УДК 536.75

А. Н. Морозов

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В СРЕДЕ С ФЛУКТУИРУЮЩИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Получена функция распределения флуктуаций скорости броуновской частицы с учетом случайных гауссовых изменений коэффициента вязкого трения. Показано, что эта функция распределения в предельных случаях совпадает с распределениями Коши и Максвелла.

E-mail: amor@mx.bmstu.ru

Ключевые слова: *броуновское движение, флуктуации, вязкое трение.*

Традиционное описание броуновского движения основывается на использовании уравнения Ланжевена для скорости броуновской частицы и получении на его основе уравнения Фоккера – Планка для функции распределения флуктуаций указанной скорости [1, 2]. При таком подходе можно достаточно адекватно описывать броуновское движение в первом приближении, но не удается учитывать флуктуации коэффициента вязкого трения [3, 4]. Эти флуктуации могут быть учтены при применении немарковского описания броуновского движения [5, 6].

Одной из задач описания броуновского движения в среде с флуктуирующим коэффициентом вязкого трения является построение функции распределения флуктуаций скорости движения броуновской частицы, которая может отличаться от распределения Максвелла [7]. В данной работе определена функция распределения скоростей броуновской частицы для стационарного случая.

Рассмотрим броуновское движение частицы с учетом флуктуаций коэффициента вязкого трения. В этом случае уравнение для одномерного движения броуновской частицы можно записать в виде [8, 9]

$$m\frac{dv}{dt} + m\alpha v + \eta\left(t\right)v = \xi\left(t\right) + F, \tag{1}$$

где m — масса броуновской частицы; v — ее скорость; α — коэффициент трения; $\eta\left(t\right)$ — δ-коррелированный гауссовский случайный процесс, описывающий флуктуации коэффициента трения; $\xi\left(t\right)$ — δ-коррелированный гауссовский случайный процесс, описывающий силу Ланжевена [1]; F — внешняя детерминированная сила. Будем считать, что средние значения случайных процессов $\eta\left(t\right)$ и $\xi\left(t\right)$ равны нулю, т.е.

$$\langle \eta(t) \rangle = 0;$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0,$$

а их корреляционные функции соответственно:

$$\langle \eta(t_2)\, \eta(t_1) \rangle = 2m\beta\delta(t_2 - t_1),$$

$$\langle \xi(t_2)\, \xi(t_1) \rangle = 2m\alpha kT\delta(t_2 - t_1),$$

$$\langle \eta(t_2)\, \xi(t_1) \rangle = 0.$$

Здесь k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура среды.

Представим уравнение (1) в форме дифференциального уравнения Ито

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{F}{m} - \alpha v\right) + \frac{1}{m}\xi(t) - \frac{v}{m}\eta(t).$$

Тогда в соответствии с работой [10] можно записать уравнение Фоккера – Планка для функции распределения $f(v,t)$

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \\ = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(\frac{F}{m} - \alpha v\right) f(v,t)\right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\left(\frac{\alpha kT}{m} + \frac{\beta}{m}v^2\right) f(v,t)\right). \quad (2)$$

Определим стационарное распределение для скорости броуновской частицы v. При $F = \mathrm{const}$ уравнение Фоккера – Планка (см. формулу (2)) для стационарной функции распределения $f(v)$ принимает вид

$$\frac{d}{dv}\left(\left(\frac{F}{m} - \alpha v\right) f(v)\right) - \frac{d^2}{dv^2}\left(\left(\frac{\alpha kT}{m} + \frac{\beta}{m}v^2\right) f(v)\right) = 0. \quad (3)$$

После интегрирования уравнение (3) может быть записано в форме

$$\frac{d}{dv}\left(\left(\frac{\alpha kT}{m} + \frac{\beta}{m}v^2\right) f(v)\right) = \left(\frac{F}{m} - \alpha v\right) f(v), \quad (4)$$

где константа интегрирования принята равной нулю.

Представим уравнение (4) в виде

$$\left(A_1 + A_2 v^2\right) \frac{df(v)}{dv} = -\left(Bv - F_m\right) f(v), \quad (5)$$

где введены следующие обозначения:

$$A_1 = \frac{\alpha kT}{m},$$

$$A_2 = \frac{\beta}{m},$$

$$B = \alpha + \frac{2\beta}{m},$$

$$F_m = \frac{F}{m}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (5) запишем в форме

$$\frac{df}{f} = -\frac{Bv - F_m}{A_1 + A_2 v^2} dv. \tag{6}$$

После интегрирования выражения (6) получаем [11]

$$f(v) = G \exp\left(-\frac{B}{2A_2} \ln\left(A_1 + A_2 v^2\right)\right) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{F_m}{\sqrt{A_1 A_2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} v\right)\right), \tag{7}$$

где константа интегрирования G определяется из условия нормировки функции распределения $f(v)$. Выражение (7) преобразуем к виду

$$f(v) = \frac{G}{\left(A_1 + A_2 v^2\right)^\gamma} \exp\left(\frac{F_m}{\sqrt{A_1 A_2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{A_2}{A_1}} v\right)\right) \tag{8}$$

или

$$f(v) = \frac{G m^\gamma}{\left(\alpha k T + \beta v^2\right)^\gamma} \exp\left(\frac{F}{\sqrt{\alpha \beta k T}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha k T}} v\right)\right).$$

Здесь введено обозначение

$$\gamma = \frac{B}{2A_2} = 1 + \frac{\alpha m}{\beta}. \tag{9}$$

Рассмотрим частные случаи. Если внешняя детерминированная сила отсутствует ($F = 0$), то функция распределения (8) принимает форму

$$f(v) = \frac{G}{\left(A_1 + A_2 v^2\right)^\gamma}. \tag{10}$$

Используя условие нормировки функции распределения $f(v)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, dv = 1 \ ,$$

определим константу G [11, 12]

$$G^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(A_1 + A_2 v^2\right)} dv = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\gamma + 1/2)}{(\gamma - 1/2)\,\Gamma(\gamma)} \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \frac{1}{A_1^\gamma},$$

где $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция.

Тогда функция распределения (10) принимает вид

$$f(v) = \frac{(\gamma - 1/2)\,\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma + 1/2)}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}\frac{A_1^\gamma}{(A_1 + A_2 v^2)^\gamma} \qquad (11)$$

или

$$f(v) = \frac{(\gamma - 1/2)\,\Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma + 1/2)}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha kT}}\frac{(\alpha kT)^\gamma}{(\alpha kT + \beta v^2)^\gamma}.$$

Если $\alpha \to 0$, то $A_1 \to 0$, а $\gamma \to 1$, и выражение (11) принимает форму распределения Коши [10]

$$f(v) = \left.\frac{\sqrt{\alpha\beta kT}}{\pi(\alpha kT + \beta v^2)}\right|_{\alpha\to 0}. \qquad (12)$$

Очевидно, что при $\alpha = 0$ функция распределения

$$f(v) \sim \frac{1}{v^2},$$

и нормировку для нее осуществить невозможно ввиду расходимости при $v = 0$.

При $\beta = 0$ величина $A_2 = 0$, а параметр $\gamma \to \infty$. В этом случае функция распределения (11) принимает вид распределения Максвелла

$$f(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right). \qquad (13)$$

Формулу (13) можно получить путем решения уравнения (4) при $\beta = 0$ и $F = 0$.

Таким образом, соотношение между параметрами α и β определяет вид функции распределения (см. формулу (9)). При $\alpha m << \beta$ функция распределения близка к распределению Коши (12), а при $\alpha m >> \beta$ — к распределению Максвелла (13).

Полученное выше выражение для функции распределения флуктуаций скорости броуновской частицы в среде с флуктуирующим коэффициентом трения позволяет путем экспериментального определения отличия функции распределения скоростей броуновской частицы от распределения Максвелла устанавливать характеристики флуктуаций коэффициента вязкого трения. Мера Кульбака, метод экспериментального определения которой предложен в работе [13], может служить в качестве критерия отличия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К л и м о н т о в и ч Ю. Л. Статистическая физика. – М.: Наука, 1982. – 608 с.
2. М о р о з о в А. Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 332 с.

3. Б о ч к о в Г. Н., К у з о в л е в Ю. Е. Новое в исследованиях $1/f$-шума // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141, вып. 1. – С. 151–176.
4. М о р о з о в А. Н. Применение теории немарковских процессов при описании броуновского движения // ЖЭТФ. – 1996. – Т. 109, вып. 4. – С. 1304–1315.
5. М о р о з о в А. Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2004. – № 3. – С. 47–56.
6. М о р о з о в А. Н., С к р и п к и н А. В. Применение интегральных преобразований для описания броуновского движения как немарковского случайного процесса // Изв. вузов. Физика. – 2009. – № 2. – С. 66–74.
7. М а л а х о в А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978. – 370 с.
8. М о р о з о в А. Н., С к р и п к и н А. В. Движение сферической броуновской частицы в вязкой среде как немарковский процесс // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2006. – № 4. – С. 3–14.
9. M o r o z o v A. N., S k r i p k i n A. V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process // Phys. Letts A. – 2011. – Vol. 375. – P. 4113–4115.
10. П у г а ч е в В. С., С и н и ц ы н И. Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
11. П р у д н и к о в А. П., Б р ы ч к о в Ю. А., М а р и ч е в О. И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
12. Н и к и ф о р о в А. Ф., У в а р о в В. Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984. – 344 с.
13. М о р о з о в А. Н. Предварительные результаты измерений меры Кульбака флуктуаций напряжения на электролитической ячейке // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2011. – № 2. – С. 16–24.

Статья поступила в редакцию 05.07.2012