

**Особенности решений динамических систем
с внешней возбуждающей нагрузкой
и неконсервативных динамических систем
с парным взаимодействием степеней свободы**

© Б.Д. Кашфутдинов¹, А.Ф. Георгиев²

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

²ООО «Динамикс», Химки, 141402, Россия

При создании математических моделей, как правило, прибегают к ряду допущений, позволяющих упростить модель, либо сократив ее размерность и уменьшив время моделирования, либо применив метод понижения размерности. При моделировании различных неконсервативных систем с парным взаимодействием степеней свободы (мехатронных систем, упругих летательных аппаратов в потоке газа, аэроупругих летательных аппаратов с системой автоматизированного управления и т. п.) возникает желание свести их к консервативной динамической системе с гармоническим воздействием. Однако, несмотря на кажущуюся схожесть этих двух систем, они существенно различаются, что нельзя не учитывать. На простейшем примере, имеющем аналитическое решение и решение в конечно-элементном программном пакете MSC.Nastran, рассмотрены различия в поведении консервативных и неконсервативных динамических систем с парным взаимодействием степеней свободы. Проведено сравнение полученных результатов решения в MSC.Nastran с результатами аналитического решения.

Ключевые слова: неконсервативные системы, гармоническое воздействие, колебания, аэроупругость, аэросервоупругость, аэроавтоупругость

Введение. Обеспечение высоких требований к таким эксплуатационным характеристикам управляемого упругого летательного аппарата (ЛА), как динамика полета и устойчивость движения, — важнейшая задача при проектировании любого объекта. При этом декомпозиция, т. е. раздельное рассмотрение аэроупругой конструкции аппарата и системы управления с последующим их объединением, в большинстве случаев оказывается неприемлемой [1], так как дает ошибочное представление о динамическом поведении системы в целом.

Как показано в [2], летательный аппарат (ЛА) совместно с системой автоматизированного управления (САУ) — обратной связью — образует систему с парным взаимодействием степеней свободы, т. е. неконсервативную систему [3, 4].

Неконсервативные динамические системы отличаются сложным взаимодействием, учесть которое можно при мультифизичном моделировании, например, взаимодействия конструкции с набегающим потоком [5], системы с реактивными силами [6], мехатронных систем — системы управления (СУ) и упругой конструкции и т. д.

Одной из основных задач при проектировании ЛА является оценка режимов устойчивого полета. Для того чтобы оценить устойчивость ЛА в потоке газа, в том числе и с САУ, используют методы оценки устойчивости неконсервативных систем. В инженерной практике с их помощью решение задачи обеспечения устойчивости сводится к построению аналитических выражений либо к разложению в ряд. Подобные подходы целесообразно применять для плоско-пространственных моделей, состоящих из стержней, балок и пластин [7].

Провести исследование устойчивости неконсервативных систем требуется при решении целого ряда задач, например, исследование ЛА с сочлененным крылом, гиперупругого ЛА, а также ЛА с реактивным двигателем, силы тяги двигателей которого возбуждают колебания корпуса [8, 9]. Как известно, потеря устойчивости в неконсервативных аэроупругих системах бывает двух видов: статическая (дивергенция) и динамическая (флаттер).

При создании математических моделей, как правило, принимают ряд допущений, помогающих упростить модель, например, сократить ее размерность [10].

При рассмотрении задачи устойчивости неконсервативных систем с парным взаимодействием степеней свободы может возникнуть желание свести ее к анализу консервативной динамической системы с гармоническим воздействием [11]. Тем не менее, несмотря на определенную внешнюю схожесть этих задач, между ними имеются существенные различия, пренебрежение которыми может привести к принципиальным ошибкам.

Проиллюстрируем на простейшем примере аналитическое решение этой задачи как решение для системы с двумя степенями свободы. Покажем, чем отличаются решения задач о вынужденных колебаниях от решения задач устойчивости неконсервативных динамических систем с парным взаимодействием степеней свободы — мехатронных систем, аэроупругих систем, аэроупругой системы с САУ (аэросервоупругих систем) и т. п.

Поскольку в настоящее время при расчетах широко используют метод конечного элемента, в том числе для решения задач аэроупругой устойчивости ЛА в потоке газа при наличии САУ (аэросервоупругость) и без САУ (аэроупругость), рассматривают возможность решения неконсервативной задачи в MSC.Nastran. Результаты, полученные в MSC.Nastran, сравнивают с результатами аналитического решения.

Решение аэроупругих задач классическими методами, изложенными в [7], сводится к решению задач о колебаниях стержней и пластин [12], суть которых заключается в последовательном применении поршневой теории [13], метода Галеркина и метода нормальных форм. Уравнения решаются с помощью степенных рядов и аналити-

ческих функций. Использование метода конечных элементов позволяет анализировать формы ЛА, которые нельзя с достаточной точностью свести к колебаниям пластин.

Цель настоящей работы — на примере простейшей двухмассовой модели показать принципиальное отличие поведения неконсервативной системы от поведения аналогичной системы с внешним гармоническим возбуждением. Следует отметить, что исследовать динамику полета и находить зоны неустойчивости можно только с помощью неконсервативной модели. На первый взгляд, складывается впечатление, что такая задача рассматривалась во многих работах [2, 7, 14], однако очень важным представляется сравнение поведения консервативной системы с гармоническим внешним возбуждением и неконсервативной с парным взаимодействием степеней свободы.

Вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы. Рассмотрим на примере двухстепенной динамической системы (рис. 1) особенности решения задачи упругих колебаний конструкции при действии силы на один из грузов. Здесь и далее m_1 , m_2 — массы первого и второго груза соответственно; c_1 , c_2 — коэффициенты жесткости первой и второй пружины соответственно; x_1 , x_2 — перемещение первого и второго груза соответственно. Допустим, что ко второму грузу приложена сила $F(t)$.

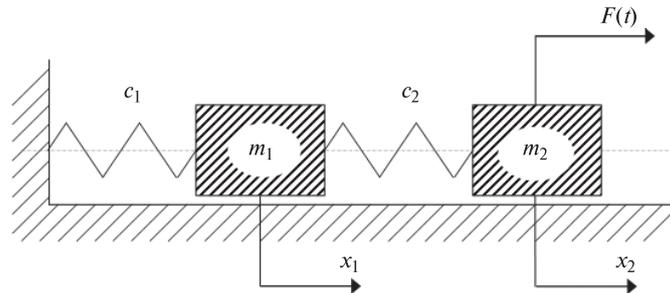


Рис. 1. Двухстепенная динамическая система

Уравнения малых колебаний без демпфирования простейшей динамической системы (см. рис. 1) имеют вид

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = F(t). \end{cases} \quad (1)$$

Уравнение (1) можно записать в матричной форме:

$$[M] \cdot \{\ddot{X}\} + [C] \cdot \{X\} = \{F\}. \quad (2)$$

Как известно, общий интеграл этой системы дифференциальных уравнений является суммой интеграла соответствующей системы

однородных уравнений и частного интеграла данной системы уравнений [14].

Решение уравнения (2) будет иметь вид

$$x_1 = A \sin(pt), x_2 = B \sin(pt),$$

где p — угловая частота; A, B — константы, найти которые можно с использованием начальных условий. Если обнулить определитель частотной матрицы и обозначить $\chi = p^2$, можно получить решение характеристического уравнения:

$$\chi_{1,2} = \frac{c_1 m_2 + c_2 (m_1 + m_2) \pm \sqrt{(-c_1 m_2 - c_2 (m_1 + m_2))^2 - 4c_1 c_2 m_1 m_2}}{2 m_1 m_2}. \quad (3)$$

Общее решение однородной системы будет иметь вид [13]:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 B_1 \sin(p_1 t) + r_2 B_2 \sin(p_2 t); \\ x_2 &= B_1 \sin(p_1 t) + B_2 \sin(p_2 t), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{A_1}{B_1} = \frac{c_2}{c_1 + c_2 - m_1 \chi_1^2} = \frac{c_2 - m_2 \chi_1^2}{c_2}; \\ r_2 &= \frac{A_2}{B_2} = \frac{c_2}{c_1 + c_2 - m_1 \chi_2^2} = \frac{c_2 - m_2 \chi_2^2}{c_2}. \end{aligned}$$

Из уравнений (3) видно, что общее решение зависит от свойств системы так же, как и в уравнении (3) собственные частоты колебаний системы зависят только от значений ее жесткости и массы.

В общем, изложенное выше позволяет сделать следующие выводы:

- вынужденные колебания системы являются гармоническими и имеют частоту возмущающих сил;
- амплитуды вынужденных колебаний системы не зависят от начальных условий и определяются только свойствами системы и действующими на нее силами.

Под действием гармонической возмущающей нагрузки движение упругой системы (4) представляет собой суперпозицию двух движений. Одно из них является комбинацией главных колебаний, происходящих с собственными частотами, не зависящими от начальных условий и возмущающих сил, а определяемых упруго-инерционными характеристиками системы. Амплитуды и начальные фазы главных колебаний определяются начальными условиями. Другое представляет собой периодическое движение, при котором каждая из координат меняется по гармоническому закону с частотой, равной частоте возмущающей силы.

Неконсервативная система с парным взаимодействием степеней свободы. В этих системах нагрузка, пропорциональная второй обобщенной координате, совершает работу на вариациях первой, и наоборот, нагрузка, зависящая от первой обобщенной координаты и совершающая работу на второй, отсутствует. В результате нагрузка имеет «однонаправленный» характер. Одним из примеров такой неконсервативной системы с парным взаимодействием степеней свободы является упругий ЛА в потоке газа.

Рассмотрим на примере простейшей неконсервативной системы с парным взаимодействием степеней свободы (см. рис. 1) особенности решения задачи аэроупругой устойчивости. Здесь ко второму грузу приложена сила $F(t) = ky_1$, зависящая от смещения первого груза y_1 (k — параметр неконсервативного нагружения). Данная простейшая модель может быть использована для предварительного анализа аэроупругих колебаний ЛА, продольных колебаний ракеты с жидкостным реактивным двигателем, колебаний управляемой упругой конструкции и т. д.

Следует отметить, что при $k = 0$ система является консервативной.

Уравнения малых колебаний без демпфирования простейшей неконсервативной модели с парным взаимодействием степеней свободы (см. рис. 1) имеют вид

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + c_1 y_1 - c_2 (y_2 - y_1) = 0; \\ m_2 \ddot{y}_2 - k y_1 + c_2 (y_2 - y_1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Для параметров системы зададим следующие числовые значения: масса первого груза $m_1 = 1$ кг; масса второго груза $m_2 = 5$ кг; жесткость первого упругого элемента $c_1 = 500$ Н/м, жесткость второго упругого элемента $c_2 = 500$ Н/м. Это не снижает целостности рассмотрения задачи, но упрощает анализ и делает его более наглядным.

Следовательно, собственные частоты системы будут составлять:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1,10 \text{ Гц}, \\ p_2 &= 5,16 \text{ Гц}. \end{aligned}$$

Частотное матричное уравнение системы примет вид

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - 1000 & 500 \\ 500 + k & 5\omega^2 - 500 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Обнулив определитель частотной матрицы, получим характеристическое алгебраическое уравнение

$$\lambda^2 - 1100\lambda - 100k + 50000 = 0, \quad (7)$$

где $\lambda = \omega^2$.

Корни характеристического уравнения (7) определяются по формуле $\lambda_{1,2} = 550 \pm 10\sqrt{D}$,

где $D = 2525 + k$ — дискриминант уравнения.

Система (5) становится неустойчивой, если:

1) $D < 0$ (флаттер),

2) $\lambda_i \leq 0$ (дивергенция), где λ_i — i -й корень характеристического уравнения (i -е собственное значение).

Таким образом, устойчивые значения параметра неконсервативного нагружения k находятся в интервале $(-2525; 500)$. График значений частот обоих тонов представлен на рис. 2. Видно, что при параметре $k = -2525$ частота становится кратной (флаттер), а при $k = 500$ частота низшего тона обнуляется (дивергенция). Полученные результаты демонстрируют границы устойчивости системы.

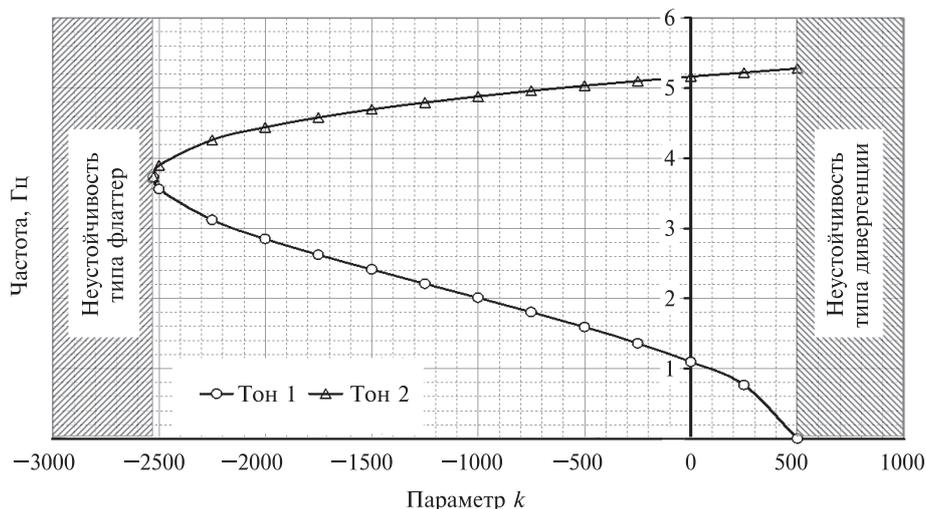


Рис. 2. Зависимость собственных значений простейшей модели от параметра неконсервативного нагружения k

Численное решение с использованием MSC.Nastran. Для проведения расчета была составлена упруго-массовая модель в Patran, представленная на рис. 3. Одномерные элементы, соединяющие узлы, моделируют пружины. Для них были заданы жесткости, соответствующие жесткостям пружин c_1 и c_2 соответственно, а в узлах 2 и 3 размещены точечные массы m_1 и m_2 соответственно. Узел 1 закреплен по шести степеням свободы (три перемещения, три вращения), а на узлы 2 и 3 наложены кинематические связи, в связи с чем свободное перемещение этих узлов допустимо только вдоль оси x

(закреплены по пяти степеням свободы — перемещение по y , z и три вращения).

Парное взаимодействие степеней свободы задавалось передаточными функциями (TF). Коэффициент k варьировался в пределах от -2500 до 500 с шагом 250 . Значение $k = 0$ в численном решении заменено $0,01$ в связи с вырождением матриц и также дополнительно найдено значение $k = -2525$ вблизи неустойчивости типа флаттер.

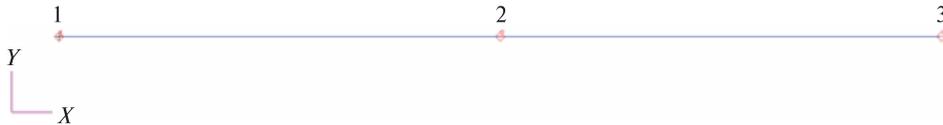


Рис. 3. Упруго-массовая модель в Patran

Динамические передаточные функции в MSC.Nastran определяются как регулятор с несколькими входами и одним выходом:

$$\left(B0 + B1 p + B2 p^2 \right) u_d + \sum_i \left(A0_i + A1_i p + A2_i p^2 \right) u_i = 0, \quad (8)$$

где u_d — зависимая степень свободы; u_i — независимая степень свободы; p — оператор Лапласа $\left(\frac{d}{dt} \right)$, $B0, B1, B2, A0_i, A1_i, A2_i$ — коэффициенты в законе управления.

Таким образом, $B1 = B2 = A1 = A2 = 0, A0 = k, B0 = 1$.

Результаты расчета в MSC.Nastran и результаты, полученные аналитическим методом, представлены для сравнения в табл. 1 и на рис. 4. Из них видно, что аналитическое и численные решения совпадают.

Таблица 1

Результаты расчетов аналитическим методом и численного по разработанной методике

k	Аналитическое решение, Гц		Численное решение MSC.Nastran, Гц	
	Тон 1	Тон 2	Тон 1	Тон 2
500	0,0000	5,2786	0,0000	5,2786
250	0,7669	5,2226	0,7669	5,2226
0,01	1,0970	5,1633	1,0970	5,1631
-250	1,3601	5,1003	1,3601	5,1003
-500	1,5915	5,0329	1,5915	5,0329
-750	1,8055	4,9602	1,8055	4,9602
-1000	2,0099	4,8809	2,0099	4,8809
-1250	2,2106	4,7934	2,2106	4,7934

k	Аналитическое решение, Гц		Численное решение MSC.Nastran, Гц	
	Тон 1	Тон 2	Тон 1	Тон 2
-1500	2,4129	4,6948	2,4129	4,6948
-750	2,6230	4,5808	2,6230	4,5808
-2000	2,8509	4,4425	2,8509	4,4425
-2250	3,1195	4,2582	3,1195	4,2582
-2500	3,5588	3,8985	3,5588	3,8985
-2525	3,7325	3,7325	3,7325	3,7325

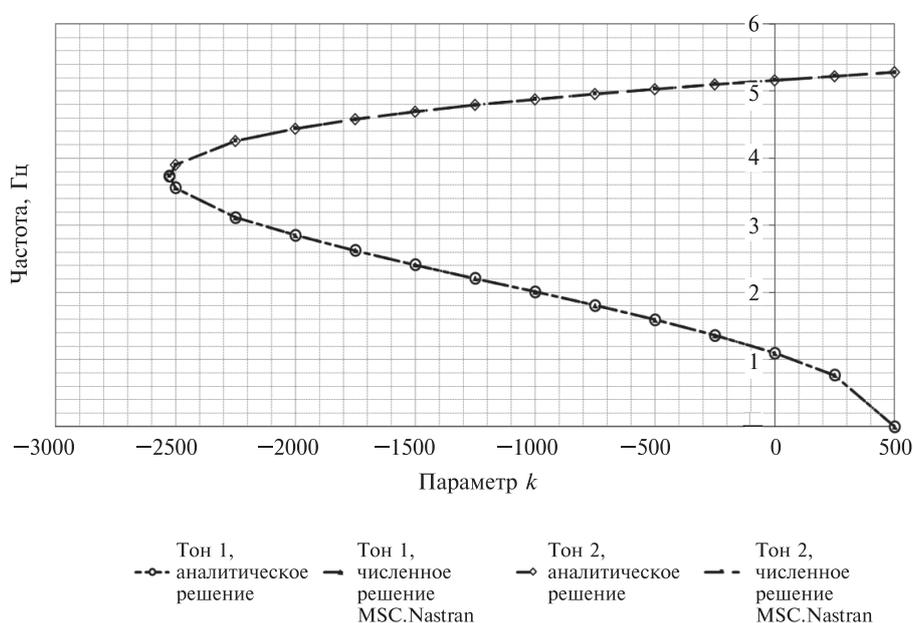


Рис. 4. Результаты аналитического расчета и численного расчета по разработанной методике, которые подтверждают полное соответствие результатов численного эксперимента теоретически полученным значениям

Заключение. Таким образом, при действии гармонической нагрузки на консервативную систему возбуждаемые движения в системе представляют собой комбинацию колебаний с частотами, соответствующими собственным частотам системы и частотам вынужденных колебаний, которые происходят в соответствии с фазами возбуждающих сил.

В неконсервативных системах частота колебаний зависит не только от параметров самой системы (массы и жесткости), но и от значений параметра неконсервативного нагружения. При этом имеет место смещение фаз колебаний, вследствие чего может проявиться

неустойчивость типа флаттер, а при некоторых значениях параметра неконсервативного нагружения может возникнуть неустойчивость типа дивергенция. Это существенно отличает поведение неконсервативных динамических систем от поведения консервативных.

Результаты сравнения двух моделей показывают, что имитировать поведение неконсервативной системы путем воздействия одной гармонической силы не представляется возможным, особенно при различных значениях параметра неконсервативного нагружения, потому что будет происходить сложное движение, не соответствующее поведению неконсервативной системы с парным взаимодействием степеней свободы.

Для доказательства возможности имитации поведения неконсервативной системы с парным взаимодействием степеней свободы путем воздействия нескольких сил или одной силы, действующей по сложному закону, в каждом конкретном случае необходимо проводить отдельные всесторонние исследования.

Сравнение результатов, полученных в MSC.Nastran, с результатами аналитического решения показало их высокую сходимость. Таким образом, методика решения задачи с использованием метода конечных элементов, представленная в настоящей статье, наряду с методами, приведенными в [7], позволяет не только решать задачи аэроупругости и аэроавтоупругости, но и оценивать устойчивость различных неконсервативных систем.

Работа поддержана грантом РФФИ № 20-08-01076а

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Солдаткин А. Системный инжиниринг в авиастроении. *АвиаСоюз: международная авиационно-космический журн.*, 2017, № 1 (64), с. 12–14.
- [2] Аринчев С.В. *Теория колебаний неконсервативных систем (с примерами на компакт-диске)*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
- [3] Смыслов В.И. О некоторых понятиях теории колебаний неконсервативных систем с несимметричными связями. *Известия вузов. ПНД*, 2005, т. 13, вып. 6, с. 143–150. DOI: 10.18500/0869-6632-2005-13-5-143-150
- [4] Selyutskiy Y.D. On dynamics of an aeroelastic system with two degrees of freedom. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, vol. 67, pp. 449–455. DOI: 10.1016/j.apm.2018.11.010
- [5] Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z. Elastically Mounted Double Aerodynamic Pendulum. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2019, vol. 19, no. 05, art. ID 1941007. DOI:10.1142/S0219455419410074
- [6] Baikov A., Mayorov A.Y. On the equilibrium position stability of discrete model of filling hose under the action of reactive force. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 127–146. DOI: 10.20537/nd1501007
- [7] Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. Москва, Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961, 340 с.
- [8] Гуськов А.М., Пановко Г.Я. *Особенности динамики механических систем под действием неконсервативных (циркуляционных) сил*. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013, 56 с.

- [9] Fazelzadeh S.A., Tashakorian M., Ghavanloo E., Friswell M.I., Amoozgar M. Nonconservative stability analysis of columns with various loads and boundary conditions. *AIAA Journal*, 2019, pp. 1–9. DOI: 10.2514/1.j057501
- [10] Wei Tian, Yingsong Gu, Hao Liu, Xiaochen Wang, Zhichun Yang, Yueming Li, Ping Li. Nonlinear aeroservoelastic analysis of a supersonic aircraft with control fin free-play by component mode synthesis technique. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, vol. 493. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115835
- [11] Мензульский С.Ю., Бура Р.В. Определение модальных характеристик и расчетные исследования по обеспечения безопасности летательного аппарата от флаттера. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 12. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-12-1833>
- [12] Eugeni M., Mastroddi F., Dowell E.H. Normal form analysis of a forced aeroelastic plate. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, vol. 390, pp. 141–163, DOI: 10.1016/j.jsv.2016.12.001
- [13] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967.
- [14] Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. *Колебания в инженерном деле*. Москва, Машиностроение, 1985, 472 с.

Статья поступила в редакцию 22.12.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кашфутдинов Б.Д., Георгиев А.Ф. Особенности решений динамических систем с внешней возбуждающей нагрузкой и неконсервативных динамических систем с парным взаимодействием степеней свободы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 3. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-3-2061>



Кашфутдинов Булат Дамирович — старший преподаватель кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области аэрогидроупругости, аэросервоупругости, прочности и усталости конструкций летательного аппарата и аэрокосмических систем.
e-mail: bkashfutdinov@bmstu.ru



Георгиев Александр Федорович — канд. техн. наук, технический директор ООО «Динамикс». Специализируется в области динамики, аэроупругости, аэросервоупругости и мультифизических систем. e-mail: a.georgiev@dynamx.ru

The features of solutions of dynamical systems with an external exciting load and non-conservative dynamical systems with pairwise interaction of degrees of freedom

© B.D. Kashfudinov¹, A.F. Georgiev²

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

²LLC Dynamx, Khimki, 141402, Russia

When mathematical models are developed, as a rule, a number of assumptions is done, which makes it possible to simplify the model, reduce its dimension and simulation time, or use the dimension reduction method. When modeling non-conservative systems with pairwise interaction of degrees of freedom, e.g. mechatronic systems, an elastic aircraft in a flow, an aeroelastic aircraft with an automated control system, etc., there is a desire to reduce the problem to a conservative dynamic system with harmonic action. The study shows that despite the apparent similarity of the tasks, they have significant differences that cannot be ignored. Differences in the behavior of conservative dynamical systems and non-conservative dynamical systems with pair interaction of degrees of freedom are considered. The results are demonstrated on the simplest example with an analytical solution, and in the finite element software package MSC.Nastran. The results of the solution in MSC.Nastran are compared with the results of the analytical solution.

Keywords: non-conservative systems, harmonic action, oscillations, aeroelasticity, aero-servoelasticity, aeroautoelasticity

This work was supported by the RFBR grant No. 20-08-01076a

REFERENCES

- [1] Soldatkin A. *AviaSoyuz: mezhdunar. aviatsionno-kosmicheskiy zhurnal — AviaSouz, International Aerospace Magazine*, 2017, no. 1 (64), pp. 12–14.
- [2] Arinchev S.V. *Teoriya kolebaniy nekonservativnykh sistem (s primerami na kompakt-diske)* [Oscillation theory for non-conservative systems (with examples on CD)]. Moscow, BMSTU Publ., 2002.
- [3] Smyslov V.I. *Izvestiya vuzov. PND — Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 13, no. 6, pp. 143–150.
DOI: 10.18500/0869-6632-2005-13-5-143-150
- [4] Selyutskiy Y.D. On dynamics of an aeroelastic system with two degrees of freedom. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, vol. 67, pp. 449–455.
DOI: 10.1016/j.apm.2018.11.010
- [5] Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z. Elastically Mounted Double Aerodynamic Pendulum. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2019, vol. 19, no. 05, art. ID 1941007.
DOI: 10.1142/S0219455419410074
- [6] Baikov A., Mayorov A.Y. On the equilibrium position stability of discrete model of filling hose under the action of reactive force. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 127–146. DOI: 10.20537/nd1501007
- [7] Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti* [Non-conservative problems in the theory of elastic stability]. Moscow, Gos. izd. fiz.-mat. lit. Publ., 1961, 340 p.

- [8] Guskov A.M., Panovko G.Ya. *Osobennosti dinamiki mekhanicheskikh sistem pod deystviem nekonservativnykh (tsirkulyatsionnykh) sil* [Features of the dynamics of mechanical systems under the influence of non-conservative (circulation) forces]. Moscow, BMSTU Publ., 2013, 56 p.
- [9] Fazelzadeh S.A., Tashakorian M., Ghavanloo E., Friswell M.I., Amoozgar M. Non-conservative stability analysis of columns with various loads and boundary conditions. *AIAA Journal*, 2019, pp. 1–9. DOI: 10.2514/1.j057501
- [10] Wei Tian, Yingsong Gu, Hao Liu, Xiaochen Wang, Zhichun Yang, Yueming Li, Ping Li. Nonlinear aeroservoelastic analysis of a supersonic aircraft with control fin free-play by component mode synthesis technique. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, vol. 493. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115835
- [11] Menzulskiy S.Yu., Bura R.V. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, iss. 12. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-12-1833>
- [12] Eugeni M., Mastroddi F., Dowell E. H. Normal form analysis of a forced aeroelastic plate. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, vol. 390, pp. 141–163, DOI: 10.1016/j.jsv.2016.12.001
- [13] Volmir A.S. *Ustoychivost deformiruemykh sistem* [Stability of deformable systems.]. Moscow, Nauka Publ., 1967.
- [14] Weaver W. Jr., Timoshenko S.P., Young D.H. *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley & Sons, 1990, 624 p. [In Russ.: Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W. *Kolebaniya v inzhenernom dele*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985, 472 p.].

Kashfudinov B.D., Assist. Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University. Research interests: aeroservoelasticity, strength, fatigue and fracture of flying vehicles. e-mail: bkashfudinov@bmstu.ru

Georgiev A.F., Cand. Sc. (Eng.), Technical Director, LLC Dynamax. Research interests: dynamics, aeroelasticity, aeroservoelasticity and multiphysics systems. e-mail: a.georgiev@dynamx.ru