УДК 531.38 DOI: 10.18698/2308-6033-2020-11-2029

Приближенные вычисления собственных значений вращающейся жидкости, вытекающей из произвольной осесимметричной емкости

© В.В. Орлов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Рассмотрена задача о собственных движениях вращающейся жидкости, частично заполняющей осесимметричный сосуд при наличии истечения через жесткое дно. Задача решена в квазистационарной постановке в рамках модели идеальной жидкости с учетом гидравлических потерь при протекании жидкости через дно сосуда. Численное исследование проведено с использованием метода конечных элементов. Исследован спектр собственных чисел и выявлены характеристики волновых движений жидкости. Численные расчеты подтверждают возможность появления на поверхности слива волновых движений — волн слива, обусловленных наличием истечения жидкости через дно сосуда. Изложены результаты расчетов волновых чисел и комплексного коэффициента затухания. Приведенные результаты исследований могут быть использованы при практических расчетах динамических режимов на стадии проектирования перспективных аппаратов ракетно-космической техники.

Ключевые слова: *вращающаяся жидкость, колебания, собственные значения, слив, метод конечных элементов*

Введение. Первые работы, посвященные волновым движениям несжимаемой вращающейся жидкости, носили прикладной характер и были в основном связаны с проблемами геофизики и астрономии, в частности, с приливами Мирового океана. Первые результаты и последующие достижения в этой области принадлежат английским ученым: отметим работы У. Кельвина [1], Д.И. Тейлора [2], Д. Рэлея [3], Д. Прадмена [4], С. Гроса [5].

Последующие достижения в этой области знаний представлены в трудах английских и отечественных ученых, среди которых отметим работы К. Стюартсона [6], Х. Гринспена [7], Л.Н. Сретенского [8], Ю.З. Миропольского [9]. Рассматриваемую проблему изучали для бассейнов различной формы. Анализ полученных решений показал, что во вращающейся жидкости возможно распространение волн на свободной поверхности как в направлении вращения жидкости, так и в обратном направлении.

С развитием современной техники задачи колебаний вращающейся жидкости становятся актуальными и находят применение как в ракетно-космической технике, так и в других отраслях.

Изучение колебаний вращающейся жидкости обнаружило трудности чисто математического характера, так как любое движение вращающейся жидкости является вихревым. Это послужило толчком к появлению большого количества теоретических работ.

Впервые задача о колебаниях вращающейся жидкости на строгом математическом уровне была поставлена С.Л. Соболевым на заседании Московского математического общества в 1945 г. Впоследствии математические решения, связанные с дифференциальными уравнениями вращающейся жидкости, стали называться задачей Соболева, а сами уравнения и их обобщения — уравнениями типа Соболева [10].

Такие математические вопросы, связанные с рассматриваемой задачей, как существование решения, непрерывная зависимость решения от начальных данных, дифференциальные свойства решений, вопросы спектра собственных значений и свойства мод малых колебаний вращающейся жидкости, изучались авторами при разных граничных условиях. Отметим основные работы, принадлежащие С.Л. Соболеву [11], В.Н. Масленниковой [12], Р.А. Александряну [13], Т.И. Зеленяку [14], Ю.Н. Григорьеву [15], Н.Д. Копачевскомму [16], С.Д. Троицкой [17].

Влияние сил поверхностного натяжения на колебания вращающейся жидкости и колебания системы вращающихся жидкостей было систематически изучено Н.Д. Копачевским [18]. Математические вопросы, связанные с влиянием вязкости и сжимаемости на свойства движения вращающейся жидкости, рассмотрены в работах В.Н. Масленниковой [19], С.А. Габова и А.Г. Свешникова [20].

Из результатов исследований, посвященных колебаниям вращающейся жидкости, которые имеют прикладное значение, отметим работы Р.В. Рвалова [21], Ф.Л. Черноусько [22], В.С. Гонткевича [23], Е.П. Смирновой [24], А.А. Гурченкова [25], В.В. Булатова, Ю.В. Владимирова [26].

Значительное количество прикладных и теоретических работ, связанных с изучением течений вращающейся жидкости и опубликованных до 1988 г., можно найти в издании [27], являющемся библиографическим указателем трудов по вихревым течениям жидкости.

Во всех упомянутых выше работах не учитывались конструктивные особенности реальных емкостей, содержащих жидкость. В работах [28–30] приведены постановка и решения модельной задачи о малых движениях идеальной несжимаемой жидкости, вытекающей из цилиндрического топливного бака с внутренними баковыми устройствами. Исследование задач в этих работах показало, что спектр нормальных движений несжимаемой жидкости обладает двумя ветвями собственных значений: дискретного множества вещественных чисел, расположенных на положительной части вещественной оси, и дискретного множества комплексно сопряженных чисел, расположенных вблизи мнимой оси.

Цель настоящей статьи — исследовать нормальные колебания идеальной несжимаемой вращающейся жидкости, вытекающей через заборное устройство из осесимметричных топливных отсеков различной конфигурации.

Получение точных решений для собственных значений в случаях осесимметричных сосудов произвольной формы представляет определенные трудности. Решение задачи при произвольной скорости вращения и произвольной форме сосуда приводит к необходимости использования численных методов.

В решении задачи можно выделить следующие этапы:

1) постановка задачи, определение понятия искомого решения, выбор варианта численного метода (основанного на вариационной формулировке задачи или на методе Галёркина при определении обобщенного решения через интегральные тождества);

2) в случае выбора метода конечных элементов (МКЭ) — разбиение области, в которой строится решение, на элементы;

3) построение пространства кусочно-полиномиальных допустимых функций;

4) формирование и решение системы дискретных (алгебраических) уравнений.

Постановка задачи. Пусть идеальная несжимаемая жидкость, частично заполняющая произвольный осесимметричный сосуд, в установившемся движении вращается вместе с ним вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω_0 и вытекает через поверхность слива Σ со скоростью V_Σ.

Введем подвижную систему координат $0x_1x_2x_3$ с осями, связанными с невозмущенной свободной поверхностью, т. е. вращающимися с постоянной угловой скоростью ω_0 и перемещающимися вместе с ней с постоянной скоростью V_0.

Введем следующие обозначения: Q — область, занимаемая жидкостью; S_0 — смачиваемая поверхность; Γ — свободная поверхность жидкости; $\vec{n}$ — внешняя по отношению к области Q нормаль к поверхности $S = S_0 \cup \Gamma \cup \Sigma$.

Рассмотрим начально-краевую задачу о малых движениях жидкости, сформулированную относительно возмущенного давления P (плотность жидкости $\rho = 1$) и записанную в цилиндрической системе координат $(0, x, r, \eta)$ с осью $0x$, которая совпадает с осью симметрии сосуда и вектором $\vec{\omega}_0$ (рис. 1), а окружная координата η откладывается в плосткости, перпендикулярной оси $0x$ и проходящей через ось r:

$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta P+4\omega_0^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_3^2}=0$ — в области Q;

$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\dfrac{\partial P}{\partial n}+4\omega_0^2\dfrac{\partial P}{\partial x}n_x+2\omega_0\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial P}{\partial \eta}=\dfrac{1}{|\nabla p_0|}\left(\dfrac{\partial^4 P}{\partial t^4}+4\omega_0^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)$ —

на поверхности Г;

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial P}{\partial n}+4\omega_0^2\frac{\partial P}{\partial x_3}n_x+2\omega_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial P}{\partial \eta}=0 \quad \text{— на поверхности } S_0; \qquad (1)$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\dfrac{\partial P}{\partial n}+4\omega_0^2\dfrac{\partial P}{\partial x}n_x+2\omega_0\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial P}{\partial \eta}=-\beta\left(\dfrac{\partial^3 P}{\partial t^3}+4\omega_0^2\dfrac{\partial P}{\partial t}\right)$ —

на поверхности Σ;

$$P(\vec{x},0)=P^0;\quad \frac{\partial P(\vec{x},0)}{\partial t}=P_1^0;\quad \frac{\partial^2 P(\vec{x},0)}{\partial t^2}=P_2^0;\quad \frac{\partial^3 P(\vec{x},0)}{\partial t^3}=P_3^0.$$

Здесь $\vec{n}$ — нормаль к соответствующей поверхности; n_x — проекция нормали на ось $0x$; $\vec{x}=(x,r,\eta)$; $\beta=\gamma^{-1}$, $\gamma=\xi V_\Sigma$ (ξ — коэффициент сопротивления поверхности слива); $p_0(\vec{x})$ — распределение невозмущенного давления во вращающейся жидкости,

$$p_0=\frac{1}{2}\omega_0^2 r^2-gx+C,$$

где C — произвольная константа, определяемая в зависимости от величины внешнего давления и заполнения. Операторы Δ и ∇ имеют следующий вид:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right);$$

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \eta}\vec{e}_\eta+\frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r.$$

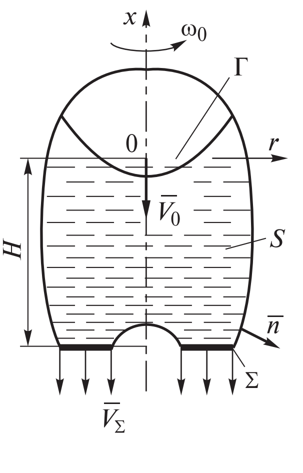


Рис. 1. Вращающаяся осесимметричная емкость с вытекающей жидкостью (плоское сечение, координата η не показана)

Предварительное теоретическое исследование. Переобозначим поверхности Γ, S_0, Σ через S_1, S_2, S_3 соответственно и введем операторы неоднородных краевых задач — операторы N_i (i = 1, 2, 3, 4), действующие из пространства Соболева $W_2^2(Q)$ в гильбертово пространство $\Pi(Q)$:

$$\Pi(Q) = L_2(Q) \otimes L_2(S), \quad S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3,$$

в котором скалярное произведение определим следующим образом:

$$(F_1, F_2)_\Pi = (f_1, f_2)_{L_2(Q)} \oplus (\varphi_1, \varphi_2)_{L_2(S_1)} \oplus (\psi_1, \psi_2)_{L_2(S_2)} \oplus (\phi_1, \phi_2)_{L_2(S_3)},$$

где $F = \left(f, \varphi, \psi, \phi\right), f \in L_2\left(Q\right), \varphi, \psi, \phi \in S_i$ соответственно.

Операторы N_i (i = 1, 2, 3, 4, 5) действуют по формулам:

$$N_1 P = \left(-\Delta P, \frac{\partial P}{\partial n}\right); \quad N_2 P = \left(0, i\frac{\partial P}{r\partial\eta}\right); \quad N_3 P = \left(-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \frac{\partial P}{\partial x} n_x\right);$$

$$N_4 P = \left(0, p_{S_2}\right); \quad N_5 P = \left(0, p_{S_3}\right).$$

Исходная задача (1) с граничными и начальными условиями может быть записана в виде эволюционной задачи для операторного уравнения:

$$\frac{1}{|\nabla p_0|}\frac{d^4 N_4 P}{dt^4} + \beta\frac{d^3 N_5 P}{dt^3} + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{4\omega_0^2}{|\nabla p_0|} N_4 P + N_1 P\right) +$$

$$+\frac{d}{dt}\left(-2\omega_0 i N_2 P + \beta 4\omega_0^2 N_5 P\right) + 4\omega_0^2 N_3 P = 0.$$

Оператор N_1 — эллиптический оператор, такой, что задача $N_1 P = F$ однозначно разрешима для всех $F \in \mathit{\Pi}\left(Q\right)$ и $P = N_1^{-1} F$ таких, что $\left[F, G\right]_\Pi = 0, G = \left(1,1\right)$, а задача (1) приводится к виду

$$\begin{gathered}\frac{1}{|\nabla p_0|}\frac{d^4 AP}{dt^4} + \beta\frac{d^3 DP}{dt^3} + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{4\omega_0^2}{|\nabla p_0|} AP + EP\right) + \\ +\frac{d}{dt}\left(-2\omega_0 iBP + \beta 4\omega_0^2 DP\right) + 4\omega_0^2 CP = 0,\end{gathered} \tag{2}$$

где E — единичный оператор; операторы A, B, C, D действуют в подпространстве $\tilde{W}_2^1\left(Q\right)$ с нормой, равной интегралу Дирихле, функции которого удовлетворяют условию $\int\limits_Q u dQ = 0.$ Введенные операторы задаются формулами:

$$\Delta AP = 0, \ \frac{\partial AP}{\partial n} = p_{S_2}; \ \Delta BP = 0, \ \frac{\partial BP}{\partial n} = i\frac{\partial P}{r\partial\eta}; \quad A = N_1^{-1} N_4; \ B = N_1^{-1} N_2,$$

$$\Delta CP = -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2},\ DP\frac{\partial CP}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial x} n_x;\ \Delta = 0, \frac{\partial DP}{\partial n} = p_{S_3};$$

$$C = N_1^{-1} N_3;\ D = N_1^{-1} N_5.$$

Рассмотрим задачу о собственных движениях жидкости. Пусть зависимость от времени определяется равенством $P(r, x, \eta, t) = p(r, x, \eta) e^{\Omega t}$.

Задаче (2) в этом случае отвечает полиноминальный операторный пучок

$$\frac{1}{|\nabla p_0|}\Omega^4 Ap + \beta\Omega^3 Dp + \Omega^2\left(\frac{4\omega_0^2}{|\nabla p_0|} Ap + Ep\right) + \\ + \Omega\left(-i\,2\omega_0 Bp + \beta 4\omega_0^2 Dp\right) + 4\omega_0^2 Cp = 0, \tag{3}$$

в котором операторы A, B, C, D обладают следующими свойствами:

операторы B, C — самосопряженные, ограниченные, неотрицательные операторы. В пространство нулей оператора B входят все функции, сохраняющие постоянное значение в направлении любого контура $S \cap x = \text{const}$, а в ядро оператора C входят произвольные кусочно-гладкие функции, не зависящие от x;

операторы A, D — положительные компактные операторы, сопоставляющие нормальным производным от функции $p(r, x)$ на S_i следы p_{S_2}, p_{S_3} соответственно.

Прежде чем исследовать задачу в общей ситуации, проанализируем частные случаи.

1. В первом случае пусть отсутствуют поверхность слива и свободная поверхность жидкости. Тогда соответствующая спектральная задача для вращающейся жидкости в полностью заполненном осесимметричном сосуде приводится к операторному уравнению

$$\lambda^2 Ep - i\lambda Bp + Cp = 0, \quad \lambda = \Omega / 2\omega_0. \tag{4}$$

Для сосуда произвольной формы спектр квадратичного операторного пучка (4) является предельным [18] и полностью заполняет отрезок $(-i,\ i)$, а спектр колебаний вращающейся жидкости, полностью заполняющей цилиндрический сосуд, является точечным и расположен на отрезке $(-2\,\omega_0\, i,\ 2\,\omega_0\, i)$ [15]. Собственным значениям λ_k и собственным элементам w_k в этом случае отвечают внутренние волны, обусловленные действием кориолисовых сил инерции.

2. Другой предельный случай — отсутствие вращения и свободной поверхности жидкости. Задача о собственных движениях жидкости тогда эквивалентна спектральной задаче для операторного уравнения

$$\beta\Omega Dp + Ep = 0, \quad \text{или} \quad \lambda Dp - Ep = 0, \tag{5}$$

которая имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящий из положительных собственных значений λ_k, равных характеристическим числам оператра D, с единственной предельной точкой $\lambda_k = \infty$ [29]. Собственным элементам отвечает апериодический режим движения жидкости на поверхности слива.

3. Компьютерный анализ спектральной задачи, отвечающей задаче (2) в случае жидкости, вращающейся в круговом цилиндре и вытекающей через плоское дно, проведен в работе [31], где были обнаружены как апериодические волновые движения, так и затухающие колебательные режимы на поверхности слива и во всем объеме.

Далее спектральная задача изучается для вращающейся осесимметричной полости произвольной конфигурации.

Формулировка обобщенного решения. Для дальнейшего исследования уравнения, в котором операторы B, C не являются положительно определенными, выберем вариант численного решения методом конечных элементов (МКЭ), основанный на методе Бубнова — Галёркина [32]. Этот метод не связан с вариационной формулировкой исходной задачи, при его использовании не требуется положительная определенность операторов вспомогательных краевых задач; он основан на использовании некоторого интегрального соотношения, определяющего обобщенное решение. Будем искать решение в виде бегущих волн:

$$P(r, x, \eta, t) = p(r, x)\, e^{(im\eta + \Omega t)}, \; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Здесь Ω — комплексный коэффициент затухания.

После отделения времени и окружной координаты вместо системы (1) для каждого заданного числа m получим спектральную задачу:

$$\Omega^2 \Delta_m p + 4\omega_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \text{ — в области } Q_m;$$

$$\Omega^2 \frac{\partial p}{\partial n} + 4\omega_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} n_x + im2\omega_0\Omega \frac{1}{r} p = \frac{\Omega^2}{|\nabla_m p_0|}\left(\Omega^2 p + 4\omega_0^2 p\right) = 0 \text{ —}$$

на плоскости Г;

$$\Omega^2 \frac{\partial p}{\partial n} + 4\omega_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} n_x + im2\omega_0 \Omega \frac{1}{r} p = 0 \text{ — на плоскости } S;$$

$$\Omega^2 \frac{\partial p}{\partial n} + 4\omega_0^2 \frac{\partial p}{\partial x} n_x + im2\omega_0 \Omega \frac{1}{r} p = -\beta\Omega\left(\Omega^2 p + 4\omega_0^2 p\right) = 0 \text{—} \qquad (6)$$

на плоскости Σ,

где $i = \sqrt{-1}$; Q_m — область, получаемая из области Q меридиональным сечением; $\Delta_m = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{r^2} m^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$; $\nabla_m = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{im}{r}\vec{e}_\eta + \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r$.

Пусть данная задача имеет решение $p(r,x)$, $p(r,x)$ — непрерывная и дважды кусочно-дифференцируемая функция. Умножим первое уравнение из задачи (6) на произвольную функцию $v(r,x) \in \tilde{W}_2^1(Q_m)$ и преобразуем, используя формулу Грина. В результате получим

$$\int_Q \left(\Delta_m p + \frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) v dV =$$

$$= -\int_Q \nabla_m p \cdot \nabla_m v dV - \frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\int_Q \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} dV + \oint_{\Gamma+S+\Sigma}\left[\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\frac{\partial p}{\partial x}\cos(\hat{n}, x)\right] v ds. \qquad (7)$$

Перепишем (7) с учетом краевых условий на границе области Q_m.

После подстановки выражений для граничных условий в (7) видно, что решение $p(r,x)$ задачи (6) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \nabla p \cdot \nabla v dV + \frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\int_Q \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} dV -$$

$$-\frac{1}{|\nabla p_0|}\left(\left(\Omega^2 + 4\omega_0^2\right) + im\frac{2\omega_0}{\Omega}\omega_0^2\right)\int_\Gamma pv ds - im\frac{2\omega_0}{\Omega}\int_S pv\frac{1}{r} ds - \qquad (8)$$

$$-\left(1 + \frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\right)\frac{1}{\gamma}\Omega\int_\Sigma pv ds = 0.$$

Введем следующее определение обобщенного решения задачи (6). Функция $p(r,x) \in \tilde{W}_2^1(Q_m)$, удовлетворяющая интегральному тождеству (8) при произвольной функции $v(r,x) \in \tilde{W}_2^1(Q_m)$, называется обобщенным решением задачи (6).

Таким образом, нахождение решения краевой задачи (6) эквивалентно нахождению функции, удовлетворяющей интегральному тождеству (8). Так как все интегралы, входящие в (8), конечны, тождество (8) имеет смысл для любой функции $p(r,x) \in \tilde{W}_2^1(Q_m)$.

Построение приближенного обобщенного решения. Разобьем область Q_m на N подобластей — элементов Q_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ и определим допустимые функции МКЭ в виде полинома заданной степени n, зависящей от количества независимых параметров отдельного элемента. Это порождает некоторое конечномерное пространство P_n^h кусочно-полиномиальных функций $p^N(r,x)$, где n — степень используемых полиномов [32]. Каждая функция $p^N(r,x)$ определяется своим набором узловых параметров q_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, фиксированных (по одному или несколько) в узлах $x = X_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$, покрывающей Q_m сетки. Каждый параметр q_j служит значением либо самой функции $p^N(r,x)$, либо одной из ее производных в конкретном узле X_k. Размерность пространства P_n^h

$$r = \sum_{k=1}^{s} p_k, \tag{9}$$

где p_k — число параметров, фиксированных в узле X_k, $k = 1, 2, \ldots, s$.

В качестве базисных функций пространства P_n^h выберем $\phi_j(r, x)$, $j = 1, 2, \ldots, r$ — кусочные полиномы n-й степени, однозначно определяемые следующими условиями.

Узловой параметр q_j функции $\phi_j(r, x)$, $j = 1, 2, \ldots, r$ равен единице, а все остальные ее узловые параметры $q_k, k \neq j$ равны нулю. То есть в заданном узле X_j либо значение самой функции $\phi_j(r,x)$, либо значение какой-то одной конкретной ее производной (обозначаемое через q_j) равно единице, а все остальные фиксирующие в данном узле X_j параметры $\phi_j(r,x)$ положим равными нулю. Равны нулю значения функции $\phi_j(r,x)$ и ее производных также и во всех остальных узлах $x = X_k, k \neq j$ области Q_m. Таким образом, базисная функция $\phi_j(r,x)$ соответствует узловому параметру q_j.

Для построения по МКЭ приближенного обобщенного решения $p(r,x)$ вводим в рассмотрение два конечномерных подпространства:

подпространство P_n^h из пространства, которому принадлежит обобщенное решение (в нашем случае $P_n^h \subset \tilde{W}_2^1$), и подпространство V_n^h из тестового пространства V (также $V_n^h \subset \tilde{W}_2^1$). В качестве базиса в обоих пространствах используем указанные базисные функции ϕ. Тогда приближенным решением $p^N(r,x)$ называется такой элемент из P_n^h, что соотношение

$$\int_Q \nabla p^N \cdot \nabla v^N dV + \frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\int_Q \frac{\partial p^N}{\partial x}\frac{\partial v^N}{\partial x}dV -$$
$$-\frac{1}{|\nabla p_0|}\left(\left(\Omega^2+4\omega_0^2\right)+im\frac{2\omega_0}{\Omega}\omega_0^2\right)\int_\Gamma p^N v^N ds - \tag{10}$$
$$-im\frac{2\omega_0}{\Omega}\int_S p^N v^N \frac{1}{r}ds - \left(1+\frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\right)\frac{1}{\gamma}\Omega\int_\Sigma p^N v^N ds = 0$$

выполняется при любой функции $v^N(r,x) \in V_n^h \subset \tilde{W}_2^1$. Пусть базисные функции $\phi_i^N(r,x)$ обоих подпространств одинаковы и размерность подпространств равна r.

Приближенное решение $p^N(r,x)$ будем искать в виде

$$p^N(r,x) = \sum_{i=1}^{r} q_i^N \varphi_i^N(r,x), \tag{11}$$

где N — количество элементов в разбиении области Q_m; r — общее количество узловых параметров q_i^N и отвечающих им базисных функций $\phi_i^N(r,x)$.

Поскольку соотношение (10) должно выполняться при любой функции $v^N(r,x) \in V_n^h$, достаточно, чтобы оно выполнялось для всех базисных функций $\phi_j^N(r,x)$ из пространства V_n^h $(j = 1,\ldots,r)$.

$$\int_Q \sum_{i=1}^{r} q_i^N \nabla\varphi_i^N \cdot \nabla\varphi_j^N \; dV + \frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\int_Q \sum_{i=1}^{r} q_i^N \frac{\partial\varphi_i^N}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j^N}{\partial x}\; dV -$$
$$-\left(\left(\Omega^2+4\omega_0^2\right)\int_\Gamma \sum_{i=1}^{r} q_i^N \varphi_i^N \varphi_j^N \frac{1}{|\nabla p_0|}\; ds + im\frac{2\omega_0}{\Omega}\int_\Gamma \sum_{i=1}^{r} q_i^N \varphi_i^N \varphi_j^N \frac{1}{\mathrm{r}}\; ds\right) -$$

$$
\begin{gathered}
-im\frac{2\omega_0}{\Omega}\int\limits_S \sum_{i=1}^{r} q_i^N \varphi_i^N \varphi_j^N \frac{1}{r}\ ds - \\
-\left(1+\frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\right)\frac{1}{\gamma}\Omega\int\limits_\Sigma \sum_{i=1}^{r} q_i^N \varphi_i^N \varphi_j^N\ ds = 0,\ j = 1, 2,\ \ldots,\ r.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Построение вычислительного процесса для вычисления собственных значений. Получим матричную запись системы (12) для элемента (n) с r_n степенями свободы. Приближенное решение $p^{(n)}(r,x)$ в области, занимаемой элементом, ищется в виде

$$
p^{(n)}(r,x) = \sum_{i=1}^{r_n} q_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}(r,x) = \left\{q^{(n)}\right\}^T \left\{\varphi^{(n)}\right\}. \tag{13}
$$

Вектор $\left\{\phi^{(n)}\right\}$ представляет собой набор полиномиальных функций с количеством слагаемых, соответствующим r_n:

$$
\left\{\phi^{(n)}\right\} = \left[C^{(n)}\right]\{x\}. \tag{14}
$$

Вектор $\{x\}$ размерностью $r_n \times 1$ состоит из элементов, дающих полный многочлен соответствующей степени:

$$
\{x\} = \{1, r, x, r^2, xr, x^2, \ldots\}^T.
$$

Коэффициенты $C^{(n)}$ определяются из описанного ранее условия равенства 0 или 1 функции ϕ, соответствующей определенному узловому параметру:

$$
[I] = \left[C^{(n)}\right]\left[X^{(n)}\right] \quad \to \quad \left[C^{(n)}\right] = \left[X^{(n)}\right]^{-1}. \tag{15}
$$

Здесь $\left[X^{(n)}\right]$ — матрица координат узлов элемента и

$$
p^{(n)}(r,x) = \left\{q^{(n)}\right\}^T \left[C^{(n)}\right]\{x\}. \tag{16}
$$

Перепишем (12) с учетом (16) в матричном виде

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{Q^{(n)}} \left[\nabla\left(\left\{q^{(n)}\right\}^T \left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)\cdot\nabla\left(\left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)^T\right]^T dV + \\
+\frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\int\limits_{Q^{(n)}} \left[\frac{\partial\left(\left\{q^{(n)}\right\}^T \left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)}{\partial x}\frac{\partial\left(\left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)^T}{\partial x}\right]^T dV -
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\Omega^2+4\omega_0^2\right)\int\limits_{\Gamma^{(n)}}\left[\left(\left\{q^{(n)}\right\}^T\left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)\cdot\left(\left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)^T\right]^T\frac{1}{|\nabla p_0|}ds-\\
&-im\frac{2\omega_0}{\Omega}\int\limits_{\Gamma^{(n)}}\left[\left(\left\{q^{(n)}\right\}^T\left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)\cdot\left(\left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)^T\right]^T\frac{1}{\mathrm{r}}ds-\\
&-im\frac{2\omega_0}{\Omega}\int\limits_{S^{(n)}}\left[\left(\left\{q^{(n)}\right\}^T\left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)\cdot\left(\left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)^T\right]^T\frac{1}{r}\,ds-\\
&-\left(1+\frac{4\omega_0^2}{\Omega^2}\right)\frac{1}{\gamma}\Omega\int\limits_{\Sigma^{(n)}}\left[\left(\left\{q^{(n)}\right\}^T\left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)\cdot\left(\left[C^{(n)}\right]\{x\}\right)^T\right]^T ds=0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Приведем (17) к безразмерному виду, введя следующие безразмерные величины:

$$
\lambda=\Omega\frac{\sqrt{R_0}}{\sqrt{g}};\qquad \varepsilon=2\omega_0\frac{\sqrt{R_0}}{\sqrt{g}};\qquad \beta=\frac{\sqrt{R_0}\sqrt{g}}{\gamma},
$$

а также следующие обозначения для интегралов:

$$
\begin{aligned}
&\left[a_1^{(n)}\right]=\int\limits_{Q^{(n)}}\frac{\partial\{x\}}{\partial x}\frac{\partial\{x\}^T}{\partial x}dV;\\
&\left[a_3^{(n)}\right]=\int\limits_{Q^{(n)}}\frac{\partial\{x\}}{\partial r}\frac{\partial\{x\}^T}{\partial r}dV;\quad \left[c^{(n)}\right]=\int\limits_{\Gamma^{(n)}}\frac{\{x\}\{x\}^T}{\sqrt{1+(\varepsilon^2 r)^2}}ds;\\
&\left[e^{(n)}\right]=\int\limits_{S^{(n)}}\{x\}\{x\}^T\frac{1}{r}ds;\qquad \left[f^{(n)}\right]=\int\limits_{\Sigma^{(n)}}\{x\}\{x\}^T ds.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Сгруппировав слагаемые относительно степеней λ, перепишем (17) с учетом новых обозначений и получим матричный пучек:

$$
\left([A]^{(n)}\lambda^4+[B]^{(n)}\lambda^3+[C]^{(n)}\lambda^2+[D]^{(n)}\lambda+[E]^{(n)}\right)\left\{q^{(n)}\right\}=0,\tag{19}
$$

где

$$
[A]^{(n)}=-\left[c^{(n)}\right];\quad [B]^{(n)}=-\beta\left[f^{(n)}\right];
$$

$$
C^{(n)}=\left[a_1^{(n)}\right]+m^2\left[a_2^{(n)}\right]+\left[a_3^{(n)}\right]-\varepsilon^2\left[c^{(n)}\right];\qquad [E]^{(n)}=\varepsilon^2\left[a_1^{(n)}\right];
$$

$$
D^{(n)}=-\varepsilon\left(im\left(\frac{1}{4}\varepsilon^2\left[c^{(n)}\right]+\left[e^{(n)}\right]\right)+\beta\varepsilon\left[f^{(n)}\right]\right).
$$

Далее системы уравнений, записанные для отдельного элемента с индексом (n), сведем в единую систему уравнений для всей области Q_m. Тогда размерность матриц в (18) будет равна суммарному количеству r степеней свободы (узловых параметров) всех конечных элементов в разбиении области.

Для нахождения собственных значений λ приведем пучок четвертого порядка (19) к первому порядку следующим преобразованием:

$$[A]\lambda\{q'''\}+[B]\lambda\{q''\}+[C]\lambda\{q''\}[D]\lambda\{q\}+[E]\{q\}=0;$$

$$\lambda\{q\}=\{q'\};$$

$$\lambda\{q'\}=\{q''\};$$

$$\lambda\{q''\}=\{q'''\}.$$

В результате получим матричное уравнение для определения собственных чисел

$$\begin{bmatrix} -[E] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ q' \\ q'' \\ q''' \end{Bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} [D] & [C] & [B] & [A] \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ q' \\ q'' \\ q''' \end{Bmatrix} = 0. \quad (20)$$

Численная реализация матричного уравнения с использованием метода конечных элементов для вычисления компонентов матриц приведена в табл. 1–3. В первых двух таблицах представпены результаты расчетов собственных чисел для цилиндрической полости с конической вставкой, в табл. 3 — для цилиндрической полости с вогнутым днищем.

Таблица 1

Первый и второй тон волн на поверхности слива

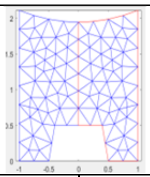
		ε		
		0	0,1	0,3
0,1	$n=1$	18,5159	18,5158–0,04183i	18,5151–0,1254i
	$n=2$	55,3549	55,3548–0,003934i	55,354–0,011803i
0,5	$n=1$	3,7022	3,7017–0,04192i	3,6980–0,1257i
	$n=2$	11,0709	11,0705–0,003934i	11,06–0,01181i
1,0	$n=1$	1,8500	1,849–0,04211i	1,8419–0,1263i
	$n=2$	5,5355	5,5345–0,003935i	5,526–0,01183i

Таблица 2

Первый и второй тон поверхностных волн (прямые и обратные волны)

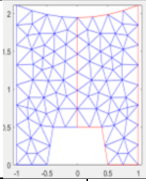
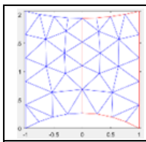
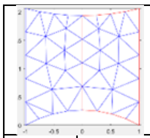
		ε		
		0	0,1	0,3
β = 0	$n = 1$	–1,5481i +1,5481i	+1,5295i –1,5671i	+1,5036i –1,5887i
	$n = 2$	–2,6638i +2,6638i	+2,6489i –2,6858i	+2,6276i –2,7021i
β = 0,1	$n = 1$	0,0000321 – 1,5481i 0,0000321 + 1,5481i	0,0001538 + 1,5293i 0,00009417 – 1,5673i	0,00023109 + 1,5033i 0,00005216 – 1,5891i
	$n = 2$	$5{,}352\cdot10^{-11}$ – 2,6638i $5{,}352\cdot10^{-11}$ + 2,6638i	$4{,}524\cdot10^{-11}$ + 2,6493i $4{,}189\cdot10^{-11}$ – 2,6862i	$4{,}074\cdot10^{-11}$ + 2,6278i $3{,}236\cdot10^{-11}$ – 2,7024i
β = 0, 5	$n = 1$	0,0000393 – 1,5484i 0,0000393 + 1,5484i	0,0000793 + 1,5294i 0,0000387 – 1,5672i	0,001013 + 1,5035i 0,0002337 – 1,5893i
	$n = 2$	$2{,}1334\cdot10^{-10}$ – 2,6641i $2{,}1334\cdot10^{-10}$ + 2,6641i	$2{,}1677\cdot10^{-10}$ +2,6492i $2{,}0073\cdot10^{-10}$ – 2,6863i	$1{,}8327\cdot10^{-10}$ + 2,6277i $1{,}4820\cdot10^{-10}$ – 2,7025i

Таблица 3

Первый и второй тон волн на свободной поверхности и поверхности слива

		ε		
		0	0,1	0,3
Волны на свободной поверхности				
β = 0	$n = 1$	+1,35527i –1,35527i	+1,3343i –1,37692i	+1,29449i –1,42228i
	$n = 2$	+2,31464i –2,31464i	+2,31102i –2,31465i	+2,31651i –2,32619i
β = = 0,1	$n = 1$	0,000254975–1,35529i 0,000254975+1,35529i	0,000195162–1,37694i 0,000327895+1,33433i	0,000526553+1,29454i 0,000107158–1,42229i
	$n = 2$	$8{,}80164\cdot10^{-10}$–2,31464i $8{,}80164\cdot10^{-10}$+2,31464i	$1{,}89849\cdot10^{-9}$–2,31465i $2{,}19995\cdot10^{-9}$+2,31102i	$1{,}10371\cdot10^{-7}$+2,31651i $5{,}06227\cdot10^{-8}$–2,3262i
β = = 0,5	$n = 1$	0,00107467–1,35574i 0,00107467+1,35574i	0,000830875–1,37728i 0,00136674+1,33493i	0,00213379+1,29554i 0,000464615–1,42246i
	$n = 2$	$4{,}21458\cdot10^{-9}$–2,31464i $4{,}21458\cdot10^{-9}$+2,31464i	$7{,}89377\cdot10^{-9}$–2,31465i $8{,}88683\cdot10^{-9}$+2,31102i	$3{,}44296\cdot10^{-7}$+2,31651i $1{,}7744\cdot10^{-7}$–2,3262i
Волны слива				
β = =0,1	$n = 1$	15,1066	15,1065–0,0652575i	15,1073–0,195719i
	$n = 2$	50,0178	49,975–0,0045632i	49,974–0,0136906i

Окончание табл. 3

		ε		
		0	0,1	0,3
$\beta =$	$n = 1$	3,01932	3,01989–0,0654477i	3,02441–0,19485i
$= 0,5$	$n = 2$	10,0035	9,99448–0,00456456i	9,99059–0,0137008i

Выводы

1. При анализе полученных результатов следует отметить прежде всего появление решений, не встречающихся в задачах без вытекания жидкости, а также изменение известных решений во вращающемся сосуде с жидкостью. Наличие вытекания жидкости создает возможность появления на поверхности слива волновых движений — волн слива. Причины их появления впервые рассматривались в работе [28]. Волны слива характеризуются волновыми и собственными числами — решениями соответствующих систем уравнений. В общем случае это апериодические затухающие волновые движения. Появление в гидродинамической системе поверхности слива также отражается и на существующих во вращающейся жидкости колебательных движениях. Внутренние волны и волны на свободной поверхности превращаются в затухающие волновые движения.

2. Используемый численный метод исследования волн во вращающейся жидкости позволяет выстроить легко реализуемый вычислительный алгоритм для представления как на языках программирования низкого уровня, так и на вычислительных платформах типа Octavia, Mathcad или MATLAB, обеспечивая быструю сходимость даже при небольшом количестве конечных элементов.

3. Предлагаемый подход позволяет получить решение для осесимметричных сосудов любой формы без использования коммерческих специализированных продуктов для решения задач методом конечных элементов типа Nastran и т.п.

Благодарности. Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук Александру Николаевичу Темнову за помощь в формулировке граничных условий и плодотворные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kelvin Lord. Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag.*, 1880, vol. 10, pp. 155–168.

[2] Taylor G.I. Experiments with rotating fluids. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1921, vol. 100, no. 703 (Nov. 1, 1921), pp. 114–121.

[3] Rayleigh Lord. On the stability, or instability of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc.*, 1880, vol. 11, pp. 57–70.

[4] Proudman J. The almost rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. *J. Fluid Mech.*, 1956, vol. 1, pp. 505–516.

[5] Grace S.F. Free motion of a sphere in a rotating liquid at right angle to the axis of rotation. *Proc. Roy. Soc.*, 1923, A 104, pp. 278–301.

[6] Stewartson K. On almost rigid rotations. *J. Fluid Mech.*, 1957, vol. 3, pp. 17–26.

[7] Гринспен Х. *Теория вращающихся жидкостей*. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1975, 303 с.

[8] Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. Москва, Наука, 1977, 815 с.

[9] Миропольский Ю.З. *Динамика внутренних гравитационных волн в океане*. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1981, 384 с.

[10] Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью. *Журн. прикл. механики и теорет. физики*, 1960, № 3, с. 20–55. Zbl. 105.18103

[11] Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики. *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, 1954, т. 18, № 1, с. 3–50.

[12] Масленникова В.Н. *Математические вопросы гидродинамики вращающейся жидкости и системы С.Л. Соболева. Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.* Новосибирск, 1971, 28 с.

[13] Александрян Р.А. *К вопросу о зависимости качественных свойств решений некоторых смешанных задач от вида области: Дис. ... канд. физ.-мат. наук*. Москва, МГУ, 1959, 71 с.

[14] Зеленяк Т.И. *Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными*. Новосибирск, НГУ, 1970.

[15] *Григорьев Ю.Н.* О спектре некоторых операторов, связанных с уравнением С.Л. Соболева. *Динамика сплошной среды*, 1973, № 15, с. 36–54.

[16] Копачевский Н.Д. Малые движения и собственные колебания идеальной вращающейся жидкости. *Препринт № 38-71.* Харьков, Физико-технический институт низких температур, 1978, 54 с.

[17] Троицкая С.Д. О зависимости спектра задачи С.Л. Соболева от геометрии области. В кн.: *Избранные вопросы алгебры, геометрии и дискретной математики*. Москва, МГУ, 1992, с. 138–147.

[18] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике* . Москва, Наука, 1989, 416 с.

[19] Масленникова В.Н. О скорости убывания при большом времени решений системы Соболева с учетом вязкости. *Математ. сб.* 92(134) : 4 (12), 1973, с. 589–610.

[20] *Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей*. Москва, Наука, 1986, 288 с.

[21] Рвалов Р.В. Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости. *Известия АН СССР, МЖГ*, 1973, № 4, с. 81–88.

[22] Черноусько Ф.Л. *Движения твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость*. Москва, Изд-во ВЦ АН СССР, 1968.

[23] Гонткевич В.С. Собственные колебания вращающейся жидкости в сосудах. В сб.: *Гидромеханика. Республ. межвед. сб.*, 1972, вып. 20, с. 52–58.

[24] Смирнова Е.П. Собственные колебания идеальной жидкости в тонкой кольцевой трубке, вращающейся вокруг оси симметрии. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1975, № 5, с. 41.

[25] Гурченков А.А. *Динамика завихренной жидкости в полости вращающегося твердого тела*. Москва, Физматлит, 2012, 221 с.

[26] Булатов В.В., Владимиров Ю.В. *Волны в стратифицированных средах*. Москва, Наука, 2015, 735 с.

[27] Ахметов Д.Г., Владимиров В.А., Ильин К.И., Макаренко В.Г., Никулин В.В., Тарасов В.Ф. *Гидродинамика вихревых течений* (библиографический указатель). Новосибирск, Институт гидродинамики СО РАН, 1988, 181 с.

[28] Орлов В.В., Темнов А.Н. *Малые движения жидкости, вытекающей из бака. Современные методы теории функций и смежные проблемы*. Воронеж, 1997.

[29] Орлов В.В., Темнов А.Н. Колебания вращающейся жидкости, вытекающей из закрытого сосуда. *Инженерно-физический журнал*, 2000, т. 73, № 1, с. 165.

[30] Дьяченко М.И., Орлов В.В., Темнов А.Н. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических емкостях. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2012, № 3, с. 31–38.

[31] Орлов В.В., Темнов А.Н. Нормальные колебания жидкости, вытекающей из вращающегося бака. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 8. DOI: 10.18698/2308-6033-2019-8-1907

[32] Молчанов И.Н., Николенко Л.Д. *Основы метода конечных элементов*. Киев, Наукова Думка, 1989, 260 с.

Статья поступила в издательство 24.08.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Орлов В.В. Приближенные вычисления собственных значений вращающейся жидкости, вытекающей из произвольной осесимметричной емкости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 11.

http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-11-2029

Орлов Владимир Владимирович — соискатель-исследователь кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана.
e-mail: v_orlov@list.ru

Approximate calculations of the eigenvalues of a rotating fluid flowing from an arbitrary axisymmetric capacity

© V.V. Orlov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper addresses the problem of proper motions of a rotating fluid that partially fills an axisymmetric vessel in the presence of an outflow through a rigid bottom. The problem is solved in a quasi-stationary setting within the framework of an ideal fluid model, with account for hydraulic losses during fluid flow through the bottom of the vessel. Numerical research was carried out using the finite element method. The study investigates the spectrum of eigenvalues and reveals the characteristics of the wave motions of the fluid. Numerical calculations confirm the possible appearance of wave motions on the drain surface, i.e. drain waves caused by the presence of fluid outflow through the bottom of the vessel. The paper presents the results of calculating the wavenumbers and the complex attenuation coefficient. Findings of the research can be used in practical calculations of dynamic modes at the design stage of promising space-rocket vehicles.

Keywords: *rotating fluid, vibrations, eigenvalues, drain, finite element method*

REFERENCES

[1] Kelvin Lord. Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag*., 1880, vol. 10, pp. 155–168.

[2] Taylor G.I. Experiments with rotating fluids. *Proc. Cambridge Phil. Soc*., 1921, vol. 100, no. 703 (Nov. 1, 1921), pp. 114–121.

[3] Rayleigh Lord. On the stability, or instability of certain fluid motions. *Proc. London Math. Soc*., 1880, vol. 11, pp. 57–70.

[4] Proudman J. The almost rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. *J. Fluid Mech*., 1956, vol. 1, pp. 505–516.

[5] Grace S.F. Free motion of a sphere in a rotating liquid at right angle to the axis of rotation. *Proc. Roy. Soc*., 1923, A 104, pp. 278–301.

[6] Stewartson K. On almost rigid rotations. *J. Fluid Mech*., 1957, vol. 3, pp. 17–26.

[7] Greenspan H.P. The Theory of Rotating Fluids. Univ. Pr., 1969, 328 p. [In Russ.: Greenspan H.P. Teoriya vrashchayuschikhsya zhidkostey. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1975, 303 p.].

[8] Sretensky L.N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [The theory of wave motion of fluid]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 815 p.

[9] Miropolskiy Yu.Z. *Dinamika vnutrennikh gravitatsionnykh voln v okeane* [Dynamics of internal gravity waves in the ocean]. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1981, 384 p.

[10] Sobolev S.L. *Zhurn. prikl. mekhaniki i teoret. fiziki — Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1960, no. 3, pp. 20–55. Zbl. 105.18103

[11] Sobolev S.L. *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* (*Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Mathematical Ser.*), 1954, vol. 18, no. 1, pp. 3–50.

[12] Maslennikova V.N. *Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vrashchayuscheysya zhidkosti i sistemy S.L. Soboleva*. Avtoref. dis. dokt. fiz.-mat nauk [Mathematical problems in the hydrodynamics of a rotating fluid and the system of S.L. Sobolev. Dr. phys.-and-math. sc. author's abstract]. Novosibirsk, 1971, 28 p.

[13] Aleksandrian R.A. *K voprosu o zavisimosti kachestven¬nykh svoystv reshenii nekotorykh smeshannykh zadach ot vida oblasti*. Dis. kand. fiz.-mat. nauk [On the question of the dependence of the qualitative properties of solutions of some mixed problems on the type of area. Cand. phys.-and-math. sc. diss.]. Moscow, MSU Publ., 1959, 71 p.

[14] Zeleniak T.I. *Izbrannye voprosy kachestvennoy teorii uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [Selected questions of the qualitative theory of partial differential equations]. Novosibirsk, NSU Publ., 1970.

[15] Grigorev Yu.N. *Dinamika sploshnoy sredy (Continuum dynamics)*, 1973, no. 15, pp. 36–54.

[16] Kopachevskiy N.D. *Malye dvizheniya i sobstvennye kolebaniya idealnoy vraschayuscheysya zhidkosti* [Small movements and natural vibrations of an ideal rotating fluid]. Kharkov, Institute of Low Temperature Physics and Technology Publ., 1978, preprint no. 38-71, 54 p.

[17] Troitskaya S.D. O zavisimosti spektra zadachi S.L. Soboleva ot geometrii oblasti [On the dependence of the spectrum of the problem S.L. Sobolev from the geometry of the area] In: *Izbrannye voprosy algebry, geometrii i diskretnoy matematiki* [Selected questions of algebra, geometry and discrete mathematics]. Moscow, MSU Publ., 1992, pp. 138–147.

[18] Kopachevskii N.D., Krein S.G., Ngo Zui Kan. *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike* [Operator methods in linear hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 416 p.

[19] Maslennikova V.N. *Matemat. Sb.* (*Mathematical Collection*), 1973, no. 92 (134): 4(12), pp. 589–610.

[20] Gabov S.A., Sveshnikov A.G. *Zadachi dinamiki stratifitsirovannykh zhidkostey* [Problems of the dynamics of stratified fluids]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 288 p.

[21] Rvalov R.V. *Izvestiya AN SSSR, MZhG — Fluid Dynamics*, 1973, no. 4, pp. 81–88.

[22] Chernousko F.L. *Dvizheniya tvyordogo tela s polostyami soderzhaschimi vyazkuyu zhidkost* [The movement of a solid body with cavities containing a viscous fluid]. Moscow, CC USSR AS Publ., 1968.

[23] Gontkevich V.S. Sobstvennye kolebaniya vraschayuscheysya zhidkosti v sosudakh [Natural vibrations of a rotating fluid in vessels]. In: *Gidromehanika. Respubl. mezhved. sb.* [Fluid mechanics. Republican inter-institutional collection of papers]. 1972, no. 20, pp. 52–58.

[24] Smirnova E.P. *Izvestiya AN SSSR, MZhG — Fluid Dynamics*, 1975, no. 5. pp. 41.

[25] Gurchenkov A.A. *Dinamika zavikhrennoy zhidkosti v polosti vrashchayushchegosya tverdogo tela* [Swirling fluid dynamics in the cavity of a rotating solid body]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 221 p.

[26] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. *Volny v stratifitsirovannykh sredakh* [Waves in stratified media]. Moscow, Nauka Publ., 2015, 735 p.

[27] Akhmetov D.G., Vladimirov V.A., Ilin K.I., Makarenko V.G., Nikulin V.V., Tarasov V.F. *Gidrodinamika vikhrevykh techeniy* (*bibliograficheskii ukazatel*) [Hydrodynamics of vortex flows (bibliographic guide)]. Novosibirsk, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics Publ., 1988, 181 p.

[28] Orlov V.V., Temnov A.N. Malye dvizheniya zhidkosti, vytekayushchey iz baka [Small movements of liquid flowing out of the tank]. In: *Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problem* [Modern methods of function theory and related problems]. Voronezh, 1997.

[29] Orlov V.V., Temnov A.N. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal — Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2000, vol. 73, no. 1, p. 165.

[30] D'iachenko M.I., Orlov V.V., Temnov A.N. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2012, no. 3, pp. 31–38.

[31] Orlov V.V., Temnov A.N. *Inzhenerny zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2019, iss. 8. DOI: 10.18698/2308-6033-2019-8-1907

[32] Molchanov I.N., Nikolenko L.D. *Osnovy metoda konechnykh elementov* [Fundamentals of the finite element method]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1989, 260 p.

Orlov V.V., researcher, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: v_orlov@list.ru