

## Решение задач оптимального управления аэрокосмическим самолетом

© А.Ю. Мельников

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Приведен обзор работ по методам решения проблем управления аэрокосмическим самолетом. Суть методики заключается в получении эталонного оптимального управления и его аппроксимации в функциях наведения. Сформулирована постановка задачи по формированию оптимальных функций наведения с учетом всех существенных физических факторов. Выбраны методы решения и расчетная система координат, разработаны математическая модель, методики и автоматизированные процедуры сквозной оптимизации на основе принципа максимума, формирования и оптимизации функций наведения. В дополнение к известным методам решения краевых задач разработаны методики аналитического расчета начального приближения и поиска области сходимости. Результаты численных исследований содержат номинальные и возмущенные оптимальные траектории, в которых аэрокосмический самолет разгоняется ускорителем, совершает глобальные пространственные маневры и выходит на орбиту. На основании анализа экстремалей, сравнений и оценки эффективности функций наведения с учетом возмущений сделаны выводы.*

**Ключевые слова:** аэрокосмический, гиперзвуковой, маневр, управление, наведение, оптимальный, принцип максимума, краевая задача

**Введение.** Аэрокосмический самолет (АКС) — это гиперзвуковой летательный аппарат, оснащенный аэродинамическими несущими поверхностями и ракетными двигателями.

Использование аэродинамических сил позволяет оперативно совершать маневры, не выполнимые традиционной ракетной техникой, например: при наземном старте за 1,5 ч вывести АКС на любую заданную орбиту и стыковаться с другим космическим аппаратом (КА), существенно изменить наклонение и прочие элементы орбиты, незамедлительно спуститься с орбиты и приземлиться в любую точку поверхности Земли. Кроме того, дополнение реактивных сил аэродинамическими [1] значительно экономит топливо. Дальнейшее снижение расхода топлива возможно при увеличении удельного импульса за счет применения ядерных и прямоточных двигателей [2] на атмосферных участках полета.

Широкое применение и развитие АКС ограничено рядом проблем, касающихся управления и наведения аэрокосмического самолета. К ним относятся:

– сложность и громоздкость прямых методов оптимизации управления;

– недостаточная эффективность приближенно-оптимальных методов управления АКС;

– трудности решения краевых задач при использовании принципа максимума Понтрягина.

Цель настоящей статьи — сформировать оптимальные функции наведения, реализуемые в бортовой системе управления АКС при подготовке и выполнении глобальных аэрокосмических маневров.

Теоретические методы оптимизации аэрокосмических траекторий [3–6] были разработаны в 1970–1990-е годы, однако конкретные решения не были получены ввиду низкого уровня вычислительной техники.

Оптимальное управление углом атаки гиперзвукового летательного аппарата на этапе разгона / набора высоты в атмосфере представлено в [7], но задача решалась только в вертикальной плоскости и без расчета оптимальных краевых условий. В [8] реализованы необходимые условия оптимальности для случая движения составных аппаратов. В [9] исследованы общие закономерности оптимального движения, динамики выведения составных космических систем и проблемы входа в атмосферу возвращаемых элементов, влияние систематических и случайных возмущений с учетом ограничений по нагрузкам, по отделению элементов, по допустимым районам посадки или падения. В этой работе также рассмотрены особенности программного комплекса и отмечены следующие проблемные вопросы:

– перенос граничных условий выведения осуществлялся на правый конец активного участка (замена пассивного полета кеплеровой траекторией, а процесса перехода на заданную орбиту — импульсом скорости);

– оптимизация выполнялась для локальных, но не для глобальных маневров;

– сходимость краевых задач обеспечивалась сложными эмпирическими алгоритмами.

В настоящей работе предложено решение данных проблем с использованием методов, представленных в статье [9]. Настоящая работа принципиально отличается от вышеперечисленных исследований глобальных аэрокосмических маневров АКС, решением краевых задач во множестве областей сходимости, а также формированием функций наведения, достаточно простых для реализации в бортовой системе управления. Суть методики заключается в получении эталонного оптимального управления АКС и его аппроксимации в функциях наведения.

Для достижения поставленной цели выбран не прямой метод оптимизации управления — принцип максимума Понтрягина [10].

Постановка задачи сформулирована с учетом всех существенных физических факторов, отделения ступеней ускорителя, ограничений по нагрузкам, случайных возмущений и различных вариантов харак-

теристик АКС: массы конструкции, запасов топлива, тяги двигательных установок.

Разработаны методика и автоматизированная процедура сквозной оптимизации управления — решения двухточечных краевых задач. По результатам анализа оптимальных траекторий АКС сформированы функции наведения и разработаны алгоритмы оптимизации коэффициентов наведения АКС в условиях возмущений.

**Постановка задачи формирования оптимальных функций наведения.** Основные допущения математической модели движения представлены следующим образом:

- тяга двигателя направлена по оси АКС;
- система стабилизации идеально исполняет управление, скольжение отсутствует;
- поле тяготения — центральное;
- атмосфера вращается вместе с Землей и соответствует ГОСТ 4401—81 «Атмосфера стандартная. Параметры»;
- горизонтальный ветер задан функцией широты и высоты [11], вертикальный ветер отсутствует.

В результате исследований уравнений движения в различных системах координат выбрана горизонтальная система координат с радиальной, восточной и северной осями, которая позволила вывести эффективную систему дифференциальных уравнений движения АКС, исключить неопределенности типа деления на ноль, понизить размерность сопряженного вектора и минимизировать число гармонических функций, что многократно ускорило расчет траекторий и решение краевой задачи:

$$\begin{cases} \dot{V}_r = \sum F_r / m + (V_n^2 + V_k^2) / r - \mu / r^2; \\ \dot{V}_k = \sum F_k / m - V_k V_r / r + V_n V_k \operatorname{tg} \varphi / r; \\ \dot{V}_n = \sum F_n / m - V_n V_r / r - V_k^2 \operatorname{tg} \varphi / r; \\ \dot{r} = V_r; \\ \dot{\lambda} = V_k / r \cos \varphi; \\ \dot{\varphi} = V_n / r; \\ \dot{m} = -m_p F_p; \end{cases} \quad (1)$$

$$\bar{V} = \overline{(V_r, V_k, V_n)};$$

$$\begin{cases} \sum F_r = (V_r \sum F_x + V_\tau \sum F_y \cos \gamma) / V_\alpha; \\ \sum F_k = V_\lambda \sum F_x / V_\alpha + \sum F_y (V_\varphi \sin \gamma - V_\lambda V_r \cos \gamma / V_\alpha) / V_\tau; \\ \sum F_n = V_\varphi \sum F_x / V_\alpha - \sum F_y (V_\lambda \sin \gamma + V_\varphi V_r \cos \gamma / V_\alpha) / V_\tau; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \Sigma F_x = F_p \cos \alpha - F_x; \\ \Sigma F_y = F_p \sin \alpha + F_y; \end{cases}$$

$$F_x = SqC_x(\alpha);$$

$$F_y = SqC_y(\alpha);$$

$$q = V_\alpha^2 / 2;$$

$$V_\alpha = \sqrt{V_r^2 + V_\tau^2};$$

$$\overline{V}_\alpha = (\overline{V}_r, V_\lambda, V_\varphi);$$

$$V_\tau^2 = V_\lambda^2 + V_\varphi^2;$$

$$\overline{V}_\tau = (0, V_\lambda, V_\varphi);$$

$$V_\varphi = (V_n - W_\varphi);$$

$$V_\lambda = (V_k - W_\lambda - \omega r \cos \varphi);$$

$$\overline{g} = -\overline{r}\mu / r^3.$$

Здесь  $\overline{V}$  — вектор орбитальной скорости;  $\Sigma F_\tau$ ,  $\Sigma F_r$ ,  $\Sigma F_A$  — суммарные проекции реактивных и аэродинамических сил на оси орбитальной системы координат;  $m$  — масса АКС;  $m_p$  — удельный расход топлива, обратный скорости истечения газа двигателя;  $\alpha$  — угол атаки;  $\gamma$  — угол крена;  $F_x$ ,  $F_y$  — аэродинамические силы;  $F_p$  — тяга двигательных установок (ДУ);  $S$  — площадь аэродинамической несущей поверхности;  $q$  — скоростной напор;  $V_\alpha$  — воздушная скорость;  $\overline{V}_\alpha$  — вектор воздушной скорости;  $V_\tau^2$  — модуль воздушной скорости;  $\overline{V}_\tau$  — вектор горизонтальной проекции воздушной скорости;  $V_\varphi$  — северная проекция воздушной скорости;  $V_\lambda$  — восточная проекция воздушной скорости;  $\omega r \cos \varphi$  — скорость движения атмосферы от вращения Земли;  $W_\lambda$  — восточный ветер;  $W_\varphi$  — северный ветер;  $\overline{g}$  — гравитационное ускорение Земли.

**Принцип максимума Понтрягина.** В соответствии с системой дифференциальных уравнений движения (1) запишем функцию Понтрягина:

$$H = H_m / m + P_R V_r + H_k - P_m m_p F_p,$$

где

$$H_m = \overline{P_v} \sum F = P_r \sum F_r + P_k \sum F_k + P_n \sum F_n; \quad (3)$$

$$H_k = (P_r (V_n^2 + V_k^2 - \mu / r)) - (P_k V_k + P_n V_n) V_r + (P_k V_n - P_n V_k) V_k \operatorname{tg} \varphi + P_\varphi V_n / r;$$

$$\overline{P_v} = (\overline{P_r}, \overline{P_k}, \overline{P_n}).$$

Вектор  $\overline{P_v}$  задает ориентацию оси АКС в орбитальных координатах  $(r, k, n)$ .

Оптимальное управление задается из условий максимума функции  $H$ :

$$\operatorname{tg} \gamma = V_\alpha (\overline{P_\tau} \overline{V_\tau}) / (P_r V_\tau^2 - V_r (\overline{P_\tau} \overline{V_\tau})), \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = |\overline{P_v} \overline{V_\alpha}| (F_p + S q C_y^\alpha) / (\overline{P_v} \overline{V_\alpha}) / (F_p + S q C_x^\alpha); \quad (5)$$

$$\overline{P_\tau} = (\overline{0}, \overline{P_k}, \overline{P_n}),$$

где  $\overline{P_\tau}$  — горизонтальная проекция вектора  $\overline{P_v}$ ;  $C_y^\alpha = (\partial C_y / \partial \alpha) / \cos \alpha$ ;  $C_x^\alpha = -(\partial C_x / \partial \alpha) / \sin \alpha$ .

Оптимальные интервалы работы двигателя:

$$F_p = \begin{cases} \max(F_p), & \text{при } H_p \geq P_m m_p, \\ 0, & \text{при } H_p < P_m m_p, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$H_p = (|\overline{P_v} \overline{V_\alpha}| \sin \alpha + (\overline{P_v} \overline{V_\alpha}) \cos \alpha) / V_\alpha / m. \quad (7)$$

Оптимальные параметры (4)–(6) входят в систему (2) суммарных сил.

Система дифференциальных уравнений сопряженных переменных определяется как градиент функции Понтрягина по вектору параметров движения:

$$\begin{cases}
 \dot{P}_r = F_c V_r - F_\gamma (P_\alpha V_r - P_r) - (P_k V_k + P_n V_n) / r - P_R; \\
 \dot{P}_n = F_c V_\varphi - F_\gamma (P_\alpha V_\varphi - P_n) + (P_n V_r - P_k V_k \operatorname{tg} \varphi - 2 P_r V_n - P_\varphi) / r; \\
 \dot{P}_k = F_c V_\lambda - F_\gamma (P_\alpha V_\lambda - P_k) + (P_k (V_r - V_n \operatorname{tg} \varphi) + \\
 + 2 (P_n \operatorname{tg} \varphi - P_r) V_k - P_\lambda / \cos \varphi) / r; \\
 \dot{P}_R = (H_k - P_r \mu / r) / r + F_c V_\alpha / 2 / r; \\
 \dot{P}_\lambda = 0, \Rightarrow P_\lambda = \text{const}; \\
 \dot{P}_\varphi = (P_n V_k - P_k V_n - P_\lambda \sin \varphi) V_k / \cos^2 \varphi / r + \dot{P}_k (\partial W_\lambda / \partial \varphi - \omega r \sin \varphi) + \\
 + \dot{P}_n \partial W_\varphi / \partial \varphi; \\
 \dot{P}_m = \frac{H_m}{m^2}.
 \end{cases} \quad (8)$$

Тогда

$$P_\alpha = (\overline{P_v V_\alpha}) / V_\alpha^2, \quad F_\gamma = (\sum F_y (\overline{P_v V_\alpha}) / |\overline{P_v V_\alpha}| - \sum F_x) / m; \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 F_c = & ((C_y + V_\alpha (\partial C_y / \partial V_\alpha) / 2) |\overline{P_v V_\alpha}| - \\
 & - (C_x + V_\alpha (\partial C_x / \partial V_\alpha) / 2) (\overline{P_v V_\alpha})) S / m.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Управление ограничено пределом удельной аэродинамической нагрузки несущей поверхности  $N_y$ :

$$q C_y \leq N_y. \quad (11)$$

В случае нарушения этого условия предельный угол атаки определяется из уравнения

$$q C_y (\alpha_{\max}) = N_y.$$

Уравнения (3), (5), (9), (10) корректируются соответственно:

$$\begin{aligned}
 H_m = & (F_p \sin \alpha_{\max} + S N_y) |\overline{P_v V_\alpha}| / V_\alpha + \\
 & + (F_p \cos \alpha_{\max} - S q C_x (\alpha_{\max})) (\overline{P_v V_\alpha}) / V_\alpha;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_\gamma = & ((F_p \sin \alpha_{\max} + S N_y) (\overline{P_v V_\alpha}) / |\overline{P_v V_\alpha}| + \\
 & + (F_p \cos \alpha_{\max} - S q C_x (\alpha_{\max}))) / m;
 \end{aligned}$$

$$F_c = -(C_x (\alpha_{\max}) + V_\alpha (\partial C_x / \partial V) / 2) (\overline{P_v V_\alpha}) S / m.$$

В случае ступенчатого изменения аэродинамических сил, массы АКС, удельного импульса и тяги двигателя корректируется параметр  $P_m$ :

$$P_m^{i+1} = \left( P_m^i m_p^i F_p^i + H_m^{i+1} / m^{i+1} - H_m^i / m^i \right) / m_p^{i+1} / F_p^{i+1}, \quad (12)$$

где  $i+1$  — индекс параметров после изменения;  $i$  — индекс параметров до изменения.

**Методика решения краевых задач.** Траектория АКС может начинаться с орбитального, воздушного или наземного старта (вертикально, наклонно или горизонтально) и заканчиваться приземлением или выходом на заданную орбиту. Краевые параметры полета могут быть заданы функционально (элементами орбиты) или точно (векторами скорости и координат).

Рассмотрим решение одной из краевых задач, в которой АКС вертикально стартует с поверхности Земли, разгоняется ускорителем по выделенной трассе, сбрасывает отработанные ступени, совершает атмосферный маневр поворота суборбитальной плоскости и выходит на заданную орбиту.

В расчетной системе координат условный экватор совпадает с ортодромией целевой орбиты.

Критерий оптимальности — минимум начальной массы ускорителя ( $m_0 = \min$ ), необходимой для вывода на целевую орбиту заданной конечной массы АКС ( $m_k$ ).

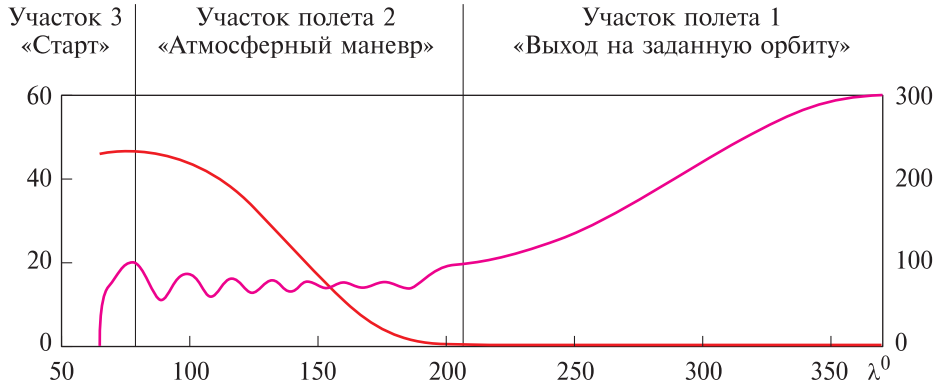
Проблемы и особенности решения задачи заключаются в следующем.

1. Области возможных решений краевой задачи зависят не только от физических факторов, но и характеристик АКС, что требует выбора двигателей, запасов топлива, габаритов ступеней ускорителя и АКС. Двигатели выбирают из каталога, а массу конструкции ступеней определяют эмпирически.

2. Градиенты конечных параметров полета по начальному сопряженному вектору стремятся к бесконечности. Наибольшие проблемы вызывают условия включения / выключения ДУ (6) при выходе на конечную орбиту. Поэтому принят обратный порядок решения краевой задачи — вместо начальных задаются конечные параметры полета, а интегрирование систем уравнений (1) и (5) происходит с отрицательным временным шагом.

3. Немонотонность градиентов начальных параметров, вызванная атмосферными рикошетами, ступенчатыми функциями переключения и ограничениями, создает проблему локальных экстремумов, поэтому в дополнение к известным методам решения краевых задач [3–10, 12–17] разработаны методики аналитического расчета начального приближения и поиска области сходимости с поэтапным добавлением участков полета.

Участки полета, которым соответствуют этапы решения краевой задачи, представлены на рис. 1.



**Рис. 1.** Этапы решения краевой задачи:  
— траектория  $\varphi$ ; — высота  $h$

Конечные краевые параметры состоят из координат  $(r_k, \varphi_k)$  и вектора скорости  $\overline{V}_k$ :

$$r_k = r_3 + h_k, \quad \varphi_k = 0, \quad V_{rk} = 0, \quad V_{kk} = \sqrt{\mu / r_k}, \quad V_{nk} = 0.$$

Задача первого этапа — найти начальное приближение конечных сопряженных параметров, которое в апогее переходной орбиты обеспечит интервал (6) работы ДУ, соответствующий разгону до скорости конечной орбиты, а при выходе из атмосферы — условие отключения тяги, оптимальный угол атаки и равновесные параметры полета.

Это можно сделать аналитически на основе следующих упрощений и допущений:

- 1) вращение Земли и ветер отсутствуют;
- 2) конечное значение производной  $\dot{P}_r$  близко к нулю:

$$\dot{P}_r = P_k V_k / r - P_R \approx 0; \Rightarrow \overline{P_{Rk}} \approx P_k V_k / r; \quad (13)$$

3) подъем из атмосферы происходит в плоскости целевой орбиты, параметр  $P_k$  (13) остается постоянным. Тогда функции  $\dot{P}_n$  и  $\dot{P}_\varphi$  (8) упрощаются:

$$\dot{P}_n \approx -P_\varphi / r; \quad \dot{P}_\varphi \approx P_n V_k^2 / r \Rightarrow \ddot{P}_\varphi \approx -P_\varphi V_k^2 / r^2.$$

Учитывая, что  $\dot{\lambda} \approx V_k / r$ , находим решение этих уравнений:

$$P_n = P_{n0} \cos(\lambda - \lambda_0); \quad P_\varphi = V_k P_{n0} \sin(\lambda - \lambda_0), \quad (14)$$



где  $P_{n0}$  — амплитуда параметра  $P_n$ ;  $\lambda$  и  $\lambda_0$  — текущая и начальная долгота перелета из атмосферы;

4) начало переходной орбиты близко к перигею, конец — к апогею, в этом случае конечную долготу перелета принимаем  $\lambda_k \approx \lambda_0 + \pi$ , тогда из (14) следует

$$\overline{P_{nk}} = P_{n0} \cos \pi \approx -P_{n0}; \quad \overline{P_{\phi k}} \approx V_k P_{n0} \sin \pi \approx 0; \quad (15)$$

5) переходная орбита начинается при оптимальном угле атаки  $\alpha \approx \alpha_e$  и  $\gamma \approx -\pi/2$ , тогда амплитуда параметра  $P_n$ :

$$\begin{aligned} P_{n0} &= P_k \sin \gamma \operatorname{tg} \alpha_e \approx -P_k \operatorname{tg} \alpha_e \Rightarrow \\ \Rightarrow P_{nk} &\approx -P_{n0} \approx P_k \operatorname{tg} \alpha_e; \quad \overline{P_{rk}} = P_k \cos \gamma \operatorname{tg} \alpha_e \approx 0; \end{aligned} \quad (16)$$

6) выход на целевую орбиту соответствует условиям (6), тогда из формулы (7) следует:

$$\begin{aligned} H_p \approx P_v / m &= P_m m_p, \quad d(H_p - P_m m_p) / dt \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{P_{mk}} &= P_v / m / m_p, \quad P_{rk} > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Функция Понтрягина нормируется по всем сопряженным параметрам, поэтому параметр  $P_{kk}$  можно задать произвольным числом, равным, например, 40.

Дальнейшее решение показало, что аналитический расчет сопряженных параметров дает близкие к конечным значения, что не приводит в область сходимости краевой задачи, но ускоряет процесс ее поиска.

Задача второго этапа — найти локальную область сходимости, в которой существует решение краевой задачи, т. е. приблизить начало экстремали (см. участок 2 на рис. 1) к условиям отделения ускорителя и наклонению  $i_0$  трассы ускорителя.

На втором этапе задается приближение, полученное на первом этапе:

$$\overline{P}_k = (P_r, P_R, P_n, P_\phi)_k.$$

Начальные краевые параметры соответствуют:

$\varphi \approx \varphi_0$  — широте отделения второй ступени,

$V_n \cos i_0 \approx V_\tau \cos \varphi$  — наклонению трассы ускорителя  $i_0$  и

$\dot{V}_r \approx 0, \quad \ddot{V}_r \approx 0$  — условиям равновесного полета.

Интегрирование систем уравнений (1), (8) прерывается по условию опрокидывания АКС:

$$\left(\overline{P}_v \overline{V}_\alpha\right) \leq 0 \left(\alpha \geq 90^\circ\right). \quad (18)$$

Для решения многомерных краевых задач обычно используется итерационное решение системы линейных уравнений невязок краевых траекторных параметров [13–16]. В каждой итерации методом секущих определяются элементы матрицы Якоби (частные производные секущих краевых параметров по вектору поиска):

$$\overline{A}_i = \left(\Delta \overline{f}(\overline{P}) / \Delta P_i\right) = \left(\overline{f}(\overline{P} + \Delta P_i) - \overline{f}(\overline{P})\right) / \Delta P_i, \quad (19)$$

где  $\Delta P_i$  — вариация элемента  $P_i$  вектора поиска  $\overline{P}$ ;  $\overline{f}(\overline{P})$  — вектор краевых невязок экстремали.

После расчета (19) очередной вектор конечных сопряженных параметров определяется рекуррентно:

$$\overline{P} = \overline{P} + A^{-1} \overline{f}(\overline{P}). \quad (20)$$

При отладке методики решение (20) было реализовано, но автоматизировать алгоритм поиска не удалось ввиду прерывания расчета по ограничению (18) в десятках градусов от заданной широты старта. Такой метод работает только в монотонном диапазоне функций невязок.

Результаты расчетов показали, что малые вариации аргументов поиска изменяют количество и амплитуду рикошетов, количество и длительность участков пассивного полета (6) и движения по ограничению (11). Невязки краевых параметров представляют собой немонотонные гиперповерхности в пространстве аргументов поиска, включающие в себя не только множество локальных экстремумов, но и ступенчатые разрывы. Причина немонотонности — расходящиеся колебания большинства фазовых параметров. В итоге алгоритм поиска корней системы уравнений невязок зацикливается в одной из локальных областей либо совершает произвольный шаг в область другого экстремума, в окрестностях которого не существует решения краевой задачи.

В процессе поиска выявлено, что снижение амплитуды колебаний траекторных параметров сопровождается ростом широты, количества рикошетов и продолжительности полета.

Кроме того, расчеты обращенной матрицы  $A^{-1}$  показали значительные корреляции траекторных и сопряженных параметров:

- $P_n$  задает угол крена и наклонение начальной орбиты;
- $P_\phi$  — фазу угла крена, изменяя широту и азимут старта;
- $P_r$  — амплитуды колебаний угла тангажа и высоты рикошетов;
- $P_R$  — фазу колебаний угла тангажа относительно фазы рикошетов.

Эти зависимости использованы при разработке алгоритма минимизации траекторных колебаний, который ускорил и упростил решение краевой задачи.

**Методика поиска области сходимости.** Данная методика включает в себя внешний цикл поиска конечных сопряженных параметров  $\overline{P}_{нк}$  (15),  $\overline{P}_{фк}$  (15) по невязкам  $i_0$ ,  $\varphi_0$  методом секущих и вложенный цикл минимизации траекторных колебаний по параметрам  $\overline{P}_{Rк}$  (13) и  $\overline{P}_{rк}$  (16).

На каждом шаге поиска по условию (17) вычисляется значение  $\overline{P}_{mk}$ .

Критерием немонотонности экстремали выбрано нормальное траекторное ускорение, так как оно однозначно определяет колебания основных параметров полета относительно равновесной траектории:

$$\dot{V}_y = \sum F_y \cos \gamma / m + (V_n^2 + V_k^2 - \mu / r) V_\tau / r / V_\alpha. \quad (21)$$

Функционал минимизации колебаний представляет собой среднюю амплитуду (21) нормального траекторного ускорения:

$$J(P_r, P_R, P_n) = \int_0^{t_k} |\dot{V}_y| dt / t_k; \quad (22)$$

$$t_k = t, \text{ по условию } |\dot{V}_y| < \varepsilon_\varphi. \quad (23)$$

Здесь  $t_k$  (23) — период осреднения колебаний, равный времени последней смены знака (обнуления) траекторного ускорения:

Для ускорения поиска применяли метод наискорейшего спуска [12, 13], при котором методом конечных разностей определяются градиент  $\overline{J}'$  (22) и матрица  $A''$  вторых частных производных функционала по сопряженным параметрам  $P_R$  и  $P_r$ :

$$\begin{aligned} \overline{J}' &= (J(\overline{P} + \Delta P_r) - J(\overline{P} - \Delta P_r)) / \Delta P_r, \\ & (J(\overline{P} + \Delta P_R) - J(\overline{P} - \Delta P_R)) / \Delta P_R; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} A'' &= (\overline{J}'(\overline{P} + \Delta P_r) - \overline{J}'(\overline{P} - \Delta P_r)) / \Delta P_r, \\ & (\overline{J}'(\overline{P} + \Delta P_R) - \overline{J}'(\overline{P} - \Delta P_R)) / \Delta P_R. \end{aligned} \quad (25)$$

С учетом немонотонности функционала шаги поиска могут выходить за пределы области сходимости или определять максимум

( $A''_{ii} < 0$ ) вместо минимума. В этих случаях применяется градиентный метод расчета (24) и (25) с ограничением шага поиска по условию:

$$\text{если } A''_{ii} < b |J'_i / \Delta P_i|, \text{ то } A''_{ii} = b |J'_i / \Delta P_i|, \quad (26)$$

где  $b$  — предел относительного увеличения шага поиска.

Очередные векторы шагов поиска и конечных параметров определяются рекуррентно после расчета (22)–(26):

$$\overline{\Delta P} = - (A'')^{-1} \cdot \overline{J'}; \quad \overline{P} = \overline{P} + \overline{\Delta P}. \quad (27)$$

Итерации (27) повторяются, возрастают продолжительность полета, масса АКС, широта и наклонение трассы; начало полета приближается к условиям отделения ускорителя.

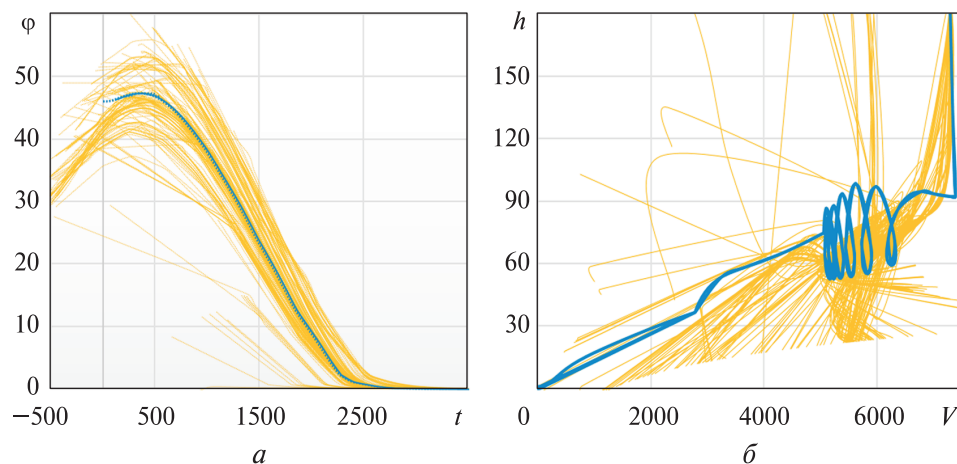
Цикл минимизации траекторных колебаний продолжается, пока вектор скорости АКС не достигнет стартовой плоскости, а широта — точки отделения второй ступени ускорителя:

$$|V_n \cos i_0 - V_\tau \cos \varphi| < \varepsilon_i; \quad (28)$$

$$|\varphi_0 - \varphi| < \varepsilon_\varphi. \quad (29)$$

Графики итерационного поиска области сходимости по условиям (28)–(29) показаны на рис. 2 оранжевым цветом, конечные решения — синим. На поиск области сходимости потребовалось более 80 итераций. Количество траекторных колебаний достигало 30.

На втором этапе может быть найдено решение краевой задачи для воздушного старта.



**Рис. 2.** Итерации экстремалей:

$a$  — зависимость широты экстремалей от времени;  $b$  — условия полета в зависимости от высоты и скорости

На третьем этапе решения краевой задачи к траектории добавляется стартовый участок с условием движения по выделенной трассе:

$$P_n = P_k \sqrt{\cos^2 i_0 - \cos^2 \varphi} / \cos \varphi. \quad (30)$$

В соответствии с условием (30) из системы уравнений (8) удаляется производная  $\dot{P}_n$ , тогда

$$P_\tau = P_k \cos i_0 / \cos \varphi. \quad (31)$$

Внешний цикл второго этапа продолжается, а цикл минимизации колебаний заменяется циклами поиска параметров  $P_r$ ,  $P_R$ , начальных масс АКС и второй ступени ускорителя  $m_{\text{АКС}}$  и  $m_2$  по следующим начальным краевым условиям:

$\varphi_0 \approx \varphi_c$  — широта старта;

$r_0 \approx r_3$  — радиус;

$V_{k0} = \omega_3 r_3 \cos \varphi_0$  — скорость поверхности Земли;

$V_{r0} = 0$ ,  $V_{n0} = 0$ ,  $P_{k0} = 0$ ,  $P_{n0} = 0$ ,  $P_{r0} > 0$  — условия вертикального старта.

Интегрирование систем уравнений (1), (5) и (31) прерывается по условию обнуления вертикальной скорости АКС:

$$0 < V_r \leq \varepsilon_V. \quad (32)$$

Система уравнений невязок решается итерационно [13] с использованием матрицы Якоби (19), (20). Сходимость процесса поиска существенно зависит от выбора начальных значений вектора шагов поиска  $\overline{\Delta P}$  и шага интегрирования систем уравнений (1) и (5). Для обеспечения сходимости также необходима высокая точность расчета угла атаки (5) и моментов времени наступления следующих событий:

- переключения тяги двигателя (6);
- начала и конца движения по ограничению (11);
- разделения ступеней (12);
- смены знака радиального ускорения (23);
- прерывания расчета экстремали по ограничениям (18), (32).

Если итерации приводят к вырождению системы уравнений невязок (решения не существует), то необходимо корректировать выбор двигателей, аэродинамических и геометрических характеристик ступеней ускорителя и АКС, возобновляя поиск.

В расчетном примере заданы следующие исходные данные. Координаты старта — космодром Байконур, целевая орбита — экваториальная круговая,  $h = 300$  км. Масса ступеней без ДУ принималась в размере 11 % от массы топлива, конечная масса АКС — 1500 кг.

Для выбора оптимальной компоновки моделировались траектории с различными двигателями ускорителя и АКС, в том числе:

для АКС — РД866, ЕАМ Astrium, TRYN (Northrop Grumman);

для ускорителя — RS-25, РД0162, РД-0110, Merlin 1D.

Расчетные характеристики АКС, показавшие лучший результат, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Расчетные характеристики аэрокосмического самолета

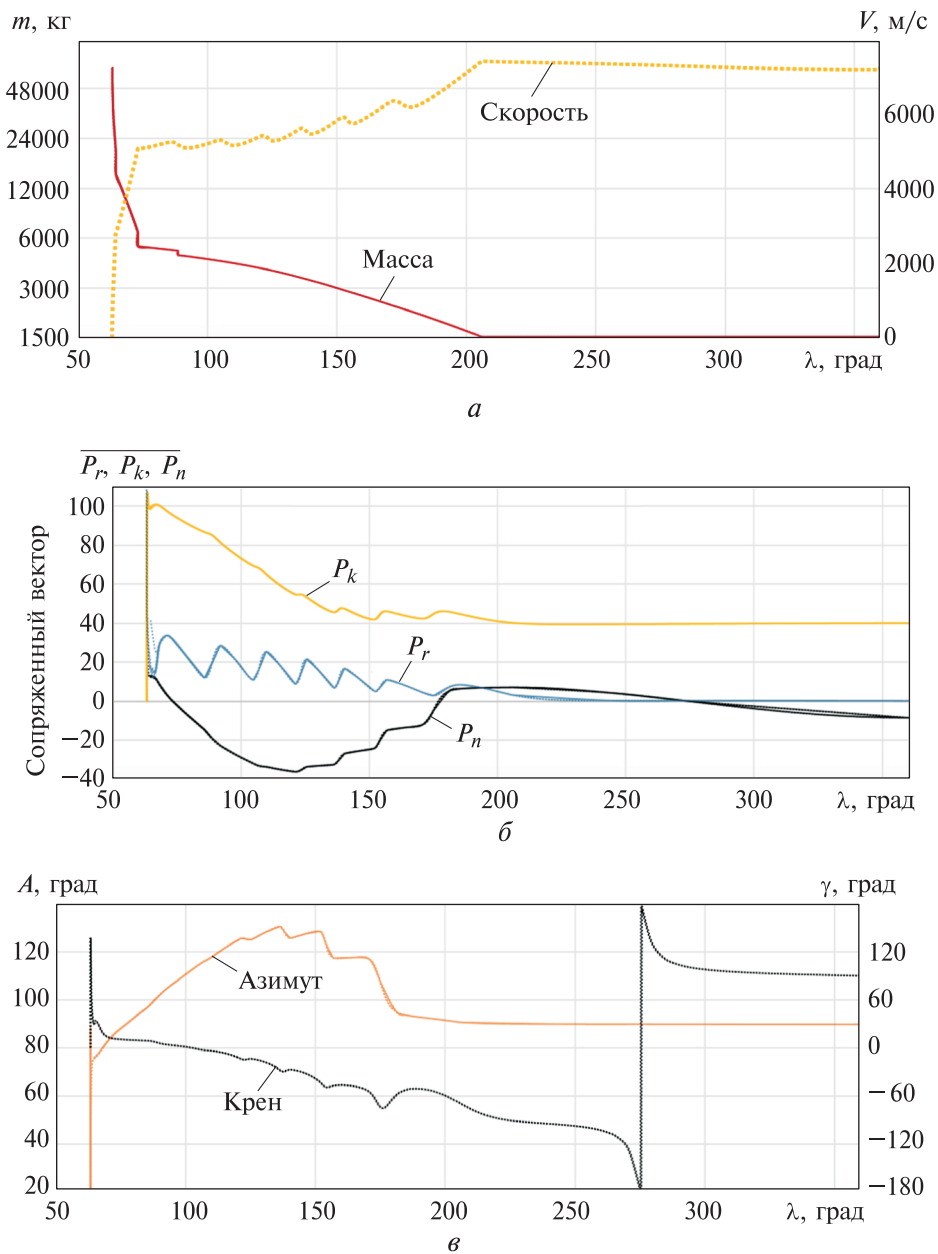
Ступень АКС	Наименование двигателя	Количество, шт.	Характеристики двигателей			Несущая поверхность, площадь, м <sup>2</sup>
			Тяга, Н	Импульс в вакууме, с	Масса, кг	
АКС конечная	ТРЫН	10	$10 \cdot 554 = 5\,540$	330	$10 \cdot 6,03 = 60,3$	21
Вторая	РД0124 [18]	1/2	$294\,000/2 = 147\,000$	359	$520/2 = 260$	35
Первая	РД0124 [18]	4	$4 \cdot 294\,000 = 1\,176\,000$	359	$4 \cdot 520 = 2\,080$	42

**Результаты решения краевых задач.** Численные исследования дали новые, отчасти неожиданные, результаты, включающие зависимость оптимального управления от сопряженного вектора, параметров полета, допущений, характеристик АКС и ускорителя.

Аэрокосмический самолет вертикально стартует с космодрома Байконур ( $\lambda_0 \approx 63^\circ$ ,  $\varphi_0 \approx 46^\circ$ ), ускоряется (рис. 3, а) первой ступенью до скорости  $\approx 2800$  м/с ( $m_1 \approx 52\,300$  кг), второй ступенью — до  $\approx 5070$  м/с ( $m_2 \approx 9300$  кг,  $\lambda \approx 73^\circ$ ), медленно повышает скорость маршевым ДУ АКС, при достижении условий перигея переходной эллиптической орбиты отключает ДУ ( $V \approx 7400$  м/с,  $m_{\text{АКС}} \approx 5370$  кг,  $\lambda \approx 206^\circ$ ,  $\varphi \approx 0^\circ$ ), в апогее дает импульс  $\approx 40$  м/с, разгоняясь до скорости конечной орбиты ( $\Delta m \approx 24$  кг,  $\lambda \approx 360^\circ$ ,  $\varphi \approx 0^\circ$ ).

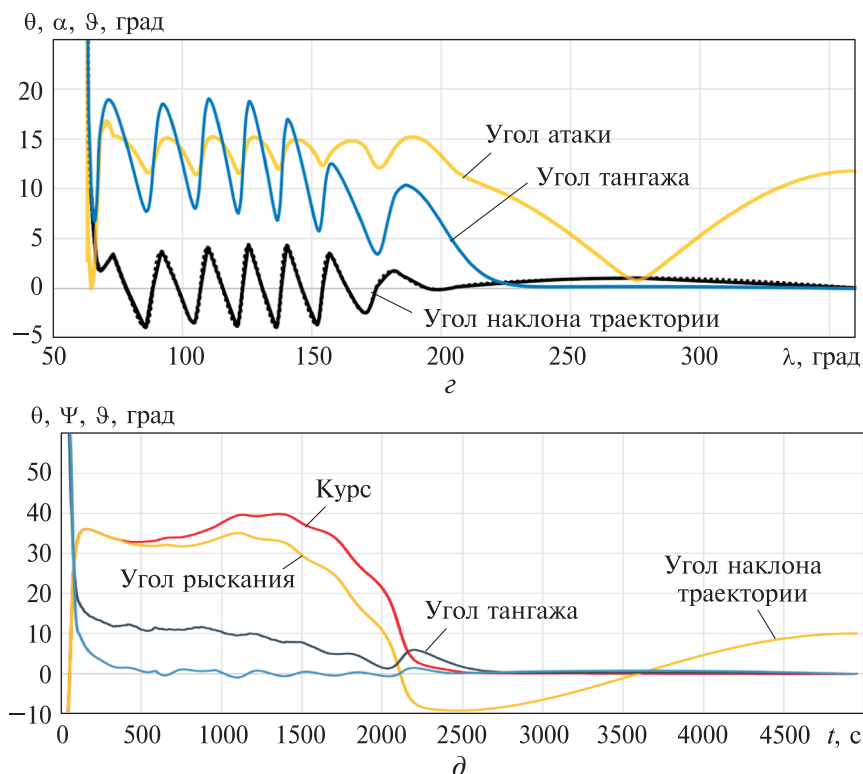
При наборе скорости элементы сопряженного вектора  $P_r, P_k, P_n$  так управляют положением АКС (рис. 3, б), что он совершает неполный оборот по крену вправо до  $\gamma \approx 135^\circ$ , затем влево до  $\gamma \approx 0^\circ$ , направляя азимут движения  $A$  к плоскости переходной орбиты (рис. 3, в), понижая наклон траектории  $\theta$ , тангаж  $\vartheta$  и повышая угол атаки  $\alpha$  (рис. 3, з).

На участке атмосферного маневра АКС совершает колебания в диапазоне  $\theta \approx \pm 4^\circ$ ,  $\vartheta$  и  $\alpha$  — относительно  $\alpha_e \approx 12...13^\circ$ . По мере приближения к плоскости экватора АКС продолжает поворот до  $\gamma \approx -\pi/2$ , направляя азимут движения в плоскость конечной орбиты. В середине переходной орбиты (рис. 3, в) АКС проходит точку ( $\gamma \approx \pi$ ,  $\alpha \approx 0^\circ$ ), а в апогее завершает полный оборот ( $\gamma \approx \pi/2$ ,  $\alpha \approx 12^\circ$ ).



**Рис. 3 (начало).** Оптимальные параметры полета и управления:

$a$  — масса и земная скорость;  $b$  — элементы сопряженного вектора  $\overline{P_r, P_k, P_n}$ ;  
 $v$  — азимут  $A$  и крен  $\gamma$



**Рис. 3 (окончание).** Оптимальные параметры полета и управления:  
 $\lambda$  — углы атаки  $\alpha$ , тангажа  $\vartheta$  и наклона траектории  $\theta$ ;  $\delta$  — курс  $\Psi$  и угол рыскания  $\psi$ ,  
 угол тангажа  $\vartheta$  и угол наклона траектории  $\theta$

На атмосферном участке сопряженный вектор так ориентирует АКС (рис. 3, б), что углы рыскания  $\psi$  и курса  $\Psi$ , тангажа  $\vartheta$  и наклона траектории  $\theta$  (рис. 3, д) колеблются с небольшим фазовым сдвигом, демпфируя траекторные колебания относительно равновесных условий.

В процессе обеспечения условий решения краевых задач было найдено типовое для ракет-носителей (РН) оптимальное распределение топлива АКС, второй и первой ступеней (3,87 : 8,2 : 46,8) т. При этом повышение тяговооруженности первой ступени снижало гравитационные потери и, соответственно, стартовую массу, но было ограничено допустимой осевой перегрузкой. Оптимальная тяговооруженность второй ступени оказалась мала ( $\approx 7,6 \dots 22,8 \text{ м/с}^2$ ) и получилась еще меньше ( $\approx 1,1 \dots 3,8 \text{ м/с}^2$ ) для АКС, что типично для самолета.

Результаты поиска области сходимости показали, что аналитический расчет начального приближения сопряженных параметров (выделено темным в табл. 2) дает близкие к конечным значения, что подтверждает правомерность формул и допущений (14)–(17) аналитического расчета:

- долгота переходной орбиты (см. рис. 3, а) составила  $\lambda_k \approx 154^\circ$ ;
- угол атаки (см. рис. 3, г) начинается и заканчивается значением  $\alpha_e \approx 12 \dots 13^\circ$ ;



## Аналитический расчет и конечные значения сопряженных параметров

Вариант поиска	Сопряженный параметр					
	$P_k$	$P_r$	$P_n$	$P_R$	$P_\varphi$	$P_m$
Аналитический расчет	40	$10^{-6}$	<b>-8,1</b>	<b>0,04635</b>	0	<b>108,53</b>
Конечное решение	40	0,002717	<b>-8,2892</b>	<b>0,04611</b>	-575,03	<b>110,83</b>

- на квазигоризонтальном участке атмосферного маневра изменение угла крена (см. рис. 3, в) соответствует результатам работы [17];
- сопряженный вектор и угол рыскания (см. рис. 3, б, д) соответствуют функции (14):

$$P_n / P_k \approx \operatorname{tg} \psi \approx \operatorname{tg} \alpha_e \cos(\lambda_k - \lambda).$$

Окончательное решение краевой задачи на третьем этапе потребовало от 5 до 20 итераций поиска параметров  $P_r$ ,  $P_R$ ,  $m_{\text{АКС}}$ ,  $m_2$  и  $m_1$  по условиям:

$$\varphi_0 \approx \varphi_c; \quad h_0 \approx 0;$$

$$V_{k0} = \omega_3 r_3 \cos \varphi_0; \quad V_{r0} = 0;$$

$$V_{n0} = 0; \quad P_{k0} = 0;$$

$$P_{n0} = 0.$$

Пример итераций (0–5) поиска траектории АКС, приближенной к трассе, по условиям старта представлен на рис. 4, а, поиска траектории по высоте — на рис. 4, б.

В процессе итераций получена практически линейная зависимость вариации стартовой массы АКС (рис. 5) от высоты начала полета  $\approx 1$  кг/м.

На рис. 6 представлены результаты решения краевых задач для трех точек старта космодрома Байконур.

Точки отделения ступеней находятся на разрешенной трассе (рис. 6, а). Осевая перегрузка  $n_x$  не превышает 5,6 (рис. 6, б). До высот  $\approx 55$  км наклон траектории снижается, после сброса второй ступени АКС достигает  $\approx 81$  км. Масса АКС убывает, земная скорость, соответственно, возрастает (рис. 6, в).

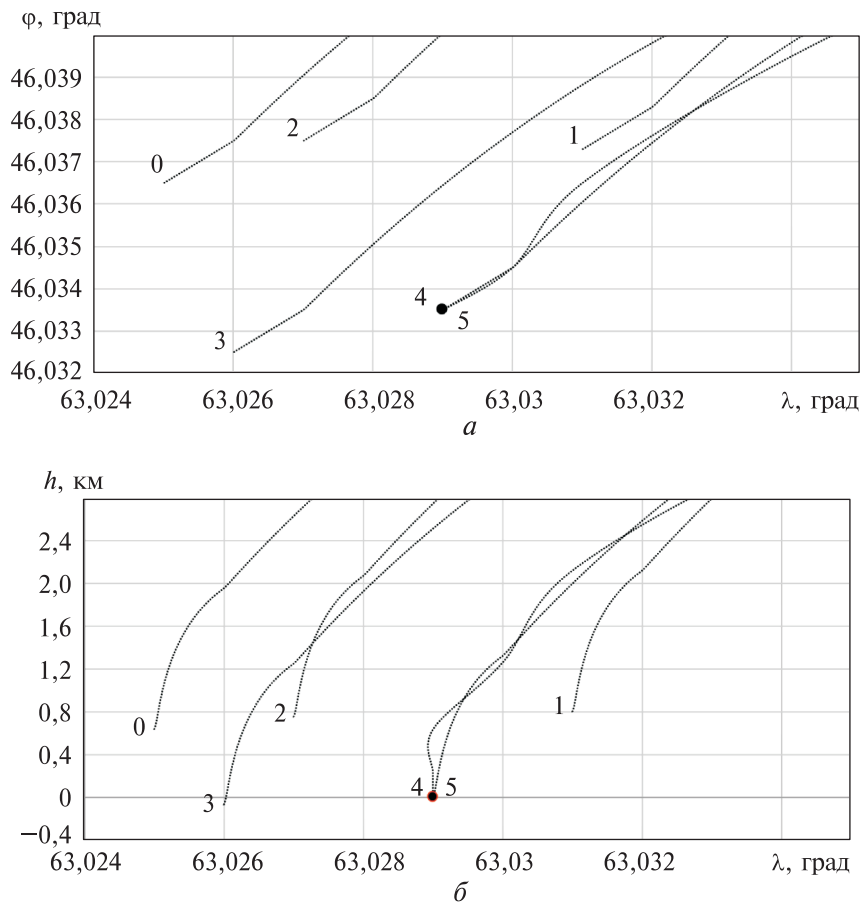


Рис. 4. Итерации (0–5) поиска траектории АКС по трассе (а) и высоте (б)

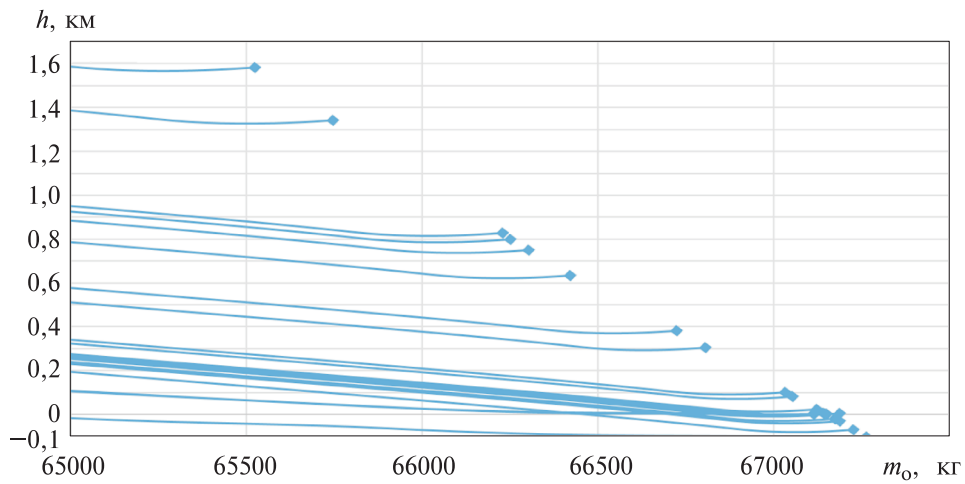


Рис. 5. Зависимость стартовой массы АКС от высоты начала полета

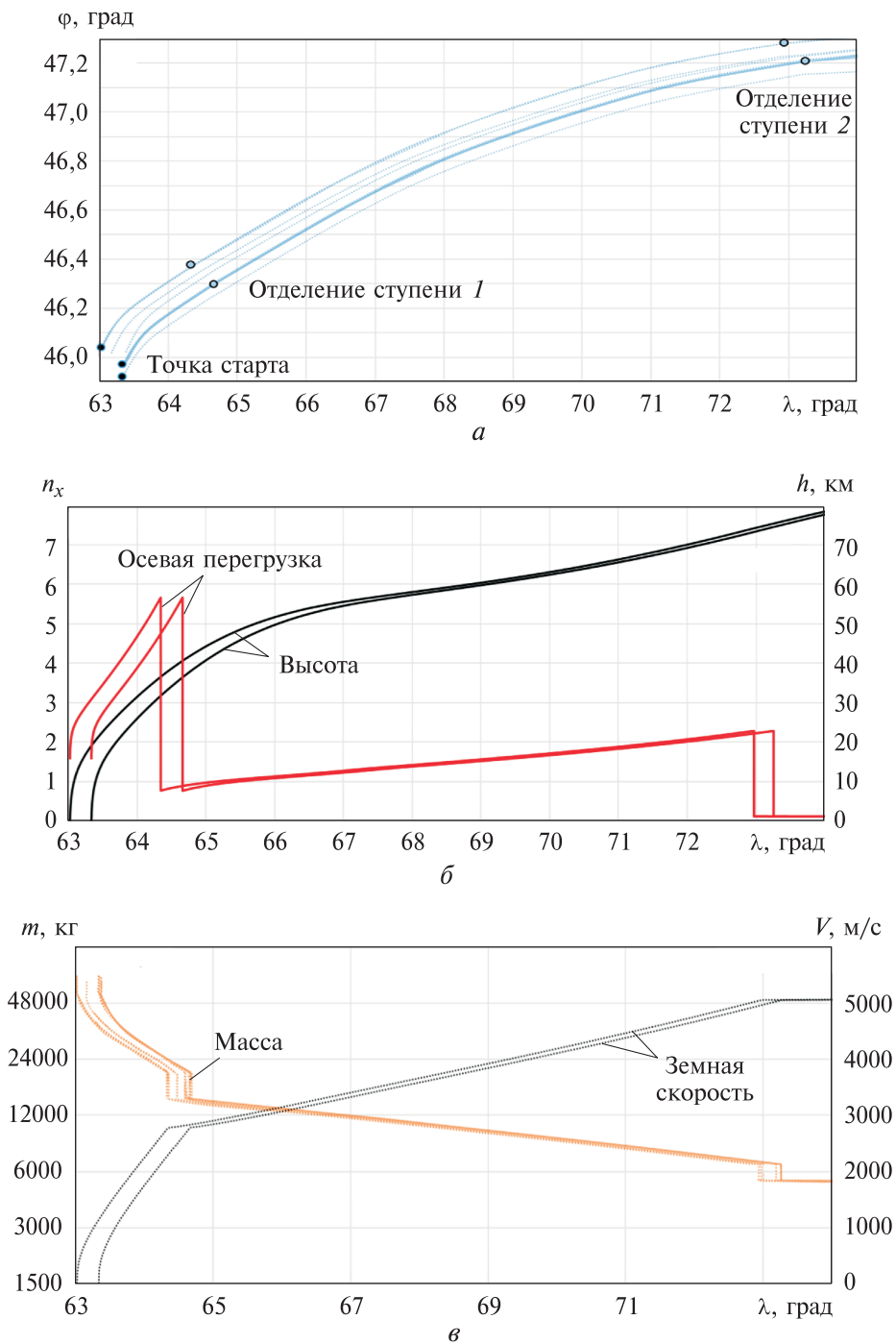


Рис. 6. Результаты решения краевых задач для трех точек старта:  
 $a$  — трасса старта;  $б$  — осевая перегрузка  $n_x$  и высота полета  $h$ ;  
 $в$  — масса и земная скорость

Применение принципа максимума Понтрягина позволяет получать идеальные оптимальные траектории — экстремали, однако управление по сопряженному вектору трудно реализовать в бортовой системе управления, поскольку:

– решение краевых задач требует значительного количества вычислений;

– результаты решения крайне неустойчивы к случайным возмущениям, вариациям характеристик АКС и ускорителя, что не обеспечивает точного выведения АКС.

Тем не менее экстремали могут быть использованы в качестве эталона для формирования функций наведения и оценки их эффективности путем сравнения параметров полета и конечных критериев. Чтобы сравнение было правомерным, математические модели (1), (2) задач наведения и оптимального управления должны быть идентичны.

**Формирование функций наведения.** Известны функциональные (жесткие) и терминальные (гибкие) методы наведения [19].

Жесткое наведение для продолжительного полета в возмущенной атмосфере использовать нецелесообразно. Поэтому в настоящем исследовании выбран терминальный метод, в котором алгоритмы наведения основаны на принципах усиления невязок по обратной связи, демпфирования производных невязок и аппроксимации функций эталонного управления. Терминальные условия наведения — достижение параметров целевой орбиты.

Управление первой ступенью ускорителя подробно изучено [19–21] и реализовано на практике, поэтому в данной статье оно рассматривается только для расчета вариаций параметров полета в точке отделения первой ступени.

Первоначально функции наведения были заданы сложными формулами, включающими более 20 коэффициентов. В результате применения методики оптимизации, аналогичной [20], большая их часть обратилась в ноль. Осталось только пять значимых, что упростило сами функции и поиск коэффициентов.

Наведение в горизонтальной плоскости задается функцией боковой перегрузки:

$$n_z = -(k_\varphi \varphi V_k + k_n V_n) / V / (k_{\varphi 2} + \varphi^2), \quad (33)$$

причем  $k_{\varphi 2}$  регулирует усиление в зависимости от широты, а коэффициенты  $k_\varphi$  и  $k_n$  асимптотически направляют АКС в плоскость целевой орбиты:

$$\varphi \approx 0; \quad V_n \approx 0.$$

Наведение в вертикальной плоскости заключается в выводе АКС на пассивную переходную орбиту ( $V_r \approx 0$ ) и отключении двигателя

по условию, когда значение расчетного радиуса апогея  $r_\alpha$  достигнет значения радиуса целевой орбиты  $r_k$ :

$$r_\alpha = \alpha + \sqrt{(\alpha - r)^2 + (\alpha - r)rV_r^2 / h} \geq r_k, \quad (34)$$

где  $\alpha = -\mu/h$  — большая полуось;  $h = V^2 - 2\mu/r$  — интеграл энергии;  $r$  — текущий радиус суборбиты АКС.

Вывод АКС на переходную орбиту задается функцией нормальной перегрузки:

$$n_y = n_r - k_r V_r / V; \quad (35)$$

$$n_r = (1 - rV^2 / \mu)r^2 / r_3^2. \quad (36)$$

Здесь  $k_r$  — коэффициент демпфирования радиальной скорости;  $n_r$  — равновесная радиальная перегрузка.

Анализ эталонных траекторий показал, что значительные отклонения угла атаки от оптимального угла  $\alpha_e$  приводят к существенным управленческим и аэродинамическим потерям. Чтобы снизить эти потери, перегрузки (33)–(36) нормируются:

$$n_{ye} = n_y n(\alpha), \quad n_{ze} = n_z n(\alpha), \quad (37)$$

$$n(\alpha) = \alpha_e (1 + k_\alpha) / (\alpha + \alpha_e k_\alpha), \quad (38)$$

$$\alpha = m \sqrt{n_y^2 + n_z^2} / (F_p + S q_e C_y^\alpha). \quad (39)$$

Здесь  $\alpha$  — угол атаки;  $k_\alpha$  — нормирующий коэффициент.

Выражение (38) — это нормирующая функция; угол атаки в (39) рассчитывается по перегрузкам (37), (38).

Равновесные параметры полета соответствуют условию

$$\dot{V}_y = \sum F_y^0 \cos \gamma / m - n_r \mu / r = 0.$$

Отсюда следует:

$$\sum F_y^0 = m n_r \mu / r / \cos \gamma. \quad (40)$$

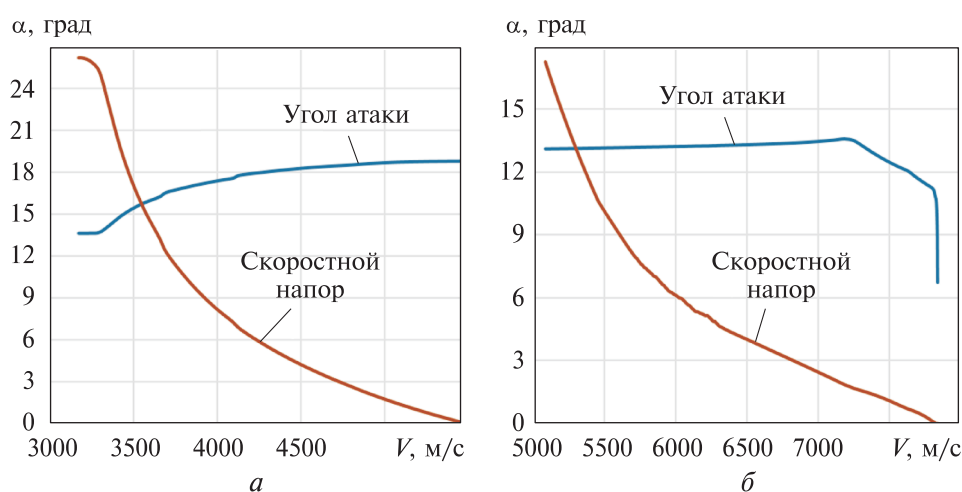
Угол крена  $\text{tg} \gamma$  определяется из уравнений (34), (36):

$$\text{tg} \gamma = n_z / n_r. \quad (41)$$

Оптимальные значения угла атаки  $\alpha_e$  и скоростного напора  $q_e$  определяются по условиям равновесия (40), (41) и максимума проекции сил на вектор скорости:

$$\begin{cases} \sum F_y^0 = (F_p \sin \alpha_e + S q_e C_y), \\ \sum F_x^0 = (F_p \cos \alpha_e - S q_e C_x) = \max. \end{cases} \quad (42)$$

Решение уравнений (42) для второй ступени и АКС (рис. 7) показало, что при отделении второй ступени происходит разрыв оптимальных параметров равновесного полета: угол атаки изменяется с  $\alpha_e(2cm) \approx 19^\circ$  на  $\alpha_e(\text{АКС}) \approx 13^\circ$ , а скоростной напор — с 0 на 17 кПа, что обусловлено 25-кратным снижением тяги АКС и ее вклада в подъемную силу  $F_p \sin \alpha_e$ .



**Рис. 7.** Оптимальные равновесные значения угла атаки и скоростного напора, кПа, для второй ступени и АКС

Для того чтобы снизить потери энергии в переходном процессе после отделения ступени, применяется функция относительного времени, которая представляет собой часть кубической параболы  $\tau^2(3-2\tau)$  в диапазоне значений  $0 \dots 1$  с нулевыми граничными производными:

$$\alpha_e(\tau) = \alpha_e(2cm) + \tau^2(3-2\tau)(\alpha_e(\text{АКС}) - \alpha_e(2cm)); \quad (43)$$

$$\tau = (t - t_2) / (t_1 - t_2), \quad (44)$$

где  $t_1, t_2$  — время начала и окончания участка полета второй ступени.

Структура формул (34)–(44) аппроксимирует эталонное управление, асимптотически приближает АКС к плоскости целевой орбиты и равновесным условиям полета, определяет момент отключения двигателя и выводит АКС на попадающую пассивную траекторию.

Орбитальная коррекция в настоящей работе не исследуется и учитывается только в расчете расхода топлива на коррекцию промаха.

**Оптимизация коэффициентов наведения.** Суть решения задачи оптимизации состоит в итерационном поиске коэффициентов наведения:

$$\bar{k} = (k_{\varphi}, k_n, k_{\varphi^2}, k_r, k_a).$$

Критерий поиска — минимум расхода топлива, необходимого для вывода АКС на целевую орбиту (или максимум конечной массы  $m_k = \max$ ).

Функционал оптимизации учитывает дополнительный расход топлива на коррекцию промаха, который вычисляется по формуле Циолковского:

$$J(\bar{k}) = m_k \exp(-m_p \Delta V) = \max. \quad (45)$$

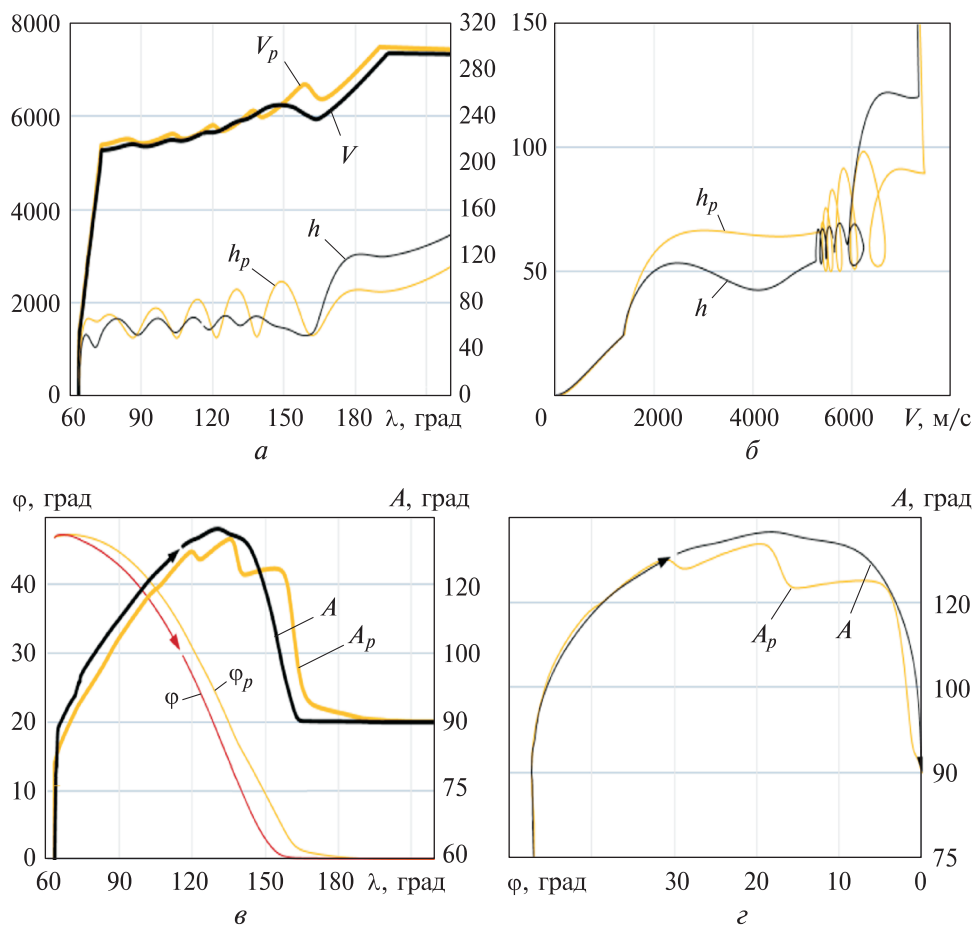
Здесь  $m_k$  — масса АКС до коррекции;  $m_p$  — удельный расход топлива;  $\Delta V$  — суммарный импульс скорости,  $\Delta V = \Delta V_n + \Delta V_r$  ( $\Delta V_n = \sqrt{V_n^2 + V_k^2 \sin^2 \varphi}$  — промах по наклонению,  $\Delta V_r = \sqrt{V^2 - 2\mu/r + \mu/r_k}$  — радиальный промах).

Вариации характеристик двигателей и аэродинамики АКС важны для расчета гарантийного запаса топлива, но в методике оптимизации не учитывались, так как являются систематическими. Моделировались только случайные возмущения, из которых наибольший промах вносят вариации ветра и плотности атмосферы [11]. В каждом расчетном случае задавались предельные сочетания возмущений и методом наискорейшего спуска определялись оптимальные коэффициенты наведения.

Вариант возмущений с наибольшими потерями топлива определялся по градиенту функционала (45): возмущение ветра — встречное, вариации плотности на участке ускорителя  $\Delta = \max$ , на участке АКС —  $\Delta = \min$ .

**Результаты оптимизации траектории наведения АКС.** При старте с космодрома Байконур и наведении АКС на экваториальную околоземную орбиту наибольшие потери топлива составили  $\approx 2\%$  от конечной массы АКС ( $\approx 30$  кг).

Для сравнения на рис. 8 представлены траектория наведения АКС на экваториальную околоземную орбиту (показана черным цветом) и экстремаль (обозначается индексом «р», график оранжевого цвета).



**Рис. 8.** Траектории АКС при старте с космодрома Байконур:

*a* — высота (км) и скорость по долготе; *б* — высота по скорости;  
*в* — трасса и азимут; *г* — азимут по широте

Амплитуда колебаний высоты и скорости (рис. 8, *a*, *б*) на траектории наведения значительно меньше, чем на экстремали, что увеличивает расход топлива в номинальном случае, но минимизирует потери топлива на коррекцию промаха в случае предельных возмущений. Причиной этого является повышение коэффициентов демпфирования  $k_n$  (33) и  $k_r$  (35). Следствием этого является сокращение долготы выхода в плоскость переходной орбиты и устранение колебаний азимута (рис. 8, *в*). В целом график азимута наведения огибает азимут экстремали (рис. 8, *г*) и стремится в конце маневра к условиям  $A \approx 90^\circ$ ,  $\varphi \approx 0$ .

Для оценки эффективности расчетного маневра АКС в табл. 3 представлено сравнение с баллистическими характеристиками РН «Стрела». В качестве примера была выбрана траектория с выполнением горизонтального маневра при выведении низкоорбитального КА наблюдения Земли «Кондор».



Сравнение баллистических характеристик расчетного варианта РН «Стрела» и АКС

Ракета-носитель	Широта старта	Масса КА, т / высота орбиты, км		Наклонение, град		Угол маневра, град	Стартовая масса, т
				начальное	конечное		
Стрела	46°	1,6 / 200	1,15 / 500	65	74,7	9,3	105
АКС	46°	1,5 / 300		52	0	52	67,2

Данные в табл. 3 подтверждают преимущества использования аэродинамических сил по критериям экономии топлива и величины угла маневра по наклонению.

**Заключение.** В настоящем исследовании предложены решения основных проблем оптимизации управления и наведения АКС для траекторий с наземным стартом и выходом на экваториальную орбиту. В ходе проведенных исследований получены следующие результаты.

1. Учтены существенные физические факторы и предусмотрена сквозная оптимизация управления без переноса граничных условий. Математическая модель применима для различных вариантов АКС и координат старта.

2. Расчетная система координат исключила неопределенности типа деления на ноль, уменьшила количество гармонических функций, понизила размерность сопряженного вектора и ускорила решение.

3. Получены системы дифференциальных уравнений движения АКС и сопряженных переменных. Реализован принцип максимума Понтрягина.

4. Разработаны методики поэтапного решения краевых задач.

5. Подтверждена правомерность допущений и формул методики аналитического расчета начального приближения с помощью результатов решения краевой задачи. Программная реализация доказала надежность методики поиска области сходимости.

6. Решены краевые задачи для нескольких вариантов характеристик АКС и координат старта. Рассчитаны и проанализированы экстремали.

7. Сформированы оптимальные функции наведения, аппроксимирующие эталонное управление АКС.

8. Разработан алгоритм оптимизации коэффициентов наведения в условиях возмущений и расхода топлива на коррекцию промаха.

9. Рассчитаны оптимальные коэффициенты наведения, которые увеличили номинальный расход топлива, но минимизировали потери топлива в случае предельного сочетания возмущений.

10. Разработаны автоматизированные программы по всем моделям и методикам.

Недостатки настоящей статьи — методики не были проверены для других типов маневра, принцип максимума Понтрягина был реализован для упрощенной модели аэродинамики, что снижает достоверность результатов.

В следующих работах будут рассмотрены:

– методики и программы для сложной модели аэродинамики с численным расчетом производных сопряженного вектора;

– отладка универсальной программы для всех аэрокосмических маневров: старт — горизонтальный и наклонный (орбита, воздух, поверхность Земли), финиш — горизонтальный и наклонный (орбита, воздух, поверхность).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ajeey Lele. *Hypersonic Weapons*. New Delhi, Institute for Defence Studies and Analyses, occasional paper, no. 46, 2017, 49 p. ISBN: 978-93-82169-76-5
- [2] Володин С.В., Корунов С.С. Развитие гиперзвуковых технологий и создание многоразовых систем выведения космических аппаратов как один из путей диверсификации аэрокосмической отрасли. *Бизнес в законе. Экономико-юридический журнал*, 2016, № 6, с. 152–159.
- [3] Андреевский В.В. *Динамика спуска космических аппаратов на Землю*. Москва, Машиностроение, 1970, 235 с.
- [4] Растринин А.А. *Системы экстремального управления*. Москва, Наука, 1974, 632 с.
- [5] Охочимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г. *Алгоритмы управления космических аппаратов при входе в атмосферу*. Москва, Наука, 1975, 400 с.
- [6] Балабанов О.В., Пашинцев В.Т. Приближенно оптимальное управление в задаче выведения одноступенчатого воздушно-космического самолета на околоземную орбиту. *Ученые записки ЦАГИ*, т. XXIII, 1992, № 4, с. 82–94.
- [7] Бебяков А.А. Оптимальное управление углом атаки гиперзвукового летательного аппарата на этапе разгона–набора высоты в атмосфере. *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета*, 2013, № 1 (39), с. 26–38.
- [8] Бузулук В.И., Михалев С.М. Разработка методики формирования облика многоразовой аэрокосмической системы, оптимизация ее проектных параметров и траекторий движения. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 6 (90). DOI: 10.18698/2308-6033-2019-6-1894
- [9] Филатьев А.С., Янова О.В. Сквозная оптимизация ветвящихся траекторий космических систем с учетом случайных возмущений. *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета*, 2010, № 1, с. 244–249.
- [10] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Наука, 1983, 392 с.
- [11] Елисейкин С.А., Климов А.С., Подрезов В.А., Ширшов Н.В. *Глобальная справочная модель атмосферы*. Московская область, Королёв, 4 ЦНИИ МО РФ, 2017, 97 с.

- [12] Полак Э. *Численные методы оптимизации (единый подход)*. Москва, Мир, 1974, 370 с.
- [13] Волков Е.А. *Численные методы*. 5-е изд. Санкт-Петербург, Лань, 2008.
- [14] Wang Y.-S., Chien C.-S. A two-parameter continuation method for computing numerical solutions of spin-1 Bose–Einstein condensates. *Journal of Computational Physics*, 2014, vol. 256, pp. 198–213.
- [15] Горнов А.Ю. Алгоритмы решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями. *Вычислительные технологии*, 2010, т. 15, № 2, с. 24–30.
- [16] Остов Ю.Я., Иванов А.П. Метод оптимизации в задаче динамики полета. *Автоматика и телемеханика*, 2014, № 2, с. 146–155.
- [17] Мельников А.Ю. Оптимальное управление маневрами гиперзвукового планера на основе принципа максимума Понтрягина. *Аэрокосмический научный журнал*, 2015, т. 1 (05), с. 26–37.
- [18] Жидкостный ракетный двигатель РД-0124А. *ГКНПЦ им. М.В. Хруничева*. URL: <http://www.khrunichev.ru/main.php?id=305&hl=%E4%E2%E8%E3%E0%F2%E5%EB%FC+%F0%E4-0124%E0> (дата обращения 20.01.2021).
- [19] Сихарулидзе Ю.Г. *С41 Баллистика и наведение летательных аппаратов*. Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015, 410 с.
- [20] Клишин А.Н., Швыркина О.С. Алгоритм выбора коэффициентов пропорционального метода наведения летательного аппарата. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2016, вып. 9. DOI: 10.18698/2308-6033-2016-9-1534
- [21] Илюхин С.Н., Казаковцев В.П., Корянов В.В. Баллистический анализ возможности парирования ветровой нагрузки на начальном участке траектории перспективных летательных аппаратов. *Наука и образование. Издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2015, № 11, с. 193–203.

Статья поступила в редакцию 30.03.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Мельников А.Ю. Решение задач оптимального управления аэрокосмическим самолетом. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2021, вып. 2.  
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2021-2-2058>

**Мельников Алексей Юрьевич** — преподаватель кафедры «Динамика и управление полетом ракет и космических аппаратов» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: [ayumelnikov@bmstu.ru](mailto:ayumelnikov@bmstu.ru)

## Solving the problems of aerospace aircraft optimal control

© A.Yu. Melnikov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The paper overviews works on methods for solving problems of aerospace aircraft control and aims to solve the remaining problems. The purpose of the study was to obtain reference optimal control and its approximation in the guidance functions. When stating the problem, we took into account all essential physical factors; we selected the solution techniques and computational coordinate system, developed a mathematical model, methods and automated procedures for end-to-end optimization relying on the maximum principle, the formation and optimization of guidance functions. In addition to the well-known methods for solving boundary value problems, methods of analytical calculation of the initial approximation and the search for the convergence region were developed. The results of numerical studies contain nominal and perturbed optimal trajectories in which an aerospace aircraft is boosted by an accelerator, performs global spatial maneuvers, and enters orbit. Having analyzed extremals, compared and evaluated the effectiveness of the guidance functions, we drew certain conclusions taking into account the perturbations.*

**Keywords:** aerospace, hypersonic, maneuver, control, guidance, optimal, maximum principle, boundary value problem

### REFERENCES

- [1] Ajeje Lele. *Hypersonic Weapons*. Institute for Defence Studies and Analyses, 2017, 49 p. ISBN: 978-93-82169-76-5
- [2] Volodin S.V., Korunov S.S. *Biznes v zakone. Ekonomiko-yuridicheskiy zhurnal — Business in law*, 2016, no. 6, pp. 152–159.
- [3] Andreevskiy V.V. *Dinamika spuska kosmicheskikh apparatov na Zemlyu* [Dynamics of spacecraft descent to the Earth]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970, 235 p.
- [4] Rastrigin A.A. *Sistemy ekstremalnogo upravleniya* [Extreme control systems]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 632 p.
- [5] Okhotsimiskiy D.E., Golubev Yu.F., Sikharulidze Yu.G. *Algoritmy upravleniya kosmicheskikh apparatov pri vkhode v atmosferu* [Control algorithms for spacecraft when entering the atmosphere]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 400 p.
- [6] Balabanov O.V., Pashintsev V.T. *Uchenye zapiski TsAGI — TsAGI Science Journal*, vol. XXIII, 1992, no. 4, pp. 82–94.
- [7] Bebyakov A.A. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta — Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2013, no. 1 (39), pp. 26–38.
- [8] Buzuluk V.I., Mikhalyov S.M. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2019, iss. 6 (90). DOI: 10.18698/2308-6033-2019-6-1894
- [9] Filatev A.S., Yanova O.V. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta — Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*, 2010, no. 1, pp. 244–249.
- [10] Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka Publ., 1983.

- [11] Eliseykin S.A., Klimov A.S., Podrezov V.A., Shirshov N.V. *Globalnaya spravochnaya model atmosfery* [Global Reference Atmosphere Model]. Moscow Region, Korolev, 4<sup>th</sup> Cenral Research Institute MR RF, 2017, 97 p.
- [12] Polak E. *Computational Methods in Optimization: A Unified Approach*. Academic Press, 1971, 329 p. [In Russ.: Polak E. Chislennye metody optimizatsii (ediny podkhod). Moscow, Mir Publ. 1974, 370 p.].
- [13] Volkov E.A. *Chislennye metody* [Numerical methods]. 5<sup>th</sup> ed. St. Petersburg, Lan Publ., 2008.
- [14] Wang Y.-S., Chien C.-S. A two-parameter continuation method for computing numerical solutions of spin-1 Bose–Einstein condensates. *Journal of Computational Physics*, 2014, vol. 256, pp. 198–213.
- [15] Gornov A.Yu. *Vychislitelnye tekhnologii — Computational Technologies*, 2010, vol. 15, no. 2, pp. 24–30.
- [16] Ostov Yu.Ya., Ivanov A.P. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*, 2014, no. 2, pp. 146–155.
- [17] Melnikov A.Yu. *Aerokosmicheskij nauchny zhurnal — Aerospace Scientific Journal*, 2015, vol. 1 (05), pp. 26–37.
- [18] Liquid rocket engine RD-0124A. *Khrunichev State Research and Production Space Center*. Available at: <http://www.khrunichev.ru/main.php?id=305&hl=%E4%E2%E8%E3%E0%E2%E5%EB%FC+%F0%E4-0124%E0> (accessed January 20, 2021).
- [19] Sikharulidze Yu.G. *Ballistika i navedenie letatelnykh apparatov* [Aircraft ballistics and guidance]. Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy Publ., 2015, 410 p.
- [20] Klishin A.N., Shvyrkina O.S. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2016, iss. 9. DOI: 10.18698/2308-6033-2016-9-1534
- [21] Ilyukhin S.N., Kazakovtsev V.P., Koryanov V.V. *Nauka i obrazovanie — Science & Education*, 2015, no. 11, pp. 193–203.

**Melnikov A.Yu.**, Lecturer, Department of Dynamics and Flight Control of Rockets and Spacecraft, Bauman Moscow State Technical University.  
e-mail: ayumelnikov@bmstu.ru