

А. Н. М о р о з о в

**ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРФЕРОМЕТРА
ФАБРИ – ПЕРО ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ
ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ
МЕТРИКИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ**

Обосновывается возможность применения интерферометра Фабри – Перо для регистрации высокочастотных флуктуаций метрики пространства-времени. Показано, что использование явления низкочастотного оптического резонанса позволяет повысить чувствительность интерферометра к сверхнизким флуктуациям метрики.

E-mail: amor@mx.bmstu.ru

Ключевые слова: интерферометр Фабри – Перо, флуктуации, метрика пространства-времени.

Проблема регистрации гравитационных волн является на сегодня одной из фундаментальных задач экспериментальной физики. Реализуемые в целом ряде стран проекты создания гравитационных антенн основываются на предположении о наличии гравитационных волн, возникающих в результате различных астрофизических событий, таких как взрывы сверхновых, столкновения звезд и т. д. При этом считается, что указанные астрофизические события вызывают гравитационные волны с частотами $10 \dots 10^3$ Гц [1]. На этот спектральный диапазон и настраивают строящиеся гравитационные антенны [2].

Целью данной статьи является обоснование возможности существования более высокочастотных гравитационных волн, вызванных флуктуациями плотности темной материи в нашей Галактике. Указанные флуктуации метрики пространства-времени могут быть зарегистрированы с помощью интерферометра Фабри – Перо, настроенного на регистрацию в частотном диапазоне $10^4 \dots 10^7$ Гц.

Высокочастотные флуктуации метрики пространства-времени. По современным представлениям темная материя заполняет пространство нашей Галактики, имеет свойство гравитационного взаимодействия и массу, превышающую в несколько раз массу звезд нашей Галактики [3]. Если предположить, что темная материя представляет собой систему гравитационно взаимодействующих частиц с флуктуирующей с течением времени плотностью $\rho(t)$, то флуктуации метрики пространства-времени в месте наблюдения (на Земле) можно в самом первом приближении оценить по формуле [4, 5]

$$h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t) = -\frac{2G}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V'} \rho \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, x'_\alpha \right) \frac{x'_\alpha x'_\beta}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV',$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где G – гравитационная постоянная; c – скорость света в пустоте; \vec{r} – радиус-вектор, определяющий точку наблюдения; \vec{r}' – радиус-вектор, определяющий точку излучения гравитационных волн; x'_α – координаты точек излучения x' , y' и z' соответственно; α и β – числа, которые задают поляризацию гравитационной волны. Интегрирование в выражении (1) производится по объему нашей Галактики.

Считая плотность темной материи случайным образом изменяющейся величиной, на основании формулы (1) можно записать выражение для корреляционной функции флуктуаций метрики пространства-времени в точке наблюдения

$$\begin{aligned} \langle h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_2) h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_1) \rangle &= \\ &= \frac{4G^2}{c^8} \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \int_{V'} \int_{V''} \left\langle \rho \left(t_2 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{c}, x''_\alpha \right) \rho \left(t_1 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, x'_\alpha \right) \right\rangle \times \\ &\quad \times \frac{x''_\alpha x''_\beta}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \frac{x'_\alpha x'_\beta}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'' dV', \quad (2) \end{aligned}$$

где вид корреляционной функции флуктуаций плотности темной материи считаем аналогичным виду корреляционной функции равновесных флуктуаций плотности газа

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \left(t_2 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{c}, x''_\alpha \right) \rho \left(t_1 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}, x'_\alpha \right) \right\rangle &= \\ &= \frac{1}{2} \rho_0 m_0 \tau_0 \delta \left(t_2 - \frac{|\vec{r} - \vec{r}''|}{c} - t_1 + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \times \\ &\quad \times \delta(x'' - x') \delta(y'' - y') \delta(z'' - z'), \quad (3) \end{aligned}$$

где ρ_0 – средняя плотность темной материи; m_0 и τ_0 – масса и постоянная времени хаотизации частиц темной материи соответственно.

Подстановка формулы (3) в выражение (2) и проведение интегрирования по объему V'' дает

$$\langle h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_2) h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_1) \rangle = \frac{2G^2 \rho_0 m_0 \tau_0}{c^8} \int_{V'} \frac{x'_\alpha{}^2 x'_\beta{}^2}{(\vec{r} - \vec{r}')^2} dV' \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \delta(t_2 - t_1).$$

Интеграл по объему Галактики можно представить в виде следующего оценочного выражения:

$$\int_{V'} \frac{x'_\alpha{}^2 x'_\beta{}^2}{(\vec{r} - \vec{r}')^2} dV' = L_{\alpha\beta}^5,$$

где $L_{\alpha\beta}$ — характерные размеры Галактики в различных направлениях. Тогда имеем

$$\langle h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_2) h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t_1) \rangle = \frac{2G^2 \rho_0 m_0 \tau_0 L_{\alpha\beta}^5}{c^8} \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \delta(t_2 - t_1).$$

Далее будем считать, что величины $L_{\alpha\beta} = L_0$, где L_0 — характерный размер Галактики, а массу темной материи в Галактике

$$M_0 = \rho_0 L_0,$$

получим оценку для корреляционной функции флуктуаций метрики пространства-времени

$$\langle h(t_2) h(t_1) \rangle = \frac{2G^2 M_0 m_0 \tau_0 L_0^2}{c^8} \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \delta(t_2 - t_1). \quad (4)$$

Для проведения дальнейших оценок предположим, что произведение массы частицы темной материи m_0 на постоянную времени ее хаотизации τ_0 может быть представлено в виде

$$m_0 \tau_0 = \frac{\hbar}{c^2}, \quad (5)$$

где \hbar — постоянная Планка. Очевидно, что такое представление имеет достаточно мало обоснований, но тем не менее дает возможность получить оценку, носящую характер некоторой верхней границы.

Выражение (4) с учетом формулы (5) позволяет определить спектральную плотность флуктуаций метрики пространства-времени в точке наблюдения (на Земле)

$$G_h(\omega) = \frac{2G^2 M_0 \hbar L_0^2}{c^{10}} \omega^4. \quad (6)$$

При подстановке в выражение (6) значений гравитационной постоянной G , постоянной Планка \hbar , скорости света в пустоте c , а также массы темной материи в нашей Галактике $M_0 = 10^{42}$ кг и характерного размера Галактики $L_0 = 10^{21}$ м получим выражение для оценки спектральной плотности флуктуаций метрики $h(t)$:

$$G_h(\omega) = 10^{-56} \omega^4 \text{ Гц}^{-1}. \quad (7)$$

Согласно выражению (7), спектральная мощность флуктуаций метрики $h(t)$ значительно возрастает (как функция четвертой степени) при увеличении частоты. Следовательно, наиболее эффективно ука-

занные флуктуации метрики должны регистрироваться в высокочастотной области спектра.

Описание интерферометра Фабри – Перо. Принцип использования пары свободных масс-зеркал и лазерного интерферометра для регистрации их малых колебаний, вызванных гравитационной волной, был впервые предложен в работе [6]. В настоящее время указанный принцип широко применяют в современных лазерных интерференционных гравитационных антеннах (проекты LIGO, VIRGO, TAMA, GEO-600 и др.), основным элементом которых является интерферометр Фабри – Перо.

Для нахождения отклика интерферометра Фабри – Перо на флуктуации метрики пространства-времени $h(t)$ используем математическую модель, разработанную в [7, 8]. В рамках этой модели предполагается, что используемый лазер стабилизирован по частоте ω_e и мощности W_0 , он создает на входе в интерферометр Фабри – Перо гармоническую световую волну с волновым числом k_e и амплитудой E_0 . Указанные величины связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\omega_e &= ck_e, \\ W_0 &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 S c E_0^2,\end{aligned}\tag{8}$$

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; S – площадь зеркал интерферометра Фабри – Перо.

Регистрация флуктуаций метрики $h(t)$ с помощью интерферометра Фабри – Перо заключается в измерении текущего расстояния между зеркалами интерферометра по изменению мощности прошедшего интерферометр излучения $W_a(t)$. При этом зеркала интерферометра считаются установленными на слабо связанных с основанием массах. Для выполнения этого условия при регистрации низкочастотных гравитационных волн (с частотой $10 \dots 10^3$ Гц) необходима специальная развязка с фундаментом [9]. При регистрации высокочастотных флуктуаций метрики (с частотой $10 \dots 10^3$ кГц) зеркала резонатора могут быть достаточно жестко связаны между собой и с основанием интерферометра, так как для этого случая выполняется условие малости механической частоты колебаний зеркал ω_3 по сравнению с частотой флуктуаций метрики пространства-времени ω_h : $\omega_3 \ll \omega_h$ [5]. Для интерферометра Фабри – Перо с расстоянием между зеркалами $L = 10$ м указанное условие выполняется для частот флуктуаций метрики в диапазоне значений $10 \dots 10^5$ кГц.

Далее для простоты будем считать зеркала интерферометра Фабри – Перо одинаковыми, имеющими амплитудные коэффициенты отражения R и пропускания η . В современных интерферометрах Фабри – Перо коэффициент отражения R достигает значения 0,99999.

Следуя работе [8], будем считать, что попадающее в интерферометр лазерное излучение описывается монохроматической волной

$$E(t, x) = E_0 \exp [i (\omega_e t - k_e x)],$$

где i — мнимая единица. Тогда после многократных преотражений из интерферометра Фабри – Перо выйдет излучение, описываемое выражением

$$E_a(t, x) = \eta^2 E_0 \sum_{n=1}^{\infty} R^{2(n-1)} \exp \left[i \left(\omega_e t - \left(n - \frac{3}{2} \right) \kappa - k_e \left(x + 2 \sum_{l=0}^{n-1} (x_2(t - (2l+1)t_0) - x_1(t - 2lt_0)) \right) \right) \right], \quad (9)$$

где $\kappa = 2k_e L - 2\pi N$ — параметр фазовой настройки интерферометра Фабри – Перо; L — расстояние между зеркалами интерферометра; N — целое число длин волн, укладывающееся на длине интерферометра; x_1 и x_2 — смещение первого и второго зеркал интерферометра соответственно при флуктуациях метрики $h(t)$; $t_0 = L/c$ — время однократного прохождения светом расстояния между зеркалами. Смещение зеркал при флуктуациях метрики $h(t)$ определяется выражениями

$$x_2(t) = -x_1(t) = \frac{1}{2} L h(t).$$

Для простоты будем считать, что фотоприемник, регистрирующий прошедшее интерферометр Фабри – Перо излучение, расположен сразу после второго зеркала и имеет координату $x = L$. Тогда мощность регистрируемого фотоприемником прошедшего интерферометр излучения будет определяться выражением

$$W_a(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S c E(t, L) E^*(t, L), \quad (10)$$

где $E^*(t, L)$ — комплексно сопряженная с напряженностью поля $E(t, L)$ величина.

После подстановки в формулу (10) выражения (9) с учетом (8) получаем

$$W_a(t) = \eta^4 W_0 \left\{ \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^{2(n-1)} \cos \Phi_n(t) \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^{\infty} R^{2(n-1)} \sin \Phi_n(t) \right]^2 \right\},$$

где

$$\Phi_n(t) = - (n - 1) \kappa - 2k_e \sum_{l=0}^{n-1} (x_2(t - (2l+1)t_0) - x_1(t - 2lt_0)).$$

Здесь $k_e = 2\pi/\lambda_e$, λ_e — длина волны лазерного излучения.

Как показано в работах [8, 10–12], особенностью интерферометра Фабри – Перо является наличие низкочастотного оптического резонанса. Это явление заключается в возникновении резонансного отклика на возмущение, имеющее частоту, близкую к собственной частоте низкочастотного оптического резонанса

$$\omega_0 = \frac{\kappa}{2t_0}. \quad (11)$$

При этом добротность указанного резонанса

$$Q = \frac{\kappa}{2\Delta}$$

зависит от параметра фазовой настройки κ и величины потерь Δ за один цикл переотражений в интерферометре, которая для случая использования идеальных зеркал без поглощения определяется выражением

$$\Delta = \eta^2 = 1 - R^2.$$

Наличие низкочастотного оптического резонанса необходимо учитывать при определении фазовой настройки κ интерферометра Фабри – Перо для целей регистрации флуктуаций метрики $h(t)$.

Математическое моделирование. Проведем математическое моделирование отклика интерферометра Фабри – Перо на высокочастотные флуктуации метрики $h(t)$, спектральная плотность которых задается выражением (7). На рис. 1 приведен график спектральной плотности $G_h(f)$, полученный при моделировании его случайным шумом со спектром (7).

При расчетах полагаем, что мощность лазерного излучения на входе в интерферометр Фабри – Перо $W_0 = 0,3$ Вт, длина его волны $\lambda_e = 1,064$ мкм (лазер непрерывный одночастотный YAG:Nd); длина

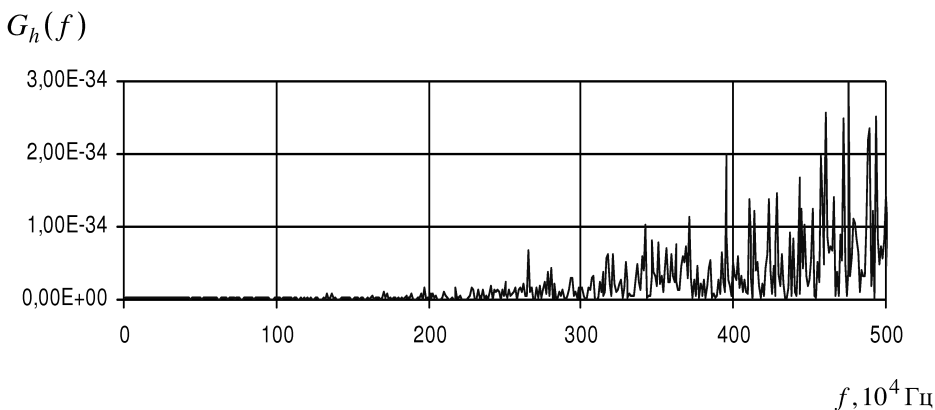


Рис. 1. Спектральная плотность флуктуаций метрики $h(t)$

интерферометра Фабри–Перо $L = 1,5$ м, а потери при однократном переотражении в нем $\Delta = 0,01$. Очевидно, что указанное значение потерь Δ не является на сегодня предельным, так как для лучших интерферометров оно может достигать величины $\Delta = 10^{-4} \dots 10^{-5}$, но в рамках модельного расчета, призванного качественно продемонстрировать возможность регистрации флуктуаций метрики $h(t)$, принятое значение оправдано.

На рис. 2 показана зависимость спектральной плотности относительных флуктуаций мощности излучения

$$\delta W(t) = \frac{W_a(t)}{W_0},$$

прошедшего интерферометр Фабри–Перо, который находится в поле флуктуаций метрики $h(t)$, от параметра фазовой настройки интерферометра κ .

На графиках (см. рис. 2) видно, что, начиная с частоты порядка 105 Гц, наблюдается равномерная спектральная плотность флуктуаций относительной мощности излучения с интенсивностью $G_{\delta W} = 10^{-22} \text{ Гц}^{-1}$. По мере увеличения параметра фазовой настройки κ происходит постепенное уменьшение чувствительности интерферометра в области высоких частот, но при этом начинает прорисовываться в низкочастотной области резонансная кривая, указывающая на явление низкочастотного оптического резонанса. При этом спектральная плотность флуктуаций относительной мощности $\delta W(t)$ в пике резонанса сохраняется неизменной. Наиболее отчетливо это видно на рис. 3, данные для которого рассчитаны при $\kappa = 0,10$. Кроме того, на указанном графике наблюдается сдвиг резонансной частоты в область высоких частот в полном соответствии с формулой (11).

На рис. 4 приведены значения дисперсии флуктуаций относительной мощности вышедшего из интерферометра излучения в диапазоне значений частот $10^4 \dots 5 \cdot 10^6$ Гц. Как следует из данных графика, дисперсия флуктуаций принимает максимальное значение при условии $\kappa = \Delta$ и медленно снижается при увеличении параметра κ .

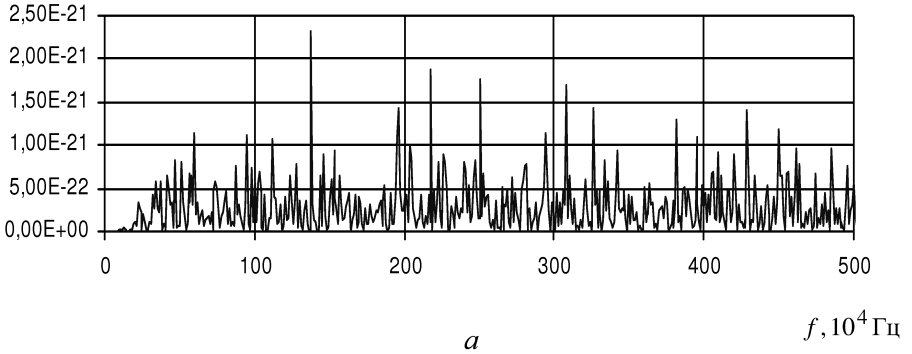
В качестве основного мешающего фактора при измерениях флуктуаций метрики $h(t)$ с помощью интерферометра Фабри–Перо выступает фотонный шум. Его величину можно оценить по формуле

$$G_{\delta W_e} = \frac{2\pi c \hbar}{\lambda_e W_0}, \quad (12)$$

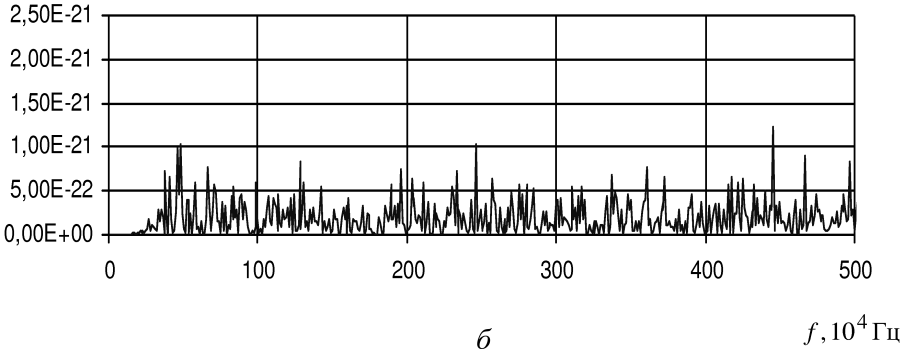
где \hbar — постоянная Планка. Оценка по формуле (12) для указанных выше значений параметров лазерного излучения дает $G_{\delta W_e} = 10^{-18} \text{ Гц}^{-1}$.

Несмотря на то что величина спектральной плотности флуктуаций $G_{\delta W}$, вызванных изменениями метрики пространства-времени $h(t)$,

$G_{\delta w}(f)$



$G_{\delta w}(f)$



$G_{\delta w}(f)$

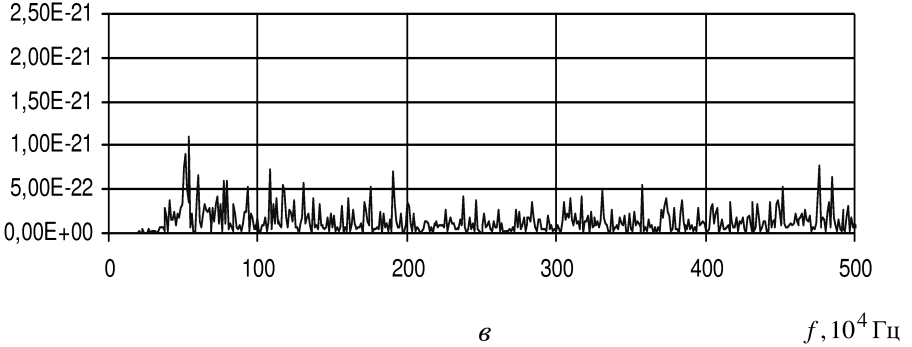


Рис. 2. Спектральные плотности флуктуаций относительной мощности излучения, прошедшего интерферометр Фабри–Перо, в зависимости от параметра фазовой настройки κ :

$a - \kappa = 0,01$; $b - \kappa = 0,02$; $в - \kappa = 0,03$

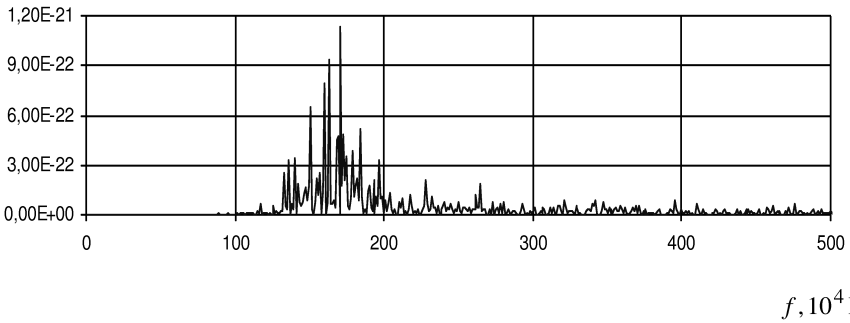
$G_{\delta W}(f)$ 

Рис. 3. Иллюстрация явления низкочастотного оптического резонанса при $\Delta = 0,01$; $\kappa = 0,10$

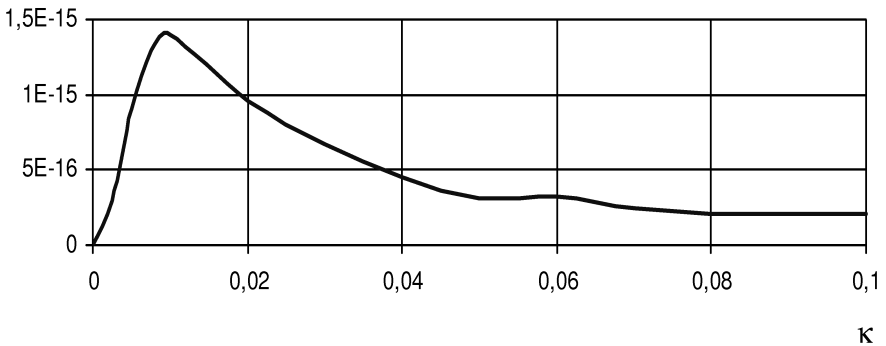
 $\sigma_{\delta W}^2$ 

Рис. 4. Зависимость дисперсии флуктуаций относительной мощности излучения, прошедшего интерферометр Фабри – Перо, от параметра фазовой настройки κ

на четыре порядка меньше спектральной плотности фотонных флуктуаций $G_{\delta W_e}$ при усреднении на достаточно больших промежутках времени:

$$\tau > \frac{G_{\delta W_e}^2}{G_{\delta W}^2} \frac{1}{\Delta f}, \quad (13)$$

где Δf — полоса частот усреднения флуктуаций, флуктуации метрики пространства-времени могут быть зарегистрированы. Так как для рассматриваемого случая полоса частот Δf достигает нескольких мегагерц, то при усреднении на промежутках времени порядка минуты появляется возможность выделения сигнала, связанного с флуктуациями метрики пространства-времени $h(t)$.

Выполненное моделирование интерферометра Фабри–Перо показало, что с его помощью могут быть зарегистрированы высокочастотные флуктуации метрики пространства-времени $h(t)$, вызван-

ные флуктуациями плотности темной материи в нашей Галактике. При этом регистрацию указанных флуктуаций метрики можно осуществить путем долговременных измерений дисперсии флуктуаций мощности оптического излучения, прошедшего интерферометр Фабри – Перо. Величина дисперсии флуктуаций должна изменяться при изменении пространственной ориентации интерферометра относительно плоскости Галактики, которое происходит при естественном вращении Земли. Следовательно, при измерениях дисперсии флуктуаций мощности должны наблюдаться суточные вариации указанной дисперсии с периодом, равным звездным суткам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амальди Э., Пицелла Г. Поиск гравитационных волн // *Астрофизика, кванты и теория относительности*. – М.: Мир, 1982. – С. 241–396.
2. Гладышев В. О., Морозов А. Н. Классификация гравитационных антенн по методам регистрации гравитационного излучения // *Измерительная техника*. – 2000. – № 9. – С. 21–25.
3. S i r a g o v S. V. Theory of the zero order effect to study the space-time geometrical structure // *Proc. of XIII Int. Sc. Meeting “Physical Interpretations of Relativity Theory”*. – Moscow, 2007. – P. 282–291.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
5. Бичак И., Руденко В. Н. Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 264 с.
6. Пустовойт В. И., Герценштейн М. Е. К вопросу об обнаружении гравитационных волн малых частот // *ЖЭТФ*. – 1962. – Т. 43, вып. 8. – С. 605–607.
7. Гладышев В. О., Морозов А. Н. Особенности отклика лазерной интерференционной гравитационной антенны на низкочастотные воздействия // *Измерительная техника*. – 1990. – № 10. – С. 26–28.
8. Морозов А. Н. Необратимые процессы и броуновское движение: Физико-технические проблемы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
9. L I G O: The laser interferometer gravitational-wave observatory / A. Abramovici, et al. // *Science*. – 1992. – Vol. 256. – P. 325–333.
10. Гладышев В. О., Морозов А. Н. Низкочастотный оптический резонанс в многолучевом интерферометре Фабри – Перо // *Письма в ЖТФ*. – 1993. – Т. 19, вып. 14. – С. 39–42.
11. G l a d y s h e v V. O., M o r o z o v A. N. The theory of a Fabry–Perot interferometer in a gravitational wave experiment // *J. Moscow Phys. Soc.* – 1996. – Vol. 6. – P. 209–221.
12. G l a d y s h e v V. O., M o r o z o v A. N. Low-frequency optical resonance in multi-beams Fabry–Perot resonator and problem of gravitational waves detection // *Proc. of XIII Int. Sc. Meeting “Physical Interpretations of Relativity Theory”*. – Moscow, 2007. – P. 6–10.

Статья поступила в редакцию 05.07.2012