УДК 532.65:51-37 DOI: 10.18698/2308-6033-2021-3-2060

Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в тороидальном сосуде

© Юй Чжаокай, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена осесимметричная задача об определении форм равновесия жидкости в тороидальных баках космических аппаратов в условиях, близких к невесомости. При отсутствии значительных массовых гравитационных сил поведение жидкого топлива в баках начинают определять силы поверхностного натяжения, представляющие собой межмолекулярные силы на границе двух фаз. На основе принципа стационарности потенциальной энергии получены условия равновесия замкнутой системы жидкость — газ — твердая стенка в условиях микрогравитации. Приведены система дифференциальных уравнений, определяющая форму равновесия жидкости в тороидальных баках, условие Дюпре — Юнга, условие соприкосновения свободной поверхности с твердой стенкой и условие сохранения объема жидкости. Количественно оценено влияние различных параметров, таких как угол смачивания, число Бонда, соотношение радиусов осевой окружности и окружности меридиана тора и относительный объем заполнения баков жидкостью, на форму равновесия капиллярной жидкости. Проведенное исследование форм равновесия жидкого топлива позволяет разработать рекомендации по проектированию заборных устройств топливных баков в ракетно-космической технике. Полученная равновесная поверхность представляет собой невозмущенную границу области, занимаемой жидким топливом, и поэтому является необходимой информацией для дальнейшего исследования динамики космических аппаратов.

Ключевые слова: *капиллярная жидкость, тороидальный сосуд, равновесная свободная поверхность, метод Рунге — Кутты*

Введение. В условиях космического полета возникают проблемы обеспечения надежного питания двигателя топливом. Проблемы связаны с необходимостью многоразового включения двигателя и могут возникать как в условиях невесомости, так и при отрицательных и боковых перегрузках, а также в случаях импульсного режима работы двигателей. Для решения подобных проблем необходимо знать положение равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости. Анализ приведенных в работах [1–7] методов теоретического исследования равновесных капиллярных поверхностей показывает, что в современной гидродинамике недостаточно разработаны методы численного моделирования равновесия двухсвязных, несвязных, а также сильно искривленных односвязных капиллярных поверхностей. В работе [8] подробно рассмотрено решение задачи о равновесии капиллярной жидкости в сосуде, имеющем форму коаксиального цилиндра, на основе метода Рунге — Кутты — Фельберга. Работа [9] посвящена осесимметричной задаче об эволюции свободной поверхности жидкости по мере заполнения емкости тороидальной формы при невесомости с применением итерационно-разностного подхода. Исследование формы равновесия капиллярной жидкости в тороидальных сосудах актуально, так как тороидальные баки, в связи с их преимуществами в компоновке, все больше применяются в космических аппаратах.

Постановка задачи. Введем цилиндрическую систему координат $Or\eta z$, начало координат O и ось Oz которой приведены на рис. 1. Используем длину дуги s для описания формы свободной поверхности жидкости и угол θ для описания поверхности твердой стенки сосуда.

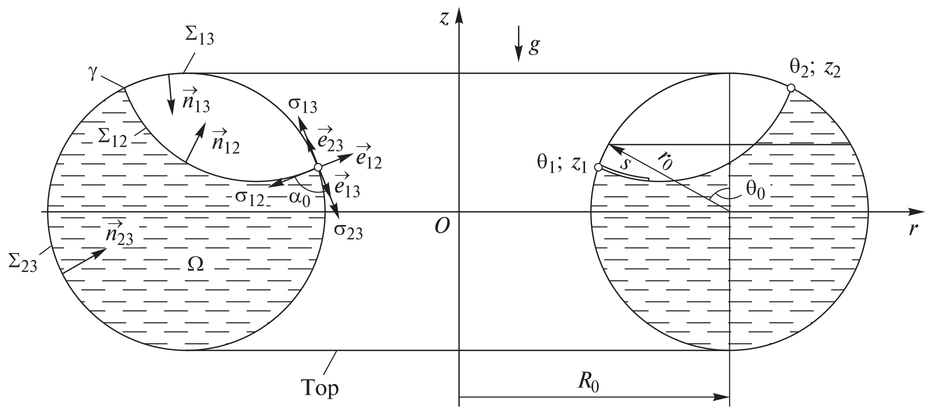

Рис. 1. Расчетная схема для определения форм равновесия жидкости в тороидальном сосуде

Топливные емкости представляют собой замкнутую механическую систему жидкость — газ — твердая стенка. Пренебрегая плотностью потенциала массовых сил газа, запишем выражение для потенциальной энергии системы с учетом поверхностного взаимодействия:

$$U = \sigma_{12}\left|\Sigma_{12}\right| + \sigma_{23}\left|\Sigma_{23}\right| + \sigma_{13}\left|\Sigma_{13}\right| + \rho\int\limits_{\Omega}\Pi\left(\vec{x}\right)d\Omega,$$

где σ_{12}, σ_{23}, σ_{13} — коэффициенты поверхностного натяжения на границах разделов газ — жидкость, жидкость — твердая стенка и газ — твердая стенка соответственно; $\left|\Sigma_{12}\right|, \left|\Sigma_{23}\right|, \left|\Sigma_{13}\right|$ — площади соответствующих поверхностей; ρ — плотность жидкости; $\Pi\left(\vec{x}\right) = gz$ — плотность потенциала массовых сил жидкости; Ω — объем, занимаемый жидкостью.

Материал стенок топливной емкости, жидкость и газ будем считать однородными, т. е. коэффициенты σ_{12}, σ_{23}, σ_{13} — постоянные величины.

Согласно принципу стационарности потенциальной энергии, система находится в равновесии только тогда, когда $\delta U = 0$ для всех допустимых вариаций свободной поверхности Σ_{12}, сохраняющих условия несжимаемости и непротекания жидкости на твердой стенке:

$$\delta\int\limits_{\Omega} d\Omega = \int\limits_{\Sigma_{12}} (\vec{n}_{12}\cdot\delta\vec{x})d\Sigma_{12} = 0;\ \vec{n}_{23}\cdot\delta\vec{x} = \vec{n}_{13}\cdot\delta\vec{x} = 0 \quad \left(\Sigma_{23}\cup\Sigma_{13}\right),$$

где $\delta\vec{x}$ — вектор малого смещения точек поверхности Σ_{12}.

По формуле Гаусса имеем следующие соотношения:

$$\delta\left|\Sigma_{12}\right| = \int\limits_{\gamma}(\vec{e}_{12}\cdot\delta\vec{x})d\gamma - \int\limits_{\Sigma_{12}} 2H_{12}(\vec{n}_{12}\cdot\delta\vec{x})d\Sigma_{12};$$

$$\delta\left|\Sigma_{23}\right| = -\delta\left|\Sigma_{13}\right| = \int\limits_{\gamma}(\vec{e}_{23}\cdot\delta\vec{x})d\gamma,$$

где γ — линия трехфазного контакта; H_{12} — средняя кривизна поверхности Σ_{12}.

Вариация потенциала массовых сил

$$\delta\int\limits_{\Omega}\Pi\left(\vec{x}\right)d\Omega = \int\limits_{\Sigma_{12}}\Pi\left(\vec{x}\right)(\vec{n}_{12}\cdot\delta\vec{x})d\Sigma_{12}.$$

Согласно правилу неопределенных множителей Лагранжа, примененному к условию несжимаемости, существует такая постоянная c, что для всех $\delta\vec{x}$, удовлетворяющих только одному условию непротекания, имеем [1, 2]

$$\delta U + c\int\limits_{\Sigma_{12}}(\vec{n}_{12}\cdot\delta\vec{x})d\Sigma_{12} = 0.$$

Таким образом, вариационная постановка задачи равновесия системы примет вид

$$\int\limits_{\Sigma_{12}}\left[\rho\Pi\left(\vec{x}\right) + c - \sigma_{12}\cdot 2H_{12}\right](\vec{n}_{12}\cdot\delta\vec{x})d\Sigma_{12} + \\ + \int\limits_{\gamma}\left[\sigma_{12}\cos\alpha_0 + \left(\sigma_{23}-\sigma_{13}\right)\right](\vec{e}_{23}\cdot\delta\vec{x})d\gamma = 0, \qquad (1)$$

где α_0 — угол смачивания жидкости на твердой стенке.

Из вариационной постановки задачи равновесия (1) вытекают условия равновесия гидромеханической системы газ — жидкость — твердая стенка:

$$\rho\Pi(\vec{x}) + c - \sigma_{12} \cdot 2H_{12} = 0 \qquad (\Sigma_{12}); \tag{2}$$

$$\sigma_{12}\cos\alpha_0 + (\sigma_{23} - \sigma_{13}) = 0 \qquad (\gamma). \tag{3}$$

Равенство (1) играет роль дифференциального уравнения поверхности и может быть записано в безразмерной форме:

$$\sigma_{12} \cdot 2H_{12} = \rho g z + c \to 2H = \mathrm{Bo}\bar{z} + C, \tag{4}$$

где $H = H_{12} r_0$; $\mathrm{Bo} = \left(\rho g r_0^{\,2}\right) / \sigma_{12}$ — число Бонда, характеризующее соотношение массовой силы и силы поверхностного натяжения; $\bar{z} = z / r_0$ (в дальнейшем черту в обозначении безразмерных координат будем опускать).

Задача о нахождении формы равновесной поверхности сводится к построению решения уравнения (4) при граничном условии Дюпре — Юнга и условии сохранения объема жидкости. Случай $\mathrm{Bo} = 0$ приводит к известной в дифференциальной геометрии задаче об изучении поверхности с постоянной средней кривизной.

Для применения численного метода Рунге — Кутты преобразуем уравнение (4) в систему дифференциальных уравнений первого порядка и будем считать далее все величины безразмерными:

$$\begin{cases} r'(s) = u(s); \\ z'(s) = v(s); \\ u'(s) = -v(s)\left(\mathrm{Bo}z(s) + C - \dfrac{v(s)}{r(s)}\right); \\ v'(s) = u(s)\left(\mathrm{Bo}z(s) + C - \dfrac{v(s)}{r(s)}\right). \end{cases}$$

Начальные условия имеют следующий вид:

$$r(0) = \delta - \sin\theta_1; \; z(0) = \cos\theta_1;$$

$$u(0) = -\cos(\alpha_0 + \theta_1); \; v(0) = -\sin(\alpha_0 + \theta_1),$$

где $\delta = R_0 / r_0$.

Условия соприкосновения свободной поверхности с твердой стенкой

$$l(s_0) = \left[\, \delta - r(s_0)\right]^2 + z(s_0)^2 = 1,$$

где l — расстояние между центром малого круга и линией смачивания.

Условие Дюпре — Юнга

$$\alpha(s_0) = \sin^{-1}\left(r'(s_0)\right) + \sin^{-1}\left(z(s_0)\right) = \alpha_0.$$

Условие сохранения объема жидкости

$$V(s_0) = 2\pi\left(\int_0^{s_0} zrr'ds - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\tau\left(\delta - \sin\tau\right)\left(-\cos\tau\right)d\tau\right) = V_0.$$

Алгоритм решения. В рассматриваемой задаче имеется три неизвестных константы $s_0, C, \theta_1,$ которые существенно затрудняют ее решение. В настоящей работе разработан алгоритм решения задачи на основе метода Рунге — Кутты четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right),$$

где $K_1 = hf\left(s_i, y_i\right)$; $K_2 = hf\left(s_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right)$;

$K_3 = hf\left(s_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right)$; $K_4 = hf\left(s_i + h, y_i + K_3\right)$.

Логическая схема реализации этого алгоритма в среде MATLAB приведена на рис. 2.

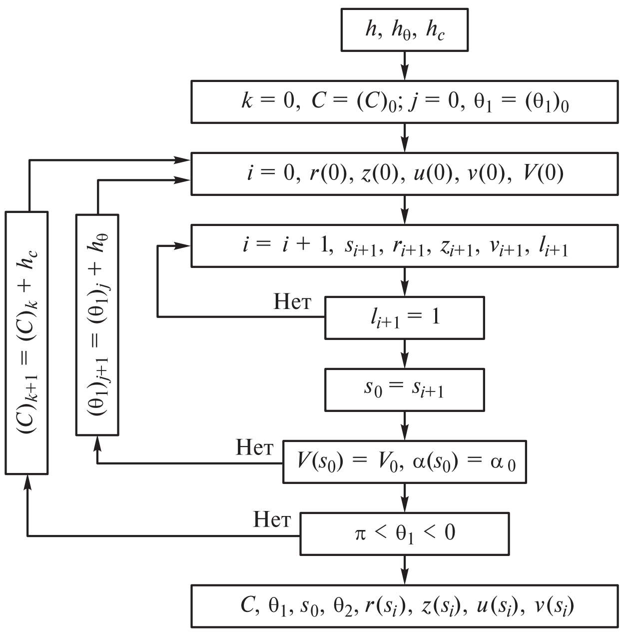

Рис. 2. Логическая схема реализации алгоритма решения задачи

Результаты численных экспериментов. В программе MATLAB получены формы равновесия капиллярной жидкости для различных практически важных ситуаций (рис. 3–6). Все формы свободной поверхности жидкости приведены для правой части поперечного сечения тора. В таблице представлены характеристики свободной поверхности в тороидальном сосуде при различных углах смачивания α_0.

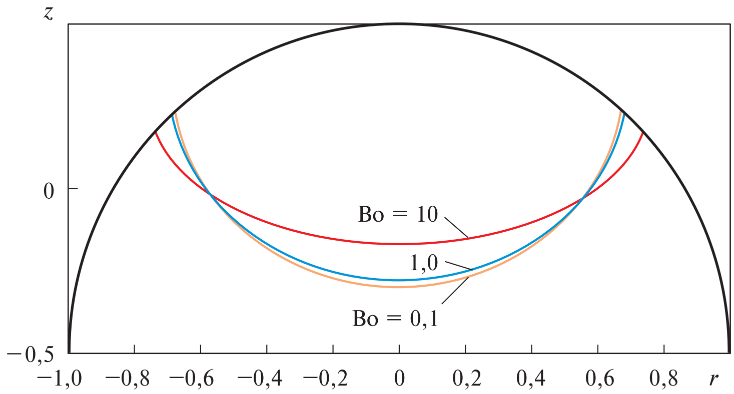

Рис. 3. Формы равновесия жидкости в сферическом сосуде при условиях $\alpha_0 = 60°$, $V_0 = 0,844$

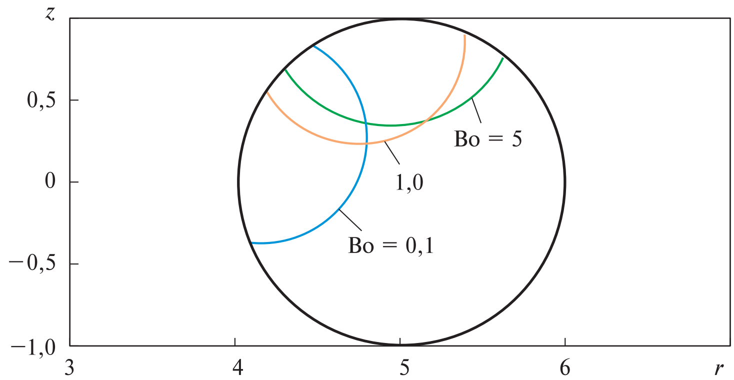

Рис. 4. Формы равновесия жидкости в тороидальном сосуде при условиях $\alpha_0 = 60°$, $V_0 = 0,804$, $\delta = 5$

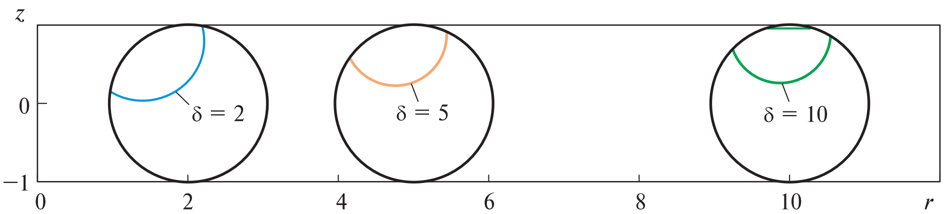

Рис. 5. Формы свободной поверхности жидкости в тороидальном сосуде при условиях $\alpha_0 = 60°$, $V_0 = 0,804$, Bo = 1

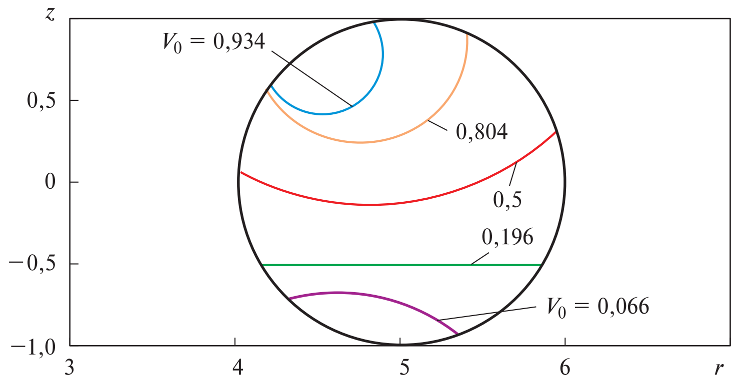

Рис. 6. Эволюция свободной поверхности жидкости в тороидальном сосуде при условиях α_0 = 60°, Bo = 1, δ = 5

Характеристики свободной поверхности жидкости в тороидальном сосуде при условиях Bo = 1, θ_0 = 60°, δ = 5

α_0, град	C	θ_1, град	θ_2, град	z_1	z_2
80	0,688	56,4	323,8	0,553	0,808
70	0,964	56,0	330,4	0,559	0,870
60	1,212	55,3	337,0	0,569	0,920
50	1,420	53,7	343,0	0,592	0,956
40	1,589	51,3	348,9	0,625	0,981
30	1,716	48,4	354,8	0,664	0,996
20	1,799	44,2	360,1	0,717	1,0
10	1,846	39,4	365,6	0,773	0,995

Исследовано влияние интенсивности поля массовых сил на форму равновесной поверхности, результаты приведены на рис. 3 и 4. При сравнении изображений на рис. 3 и 4 видно, что в тороидальных полостях ориентация свободной поверхности изменяется против хода часовой стрелки при уменьшении числа Бонда Bo.

Формы равновесия капиллярной жидкости при различных соотношениях радиуса R_0 осевой окружности и радиуса r_0 окружности меридиана тора представлены на рис. 5. При увеличении соотношения радиусов δ форма приближается к равновесной поверхности жидкости в трубке кругового сечения, что доказывает достоверность полученных результатов. Эволюция равновесной формы при различных объемах заполнения сосуда жидкостью приведена на рис. 6. Это одна из актуальных задач гидромеханики невесомости [1, 2], однако ее решение не удавалось получить из-за отсутствия эффективного метода.

После строгого геометрического обоснования можно сделать вывод, что существует критический объем, соответствующий углу $\theta_0 = \pi - \alpha_0$, при достижении которого наблюдается плоская свободная поверхность, перпендикулярная направлению внешнего силового поля.

Заключение. В настоящей работе количественно оценено влияние различных параметров, таких как угол смачивания α_0, число Бонда Bo, соотношение радиусов окружностей $\delta = R_0 / r_0$ и относительный объем V_0 заполнения бака жидкостью, на форму равновесия капиллярной жидкости. При решении поставленной задачи основные трудности связаны с определением трех заранее неизвестных констант s_0, C, θ_1. С этой целью составлены три краевых условия. Введено параметрическое описание твердой стенки тора, что упрощает форму начальных и краевых условий. В будущем будут исследованы равновесные свободные поверхности при малых углах смачивания $[0,\ 10°]$, так как именно в этом диапазоне находятся углы смачивания реального ракетного топлива в баках. Кроме того, на основе полученной формы свободной поверхности можно исследовать колебания жидкости в условиях микрогравитации.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мышкис А.Д., ред. *Гидромеханика невесомости*. Москва, Наука, 1976, 504 с.

[2] Мышкис А.Д., ред. *Методы решения задачи гидромеханики для условий невесомости*. Киев, Наукова думка, 1992, 592 с.

[3] Полевиков В.К. О методах численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей. *Дифференциальные уравнения*, 1999, т. 35, № 7, с. 975–981.

[4] Газиев Э.Л. *Задачи статики, устойчивости и малых колебаний гидросистемы жидкость — баротропный газ в условиях, близких к невесомости.* Дис. … канд. физ.-мат. наук. Симферополь, 2014, 231 с.

[5] Нгуен З.Х. *Разработка математических моделей динамики твердого тела, имеющего полости с жидкостью и заборными устройствами.* Дис. … канд. техн. наук. Москва, 2016, 156 с.

[6] Cheng X.D., Wang Z.L. The equation and the numerical analysis of static fluid surface in revolving symmetrical tank under low gravity. *Chin. J. of Computational Physics*, 2000, vol. 17, no. 3, pp. 273–279.

[7] Yang D., Yue B., Zhu L., Song X. Solving shapes of hydrostatic surface in rectangular and revolving symmetrical tanks under shooting method. *Chin. J. Space Sci.*, 2012, vol. 32 (1), pp. 85–91.

[8] Siekmann J., Scheideler W., Tietze P. Static meniscus configurations in propellant tanks under reduced gravity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineerin*g, 1981, vol. 28, no. 1, pp. 103–116.

[9] Будник А.М., Полевиков В.К. Осесимметричные формы равновесия жидкости в тороидальном сосуде при невесомости. *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*, 1986, № 6, с. 154–156.

Статья поступила в редакцию 01.02.2021

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:
Юй Джаокай, Темнов А.Н. Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в тороидальном сосуде. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 3. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-3-2060

Юй Чжаокай — аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: yuzhaokai933@mail.ru

Темнов Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: antt45@mail.ru

Study of the equilibrium free surface of a capillary liquid in a toroidal vessel

© Yu Zhaokai, A.N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper considers an axisymmetric problem of determining the forms of equilibrium of liquid in spacecraft toroidal tanks under conditions close to weightlessness. In the absence of significant mass gravitational forces, the behavior of liquid fuel in tanks begins to be determined by surface tension forces, which are intermolecular forces at the interface of two phases. Relying on the principle of stationary potential, we obtained the conditions of equilibrium of the closed system "liquid - gas - solid wall" under microgravity conditions. The study introduces a system of differential equations that determines the form of equilibrium of a liquid in toroidal tanks, the Young — Dupre equation, the condition for the contact of a free surface with a solid wall, and the condition for the conservation of the volume of the liquid. Furthermore, we quantified the influence of various parameters, such as the contact angle α_0, the Bond number B_0, the ratio of the radii of the circles $\delta = R_0/r_0$ and the relative filling volume of liquids V_0, on the form of the equilibrium of the capillary liquid. The study of the forms of equilibrium of liquid fuel makes it possible to develop recommendations for the design of intake devices for fuel tanks in rocket and space technology. Findings of research show that the obtained equilibrium surface is also the unperturbed boundary of the region occupied by liquid fuel, which gives necessary information for further investigation of the spacecraft dynamics.

Keywords: *capillary fluid, toroidal vessel, equilibrium free surface, Cauchy problem*

REFERENCES

[1] Babskiy V.G., Kopachevskiy N.D., Myshkis A.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Gidromekhanika nevesomosti* [Hydromechanics of weightlessness]. Moscow, 1976, 504 p.

[2] Myshkis A.D., Kopachevskiy N.D., Zhukov M.Yu., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. *Metody resheniya zadachi gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Methods for solving the problems of hydromechanics for weightlessness conditions]. Kiev, 1992, 592 p.

[3] Polevikov V.K. *Differentsialnye uravneniya — Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 7, pp. 975–981.

[4] Gaziev E.L. *Zadachi statiki, ustoychivosti i malykh kolebaniy gidrosistemy "zhidkost — barotropny gaz" v usloviyakh, blizkikh k nevesomosti*. Diss. cand. fiz.-mat. nauk [Problems of statics, stability and small oscillations of the hydraulic system "liquid — barotropic gas" in conditions close to weightlessness. Cand. phys.-and-math. sc. diss.]. Simferopol, 2014, 231 p.

[5] Nguyen Z.H. *Razrabotka matematicheskikh modeley dinamiki tverdogo tela, imeyushchego polosti s zhidkostyu i zabornymi ustroystvami*. Diss. cand. tekh. nauk [Development of mathematical models of the dynamics of a rigid body with cavities with a liquid and intake devices. Cand. eng. sc. diss.]. Moscow, 2016, 156 p.

[6] Cheng X.D., Wang Z.L. The equation and the numerical analysis of static fluid surface in revolving symmetrical tank under low gravity. *Chin. J. of Computational Physics*, 2000, vol. 17, no. 3, pp. 273–279.

[7] Yang Dandan, Yue Baozeng, Zhu Lemei, Song Xiaojuan. Solving shapes of hydrostatic surface in rectangular and revolving symmetrical tanks under shooting method. *Chin. J. Space Sci*., 2012, vol. 32 (1), pp. 85–91.

[8] Siekmann J., Scheideler W., Tietze P. Static meniscus configurations in propellant tanks under reduced gravity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineerin*g, 1981, vol. 28, no. 1, pp. 103–116.

[9] Budnik A.M., Polevikov V.K. *Izv. AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* (*Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas*), 1986, no. 6, pp. 154–156.

Yu Zhaokai, post-graduate student, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: yuzhaokai933@mail.ru

Temnov A.N., Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: antt45@mail.ru