэффициент, определяющий точность приближения к неподвижной точке. Кроме того, если на каком-либо шаге нарушается условие  $S_i < S_{i-1}$ , соответствующая область исключается из рассмотрения. После завершения алгоритма приближенные начальные условия периодических движений, соответствующие найденным неподвижным точкам, уточняются с помощью метода [5, 6].

Для иллюстрации предложенной методики в данной работе построены области существования и орбитальной устойчивости семейств периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий динамически симметричного спутника. Полученные результаты хорошо согласуются с выводами работ [4, 10, 11].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 20-01-00637.*

## Литература

1. Маркеев А.П. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1. *ПММ*, 1999, т. 63, с. 757–769.
2. Бардин Б.С., Чекин А.М. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 3:1. *ПММ*, 2009, т. 73.
3. Schmidt D.S. Periodic solutions near a resonant equilibrium of a Hamiltonian system. *Cel. Mech.*, 1974, no. 9.
4. Сокольский А.Г., Хованский С.А. Периодические движения, близкие гиперболоидальной прецессии спутника на круговой орбите. *Косм. иссл.*, 1979, т. 17, с. 208–217.
5. Каримов С.Р., Сокольский А.Г. Метод численного продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем. *Препринт ИТА АН СССР № 9*, 1990.
6. Бардин Б.С., Сухов Е.А. Об алгоритме продолжения по параметрам семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. *LIV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц плазмы и оптоэлектроники*. Москва, РУДН, 2018.
7. Deprit A., Henrard J. Natural Families of Periodic Orbits. *The Astronomical Journal*, 1967, vol. 72, no. 2, pp. 158–172.
8. Wintner A. Grundlagen einer Genealogie der periodischen Bahnen im restringierten Dreikörperproblem. *Math Z.*, 1931, vol. 34, no. 3, pp. 321.
9. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение. Томск, Изд-во Томского университета, 2002, 128 с.

10. Sukhov E. Analytical and numerical computation and study of long-periodic motions originating from hyperboloidal precession of a symmetric satellite. *Proc. of the 8th Polyakov Readings St. Petersburg*, 2018.
11. Sukhov E.A. Bifurcation analysis of periodic motions originating from regular precessions of a dynamically symmetric satellite. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15.

## **On numerical computation of existence and orbital stability domains of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system**

© E. A. Sukhov

Moscow aviation institute, Moscow, Russia  
E-mail: Sukhov.george@gmail.com

**Abstract.** In this work a numerical method was proposed for computing existence and orbital stability domains of periodic motions of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom. The computation is carried out in two steps. On the first step the so-called base solutions are obtained analytically or numerically. On the second step the aforementioned base solutions are numerically continued along the borders of their existence and orbital stability domains. A numerical procedure based on Poincare sections and Delaunay triangulation was also proposed for obtaining the base solutions in the neighborhood of bifurcation points. To illustrate the proposed method periodic motions originating from Regular precessions of a dynamically symmetrical satellite were studied. Their existence and orbital stability domains were constructed in the problem's three-dimensional parameter space.

**Keywords:** *periodic motions, Hamiltonian mechanics, numerical computation, orbital stability, regular precessions.*

*This work was funded by Russian Fund of Basic Research,  
grant no. 20-01-00637.*

### **References**

1. Markeev A.P. On nonlinear oscillations of a Hamiltonian system in case of 2:1 resonance. *Journal of Applied Math. and Mech.*, 1999, vol. 63, pp. 757–769.
2. Bardin B.S., Chekin A.M. On non-linear oscillations of a Hamiltonian system in case of 3:1 resonance. *Journal of Applied Math. and Mech.*, 2009, vol. 73.
3. Schmidt D.S. Periodic solutions near a resonant equilibrium of a Hamiltonian system. *Cel. Mech.*, 1974, vol. 9.
4. Sokolskiy A.G., Khovanskiy S.A. Periodic motions close to Hyperboloidal precession of a satellite on circular orbit. *Cosmic Research*, 1979, vol. 17, pp. 208–217.
5. Karimov S.R., Sokolskiy A.G. Method for numerical continuation of natural families of periodic motions of Hamiltonian systems. *USSR RAS Institute of Theoretical Astronomy Preprint № 9*, 1990.

6. Bardin B.S., Sukhov E.A. On numerical continuation algorithm for families of periodic motions of a 2-DOF autonomous Hamiltonian system. *LIV All-Russian conference on the problems of Dynamics, Physics of particles and Optoelectronics*. Moscow, RUDN, 2018.
7. Deprit A., Henrard J. Natural Families of Periodic. *The Astronomical Journal*, 1967, vol. 72, no. 2, pp. 158–172.
8. Wintner A. Grundlagen einer Genealogie der periodischen Bahnen im restringierten Dreikörperproblem. *Math Z.*, 1931, vol. 34, no. 3, pp. 321.
9. Skvortsov A.V. *Delaunay triangulation and its applications*. Tomsk, Tomsk University Publ., 2002, 128 p.
10. Sukhov E. Analytical and numerical computation and study of long-periodic motions originating from hyperboloidal precession of a symmetric satellite. *Proc. of the 8th Polyakov Readings St. Petersburg*, 2018.
11. Sukhov E.A. Bifurcation analysis of periodic motions originating from regular precessions of a dynamically symmetric satellite. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15.

## **О применении методов аналитической механики к построению математических моделей динамики параллельных манипуляторов**

© А.Я. Красинский<sup>1,2,3\*</sup>, А.В. Ни<sup>3</sup>, Л.Е. Щесняк<sup>3</sup>, А.А. Юлдашев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет пищевых производств, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский авиационный институт, Москва, Россия

<sup>3</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

\*E-mail: krasinsk@mail.ru

**Аннотация.** Наличие нескольких кинематических цепей в параллельных манипуляторах неизбежно приводит к возникновению условных геометрических соотношений между расстояниями для узлов манипулятора и координатами этих узлов, что делает невозможным применение уравнений Лагранжа второго рода. Разрабатываемый в докладе переход к продифференцированным уравнениям геометрических связей с последующим применением методов аналитической механики систем с избыточными координатами сокращает размерность задачи обратной кинематики. На примере дельта-робота показано, что полная математическая модель динамики манипуляторов с тремя параллельными цепями быть получена вообще без рассмотрения обратной задачи кинематики.

**Ключевые слова:** параллельный манипулятор, геометрические связи, избыточные координаты.

**Введение.** Механизмы с параллельными кинематическими цепями обладают рядом важных достоинств: высокая жесткость, точность, надежность, компактность, они отличаются от последователь-



ных манипуляторов лучшими динамическими свойствами [1, 2] и более высокой точностью и повторяемостью [3], что приводит к все более широкому их применению в технической практике. Однако до сих пор актуальна проблема повышения адекватности кинематических моделей таких механизмов, так как вследствие наличия связей для определения состояния объекта приходится вводить параметры в количестве, превышающем число степеней свободы, из-за чего кинематика существенно усложняется. К настоящему времени не существует эффективного метода построения полных математических моделей динамики параллельных манипуляторов, которые создали бы возможность применения методов математической теории управления для разработки алгоритмов управления такими механизмами. Одной из основных проблем является необходимость аналитического решения задачи обратной кинематики: выразить обобщенные координаты исполнительных приводов через координаты рабочего органа манипулятора. Причем дополнительные сложности обусловлены еще и неоднозначностью решения задачи обратной кинематики для манипуляторов параллельной структуры (например, в [4] такая задача имеет восемь решений), вследствие чего для решения этой задачи предлагается применять [5, 6] программные реализации различных численных методов. Линеаризация уравнений геометрических связей и использование только первого приближения связей [7] не всегда приводит к правильным результатам, особенно при исследовании устойчивости установившихся движений. В общем случае при построении соответствующих математических моделей должны быть учтены и нелинейные члены разложения геометрических связей [8].

В настоящем докладе предлагается альтернативный подход, который за счет перехода к продифференцированным геометрическим связям создает возможность применения для математического моделирования динамики этого класса манипуляторов методов аналитической механики систем с избыточными координатами. В общем случае размерность обратной задачи кинематики сокращается, а для систем с тремя параллельными цепями необходимость в решении такой задачи вообще может быть исключена, за счет чего впервые была получена полная нелинейная модель динамики дельта-робота.

**Математическое моделирование динамики манипуляторов с геометрическими связями.** Рассмотрим манипулятор с параллельным соединением звеньев как систему с координатами  $q_1, \dots, q_n$ , кинетической и потенциальной энергиями  $T(q, \dot{q})$ ,  $\Pi(q)$  и функцией Лагранжа  $L = T - \Pi$ , находящуюся под действием, кроме потенциальных, еще и непотенциальных сил  $\tilde{Q}_i$  (среди которых могут быть и управляющие), отнесенных к координатам  $q_i$ . Пусть на систему наложены независимые между собой геометрические связи

$$\Phi_j(q_1, \dots, q_n) = 0, \quad \frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_m)}{\partial(q_{n-m+1}, \dots, q_n)} \neq 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Введем векторы ( $s$  — вектор избыточных координат) и продифференцируем (1):

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}; \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{s} \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n-m} \end{pmatrix}; \quad s = \begin{pmatrix} q_{n-m+1} \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix};$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial\Phi}{\partial s} \dot{s} = 0. \quad (2)$$

Разрешая (2) относительно скоростей избыточных координат, получим

$$\dot{s} = - \left( \frac{\partial\Phi}{\partial s} \right)^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial r} \dot{r} = B(r, s) \dot{r}. \quad (3)$$

Обозначая через  $\mathfrak{G}(r, s, \dot{r})$  результат исключения зависимых скоростей из функции Лагранжа, а результат их исключения из непотенциальных сил — через  $Q_i(r, s, \dot{r})$ , будем описывать движение системы векторно-матричными уравнениями М.Ф. Шульгина [7–9]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial r} = Q_r + B'(r, s)Q_s + B'(r, s) \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial s},$$

$$Q_r = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_{n-m} \end{pmatrix}; \quad Q_s = \begin{pmatrix} Q_{n-m+1} \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Здесь штрих означает транспонирование соответствующего выражения. Для замыкания системы к (5) следует присоединить уравнения связей (4). При рассмотрении динамики конкретных устройств наряду с системой (4), (5) могут быть учтены и переходные процессы в исполнительных приводах. Для этого следует добавить математические модели их динамики [10, 11]. Для определения стабилизирующего управления методом Н.Н. Красовского [12] определяется управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость по всем переменным. Устойчивость в полной нелинейной замкнутой системе устанавливается с использованием теории критических случаев [13, 14].

**Математическое моделирование динамики дельта-робота.** Робот состоит из двух платформ: неподвижно закрепленного верхне-

го основания, которое монтируется над рабочей зоной и имеет форму равностороннего треугольника с длиной стороны  $a$ , и подвижного нижнего основания — небольшого равностороннего треугольника (исполнительного звена) с длиной стороны  $b$ . Силовые приводы — электродвигатели с редукторами размещены в серединах сторон верхнего основания в точках  $A, B, C$ . На выходных валах редукторов приводных двигателей жестко закреплены плечи  $AP, BQ, CS$  длины  $l$ . На нижних концах этих плеч с помощью шаровых шарниров закреплены рычаги  $PK, QM, SN$  длины  $d$ , нижние концы которых соединены с шаровыми шарнирами, расположенными в серединах  $K, M, N$  сторон нижнего равностороннего треугольника — исполнительного звена. Введем неподвижную систему координат  $Oxyz$ , начало которой — точку  $O$  — поместим в центр верхнего основания, ось  $z$  направим вертикально вверх, а ось  $x$  — по оси симметрии верхнего основания. Выпишем в этой системе координаты исполнительных приводов  $A, B, C$  и нижних концов рычагов  $P, Q, S$ :

$$A\left(0; -\frac{a}{2\sqrt{3}}; 0\right); B\left(\frac{a}{4}; \frac{a}{4\sqrt{3}}; 0\right); C\left(-\frac{a}{4}; \frac{a}{4\sqrt{3}}; 0\right);$$

$$P\left(0; -\frac{a}{4} - l \sin \alpha; -l \cos \alpha\right); Q\left(\frac{a}{4} + l \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta; \frac{a}{4\sqrt{3}} + \frac{l \sin \beta}{2}; -l \cos \beta\right);$$

$$S\left(-\frac{a}{4} - l \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma; \frac{a}{4\sqrt{3}}; \frac{a}{4\sqrt{3}} + \frac{l \sin \gamma}{2}; -l \cos \gamma\right).$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы отклонения соответственно плеч  $AP, BQ, CS$  приводов от вертикали. Обозначив через  $(x, y, z)$  координаты центра исполнительного звена, выпишем координаты точек крепления нижних концов рычагов, соединяющих точки  $P, Q, S$  и исполнительное звено — соответственно точек  $K, M, N$ :

$$M\left(x + \frac{b}{4}; y + \frac{b}{4\sqrt{3}}; z\right); K\left(x; y - \frac{b}{2\sqrt{3}}; z\right); N\left(x - \frac{b}{4}; y + \frac{b}{4\sqrt{3}}; z\right).$$

Геометрические связи, накладываемые тремя параллельными кинематическими цепями, сходящимися в исполнительном звене, запишем в виде трех теорем Пифагора — квадраты расстояний между концами рычагов  $PK, QM, SN$ , выраженные через координаты, должны быть равны квадратам их длин:

$$x^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}} + l \sin \alpha + y - \frac{b}{2\sqrt{3}}\right)^2 + (l \cos \alpha + z)^2 = d^2;$$

$$\left(\frac{a}{4} + l \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \beta - x - \frac{b}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4\sqrt{3}} + \frac{l \sin \beta}{2} - y - \frac{b}{4\sqrt{3}}\right)^2 + (l \cos \beta + z)^2 = d^2;$$

$$\left(\frac{a}{4} + l \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma + x - \frac{b}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4\sqrt{3}} + \frac{l \sin \gamma}{2} - y - \frac{b}{4\sqrt{3}}\right)^2 + (l \cos \gamma + z)^2 = d^2.$$

(5)

Следуя ранее разработанному методу, продифференцируем уравнения (5) и из полученных линейных соотношений между зависимыми и независимыми скоростями в общем случае выразим зависимые скорости (скорости центра нижнего основания) через независимые (угловые скорости закрепленных на валах исполнительных приводов плеч  $AP$ ,  $BQ$ ,  $CS$ ). При построении математической модели учтем массы  $m$  плеч  $AP$ ,  $BQ$ ,  $CS$ , массу  $M$  исполнительного звена с размещенным в нем грузом, моменты инерции  $J$  роторов двигателей с измерительными датчиками вместе с редукторами. Запишем выражение функции Лагранжа системы:

$$L = \frac{1}{2} \left( J + \frac{ml^2}{3} \right) (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2) + \frac{M}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + Mgz + \frac{mgl}{2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$$

После исключения зависимых скоростей с помощью продифференцированных уравнений (5) и перехода к  $\mathcal{Q}(r, s, \dot{r})$  впервые была получена полная нелинейная математическая модель динамики дельта-робота в форме уравнений (4).

*Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.*

### Литература

1. Merlet J.-P. *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
2. Tlusty J., Ziegert J.C., Ridgeway S. *CIRP Annals*, 1999, vol. 48 (1), pp. 351–356.
3. Wenger P., Gosselin C., Maille B. *Proceedings of PKM'99*. Milan, Italy, 1999, pp. 23–32.
4. Пашкевич А.П., Гомолицкий Р.И. Кинематика параллельных манипуляторов квазиортогональной структуры. *Докл. БГУИР*, 2012, т. 5, № 4, с. 150–155.
5. Мирзаев Р.А., Смирнов Н.А. Исследование кинематики манипулятора параллельной структуры (дельта-механизма). *Вестник СибГАУ*, 2012, с. 46–50.
6. Колтыгин Д.С., Седельников И.А., Петухов Н.В. Аналитический и численный методы решения обратной задачи кинематики для робота Delta. *Вестник Иркутского государственного технического университета*, 2017, т. 21, № 5 (124), с. 87–95.
7. Krasinskiy A.Ya., Il'ina A.N., Krasinskaya E.M. Stabilization of Steady Motions for Systems with Redundant Coordinates. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 1, pp. 14–20.

8. Красинский А.Я., Красинская Э.М. О допустимости линеаризации уравнений геометрических связей в задачах устойчивости и стабилизации равновесий. *Теоретическая механика. Сборник научно-методических статей. Вып. 29.* Москва, Изд-во МГУ, 2015, с. 54–65.
9. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. *Научные тр. САГУ, вып. 144.* Ташкент, 1958, 183 с.
10. Krasinskiy A.Ya., Krasinskaya E.M. Complex Application of the Methods of Analytical Mechanics and Nonlinear Stability Theory in Stabilization Problems of Motions of Mechatronic Systems. A.A. Radionov and A.S. Karandaev, eds. *RusAuto-Con 2019.* LNEE 2020, 641, pp. 357–370. Springer Nature Switzerland AG 2020.
11. Krasinskiy A.Ya., Yuldashev A.A. Mathematical and Computer Modeling of a New Type of Two-Link Manipulator. *1st International Conference on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA).* Date of Conference: 20–22 Nov. 2019. DOI: 10.1109/SUMMA48161.2019.8947534
12. Красовский Н.Н. *Проблемы стабилизации управляемых движений.* Москва, Наука, 1967, с. 475–514.
13. Ляпунов А.М. *Собрание сочинений, т. 2.* Москва–Ленинград, Изд-во АН СССР, 1956, 472 с.
14. Малкин И.Г. *Теория устойчивости движения.* Москва, Наука, 1966, 532 с.

## **On the application of methods of analytical mechanics to the construction of mathematical models of the dynamics of parallel manipulators**

© A.Y. Krasinskiy<sup>1,2,3\*</sup>, A.V. Ni<sup>3</sup>, L.E. Shchesnyak<sup>3</sup>, A.A. Yuldashev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow State University of Food Production, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

\*E-mail: krasinsk@mail.ru

**Abstract.** The presence of several kinematic chains in parallel manipulators inevitably leads to the appearance of conditional geometric relationships between the distances for the manipulator nodes and the coordinates of these nodes, which makes it impossible to use the Lagrange equations of the second kind. Developed in the report, the transition to the differentiated equations of geometric relationships with the subsequent application of methods of analytical mechanics of systems with redundant coordinates reduces the dimension of the inverse kinematics problem. Using the example of a delta robot, it is shown that a complete mathematical model of the dynamics of manipulators with three parallel circuits can be obtained without considering the inverse problem of kinematics at all.

**Keywords:** *parallel manipulator, geometric relationships, redundant coordinates.*

*This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program.*

## **Об одном методе планирования траектории исполнительного звена многозвенного манипулятора с последовательной кинематикой**

© А.Я. Красинский<sup>1,2,3\*</sup>, А.А. Юлдашев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет пищевых производств, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский авиационный институт, Москва, Россия

<sup>3</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

\*E-mail: krasinsk@mail.ru

**Аннотация.** Одной из фундаментальных задач управления движением роботов-манипуляторов с избыточным числом степеней свободы является решение обратной кинематической задачи, заключающейся в определении углов в узлах, соответствующих заданному положению исполнительного звена. Аналитическое решение этой задачи затруднено из-за очевидной неоднозначности ответа и связано с большим объемом вычислений. Применение высокопроизводительных градиентных нейронных сетей для планирования траекторий избыточных роботов-манипуляторов оказалось недостаточно эффективным из-за медленной сходимости ошибки. В данной работе в качестве планируемой траектории предлагается выбрать брахистохрону, являющуюся решением вариационной задачи о минимальном времени перемещения рабочего органа манипулятора как материальной точки из исходного положения в конечное под действием гравитации. Можно сравнить время прохождения между заданными начальным и конечным положениями по брахистохроне и по траектории, созданной приложением FANUC / ROBOGUID.

**Ключевые слова:** *многозвенный манипулятор, планируемая траектория, брахистохрона.*

Манипуляторы с избыточным числом степеней свободы находят все более широкое применение в технической практике [1–3]. Одной из фундаментальных проблем управления перемещением манипуляторов с избыточными степенями свободы является решение задачи обратной кинематики, которая привлекает внимание многих исследователей [4, 5]. В настоящее время интенсивно разрабатываемое [6–8] применение современных высокопроизводительных нейросетевых технологий к таким задачам оказывается недостаточно эффективным в связи с медленной сходимостью ошибки, что может вызвать явление неповторяемости траектории, поскольку такой подход не дает возможности определения явного вида планируемой траектории.

В настоящем докладе в качестве альтернативы этому подходу предлагается определять планируемую траекторию исполнительного звена манипулятора из решения в трехмерном пространстве вариаци-

онной задачи о минимизации времени перехода материальной точки из заданного начального положения в заданное конечное под действием силы тяжести. Далее на найденной брахистохроне достаточно плотно располагаются точки, по которым определяются управления, обеспечивающие переходы между ними. Может быть выполнена оптимизация вариантов таких переходов с точки зрения минимизации перемещений наиболее массивных звеньев манипулятора при реализации этих перемещений. Возможно проведение сравнительного анализа времени перевода исполнительного звена пятизвенного робота-манипулятора из заданного начального положения в назначенное конечное по траектории, генерируемой с помощью программной среды FANUC/ROBOGUID при задании только начальной и конечной точек, и по предлагаемой в докладе траектории, генерируемой при задании промежуточных точек на брахистохроне. Исходя из этого в дальнейшем может быть создан программный продукт, решающий задачу о переводе исполнительного звена манипулятора из заданного положения в назначенное конечное.

Следует отметить, что на основе полученного явного аналитического вида траектории не только облегчается задача формирования программного управления для перевода исполнительного звена по заданной траектории, но и с использованием предлагаемого комплексного применения результатов аналитической механики, математического моделирования, теории оптимального управления, теории устойчивости, информационных технологий возможно определение дополнительного стабилизирующего управляющего воздействия, обеспечивающего устойчивое осуществление программного движения.

Кроме разработки дальнейшего применения полученных результатов в развитии методов управления многозвенными манипуляторами результаты доклада могут быть использованы в задачах управления реальными многозвенными роботами-манипуляторами (например, имеющимися в РУДН роботами фирмы FANUC).

*Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.*

## Литература

1. Kong Ying, Tang Qingqing, Zhang Ruiyang, and Ye Lv. A repeatable motion scheme for kinematic control of redundant manipulators. *Computational Intelligence and Neuroscience*, vol. 2019, Article ID 5426986. <https://doi.org/10.1155/2019/5426986>
2. Zhang Y., Xu P., Tan N. Further studies on Zhang neural-dynamics and gradient dynamics for online nonlinear equations solving. In: *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Automation and Logistics*. Shenyang, China, August 2009, pp. 566–571.
3. Zhang Y., Yi C., Guo D., Zheng J. Comparison on Zhang neural dynamics and gradient-based neural dynamics for online solution of nonlinear time-varying equation. *Neural Computing and Applications*, 2011, vol. 20, no. 1, pp. 1–7.

4. Yang C., Jiang Y., Li Z., He W., Su C.-Y. Neural control of bimanual robots with guaranteed global stability and motion precision. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 1162–1171.
5. Jin L., Li S., La H.M., Luo X. Manipulability optimization of redundant manipulators using dynamic neural networks. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, vol. 64, no. 6, pp. 4710–4720.
6. Li S., Chen S., Liu B. Accelerating a recurrent neural network to finite-time convergence for solving time-varying Sylvester equation by using a sign-Bi-power activation function. *Neural Processing Letters*, 2013, vol. 37, no. 2, pp. 189–205.
7. Zhang Y., Beck A., Magnenatmann N. Human-like behavior generation based on head-arms model for robot tracking external targets and body parts. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, vol. 45, no. 8, pp. 1390–1400.
8. Zhang Y., Lv X., Li Z., Yang Z., Chen K. Repetitive motion planning of PA10 robot arm subject to joint physical limits and using LVI-based primal-dual neural network. *Mechatronics*, 2008, vol. 18, no. 3, pp. 475–485.

## **On one method of planning the trajectory of the executive link of a multi-link manipulator with sequential kinematics**

© A.Y. Krasinskiy<sup>1,2,3\*</sup>, A.A. Yuldashev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow State University of Food Production, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

\*E-mail: krasinsk@mail.ru

**Abstract.** One of the fundamental problems of motion control of robotic manipulators with an excessive number of degrees of freedom is the solution of the inverse kinematics problem, which consists in determining the angles at the nodes corresponding to a given position of the executive link. The analytical solution of this problem is hampered by the obvious ambiguity of the answer, requires continuous control of the rank of the Jacobian and is associated with a large amount of computation. The application of high-performance gradient neural networks to the planning of the trajectories of redundant robotic manipulators turned out to be insufficiently effective due to the slow convergence of the error, which can cause the phenomenon of non-repeatability of the trajectory. In this paper, as the planned trajectory, it is proposed to choose a brachistochrone, which is a solution to the variational problem of the minimum time of movement of the manipulator grip as a material point from the initial position to the final one under the action of gravity. A comparison of the travel times between points on the brachistochrone and the trajectory generated by the FANUC / ROBOGUID application can be made.

**Keywords:** *sequential manipulator, trajectory planning, brachistochrone.*

*This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program.*



## 2.2. Небесная механика

*Руководители:* д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Сазонов,  
д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Ивашкин

### End-of-life disposal in inclined geosynchronous orbits

© L. Anselmo, C. Pardini

Space Flight Dynamics Laboratory, ISTI/CNR, Pisa, Italy

**Abstract.** Significantly Inclined Geosynchronous Orbits (IGO) are currently considered for various applications, like satellite navigation systems, intelligence and telecommunications. In the light of these developments, the aim of this report is to review the current definition of the Geosynchronous Protected Region, assessing if it would need an extension. Special attention is paid to the end-of-life disposal, in order to check the potential weaknesses of the current IADC formula and re-orbiting recommendations, focusing on the consequences of having operational orbits characterized by medium or high inclinations.

**Keywords:** *inclined geosynchronous orbits (IGO), end-of-life (EoL) disposal, space debris, geosynchronous protected region, IADC formula.*

The first version (2002) of the Mitigation Guidelines issued by the Inter-Agency Space Debris Coordination Committee (IADC) defined a toroidal Geosynchronous Protected Region, extending 200 km below and above the geosynchronous altitude of 35 786 km, and spanning latitudes in between  $-15^\circ$  and  $+15^\circ$  with respect to the Earth equator. A formula was also proposed (slightly amended in 2007) for the appropriate end-of-life disposal of spacecraft, in order to guarantee no further interference with the protected region over the long-term.

These definitions were elaborated when the nearly exclusive utilization of the geosynchronous region consisted of geostationary satellites placed and maintained, during their operational lifetime, close to the Earth equator. When finally abandoned, due to the concurring action of geopotential and luni-solar perturbations, such objects displayed a characteristic periodic orbit plane evolution, with a period of about 54 years and a maximum inclination of about  $15^\circ$ .

However, significantly Inclined Geosynchronous Orbits (IGO) are currently considered for various applications, like satellite navigation systems, intelligence and telecommunications. In the light of these developments, the aim of this presentation is to review the current definition of the

Geosynchronous Protected Region, assessing if it would need an extension. Special attention was paid to the end-of-life disposal, in order to check the potential weaknesses of the current IADC formula and re-orbiting recommendations, focusing on the consequences of having operational orbits characterized by medium or high inclinations.

The original IADC guideline for the end-of-life re-orbiting of spacecraft and orbital stages above the geosynchronous altitude, with  $h_0 = 235$  km, was devised for objects close to the geostationary ring and resulted strictly valid, irrespective of the orbital and celestial initial conditions, for  $i_0 \leq 2^\circ$ , and applicable in most cases for  $i_0 \leq 10^\circ$ .

The potential growing use of geosynchronous orbits with higher inclinations has raised the problem of what strategy to adopt at the end-of-life for these new classes of objects. For  $i_0 \leq 30^\circ$ , it was shown that an effective extension of the IADC formula would be possible by just increasing the value of  $h_0$  as a function of  $i_0$ , with a maximum of 550 km for  $i_0 = 30^\circ$ . This possibility arises from the fact that, despite the complexity of the perturbations acting on such orbits, the eccentricity would remain bounded to sufficiently low values for at least 200 years, irrespective of the orbital and celestial initial conditions. With  $i_0 = 30^\circ$  and  $h_0 = 550$  km, no crossing of the geosynchronous protected region would occur, over 200 years, even in the less favourable combinations of orbital ( $\Omega_0$  and  $\omega_0$ ) and celestial (Sun and Moon position) initial conditions. It should be however pointed out that very often it would be possible to avoid any further long-term interference with the protected region adopting significantly lower values of  $h_0$ , being those found just the values able to guarantee the fulfilment of the guideline goal even with the worst initial conditions.

The cost of implementing the extended IADC formula, in terms of additional  $\Delta V$  to be delivered by the propulsion system and mission impact, would not be negligible, but affordable. With  $i_0 = 30^\circ$ , the maximum additional  $\Delta V$  penalty would be 11.5 m/s, approximately doubling the cost currently incurred to apply the original IADC formula to nearly geostationary satellites.

This approach will not be instead generally applicable for  $i_0 > 30^\circ$ . Reducing the initial inclination and/or changing the initial right ascension of the ascending node of the disposal orbit would be of course too much expensive and unfeasible, not to mention the Moon and Sun positions. Even choosing appropriate launch times, provided it were feasible from a mission point of view, might not be so beneficial, being quite tricky the accurate prediction of end-of-life epochs several years in advance.

The problem should be therefore addressed on a case by case basis, strongly dependent as it is from the initial orbital and celestial conditions. In certain cases, it should be possible to constrain the eccentricity growth from several decades to a few centuries, in others the eccentricity would grow to values so large to cause orbital decay in several decades. For very

high inclinations and appropriate initial conditions, the interaction between the Lidov — Kozai effect and the other perturbations might lead to the emergence of a dynamical protection mechanism of the geosynchronous protected region, effective at least for several decades.

As a consequence of this situation, no easy to apply, general and cost-effective end-of-life disposal solution can be recommended for the re-orbiting of near circular geosynchronous objects with  $i_0 > 30^\circ$ . Nevertheless, if the total number of these objects will not grow by more than two orders of magnitude in the next century, even simply abandoning them at the end of their missions would not lead to a significant increase of the collision probability in the geostationary ring and in the geosynchronous protected region, because they would be spread in a huge volume of space by the perturbations, spending only occasional and relatively short periods of time in the most populated geosynchronous belt. However, in order to further reduce the average long-term collision probability with objects residing in the geosynchronous protected region, an end-of-life re-orbiting above the geosynchronous altitude of a few hundred km might be in any case beneficial, even with an unbounded eccentricity.

## References

1. Allan, R.R. & Cook, G.E. (1964). The Long-period Motion of the Plane of a Distant Circular Orbit. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 280 (1380), 97–109.
2. Anselmo, L. & Pardini, C. (2008). Space Debris Mitigation in Geosynchronous Orbit. *Advances in Space Research* 41 (7), 1091–1099.
3. Anselmo, L. & Pardini, C. (2011). Orbital Evolution of the First Upper Stages Used for the New European and Chinese Navigation Satellite Systems. *Acta Astron.* 68, 2066–2079.
4. Anselmo, L. & Pardini, C. (2017). On the End-of-Life Disposal of Spacecraft and Orbital Stages Operating in Inclined Geosynchronous Orbits. *Proceedings of the 9<sup>th</sup> IAASS International Space Safety Conference, International Association for the Advancement of Space Safety (IAASS)*, pp. 87–94, ISBN: 978-90-828378-0-3.
5. Bordovitsyna, T.V., Tomilova, I.V. & Chuvashov, I.N. (2014). Secular Resonances as a Source of Dynamic Chaoticity in the Long-term Orbital Evolution of Uncontrolled Satellites. *Solar Syst. Res.*, 48, 259–268.
6. Breiter, S. (2001). Lunisolar Resonances Revisited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 81 (1-2), 81–91.
7. Cook, G.E. (1962). Luni-solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite. *Geophys. J.R. Astron. Soc.*, 6, 271–291.
8. Hughes, S. (1980). Earth Satellite Orbits with Resonant Lunisolar Perturbations. I. Resonances Dependent Only on Inclination. *Proc. R. Soc. Lond. A* 372, 243–264.
9. Hughes, S. (1981). Earth Satellite Orbits with Resonant Lunisolar Perturbations. II. Resonances Dependent on the Semi-Major Axis, Eccentricity and Inclination. *Proc. R. Soc. Lond. A* 375, 379–396.
10. Kozai, Y. (1962) Secular Perturbations of Asteroids with High Inclination and Eccentricity. *The Astronomical Journal* 67 (9), 591–598.
11. Lidov, M.L. (1961) Evolution of Artificial Planetary Satellites under the Action of Gravitational Perturbations Due to External Bodies. *Iskusstviennyye Sputniki Zemli* (in Russian) 8, 5–45.

12. Tamayo, D., Burns, J.A., Hamilton, D.P. & Nicholson, P.D. (2013). Dynamical Instabilities in High-obliquity Systems. *The Astronomical Journal* 145 (54), 12 pp.
13. Wytrzyszczak, I., Breiter, S. & Borczyk, W. (2007). Regular and Chaotic Motion of High Altitude Satellites. *Advances in Space Research* 40 (1), 134–142.
14. Yokoyama, T. (1999). Dynamics of Some Fictitious Satellites of Venus and Mars. *Planetary and Space Science* 47, 619–627.
15. Zhao, C.-Y., Zhang, M.-J., Wang, H.-B., Xiong, J.-N., Zhu, T.-L. & Zhang, W. (2015). Analysis on the Long-term Dynamical Evolution of the Inclined Geosynchronous Orbits in the Chinese BeiDou Navigation System. *Advances in Space Research* 56 (3), 377–387.

## **Особенности эволюции орбит разгонных блоков в окрестности рабочих высот глобальных навигационных систем**

© А.А. Баранов<sup>1</sup>, Д.А. Гришко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: andrey\_baranov@list.ru, dim.gr@mail.ru

**Аннотация.** В настоящее время российские и международные стандарты регламентируют параметры орбит захоронения только в двух защищаемых зонах околоземного пространства: на низких орбитах (высоты до 2000 км) и в окрестности геостационарной орбиты. В данном докладе рассматриваются особенности долговременной эволюции орбит разгонных блоков, которые ранее обеспечили формирование/восполнение систем глобального позиционирования Глонасс, GPS, Beidou (MEO) и Galileo. После выполнения своих функций эти объекты были переведены на специальные орбиты захоронения, параметры которых отличаются для каждой из указанных спутниковых систем. Возмущения, действующие на отработавшие разгонные блоки в течение длительного времени (десятки лет), могут приводить к потере устойчивости их орбит. В результате эти крупные объекты космического мусора начинают пересекать орбиты функционирующих навигационных спутников, что создает риск возможных столкновений.

**Ключевые слова:** глобальные навигационные системы, разгонные блоки, космический мусор, эволюция орбиты, орбита захоронения, устойчивость орбиты.

## Features of R/Bs' orbital evolution close to the operational heights of GNSS

© A. Baranov<sup>1</sup>, D. Grishko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>KIAM RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: andrey\_baranov@list.ru, dim.gr@mail.ru

**Abstract.** Nowadays, speaking about the disposal strategies for defunct payloads and rocket bodies, the International and Russian standards deal with only two protective zones: low Earth orbits (up to 2000 km) and the vicinity of the geostationary orbit. This report regards the features of long-term orbit evolution of R/B in MEO. Previously these upper stages ensured the formation and replenishment of the four satellite systems which are Glonass, GPS, Beidou (MEO part) and Galileo. After their mission had been accomplished, these objects were transferred into the special disposal orbits with the parameters unique for each of the mentioned satellite systems. Different perturbations acting on the R/Bs during the decades may cause the loss of the sustainability of their orbits. As a result, such large-size space debris objects will cross the operational heights of the existing GNSS making accidental collisions between them possible.

**Keywords:** *Global Navigation Satellite Systems (GNSS), upper stages (R/B), space debris, evolution of orbit, disposal orbit, orbit sustainability.*

## Баллистическое проектирование траектории перелета к спутнику Юпитера Ганимеду

© А.А. Беляев<sup>1,2\*</sup>, В.В. Корянов<sup>1</sup>, К.С. Федяев<sup>3</sup>, А.А. Суханов<sup>2</sup>,  
В.А. Зубко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>ИКИ РАН, Москва, Россия

<sup>3</sup>Военный университет Министерства обороны Российской Федерации,  
Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): don.beliae2012@yandex.ru

**Аннотация.** Данная работа посвящена рассмотрению возможности достижения спутника Юпитера Ганимеда при различных схемах перелета. В частности, рассматривается возможность достижения Юпитера при прямом перелете и при использовании гравитационных маневров у Земли и Венеры. Для достижения Ганимеда рассматриваются трехимпульсные и четырехимпульсные схемы перелета в сфере действия Юпитера.

**Ключевые слова:** *гравитационные маневры, задача Ламберта, Ганимед, астродинамика.*

Рассматривается задача, посвященная проектированию возможных траекторий перелета от Земли к спутнику Юпитера Ганимеду. В рамках решаемой задачи рассматривались перелет к Юпитеру от Земли по гелиоцентрической траектории и перелет к Ганимеду в сфере действия Юпитера. Для достижения Юпитера рассматривались схемы прямого перелета и с использованием гравитационных маневров у Венеры и Земли. Проведено исследование окон старта в период с 01-01-2026 года по 01-01-2038 год, а также оценены затраты характеристической скорости и длительность полета для этих случаев. Показано, что за счет использования перелета с гравитационными маневрами по схеме Земля — Венера — Земля — Земля — Юпитер можно существенно сократить затраты характеристической скорости, но при этом возрастает длительность полета.

Для достижения Ганимеда рассматривались схемы трехимпульсного и четырехимпульсного перелета, в результате чего космический аппарат выходил на заданную орбиту вокруг Ганимеда. Показаны затраты характеристической скорости и оценена длительность перелета для двух случаев. Также приведены значения затрат характеристической скорости и длительности полета при варьировании параметров промежуточных орбит, необходимых для достижения Ганимеда.

### **Ballistic calculation of the flight path to Jupiter's satellite Ganymede**

© А.А. Беляев<sup>1,2\*</sup>, V.V. Koryanov<sup>1</sup>, K.S. Fedyaev<sup>3</sup>,  
А.А. Sukhanov<sup>2</sup>, V.A. Zubko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Military University of the Ministry of Defense of the Russian Federation, Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): don.beliae2012@yandex.ru

**Abstract.** The work is devoted to the consideration of the possibility of reaching the satellite of Jupiter Ganymede with various flight schemes. In particular, the possibility of reaching Jupiter by direct flight and by means of gravity assist maneuvers near the Earth and Venus is being considered. To reach Ganymede, three-pulse and four-pulse flight schemes are considered in the sphere of action of Jupiter.

**Keywords:** *gravity assist, Lambert problem, Ganymede, astrodynamics.*

The problem of designing possible trajectories for a flight from Earth to Jupiter's moon Ganymede is considered. A flight from Earth to Jupiter along a heliocentric trajectory and a flight to Ganymede within the sphere of influence of Jupiter were considered within the framework of the prob-

lem being solved. A direct flight scheme and the use of gravity assist maneuvers near Venus and Earth were analysed. A study of launch windows for the period from 01-01-2026 to 01-01-2038 was carried out, and the costs of the characteristic velocity and flight duration for these cases were estimated. Due to the use of a flight with gravity assist maneuvers according to the Earth—Venus—Earth—Earth—Jupiter scheme, the possibility of significantly reducing the costs of the characteristic velocity, but the flight duration increases, has been shown.

To reach Ganymede, three-impulse and four-impulse flight schemes were considered, all resulting in the spacecraft entering the given orbit around Ganymede. The costs of the characteristic velocity are shown and the duration of the flight is estimated in both cases. Also given are values for the costs of the characteristic velocity and the duration of the flight when varying the parameters of intermediate orbits necessary to reach Ganymede.

## **Алгоритм решения задачи векторной аэрогравиметрии на основе априорной локальной модели гравитационного поля Земли**

© В.С. Вязьмин

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
E-mail: vadim.vyazmin@math.msu.ru

**Аннотация.** Рассмотрена задача определения вектора силы тяжести по измерениям бескарданного аэрогравиметра. Предложен алгоритм решения, основанный на пространственном моделировании поля силы тяжести в районе съемки на основе сферических скейлинг-функций Абея — Пуассона. Приведено обсуждение результатов расчетов на модельных данных.

**Ключевые слова:** гравитационное поле Земли, оптимальное оценивание, фильтрация.

Задача векторной аэрогравиметрии заключается в определении вектора силы тяжести вдоль траектории полета летательного аппарата (самолета или вертолета) по измерениям бескарданного аэрогравиметра, решаемая в режиме постобработки. В состав аэрогравиметра входят бескарданная инерциальная навигационная система (БИНС) навигационного класса точности и приемники сигналов спутниковых навигационных систем (СНС) (бортовой и наземные), работающие в фазово-дифференциальном режиме. Математически задача формулируется в рамках теории инерциальной навигации как задача коррек-

ции БИНС по данным СНС (координатам и относительным линейным скоростям чувствительной массы гравиметра) в постобработке. За счет введения априорной модели вектора силы тяжести и моделей погрешностей измерений инерциальных датчиков БИНС (гироскопов и акселерометров) и погрешностей СНС задача сводится к стандартной линейной задаче оптимального стохастического оценивания [1, 2]. Основная сложность при решении указанной задачи состоит в разделении оценок горизонтальных компонент вектора силы тяжести (уклонений отвесной линии) и инструментальных погрешностей БИНС. Среди последних наибольшую значимость в векторной аэрогравиметрии имеют угловые ошибки определения ориентации приборного трехгранника БИНС и медленные (длинноволновые) составляющие дрейфов нулей акселерометров [2].

Известный подход к решению задачи векторной аэрогравиметрии основан на введении априорной модели вектора силы тяжести во времени (как правило, в виде стационарного случайного процесса). Однако данный подход не позволяет оценивать отклонения отвесной линии с приемлемой для приложений точностью. В докладе предлагается новый подход, использующий априорную информацию о пространственном поведении поля силы тяжести в районе съемки, позволяющий повысить наблюдаемость отклонений отвесной линии [2, 3]. Указанная информация формируется локальной моделью гравитационного потенциала, основанной на его параметризации гармоническими сферическими скейлинг-функциями Абея — Пуассона. В докладе обсуждаются особенности данного подхода и результаты оценивания вектора силы тяжести на основе обработки модельных данных.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ  
(проект № 19-01-00179).*

## **Литература**

1. Болотин Ю.В., Голован А.А. О методах инерциальной гравиметрии. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*, 2013, № 5, с. 59–67.
2. Болотин Ю.В., Вязьмин В.С. Спектральный анализ точности векторной аэрогравиметрии. *Фундаментальная и прикладная математика*, 2018, т. 22, № 2, с. 33–57.
3. Vyazmin V.S. New algorithm for gravity vector estimation from airborne data using spherical scaling functions. In: *International Association of Geodesy Symposia*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2020, pp. 1–7. [https://doi.org/10.1007/1345\\_2020\\_113](https://doi.org/10.1007/1345_2020_113)



## Airborne vector gravimetry algorithm based on a priori earth's local gravity field model

© V.S. Vyazmin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia  
E-mail: vadim.vyazmin@math.msu.ru

**Abstract.** The paper considers the airborne vector gravimetry problem, which lies in determining gravity vector from measurements of a strapdown gravimeter. To solve the problem, we propose an approach based on spatial gravity modeling in the survey area using the Abel — Poisson spherical scaling functions. Numerical results from processing simulated data are discussed.

**Keywords:** *earth's gravity field, optimal estimation, filtering.*

Airborne vector gravimetry problem lies in determining gravity vector from postprocessing airborne gravimetry measurements at a flight path of an aircraft (airplane or helicopter). We assume an airborne gravimeter consisting of a navigation-grade strapdown inertial navigation system (INS) and receivers of global navigation satellite systems (GNSS) (onboard the aircraft and on the ground) operating in the carrier phase differential mode. The mathematical statement of the problem is formulated within inertial navigation theory as the INS-GNSS integration problem solved in the postprocessing mode. By introducing an a priori gravity vector model and measurement error models for inertial sensors (accelerometers and gyroscopes) and for the GNSS position and velocity solutions, the vector gravimetry problem is reduced to the standard stochastic linear optimal estimation problem [1, 2]. The main difficulty lies in separating estimates of the gravity horizontal components (deflections of the vertical) from the INS instrumental errors. The latter are mainly the INS attitude error (i.e., the error in determining orientation of the INS body-frame) and long-term bias drifts in accelerometer measurements [2].

The well-known approach to solving the airborne vector gravimetry problem is based on introducing an a priori gravity model in time. However, this approach is not capable to provide gravity horizontal component estimates with accuracy sufficient for any practical use. In this work, we propose a novel approach to airborne vector gravimetry based on taking into account spatial behavior of the local gravity field in the survey area in order to improve observability of the gravity horizontal components [2, 3]. The a priori spatial gravity model is based on a local representation of the disturbing potential by harmonic spherical scaling functions of the Abel —

Poisson type. Key features of the novel approach are presented, and numerical results of gravity vector estimation from the simulated data are discussed.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 19-01-00179).*

## References

1. Bolotin Yu.V., Golovan A.A. Methods of inertial gravimetry. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2013, vol. 68, no. 5, pp. 117–125. <https://doi.org/10.3103/S0027133013050026>
2. Bolotin Yu.V., Vyazmin V.S. Spectral analysis of the airborne vector gravimetry problem. *Fund. Appl. Math.*, 2018, vol. 22, no. 2, pp. 37–55.
3. Vyazmin V.S. New algorithm for gravity vector estimation from airborne data using spherical scaling functions. In: *International Association of Geodesy Symposia*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2020, pp. 1–7. [https://doi.org/10.1007/1345\\_2020\\_113](https://doi.org/10.1007/1345_2020_113)

## О модуляции Чандлеровского колебания и его возбуждения

© Л.В. Зотов<sup>1,2\*</sup>, К. Бизуар<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ГАИШ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>МИЭМ НИУ ВШЭ, Москва, Россия

<sup>3</sup>SYRTE, Парижская обсерватория, Париж, Франция

\*E-mail (докладчика): lzotov@hse.ru

**Аннотация.** Представлены результаты моделирования амплитуды Чандлеровского движения полюса (ЧДП) по данным за последние 160 лет. Выведены уравнения, связывающие модуляции Чандлеровского колебания с модуляциями Чандлеровского входного возбуждения. Сравнение результатов восстановления возбуждения методом корректирующей фильтрации Пантелеева с результатами, полученными по формулам и на основе моделей, подтверждают появление в возбуждении квази-20-летних колебаний амплитуды. Остается открытым вопрос о причинах таких модуляций. В частности, если нелинейная обратная связь присутствует в возбуждении, это может вести к синхронизации с низкочастотными внешними воздействиями.

**Ключевые слова:** *вращение Земли, Чандлеровское колебание.*

**Выделение Чандлеровского колебания.** Чандлеровское колебание — основная мода движения оси вращения Земли, открытая в 1891 г. и наблюдаемая с возрастающей точностью как 433-суточное колебание положения мгновенного полюса вращения

относительно земной коры [1]. Об источниках энергии этого колебания можно узнать в работах [1–4].

В работе [5] было предложено использовать фильтр Пантелеева в качестве метода выделения Чандлеровского движения полюса (ЧДП).

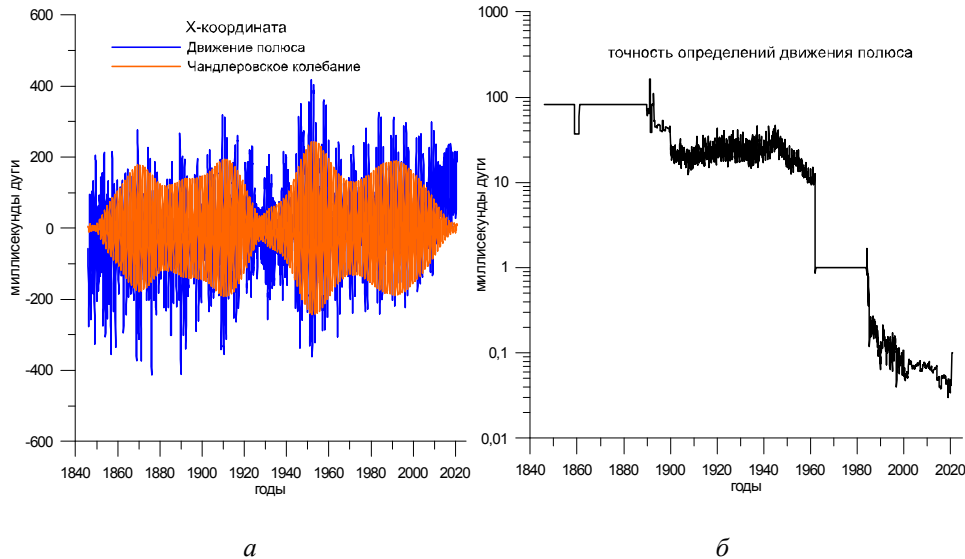
Импульсная характеристика фильтра Пантелеева дается формулой

$$h(t) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{\omega_0|t|}{2\sqrt{2}} - i2\pi f_c t\right)} \left( \cos \frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\omega_0 |t|}{\sqrt{2}} \right)$$

с параметром  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , определяющим ширину фильтра, и  $f_c$  — центральной частотой. Передаточная функция фильтра дается выражением

$$W(\omega) = \frac{f_0^4}{(f - f_c)^4 + f_0^4}.$$

Были использованы значения  $f_0 = 0,04$  и  $f_c = 0,843$  циклов в год [2], выделяя сигнал вблизи 433 суток из бюллетеня IERS EOP C01 с сайта [6]. Координаты движения полюса приведены к шагу 0,05 лет с 1846 г. по сентябрь 2020 г.



**Рис. 1.** Чандлеровское колебание, выделенное фильтрацией Пантелеева, (а) и повышение точности определений координат полюса (б)

Результаты такой фильтрации представлены на рис. 1, а, где Чандлеровское колебание показано оранжевым цветом, движение полюса — синим, прогресс точности наблюдений показан на рис. 1, б.

Отметим, что годовая компонента практически полностью подавлена фильтрацией, однако краевые эффекты узкополосной фильтрации могут составлять по 20 лет от начальной и конечной точек ряда.

Некоторые авторы выделяют Чандлеровское колебание полосовым фильтром Фурье, удаляют годовую компоненту и тренды из движения полюса. Наш фильтр обладает довольно сильной степенью сглаживания, что позволяет увидеть основные структуры в амплитуде ЧДП. Рост и спад амплитуды хорошо заметен. В 1840-х, 1920-х и 2010-х годах наблюдаются отчетливые минимумы.

**Теоретическое выражение для связи амплитуд.** Воспользуемся линеаризованным уравнением Эйлера — Лиувилля, описывающим движение полюса:

$$\frac{i}{\sigma_c} \frac{dp(t)}{dt} + p(t) = \chi(t), \quad (1)$$

где комплексная Чандлеровская частота  $\sigma_c = 2\pi f_c (1 + i/2Q)$  зависит от действительной частоты  $f_c$  и добротности  $Q$  ( $\sim 100$ ). В левой части фигурирует комплексная траектория полюса  $p = p_1 + ip_2$ . Справа стоит геофизическое возбуждение  $\chi = \chi_1 + i\chi_2$  или эффективная функция углового момента, источник которой — изменения в атмосфере, океане и внутренних слоях Земли.

Обозначим:  $\omega_c = 2\pi f_c$  — несущую Чандлеровскую частоту;  $A(t)$  — меняющуюся во времени абсолютную амплитуду движения полюса;  $\varphi(t)$  — фазовый сдвиг. Подставив в исходное уравнение (1) представление для ЧДП

$$p(t) = A(t) e^{i\varphi(t)} e^{i\omega_c t},$$

сделав некоторые упрощения, можно получить для амплитуды возбуждения  $E(t)$  выражение

$$E(t) = \frac{i}{\sigma_c} \left[ \dot{A}(t) + \left( i\dot{\varphi}(t) + \frac{\omega_c}{2Q} \right) A(t) \right]. \quad (2)$$

**Моделирование Чандлеровской огибающей.** Рассмотрим простую модель амплитудной модуляции Чандлеровского колебания:

$$p(t) = [a_0 + a_1 \cos(\omega_m t)] e^{i\omega_c t}, \quad (3)$$

где  $\omega_m$  — низкая частота модуляции; фазовый сдвиг  $\varphi(t)$  отсутствует.

Следуя представленному выше подходу [7] и подставляя (3) в (1), для возбуждения получим:

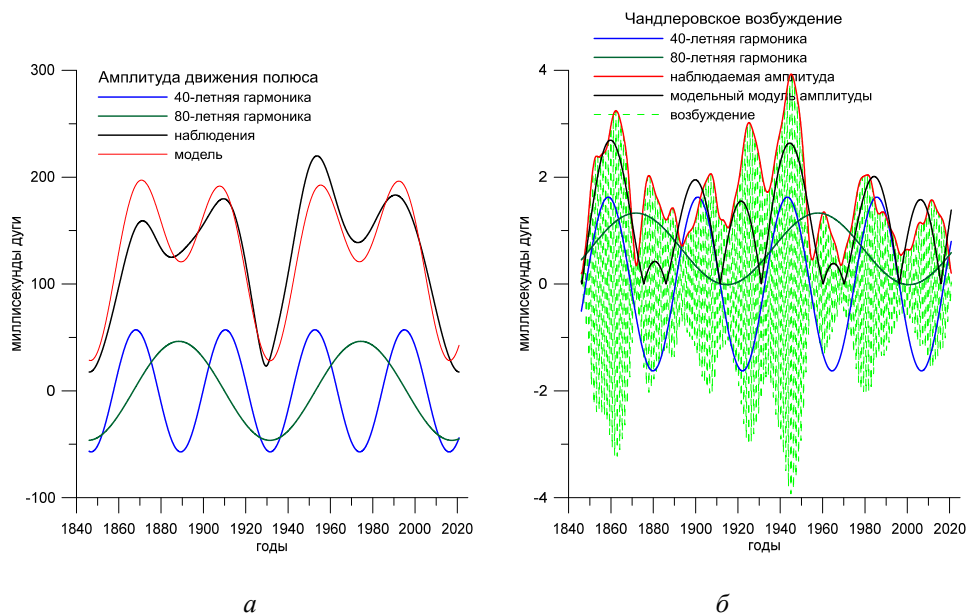
$$\chi(t) = \frac{i}{\sigma_c} \left( \frac{\omega_c}{2Q} [a_0 + a_1 \cos(\omega_m t)] - \omega_m a_1 \sin(\omega_m t) \right) e^{i\omega_c t}.$$

Считая  $i/\sigma_c$  комплексным множителем, действующим на несущую  $e^{i\omega_c t}$ , член в скобках будем считать меняющейся во времени амплитудой возбуждения:

$$E(t) = \frac{\omega_c a_0}{2Q} + \frac{\omega_c a_1}{2Q} \cos(\omega_m t) - \omega_m a_1 \sin(\omega_m t).$$

**Вклад изменений амплитуды и фазы в возбуждение.** Из наблюдений нелинейным МНК было оценено среднее значение амплитуды ЧДП 132 мс дуги и две гармоники амплитуды ЧДП: первая с периодом 86 лет и амплитудой 46 мс дуги, вторая — с периодом 42 года и амплитудой 57 мс дуги. Для сравнения на рис. 1, а показаны огибающая ЧДП и ее модели.

Беря только первую гармонику и подставляя в модель (3), получаем  $a_0 = 131$ ,  $a_1 = 46$  мс дуги. Помня о множителе  $i/\sigma_c$ , где  $\sigma_c \approx 5,3$ , получаем для амплитуды возбуждения среднее значение 3,5 мс дуги, амплитуда 80-летнего колебания  $E_{80} = 3,6$  окажется практически равной среднему.



**Рис. 2.** Изменение амплитуды Чандлеровского колебания (а) и Чандлеровского возбуждения и его модели (б)

Добавляя 40-летнюю гармонику с  $a_1 = 57$  мс дуги, получим ее вклад в возбуждение с амплитудой  $E_{40} = 8,6$  мс дуги, что более чем в 2 раза превосходит среднее и амплитуду  $E_{80}$  80-летней гармоники. Суммируя обе гармоники и среднее, разделив на  $|\sigma_c|$ , получим в модуле огибающей возбуждения  $E(t)$  (рис. 2, а) присутствие 20-летней волны, являющейся следствием большей амплитуды 40-летнего цикла, пересекающего уровень нуля каждые 20 лет, и малой амплитуды 80-летнего колебания, практически не пересекающего нуля.

Для сравнения на рис. 2, б показано Чандлеровское возбуждение (зеленым), выделенное методом Пантелеева в соответствии с работой [5], и смоделированные гармоники. Огибающая Чандлеровского возбуждения выделена красным, сумма гармоник и среднего — черным цветом. Согласие между ними вполне удовлетворительное. Еще лучшего согласия можно достичь, непосредственно подставляя компоненты в формулу (2).

**Заключение.** Показано, как простая модель изменений амплитуды Чандлеровского колебания объясняет появление в выделенном методом корректирующей фильтрации Пантелеева [5] возбуждении квази-20-летних модуляций. Даны формулы для связи изменений амплитуды ЧДП и его возбуждения. Весьма интересна возможность объяснения показанных в работе модуляций низкочастотной синхронизацией с внешними силами [8].

*Работа выполнена при поддержке гранта Национально научного фонда Китая № В17033 и Научного фонда Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» НИУ ВШЭ (проект № 20-04-033 на 2020–2021 гг.).*

## Литература

1. Lambeck K. *The Earth's Variable Rotation. Geophysical Causes and Consequences.* Cambridge University Press, 1980.
2. Зотов Л.В. *Исследование связей между вращением Земли и геофизическими процессами. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.* Москва, МГУ, 2019. <http://nfm1.sai.msu.ru/~tempus/disser/index.htm>
3. Bizouard Ch. Geophysical Modelling of the Polar Motion. *De Gruyter Studies in Mathematical Physics*, 2020, vol. 31, p. 366, de Gruyter.
4. Zotov L., Bizouard C., Sidorenkov N., Shen W.B., Guo Z.L. On the variability of Chandler wobble. *Proceedings of Journées 2019.* Paris Observatory, 2020, pp. 227.
5. Zotov L.V., Bizouard C. On modulations of the Chandler wobble excitation. *Journal of Geodynamics*, 2012, vol. 62, pp. 30–34. DOI: 10.1016/j.jog.2012.03.010
6. Сайт EOP PC. URL: <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php>
7. Zotov L., Bizouard C. Escargot Effect and the Chandler Wobble Excitation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 955, conference 1, Art. ID 012033. DOI: 10.1088/1742-6596/955/1/012033
8. Wan Cu. Synchronisation of the sinusoidal wave oscillator. *Proceeding of the Beijing University*, 1962, vol. 9, pp. 167–173.

## On modulations of the Chandler wobble and its excitation

© L.V. Zotov<sup>1,2\*</sup>, Ch. Bizourd<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Sternberg Astronomical Institute, Lomonosov Moscow State University, Russia

<sup>2</sup>SYRTE, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Universités, UPMC, Univ. Paris 06, France

\*E-mail (speaker): lzotov@hse.ru

**Abstract.** The paper presents the results of Chandler wobble amplitude modeling based on the last 160 years of observations. We developed the equations, which relate the modulations in this wobble with modulations of its excitation. The comparison of Chandler excitation reconstruction resulting from Panteleev corrective filtering with those obtained from equations and models proves the appearance of quasi-20-year variations in the excitation amplitude. The question of their cause remains open. In particular, if the non-linear back-propagation takes place, it could lead to the synchronization with the low-frequency external forces.

**Keywords:** *Earth rotation, Chandler wobble.*

*This work was supported by the grant “111” Discipline Innovative Engineering Plan of Modern Geodesy and Geodynamics (NSFC Grant no. B17033) at Wuhan University and Grant no. 20-04-033 of the Academic Fund Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE) in 2020–2021.*

### References

1. Lambeck K. *The Earth's Variable Rotation. Geophysical Causes and Consequences.* Cambridge University Press, 1980.
2. Zotov L.V. *Investigation of the links between the rotation of the Earth and geophysical processes. Dr. Sc. Diss in Phys.&Math.* Moscow, 2019. <http://lnfm1.sai.msu.ru/~tempus/disser/index.htm>
3. Bizouard Ch. Geophysical Modelling of the Polar Motion. *De Gruyter Studies in Mathematical Physics*, 2020, vol. 31, p. 366, de Gruyter.
4. Zotov L., Bizouard C., Sidorenkov N., Shen WB., Guo ZL. On the variability of Chandler wobble. *Proceedings of Journees 2019.* Paris Observatory, 2020, pp. 227.
5. Zotov L.V., Bizouard C. On modulations of the Chandler wobble excitation. *Journal of Geodynamics*, 2012, vol. 62, pp. 30–34. DOI: 10.1016/j.jog.2012.03.010
6. Сайт EOP PC. URL: <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php>
7. Zotov L., Bizouard C. Escargot Effect and the Chandler Wobble Excitation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 955, conference 1, Art. ID 012033. DOI: 10.1088/1742-6596/955/1/012033
8. Wan Cu. Synchronisation of the sinusoidal wave oscillator. *Proceeding of the Beijing University*, 1962, vol. 9, pp. 167–173.

## **Оптимизация полета к транснептуновому объекту Седна**

© В.А. Зубко<sup>1, 2\*</sup>, В.В. Корянов<sup>1</sup>, К.С. Федяев<sup>3</sup>,  
А.А. Суханов<sup>2</sup>, А.А. Беляев<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

<sup>3</sup>Военный университет Министерства обороны Российской Федерации,  
Москва, Россия

\*E-mail (докладчика): werrert2014@yandex.ru

**Аннотация.** Рассмотрен поиск оптимальной траектории перелета к транснептуновому объекту 90377 (Седна) с совершением гравитационных маневров у Венеры, Земли, Юпитера, Нептуна при накладываемых ограничениях на длительность перелета и высоту пролета планет. Поиск оптимальных траекторий производится в период с 2029 по 2034 г. В результате работы были получены оптимальные даты старта для разных схем перелета к Седне с гравитационными маневрами.

**Ключевые слова:** *Седна, транснептуновый объект, пояс Койпера, гравитационный маневр.*

Данная работа посвящена проектированию баллистических траекторий к транснептуновому объекту 90377 (Седна), который является объектом пояса Койпера с перигелием порядка 74 а.е. и афелием более 500 а.е. Из-за значительного удаления от Солнца для достижения Седны требуются весомые затраты характеристической скорости. В работе рассмотрены два возможных способа достижения Седны: прямой перелет и перелет с использованием гравитационных маневров у планет для увеличения орбитальной энергии. Поиск оптимальных траекторий производился на период с 2029 по 2036 г. Прямой перелет оказался нереализуем из-за высоких затрат характеристической скорости и длительности такого сценария.

Перспективными оказались сценарии перелета к Седне с использованием гравитационных маневров у Земли, Венеры, Юпитера, Сатурна и Нептуна. В работе получена оптимальная траектория перелета к Седне с использованием гравитационных маневров у Земли, Венеры и Юпитера. Показано, что схема перелета Земля — Венера — Земля — Земля — Юпитер обеспечивает достижение Седны с затратами характеристической скорости не более 4,5 км/с для оптимальной даты старта в 2029 г.



## Design of a promising mission to the trans-Neptunian object 90377 (Sedna)

© V.A. Zubko<sup>1,2\*</sup>, V.V. Koryanov<sup>1</sup>, K.S. Fedyaev<sup>3</sup>,  
A.A. Sukhanov<sup>2</sup>, A.A. Belyaev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Russian Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Military University of the Ministry of Defense of the Russian Federation,  
Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): werrert2014@yandex.ru

**Abstract.** This research considers the optimal flight path to the TRANS-Neptunian object 90377 (Sedna) with gravity assists near Venus, Earth, Jupiter, and Neptune with restrictions on the time of flight (ToF) and the flight path altitudes of the planets. The search for optimal trajectories is performed at the period from 2029 to 2034. As result of research optimal launch dates were obtained for different flight schemes to Sedna with gravity assists.

**Keywords:** *Sedna, trans-Neptunian object, Kuiper belt, gravity assist.*

This work is devoted to the design of ballistic trajectories to the trans-Neptunian object (90377) Sedna, which is a Kuiper belt object with the perihelion of about 74 AU and aphelion over 500 AU. Due to a large distance from the Sun, reaching Sedna requires significant expenditures of the characteristic velocity. The paper considers two possible ways to reach Sedna: direct flight and flight using gravitational maneuvers near planets to increase orbital energy. The search for optimal trajectories was carried out for the launch period from 2029 to 2036. The direct flight turned out to be unrealizable due to the high costs of the characteristic velocity and the duration of such a scenario. Scenarios of a flight to Sedna using gravity assist maneuvers near Earth, Venus, Jupiter, Saturn and Neptune turned out to be promising.

In this work, the optimal transfer trajectory to Sedna was obtained using gravity assist maneuvers near the Earth, Venus and Jupiter. It is shown that the scheme of the Earth—Venus—Earth—Earth—Jupiter transfer ensures reaching Sedna with the costs of a characteristic velocity of no more than 4.5 km/s for the optimal launch in 2029.

## Применение обобщенного интеграла энергии для анализа движения космического аппарата с учетом сжатия Земли

© В.В. Ивашкин

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН; МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: Ivashkin@keldysh.ru

**Аннотация.** Работа посвящена учету сжатия Земли при анализе околоземного этапа движения космического аппарата (КА) к Луне и планетам. Дано обобщение интеграла энергии за счет учета второй зональной гармоники потенциала гравитационного поля Земли. Показано, что сжатие Земли приводит к изменению главного орбитального параметра — кеплеровской константы энергии при полете КА к планетам или Луне. Это вызывает вариацию скорости отлета КА с околоземной орбиты ожидания. Даны численные оценки этих эффектов.

**Ключевые слова:** гравитационное поле Земли, сжатие Земли, зональные гармоники потенциала тяготения, интеграл энергии, космический аппарат, орбита отлета от Земли, полеты к Луне и планетам.

**Введение. Постановка задачи.** При полете КА в центральном ньютоновском гравитационном поле Земли движение КА в невращающейся геоцентрической геоэкваториальной системе координат удовлетворяет уравнению

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \partial U_0/\partial \mathbf{r}^* = \partial(\mu/r)/\partial \mathbf{r}^* = -(\mu/r^3)\mathbf{r}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор КА;  $r = |\mathbf{r}|$ ; «\*» — знак транспонирования;  $\mu$  — гравитационный параметр Земли;

$$U_0(\mathbf{r}) = \mu/r \quad (2)$$

есть потенциал притяжения Земли без учета возмущений.

Системе (1) соответствуют кеплеровские движения в поле сферической, однородной Земли. Важнейшим первым интегралом в этом случае является интеграл энергии [1]:

$$V^2 - 2U_0 = V^2 - 2\mu/r = h_k, \quad h_k = -\mu/a, \quad (3)$$

где  $V = |\mathbf{V}|$ ,  $\mathbf{V}$  — геоцентрическая скорость КА;  $h_k$  — кеплеровская константа энергии;  $a$  — оскулирующая большая полуось орбиты при эллиптическом движении, когда  $h_k < 0$ .

Рассмотрим, как изменяется интеграл (3) при учете возмущения от сжатия Земли как тела вращения.

**Обобщенный интеграл энергии при учете сжатия Земли.** В простейшем случае анализа движения КА у Земли для учета ее

сжатия к основному члену  $U_0$  (2) в потенциале Земли  $U$  добавляется вторая зональная гармоника  $U_2$ :

$$U = U_0(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}); \quad (4)$$

$$U_2(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon}{r^3} \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) = -\frac{\varepsilon}{r^3} \left( \frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right), \quad \varepsilon = (3/2) J_2 \mu R_e^2, \quad (5)$$

где  $\varphi$  — геоцентрическая широта КА;  $J_2 = -C_{20}$  — коэффициент зональной гармоники 2-го порядка,  $J_2 \approx 1082,63 \cdot 10^{-6}$  [2];  $R_e$  — средний экваториальный радиус Земли,  $R_e \approx 6378,137$  км;  $\varepsilon \approx 2,63328 \cdot 10^{10}$  км<sup>5</sup>/с<sup>2</sup>.

Уравнение движения (1) меняется:

$$d^2 \mathbf{r} / dt^2 = \partial U / \partial \mathbf{r}^*, \quad (6)$$

где за  $U$  взят потенциал (4), (2), (5). Удвоенная энергия движения КА  $h(t)$ :

$$h = V^2 - 2U = V^2 - 2U_0 - 2U_2 = h_k + \frac{2\varepsilon}{r^3} \left( \frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (7)$$

Поскольку потенциал  $U = U(\mathbf{r})$ , то  $h = \text{const}$ ,  $dh/dt = 0$  в силу уравнения движения [3]. Следовательно, на траектории КА энергия (7) постоянна:

$$h = V^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{2\varepsilon}{r^3} \left( \frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right) = h_k - 2U_2 = \text{const}. \quad (8)$$

Будем называть этот интеграл *обобщенным интегралом энергии*, имея в виду, что он обобщает интеграл (3) на случай учета сжатия Земли при расчете траектории КА.

**Замечание 1.** Данный подход может быть применен и для более полной модели зональных гармоник. Для Земли [2]:  $J_3 = -2,53 \cdot 10^{-6}$ ;  $J_4 = -1,61 \cdot 10^{-6}$ .

**Замечание 2.** В данном случае потенциального осесимметричного силового поля есть еще интеграл осевого момента количества движения [3].

Выписав интеграл (8) для начальной точки  $\mathbf{x}_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{V}_0, t_0)$  и для некоторой другой точки  $\mathbf{x}_f(\mathbf{r}_f, \mathbf{V}_f, t_f)$ , получим соотношение

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left( \frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) = V_f^2 - \frac{2\mu}{r_f} + \frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left( \frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (9)$$

Применим его к анализу траекторий отлета КА от Земли к Луне и планетам.

**Изменение кеплеровской константы энергии на орбите отлета к Луне и планетам.** Из (9) следует, что изменение кеплеровской константы энергии:

$$\Delta h_k = h_{kf} - h_{k0} = -2U_{20} + 2U_{2f} = \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left( \frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left( \frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right), \quad (10)$$

$$z/r = \sin \varphi = \sin i \cdot \sin u = \sin i \cdot \sin(\omega + \theta), \quad (11)$$

где  $i$ ,  $\omega$  — наклонение и аргумент перигея орбиты;  $u$ ,  $\theta$  — аргумент широты и истинная аномалия точки. Если при  $h_k < 0$  перейти от  $h_k$  к большой полуоси  $a$  (3), то из (10), после линеаризации по  $a$ , получим вариацию  $\Delta a$ , соответствующую [4].

При полете к планете будет отлет по гиперболе (для оценок возьмем скорость «на бесконечности»  $v_\infty = 3 \dots 4$  км/с). В этом случае расстояние  $r_f$  возрастает неограниченно, и последний член в (10)  $2U_{2f}$  стремится к нулю, а изменение кеплеровской константы энергии  $\Delta h_k$  — к предельному значению  $\Delta h_{kl}$ :

$$\Delta h_k \rightarrow \Delta h_{kl} = \Delta h_0 \equiv -2U_{20} = \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left( \frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (12)$$

Для полета к Луне рассмотрим эллиптическую орбиту с перигеем в начальной точке,  $r_\pi = r_0 \approx 6578$  км, с расстоянием в апогее  $r_\alpha$ ,  $r_\alpha \geq r_M$ , соответствующим расстоянию до Луны  $r_M$  при подлете КА к Луне,  $r_M \approx 360 \dots 405$  тыс. км. В (10) расстояние  $r_f$  возрастает от  $r_0$  до  $r_M < \infty$ , при этом последний член убывает до некоторой очень малой величины ( $\sim 10^{-6}$  км<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>), и предельное изменение  $h_{kl}$ :

$$\Delta h_{kl} \approx \Delta h_0 \equiv -2U_{20} = \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left( \frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (13)$$

Для оценки возьмем  $u_0 = 0$ , тогда  $z_0 = 0$ ,  $\Delta h_{kl} \approx -2\varepsilon/3r_0^3$ , для Земли  $\Delta h_{kl} \approx -0,0617$  км<sup>2</sup>/с<sup>2</sup> [5]. Численные расчеты для траекторий полета к Луне подтверждают эти оценки. При  $h_k < 0$  это изменение кеплеровской константы энергии соответствует изменению большой полуоси:  $\Delta a \approx -6200$  км при  $a = 200$  тыс. км,  $\Delta a \approx -8900$  км при  $a = 220$  тыс. км,  $\Delta a \approx -56\,000$  км при  $a = 600$  тыс. км [5, 6]. Практически это изменение происходит быстро, в течение  $\sim 3$  ч начального полета КА от Земли, при возрастании расстояния  $r_f$  до  $\sim 70$  тыс. км.

**Скорость отлета с околоземной орбиты ожидания.** Изменение кеплеровской константы энергии приводит в рамках модели (4)–(5) к изменению начальной скорости КА отлета от Земли по сравнению с кеплеровской моделью движения. Зададим для орбиты отлета

кеплеровскую константу энергии  $h_k$  (или  $V_\infty, a$ ). Тогда в кеплеровской модели движения КА (1)–(3) начальная скорость

$$V_0 = (h_k + 2\mu/r_0)^{1/2}. \quad (14)$$

В модели (4)–(5) с учетом сжатия Земли, при условии  $h_{kf} = h_k$ , начальная скорость

$$V_0 = \sqrt{h_k + \frac{2\mu}{r_0} - \Delta h_0 + \Delta h_f} = \sqrt{h_k + \frac{2\mu}{r_0} + \Delta h}; \quad (15)$$

$$\Delta h = \Delta h_f - \Delta h_0 = \frac{2\varepsilon}{r_f^3} \left( \frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left( \frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right) \approx -\frac{2\varepsilon}{r_0^3} \left( \frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3} \right). \quad (16)$$

Даны численные оценки при  $z_0 = 0$ . Учет сжатия Земли при полете к планете с  $V_\infty = 3 \dots 4$  км/с увеличивает по сравнению с кеплеровским случаем начальную скорость  $V_0$  от  $\sim 11,410 \dots 11,713$  км/с до  $\sim 11,413 \dots 11,716$  км/с, т. е. на  $\sim 3$  м/с. При полете к Луне при  $r_a = r_M = 400$  тыс. км учет сжатия увеличивает начальную скорость  $V_0$  от  $\sim 10,919$  км/с до  $\sim 10,922$  км/с, т. е. тоже на  $\sim 3$  м/с. Это приводит к увеличению (по сравнению с кеплеровским случаем) начальной оскулирующей большой полуоси на  $\sim 6500$  км, начального апогейного расстояния — на  $\sim 13$  тыс. км [5, 6].

**Заключение.** Рассмотрена модель движения КА с учетом сжатия Земли при полете к планете и Луне. В потенциале поля притяжения Земли учтен главный член, соответствующий кеплеровскому движению, и зональная гармоника второго порядка. Получен обобщенный интеграл энергии для этой модели. Приведено изменение кеплеровского интеграла энергии на начальном участке полета КА. Определена начальная скорость отлета КА от Земли при учете сжатия Земли.

### Литература

1. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. *Основы механики космического полета*. Москва, Наука, 1990, 448 с.
2. Chobotov V.A., ed. *Orbital Mechanics. Chapter 8: Introduction to Orbit Perturbation*. AIAA Education Series. AIAA, USA, 2002, 365 p.
3. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. Москва, Наука, 1979, 431 с.
4. Krause H.G.L. Die säkularen und periodischen Störungen der Bahn eines künstlichen Erdsatelliten. *7<sup>th</sup> International Astronautical Congress, Rome. September 1956. Proceedings*, pp. 523–585.
5. Ивашкин В.В. *Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет*. Москва, Наука, 1975, 392 с.
6. Ивашкин В.В. Об оптимальных траекториях полета КА к Луне в системе Земля–Луна–Солнце. *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, № 85*. Москва, 2001, 32 с.

## Using generalized integral of energy for analysis of spaceflight dynamics with taking into account the Earth oblateness

© V.V. Ivashkin

Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS; Bauman Moscow State University of Technology, Moscow, Russia  
E-mail: Ivashkin@keldysh.ru

**Abstract.** Taking into account the Earth oblateness is performed in the paper for analysis of near-Earth part of spacecraft (SC) motion to the Moon or planets. Generalization of the energy integral is made taking into consideration the second zonal harmonic of the Earth gravity field potential. It is shown that this effect of the Earth oblateness leads to variation of main orbital parameter — Keplerian integral of energy for the flight off the Earth to planets or to Moon. This results in a change of the spacecraft velocity for the flying away from the near-Earth waiting orbit. The numerical calculation results are given in the paper.

**Keywords:** gravity field of the Earth, the Earth oblateness, zonal harmonics of gravity potential, integral of energy, spacecraft, orbit of flight off the Earth, space flights to the Moon and planets.

## Расчет вероятности столкновения частиц с космическим аппаратом

© Н.С. Климова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия  
E-mail: natali.lesnyh@gmail.com

**Аннотация.** В работе рассматриваются способы решения задачи нахождения вероятности столкновения частиц с космическим аппаратом, производится обзор и выбор методов и алгоритмов, необходимых для решения поставленной задачи. На основе выбранных алгоритмов разрабатывается программный продукт, позволяющий проводить исследования для различных постоянно меняющихся параметров. Проводится статистическое моделирование космических объектов по орбитам и различным высотам и исследование полученных результатов.

**Ключевые слова:** космический аппарат, вероятность столкновения, концентрация частиц, космический мусор, космический объект.

Сильное влияние на нормальное функционирование аппарата оказывают возможные столкновения, влияющие на прочностные характеристики космического аппарата, вплоть до потери некоторой степени функциональности и даже полного разрушения защитной оболочки или внутренних систем космического аппарата. Данная опасность проявляется особенно сильно для частиц космического мусора.

При аналитическом сравнении наиболее популярных методов расчета вероятности был выбран метод Кесслера и Флюри [1], производящий поиск вероятности столкновения космического аппарата на рассматриваемом участке траектории с частицами космического пространства по следующей формуле:

$$P = 1 - e^{-LSq}, \quad (1)$$

где  $L$  — длина траектории;  $S$  — площадь космического аппарата;  $q$  — концентрация частиц в пространстве.

Концентрация частиц в пространстве является не постоянной величиной, а функцией, зависящей от времени  $t$  и местоположения  $r$  космического аппарата относительно Земли:

$$q = q(t, r). \quad (2)$$

Рассмотрим подробнее длину траектории  $L$ . В данном случае необходимо найти путь, который проходит космический аппарат, движущийся со скоростью  $v$  в течение времени  $t$ :

$$L = vt. \quad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в (1), получим усовершенствованную формулу поиска вероятности:

$$P = 1 - e^{-q(r,t)Svt}. \quad (4)$$

Концентрацию частиц  $q = u(M, t)$  рассматриваемой модели космического мусора будем определять из решения краевой задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} u = D \Delta_2 u - pu + Q(M, t); \\ u(M, 0) = 0, \quad M \in \Omega; \\ u(P, t) = 0, \quad P \in \partial \Omega, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (5)$$

где  $D$  — коэффициент турбулентной диффузии;  $p > 0$  — константа, определяющая интенсивность разрушения и исчезновения частиц в процессе их распространения.

Для рассматриваемого случая распределение частиц космического мусора с учетом подстановок можно записать при помощи двойного тригонометрического ряда Фурье:

$$u(x, y, t) = \frac{4Q_0}{L^2} e^{-\frac{v_1(x-x_0)+v_2(y-y_0)}{2D}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (1 - e^{-\lambda_{nm}t}) \frac{\sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{m\pi y_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L}}{\lambda_{nm}}. \quad (6)$$

При реализации программного продукта [2] были получены графики, характеризующие основные закономерности:

- при увеличении числа рассматриваемых частиц можно заметить сильное увеличение вероятности столкновения космического аппарата с объектами космического пространства. Данная закономерность наблюдается для космических аппаратов различных размеров. При этом размер космического аппарата влияет на скорость роста вероятности при увеличении частиц: для космического аппарата малых размеров при увеличении числа рассматриваемых частиц вероятность может увеличиться на несколько порядков; для более крупного космического аппарата вероятность изменится лишь в несколько раз;

- при увеличении времени моделирования вероятность столкновения также увеличивается. Соответственно, чем меньше время моделирования, тем ниже вероятность столкновения космического аппарата с космическими объектами за обозначенное время;

- при увеличении размера космического аппарата возрастает и вероятность столкновения рассматриваемого объекта с объектами космического пространства.

Таким образом, все полученные результаты соответствуют ожидаемым результатам моделирования ввиду используемых зависимостей, что позволяет высоко оценить состоятельность и адекватность построенной модели.

### Литература

1. Иванов В.Л. и др. *Космический мусор: Проблема и пути ее решения*. Москва, Патриот, 2002.
2. Нусинов М.Д. *Воздействие и моделирование космического вакуума*. Москва, Машиностроение, 1982.

## Calculating the probability of a particle collision with a spacecraft

© N.S. Klimova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia  
E-mail: natali.lesnyh@gmail.com



**Abstract.** The paper considers ways to solve the problem of finding the probability of collision of particles with a spacecraft, reviews and selects the methods and algorithms necessary to solve the problem. Based on the selected algorithms, a software product is being developed that allows research for various constantly changing parameters. Statistical modeling of space objects in orbits and different heights and the study of the results are carried out.

**Keywords:** *spacecraft, collision probability, particle concentration, space debris, space object.*

#### References

1. Ivanov V.L., et al. *Space debris: Problem and ways of solving it.* Moscow, Patriot Publ., 2002.
2. Nusinov M.D. *Impact and modeling of space vacuum.* Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982.

## Согласование моделей внутреннего строения Титана с данными гравитационного поля

© В.А. Кронрод<sup>1\*</sup>, А.Н. Дунаева<sup>1</sup>, Т.В. Гудкова<sup>2</sup>, О.Л. Кусков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского (ГЕОХИ РАН)

<sup>2</sup>Институт физики Земли имени О.Ю. Шмидта (ИФЗ РАН)

\*E-mail: va\_kronrod@mail.ru

**Аннотация.** Обсуждается проблема согласования моделей внутреннего строения частично дифференцированного Титана с моментом инерции, массой и числом Лява  $k_2$ . Модельные числа Лява близки к числам Лява  $k_2$  (Durante et al., 2019) при глубине внутреннего океана  $\geq 310$  км под ледяной корой из льда  $I_h$  мощностью  $\leq 90$  км.

**Ключевые слова:** *титан, внутреннее строение, момент инерции, числа Лява, океан.*

Осуществленные в последние десятилетия научно-исследовательские миссии к Юпитеру и Сатурну («Галилео», «Кассини-Гюйгенс») позволили получить принципиально новую информацию о спутниковых системах этих планет. В частности, был впервые измерен безразмерный момент инерции Титана  $I^* = 0,34190 \pm 0,001$  [1] и получены приливные числа Лява  $k_2$  [2]. В недавней работе [3] на основании обработки новых гравитационных данных опубликовано значение момента инерции 0,341. В результате обработки данных гравитационного поля Титана, выполненных в ходе шести пролетов спутника аппаратом «Кассини», были рассчитаны два значения числа Лява  $k_2$ :  $0,589 \pm 0,075$  и  $0,637 \pm 0,112$  [2]. Дополнительная обработка

результатов еще четырех пролетов космической станции позволила получить уточненное значение  $k_2 = 0,616 \pm 0,067$  [3].

Численное моделирование внутреннего строения Титана для согласования расчетных и экспериментальных чисел Лява проводилось на основе имеющейся геофизической информации о массе, средней плотности и приведенном моменте инерции. В расчетах использованы уравнения гидростатического равновесия, сохранения массы и момента инерции спутника, уравнения кондуктивного теплопереноса во внешней ледяной  $I_h$ -коре, уравнения состояния железокремниевой компоненты [4, 5].

Рассчитаны числа Лява  $k_2$ ,  $h_2$  для модели частично дифференцированного Титана, состоящего из внешней водно-ледяной оболочки, каменно-ледяной конвектирующей мантии и центрального железокремниевых ядра [4, 5]. Рассмотрены ограничения на тепловой поток, строение водно-ледяной оболочки и состав океана Титана, необходимые для согласования модельных и экспериментально измеренных чисел Лява по данным «Кассини».

Для согласования модельных ( $k_2 \geq 0,55$ ) и экспериментальных величин чисел Лява  $k_2 = 0,616 \pm 0,067$  [3] необходимо выполнение ограничений на величину поверхностного теплового потока  $F \geq 6,3$  мВт/м<sup>2</sup>, что соответствует глубине океана  $H_W \geq 310$  км под ледяной  $I_h$ -корой толщиной  $\leq 90$  км.

*Работа по согласованию моделей внутреннего строения Титана с данными гравитационного поля выполнена в рамках госзадания ГЕОХИ им. В.И. Вернадского РАН № 0137-2020-0004 при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ по проекту № 18-05-00685.*

## Литература

1. Iess L., Rappaport N.J., Jacobson R.A., Racioppa P., Stevenson D.J., Tortora P., Armstrong J.W., Asmar S.W. Gravity field, shape, and moment of inertia of Titan. *Science*, 2010, vol. 327, no. 5971, pp. 1367–1369. <https://doi.org/10.1126/science.1182583>
2. Iess L., Jacobson R.A., Ducci M., Stevenson D.J., Lunine J.I., Armstrong J.W., Asmar S.W., Racioppa P., Rappaport N.J., Tortora P. The tides of Titan. *Science*, 2012, vol. 337, no. 6093, pp. 457–459. <https://doi.org/10.1126/science.1219631>
3. Durante D., Hemingway D.J., Racioppa P., Iess L., Stevenson D.J. Titan's gravity field and interior structure after Cassini. *Icarus*, 2019, vol. 326, pp. 123–132.
4. Dunaeva A.N., Kronrod V.A., Kuskov O.L. Models of Titan with water-ice shell, rock-ice mantle, and constraints on the rock-iron component composition. *Dokl. Earth Sci.*, 2014, vol. 454, no. 1, pp. 89–93.
5. Dunaeva A.N., Kronrod V.A., Kuskov O.L. Physicochemical models of the internal structure of partially differentiated Titan. *Geochem. Int.*, 2016, vol. 54, no. 1, pp. 27–47.

## Adjustment of models of the Titan internal structure with data of the gravitation field

© V.A. Kronrod<sup>1\*</sup>, A.N. Dunaeva<sup>1</sup>, T.V. Gudkova<sup>2</sup>, O.L. Kuskov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> GEOKHI RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup> IPE RAS, Moscow, Russia

\*E-mail: va\_kronrod@mail.ru

**Abstract.** The paper considers problem of matching the models of the internal structure of the partially differentiated Titan with the Love numbers  $k_2$ , value of the moment of inertia and mass of Titan. To match the model and values of Love numbers ( $k_2$ ) (Durante et al., 2019), it is necessary to satisfy the constraints on the magnitude of the thickness a water ocean  $\geq 310$  km under the ice  $I_h$  shell  $\leq 90$  km.

**Keywords:** Titan, internal structure, moment of inertia, Love numbers, ocean.

The scientific research missions to Jupiter and Saturn implemented in recent decades (*Galileo* and *Cassini–Huygens*) made it possible to obtain principally new information about satellite systems of these planets. In particular, the dimensionless moment of inertia of Titan  $I^* = 0.34190 \pm 0.001$  was measured for the first time [1] and tidal Love numbers  $k_2$  were obtained [2]. In a recent work [3], based on the processing of new gravitational data, the value  $I^* \sim 0.341$  was published. Processing data on Titans gravitational field in the course of six flyby of the satellite by the Cassini spacecraft resulted in calculations of two values of the Love numbers  $k_2$ :  $0.589 \pm 0.075$  and  $0.637 \pm 0.112$  [2]. Additional processing of results from four other flybys of the spacecraft allowed one to obtain a refined value  $k_2 = 0.616 \pm 0.067$  [3].

The problem of matching the models of the internal structure of the partially differentiated Titan with the Love numbers  $k_2$ , value of the moment of inertia and mass of Titan is considered. Love numbers  $k_2$  and  $h_2$  have been calculated for the model of partially differentiated Titan consisting of the external water–ice shell, rock–ice convective mantle, and central rock–iron core [4, 5]. Constraints on the heat flow, structure of the water–ice shell, and composition of Titan’s ocean necessary for matching the model and experimental Love numbers with *Cassini* data have been considered.

The energy release of the ice crystallization process in the ocean due to cooling of Titan and the corresponding contribution to the surface heat flow  $\sim 0.76$  mW/m<sup>2</sup> have been estimated. Based on the analysis of quasi-stationary models of Titan’s internal structure, constraints on the the water–ice shell structure and estimates of model Love numbers and maxi-

imum surface heat flows composition of the rock–iron component with allowance for the radiogenic and tidal energies, as well as the energy of ice crystallization ocean, have been obtained. To match the model ( $k_2 \geq 0.55$ ) and experimental Love numbers  $k_2$  [3], it is necessary to satisfy the constraints on the magnitude of the surface heat flow  $\geq 6.3 \text{ mW/m}^2$ , which corresponds to the ocean depth  $\geq 310 \text{ km}$  under the ice  $I_h$  shell with thickness  $\leq 90 \text{ km}$ .

*The work on matching the models of Titan's internal structure with data on the gravitational field was carried out within the scope of the State Contract for the Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry, Russian Academy of Sciences, under partial support of the Russian Foundation for Basic Research, project no. 18-05-00685.*

## References

1. Iess L., Rappaport N.J., Jacobson R.A., Racioppa P., Stevenson D.J., Tortora P., Armstrong J.W., Asmar S.W. Gravity field, shape, and moment of inertia of Titan. *Science*, 2010, vol. 327, no. 5971, pp. 1367–1369. <https://doi.org/10.1126/science.1182583>
2. Iess L., Jacobson R.A., Ducci M., Stevenson D.J., Lunine J.I., Armstrong J.W., Asmar S.W., Racioppa P., Rappaport N.J., Tortora P. The tides of Titan. *Science*, 2012, vol. 337, no. 6093, pp. 457–459. <https://doi.org/10.1126/science.1219631>
3. Durante D., Hemingway D.J., Racioppa P., Iess L., and Stevenson D.J. Titan's gravity field and interior structure after Cassini. *Icarus*, 2019, vol. 326, pp. 123–132.
4. Dunaeva A.N., Kronrod V.A., Kuskov O.L. Models of Titan with water-ice shell, rock-ice mantle, and constraints on the rock-iron component composition. *Dokl. Earth Sci.*, 2014, vol. 454, no. 1, pp. 89–93.
5. Dunaeva A.N., Kronrod V.A., Kuskov O.L. Physicochemical models of the internal structure of partially differentiated Titan. *Geochem. Int.*, 2016, vol. 54, no. 1, pp. 27–47.

## Моделирование тепловой эволюции ядер ледяных спутников-гигантов

© Е.В. Кронрод\*, В.А. Кронрод, О.Л. Кусков

Институт геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского (ГЕОХИ РАН),  
Москва, Россия

\*E-mail: e.kronrod@gmail.com

**Аннотация.** Вопросы о составе, агрегатном состоянии, размерах и физических свойствах ядер спутников планет-гигантов, их тепловой эволюции, а также механизмах их формирования до сих пор остаются предметом многочисленных дискуссий. Модели внутренней структуры крупных ледяных спутников накладывают ограничения на состав ядер спутников в соответствии с веществом обычных ( $L/LL$ ) или углеродистых ( $CI$ ) хондритов или их смеси. Распределения температуры в ядрах спутников в значительной степени опреде-

ляют степень гидратации их силикатной компоненты, наличие или отсутствие внутренних металлических ядер. В настоящей работе представлены результаты по численному моделированию нестационарных температурных режимов в ядрах с учетом процессов конвективного переноса. Показано, что при переходе от силикатного состава к преобладанию гидросиликатов разница температур может достигать  $\approx 600$  К. По результатам расчетов можно сделать вывод, что при наличии конвекции состав пород ядра в значительной степени определяет тепловую эволюцию ядра.

**Ключевые слова:** *ледяные спутники-гиганты, ядро, температура, конвекция, хондриты.*

*Работа выполнена в рамках госзадания ГЕОХИ РАН  
№ 0137-2020-0004 при частичной финансовой поддержке гранта  
РФФИ по проекту № 18-05-00685.*

## **Modeling of the thermal evolution of the cores of icy giant satellites**

© E.V. Kronrod\*, V.A. Kronrod, O.L. Kuslov

Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry (GEOKHI RAS),  
Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): e.kronrod@gmail.com

**Abstract.** Questions on the composition, aggregate state, size and physical properties of the giant planets cores of satellites, their thermal evolution, as well as the mechanisms of their formation, are still the subject of numerous discussions. Models of the internal structure of large icy satellites impose restrictions on the composition of satellite cores in accordance with the matter of *L/LL* or *CI* chondrites or their mixture. The temperature distributions in the cores of satellites largely determine the measure of hydration of their silicate component, the presence or absence of internal metal cores. In this paper, we present the results of numerical modeling of nonstationary temperature regimes in cores with allowance for convective transfer processes. According to the results of calculations, it can be concluded that in the presence of convection, the composition of the core largely determines the thermal evolution of the core. For example, the temperature difference between silicate and hydro-silicate composition, can reach  $\approx 600$  K.

**Keywords:** *icy giant satellites, core, temperature, convection, chondrites.*

*The work was performed as part of the state assignment of Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry no. 0137-2020-0004 with partial financial support from RFBR grant under project no. 18-05-00685.*

## **Влияние химического состава и размерности пылевых фрактальных кластеров на эволюцию их внутренней структуры при дрейфе к центральным областям протопланетного диска**

© А.В. Русол, Е.В. Кронрод \*

Институт геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского (ГЕОХИ РАН),  
Москва, Россия

\*E-mail: e.kronrod@gmail.com

**Аннотация.** Рассмотрено влияние химического состава вещества пылевых кластеров и их фрактальной размерности на процессы изменения их структуры при дрейфе из относительно холодных областей к более горячим внутренним областям протопланетных дисков. В более холодных областях формируются кластеры, насыщенные льдами летучих компонентов. Этот факт приводит к тому, что при дрейфе в радиальном направлении такие кластеры поэтапно пересекают условные границы перехода соответствующих летучих из твердой фазы в газообразную. В зависимости от массовой доли того или иного летучего компонента в образующих кластер частицах происходит постепенное изменение порового пространства кластера. Возрастание объема пор приповерхностных слоев кластера приводит к увеличению способности кластера захватывать сохранившуюся в диске пыль субмиллиметровых размеров, что может обеспечивать механизм транспортировки вещества внешних областей протопланетных дисков в их внутренние более горячие области.

**Ключевые слова:** пылевые фрактальные кластеры, внутреннее строение, протопланетные диски, дрейф вещества.

*Авторы признательны Правительству Российской Федерации и Министерству высшего образования и науки РФ за поддержку по гранту № 075-15-2020-780 (№ 13.1902.21.0039).*

### **Литература**

1. Маров М.Я., Шевченко И.И. Экзопланеты: природа и модели. *Успехи физических наук*, 2020, т. 190, № 9, с. 897–932. DOI: 10.3367/UFN.2019.10.038673

**The effect of the chemical composition and dimensions  
of dusty fractal clusters on the evolution  
of their internal structure during drift to the central regions  
of the protoplanetary disk**

© A.V. Rusol, E.V. Kronrod\*

Vernadsky Institute of Geochemistry and Analytical Chemistry (GEOKHI RAS),  
Moscow, Russia

\*E-mail (speaker): e.kronrod@gmail.com

**Abstract.** The effect of the chemical composition and fractal dimension of the dust clusters on their structure during drift from relatively cold regions to the hotter inner regions of protoplanetary disks is considered. In colder regions, clusters saturated with volatile ices are formed. This leads to the fact that, when drifting in the radial direction, such clusters gradually cross the conditional boundaries of the transition of the corresponding volatiles from the solid to the gaseous phase. Depending on the mass fraction of a certain volatile component in the particles forming the cluster, a gradual change in the pore space of the cluster occurs. An increase in the pore volume of the near-surface layers of a cluster leads to an increase in the cluster's ability to capture dust of submillimeter sizes preserved in the disk, which can provide a mechanism for transporting matter from the outer regions of protoplanetary disks to their inner hotter regions.

**Keywords:** *dust fractal clusters, internal structure, protoplanetary disks, matter drift.*

*Authors acknowledge the support of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the grant no. 075-15-2020-780 (no. 13.1902.21.0039).*

**О малобюджетной миссии для исследования  
нескольких астероидов с пролетной траектории**

© А.А. Суханов

ИКИ РАН, Москва, Россия  
E-mail: sasha.su2@hotmail.com

**Аннотация.** Рассматривается возможность осуществления малобюджетной миссии с целью исследования нескольких астероидов одним космическим аппаратом с пролетной траектории. Для достижения главного пояса астероидов предлагается использовать полет Земля — Венера — Земля (маневр VEGA = Venus + Earth Gravity

Assist). Предлагаемая схема последующего полета включает в себя многократные гравитационные маневры у Земли; такая схема предоставляет большой выбор астероидов для исследования с близкого расстояния между каждой парой гравитационных маневров у Земли. Приводятся результаты предварительного анализа траекторий полета к нескольким астероидам при старте миссии в 2029 г. и при низких дополнительных затратах характеристической скорости на сближение с астероидами.

**Ключевые слова:** астероид, гравитационный маневр, пролетная траектория.

### **On a low-cost mission to explore several asteroids from a flyby trajectory**

© A.A. Sukhanov

Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
E-mail: sasha.su2@hotmail.com

**Abstract.** The possibility of carrying out a low-cost mission with the goal of exploration of several asteroids by one spacecraft from a flyby trajectory is considered. To reach the main asteroid belt, it is proposed to use the Earth–Venus–Earth flight (VEGA = Venus + Earth Gravity Assist maneuver). The proposed scheme of the subsequent flight includes multiple gravity assist maneuvers near the Earth; such a scheme provides a large selection of asteroids for study from a close distance between each pair of gravity assist maneuvers near the Earth. The results of a preliminary analysis of flight trajectories to several asteroids at the start of the mission in 2029 and at low additional costs of the characteristic velocity for approaching the asteroids are presented.

**Keywords:** asteroid, gravity assist maneuver, flyby trajectory.