

Численное и физическое моделирование деформирования стержня при осевом нагружении в канале. Часть 1

© Н.Т. Овчинников¹, Ф.Д. Сорокин²

¹ООО «ГеоСплит», Москва, 121205, Россия

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

В двух частях работы проведено численное и физическое моделирование деформирования стержня в канале при осевом сжатии. Выявлены закономерности нелинейного изгиба стержня в плоскости. Формы стержня, определяющиеся историей нагружения, могут различаться при одном и том же значении усилия. Решение задачи заключается в том, чтобы найти форму с минимальной потенциальной энергией. В первой части работы приведены описание численной модели стержня и результаты ее применения. Определены формы изгиба стержня при постепенном нагружении, совпадающие с результатами, которые были получены путем аналитического решения В.И. Феодосьевым. Дальнейшее исследование показывает, что решение задачи имеет более сложную разветвленную структуру с образованием различных дополнительных форм. Деформирование стержня в процессе постепенного нагружения имеет вид последовательного вариантного появления в стержне волн изгиба при усилиях, определяемых степенью неравномерности длин потенциально неустойчивых участков. В диапазоне таких усилий и возникает неустойчивость формы. От одной исходной формы при потере устойчивости могут образоваться различные последующие формы, отличающиеся либо последовательностью деформирования участков при одном числе полуволн, либо числом образующихся полуволн. Если прямолинейный стержень нагружать в одну ступень, то возрастание усилия приводит к последовательному увеличению числа полуволн изгиба в соответствующих диапазонах существования форм. Полученные результаты применимы для анализа работы таких стержневых объектов, как буровая, обсадная, насосно-компрессорная колонны труб в скважине и трубопровода в кожухе, скважине и тоннеле.

Ключевые слова: стержень, колонна, трубопровод, устойчивость, деформирование, изгиб, моделирование, нелинейность

Введение. Вследствие широкого применения стержневых систем в технике и значительного разнообразия условий их работы появились многочисленные публикации по данной теме. Вопросы, касающиеся механики стержней, рассматриваются в монографиях [1–3], учебной литературе [4, 5], научно-технических периодических изданиях.

В нефтегазовой отрасли основные технологические процессы строительства и эксплуатации скважин, трубопроводного транспорта нефти и газа осуществляются с применением стержневых систем. В ходе ведущихся работ стержневые системы, находящиеся в канале

или окружающем грунте, могут испытывать воздействие сжимающих продольных усилий [6, 7].

Практически половина отказов оборудования на объектах топливно-энергетического комплекса за последние 20 лет обусловлена действием непроектных эксплуатационных нагрузок [8], в связи с чем повышаются требования к методам оценки технического состояния объектов.

Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) стержневого объекта необходимо найти его форму с применением инструментальных методов и математического моделирования.

В работе [5] формы стержня в канале предопределяются исходя из общих представлений о потере устойчивости, а затем конкретизируются с помощью уравнений равновесия. В работе [9] рассматривается потеря устойчивости весомого стержня при наличии одной стенки, ограничивающей перемещения, а в работе [10] исследован изгиб стержня при наличии стенок с применением подхода, аналогичного используемому в [5].

В работах [11–13] рассмотрено деформирование стержня между двумя плоскостями при различных условиях нагружения с учетом геометрической нелинейности его оси. В [14] исследуется устойчивость образующихся при сжатии стержня форм при рассмотрении энергии системы.

В наиболее близкой в плане постановки задачи работе [5], результаты которой отображены на рис. 1 и представлены в табл. 1, применяется решение Эйлера о потере устойчивости стержня.

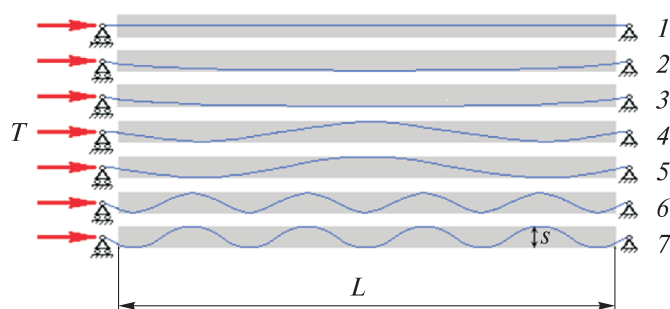


Рис. 1. Формы изгиба стержня [5]:

T — осевое сжатие; L — длина стержня; s — ширина канала

Цели работы — исследовать с применением численного и физического моделирования закономерности нелинейного деформирования стержня в канале при различных режимах нагружения. Рассмотреть формы, образующиеся в процессе загрузки и разгрузки стержня. Установить связь между прикладываемыми усилиями и формами стержня, сопоставить результаты численного и физического модели-

рования. Сформулировать положения, подлежащие учету при разработке методик определения НДС соответствующих стержневым объектам.

Таблица 1

Формы изгиба стержня и нагрузки

Номер формы n	Число полу-волн изгиба w	Вид контакта	Диапазоны усилий сжатия, \bar{T}	
			при нагружении	при разгрузке
1	0	Нет	$\bar{T} \leq 1$	$\bar{T} \leq 1$
2	1	•	$1 \leq \bar{T} \leq 4$	$1 \leq \bar{T} \leq 4$
3		•••	$4 \leq \bar{T} \leq 16$	$4 \leq \bar{T} \leq 9$
4	3	•	$16 \leq \bar{T} \leq 36$	$9 \leq \bar{T} \leq 36$
5		•••	$36 \leq \bar{T} \leq 144$	$36 \leq \bar{T} \leq 81$
6	9	•	$144 \leq \bar{T} \leq 324$	$81 \leq \bar{T} \leq 324$
7		•••	$324 \leq \bar{T} \leq 1296$	$324 \leq \bar{T} \leq 728$

Обозначения: •, ••• — точечный и линейный контакт стержня со стенками канала соответственно; $\bar{T} = T/P$ — безразмерное усилие; P — критическое усилие при потере устойчивости по Эйлеру, $P = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ (E — модуль Юнга материала стержня; I — момент инерции сечения стержня).

Численная модель. Применяемая модель с изгибом в плоскости является частным случаем пространственной модели (рис. 2) [15].

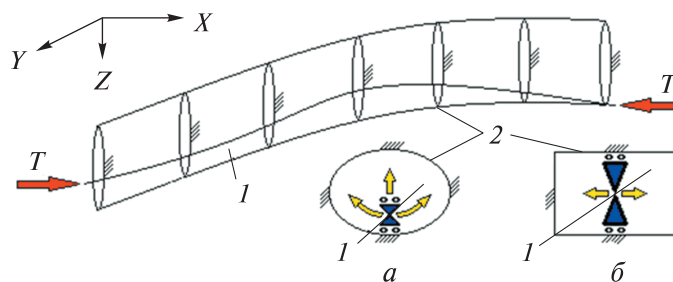


Рис. 2. Расчетная схема стержня:

a — сечение канала в пространственной модели; b — сечение канала при изгибе модели в плоскости; 1 — стержень; 2 — сечение канала; T — граничные усилия

Изгиб стержня ограничивается стенками канала (рис. 2, б) с прямолинейной осью. При моделировании стержень представляется в виде набора элементов. Уравнение упругой линии элемента невисокого стержня имеет вид

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - T \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

где y — функция прогибов стержня; $T < 0$ — при сжатии стержня.

При составлении дифференциального уравнения равновесия выполняется условие малости угла наклона оси стержня: $(dy/dx)^2 \ll 1$.

Следовательно, в целях получения достоверных результатов при моделировании должен быть ограничен зазор между стержнем и стенкой канала. Малость зазора обеспечивает отсутствие в стержне пластических деформаций.

Для элемента стержня применяется аналитическое решение уравнения упругой линии. Использование уравнений связи элементов совместно с граничными условиями позволяет получить систему алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования.

Возможен контакт стержня со стенками канала в узлах сопряжения элементов. При наличии контакта известны координаты контактной точки, в которой на стержень действует реакция. Число точек касания стержнем стенок канала и их положение неизвестны, и их следует определить.

Решение задачи основано на использовании начала возможных перемещений для деформируемого тела, согласно которому изменение упругой энергии, соответствующее системе возможных перемещений, равно работе внешних сил.

Моделируется процесс изгиба от начального положения до конечного равновесного состояния. При перемещении узлов модели стержня вне контакта со стенками совершается работа сил реакций, необходимых по условиям равновесия. Расчет останавливается, когда стержень принимает равновесную форму с минимумом потенциальной энергии и отсутствием усилий в узлах вне контактов.

Форма характеризуется числом полуволен изгиба w , представляющих собой участки стержня между двумя последовательными пересечениями осевой линии. При числе полуволен $w = i$ обозначим форму как w_i . Для общности полуволна может включать и прямолинейный участок. Точки в обозначении формы указывают (если необходимо) на тип контакта стержня со стенками канала, например \dot{w}_i и \ddot{w}_i — точечный и линейный контакт соответственно.

Переход стержня от формы к форме обозначаем стрелкой: $w_i \rightarrow w_{i+1}$. Для детализации характеристик перехода к его обозначению можно добавить требуемые параметры, например, запись $w_i(1,2) \rightarrow w_{i+1}$ означает, что в переходе были задействованы полуволны 1 и 2.

В общем случае деформирование стержня заключается в изменении интенсивности изгиба одной и той же формы или в реализации одного или нескольких переходов форм. В случае нескольких переходов применяем термин линия (или ветвь) деформирования. Начальную и конечную стадии рассматриваемого этапа деформирования отмечаем индексами «н» и «к» соответственно.

Если от формы при одном усилии сжатия или близких значениях усилий могут образоваться различные последующие формы, такой переход назовем вариантным. При этом полученные формы перечисляются через запятую: $w_i \rightarrow w_{i+1}, w_{i+2}$.

Интервал усилий сжатия, в котором однозначно реализуется форма стержня с определенным числом полуолн изгиба, назовем диапазоном существования формы.

История нагружения. Последовательную смену усилий и форм при деформировании именуем историей нагружения стержня.

Нагрузка создается последовательностью прикладываемых усилий T_i , образующих ступени нагружения (или разгрузки): $\Delta T_i = T_{i+1} - T_i$ (i — порядковый номер усилия).

Применение относительно малых ступеней нагружения будем считать постепенным нагружением стержня, а более значительных ступеней — резким нагружением. Такое разделение нагрузок имеет качественный характер и зависит от изгибной жесткости стержня.

При постепенном нагружении происходят небольшие изменения формы вне критических условий нагружения, и приложение новой нагрузки следует после достижения формой равновесного состояния. На практике могут быть задействованы нагружения обоих видов в различных сочетаниях.

Отображение состояний стержня при изгибе. Состояние стержня в произвольный момент деформирования может быть сохранено в графическом формате. Действующие на стержень силы отобразим стрелками. Максимальную реакцию R_{\max} отметим звездочкой. Величину других реакций можно оценивать по длине стрелок.

Исходные данные при моделировании. Рассмотрим стержень в виде полосы с параметром $F = L \times b \times h$ (L — длина, b — ширина, h — толщина).

Ширина канала, имеющего П-образный профиль, $s = 7 \cdot 10^{-3}$ м. Соответственно, при толщине стержня $h = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м зазор δ на сторону между стержнем и стенкой канала составит $\delta = 3,25 \cdot 10^{-3}$ м.

Для стержня из нержавеющей стали модуль Юнга $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа. При ширине $b = 8 \cdot 10^{-3}$ м значение изгибной жесткости стержня $EI = 1,72 \cdot 10^{-2}$ Н·м².

В частности, при длине стержня $L = 0,6$ м критическое значение осевого сжатия по Эйлеру $P = 0,4706$ Н.

Деформирование стержня по формам [5]. Решение, приведенное в [5], включает переходы форм: $w_0 \rightarrow w_1 \rightarrow w_3 \rightarrow w_9$. Рассмотрим деформирование численной модели стержня при следующих исходных данных: $F = 0,6 \times 8 \cdot 10^{-3} \times 0,5 \cdot 10^{-3}$ м.

Одна полуволна с точечным контактом. В этом случае модель теряет устойчивость по Эйлеру с последующим касанием стенки канала в точке и образованием полуволны изгиба — переход форм $w_0 \rightarrow \dot{w}_{1н} (\bar{T} = 1,02)$ представлен на рис. 3, а. Дальнейшее нагружение до усилия сжатия $\bar{T} = 4,0$ приводит к возрастанию интенсивности изгиба и действующих реакций — форма $\dot{w}_{1к}$ (рис. 3, б).

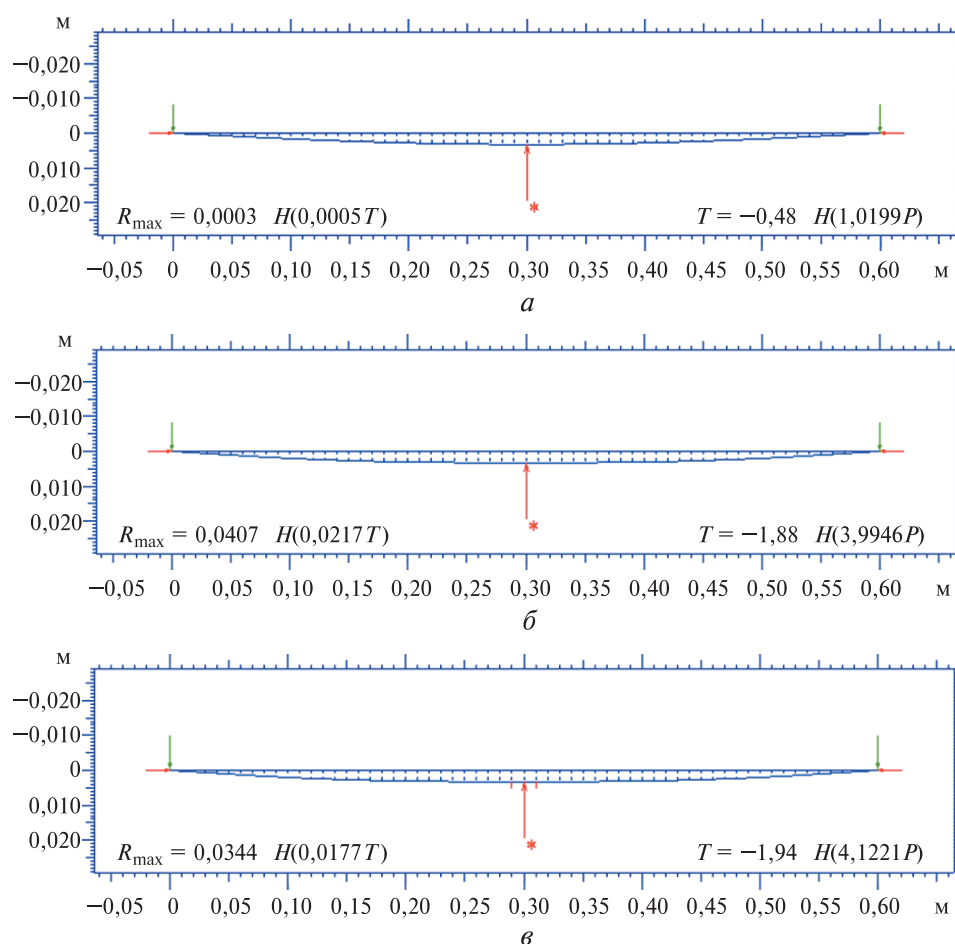


Рис. 3 (начало). Начальная и конечные формы стержня на этапах постепенного нагружения:

а — $\dot{w}_{1н}$, $\bar{T} = 1,02$; б — $\dot{w}_{1к}$, $\bar{T} = 4,0$; в — $\ddot{w}_{1н}$, $\bar{T} = 4,12$

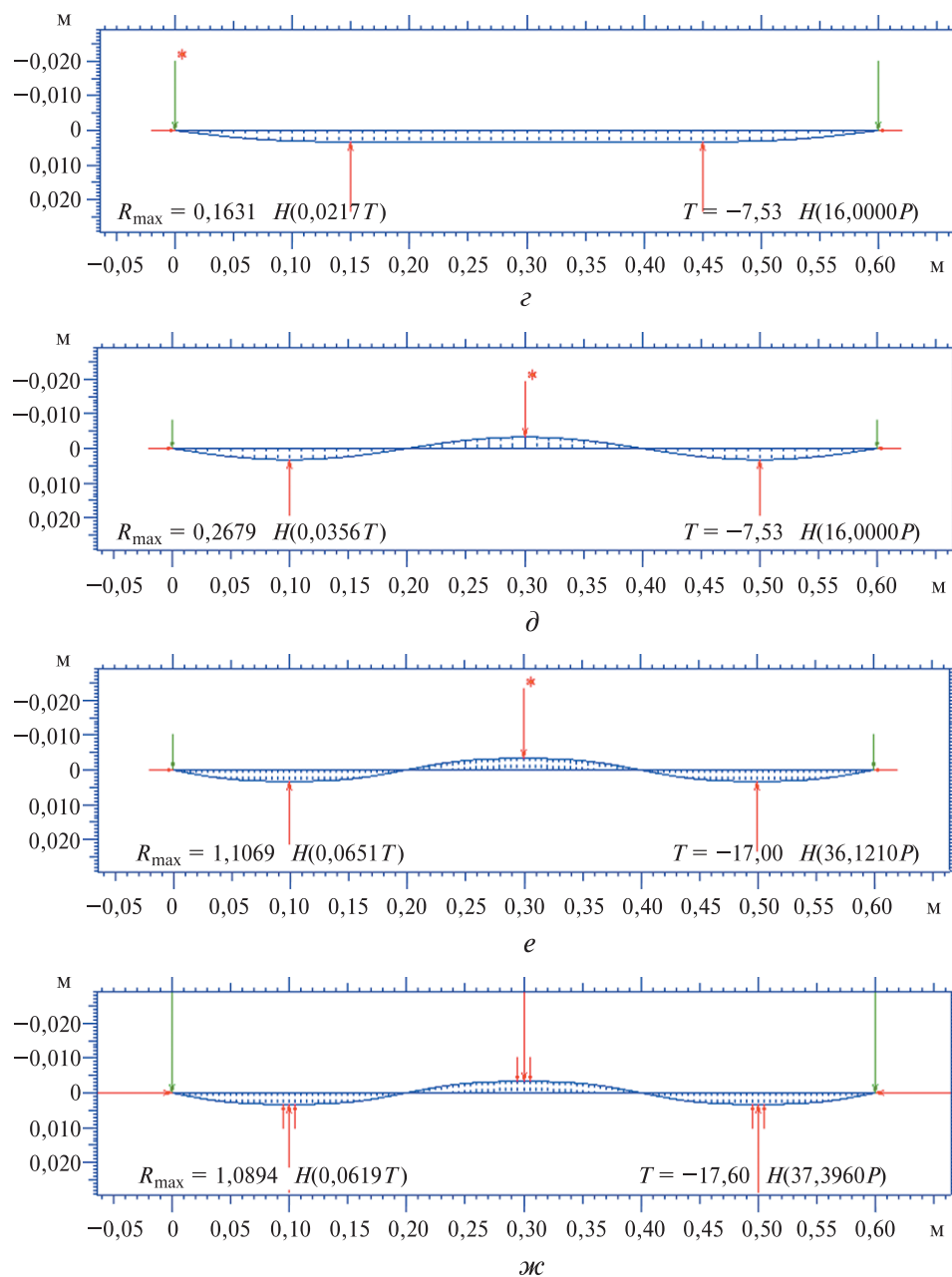


Рис. 3 (продолжение). Начальная и конечные формы стержня на этапах постепенного нагружения:

z — $\ddot{w}_{1к}$, $\bar{T} = 16,0$; d — $\dot{w}_{3н}$, $\bar{T} = 16,0$; e — $\dot{w}_{3к}$, $\bar{T} = 36,12$; $жс$ — $\ddot{w}_{3н}$, $\bar{T} = 37,4$

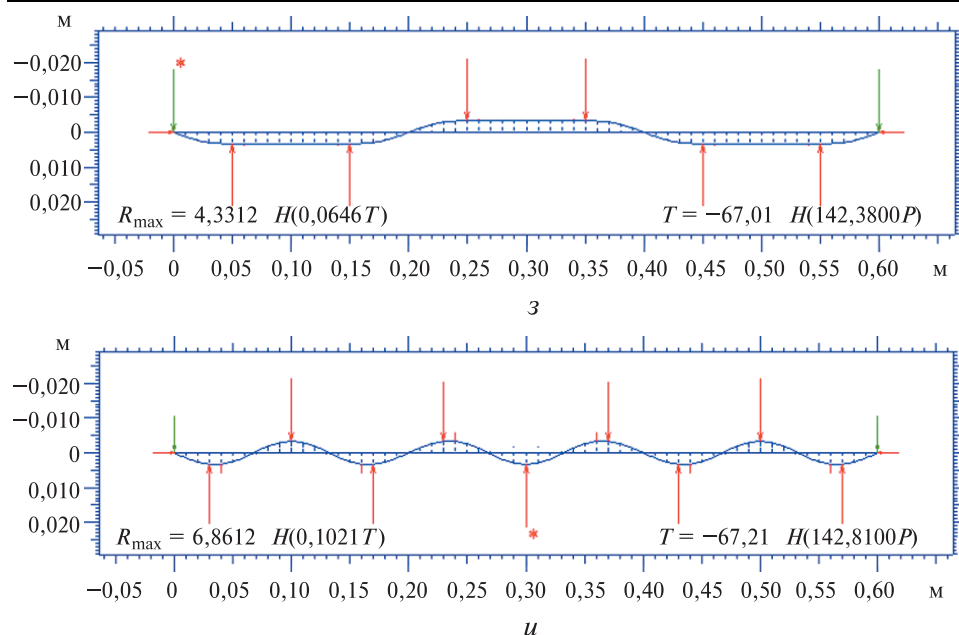


Рис. 3 (окончание). Начальная и конечные формы стержня на этапах постепенного нагружения:

$$z — \ddot{w}_{3к}, \bar{T} = 142,38; u — \dot{w}_{9н}, \bar{T} = 142,81$$

Одна полуволна с линейным контактом. По мере увеличения усилия сжатия \bar{T} от 4,12 до 16,0 в центре стержня формируется и развивается прямолинейная зона контакта ($n=3$) — форма \ddot{w}_1 (рис. 3, в, з).

Три полуволны с точечным контактом. При усилии сжатия $\bar{T} = 16$ в центральной части начальной формы (рис. 3, з) происходит вторичная потеря устойчивости стержня с образованием формы изгиба с тремя полуволнами ($n=4$) — переход форм $\ddot{w}_{1к} \rightarrow \dot{w}_{3н}$ (рис. 3, д). В дальнейшем нагружение сопровождается возрастанием интенсивности изгиба и действующих реакций ($\bar{T} = 36,12$) — форма $\dot{w}_{3к}$ (рис. 3, е). При этом с целью повышения точности описания деформирования число элементов увеличено вдвое (120 элементов вместо 60).

Три полуволны с линейным контактом. При нагружении усилием сжатия $\bar{T} = 37,4$ получаем начальную стадию линейного контакта стержня со стенками — форма $\ddot{w}_{3н}$ (рис. 3, ж). Для фиксации линейного контакта масштаб отображения реакций значительно увеличен. Нагружение до усилия сжатия $\bar{T} = 142,38$ приводит к развитию линейного контакта со стенками канала ($n=5$) — форма $\ddot{w}_{3к}$ (рис. 3, з).

Девять полувогн с линейным контактом. При нагружении формы, показанном на рис. 3, з, происходит формирование волн изгиба на трех участках модели одновременно с получением следующей формы ($n = 6$) — форма w_9 , переход форм $\ddot{w}_3 \rightarrow \dot{w}_9$ ($\bar{T} = 142,81$), представленный на рис. 3, и. Следует отметить, что для реализации данного перехода форм требуется достаточное значение последней ступени нагружения.

Согласно положениям [5], длины участков модели от нулевой отметки до точки касания в формах (рис. 3, з, д) в нашем случае должны принимать значения $\frac{L}{4} = 0,15$ м и $\frac{L}{6} = 0,10$ м. Для условий, показанных на рис. 3, з, реакция в шарнирной опоре должна иметь значение:

$$R = \frac{T\delta}{0,25L} = \frac{7,53 \cdot 3,25 \cdot 10^{-3}}{0,25 \cdot 0,6} = 0,16315 \text{ Н.}$$

Длины участков модели, представленной на рис. 3, з, д, и реакция $R_{\max} = 0,1631 \text{ Н}$ в модели, изображенной на рис. 3, з, совпадают с данными, получаемыми согласно положениям [5].

Результаты моделирования изгиба стержня при постепенном сжатии полностью согласуются с положениями работы [5].

Дальнейшее исследование показывает, что решение рассматриваемой задачи имеет более сложную структуру. Следовательно, при определении НДС стержневого объекта необходимо учитывать и дополнительные положения.

Неравномерность изгиба стержня. При переходе форм $\ddot{w}_3 \rightarrow \dot{w}_9$ происходит одновременный изгиб трех потенциально неустойчивых участков стержня. Практическая реализуемость данного перехода находится под вопросом, так как при постепенном нагружении физической модели стержня получить данный переход не удастся. Рассмотрим возможные варианты деформирования стержня, не вошедшие в формы [5].

Последовательно-вариантное образование волн изгиба. Повторение расчетов при равных или близких значениях усилий приводит к получению форм модели реализацией трех вариантов.

Вариант 1. В ходе нагружения начальной формы (рис. 3, з) стержень теряет устойчивость в правой части с переходом форм: $w_3(3) \rightarrow w_5$ при $\bar{T} = 133,65$ (рис. 4, а). Затем происходит изгиб в левой части стержня: переход $w_5(1) \rightarrow w_7$ при $\bar{T} = 144,49$ (рис. 4, б). Далее наблюдается потеря устойчивости центрального участка: переход $w_7(4) \rightarrow w_9$ при $\bar{T} = 293,22$ (рис. 4, в).

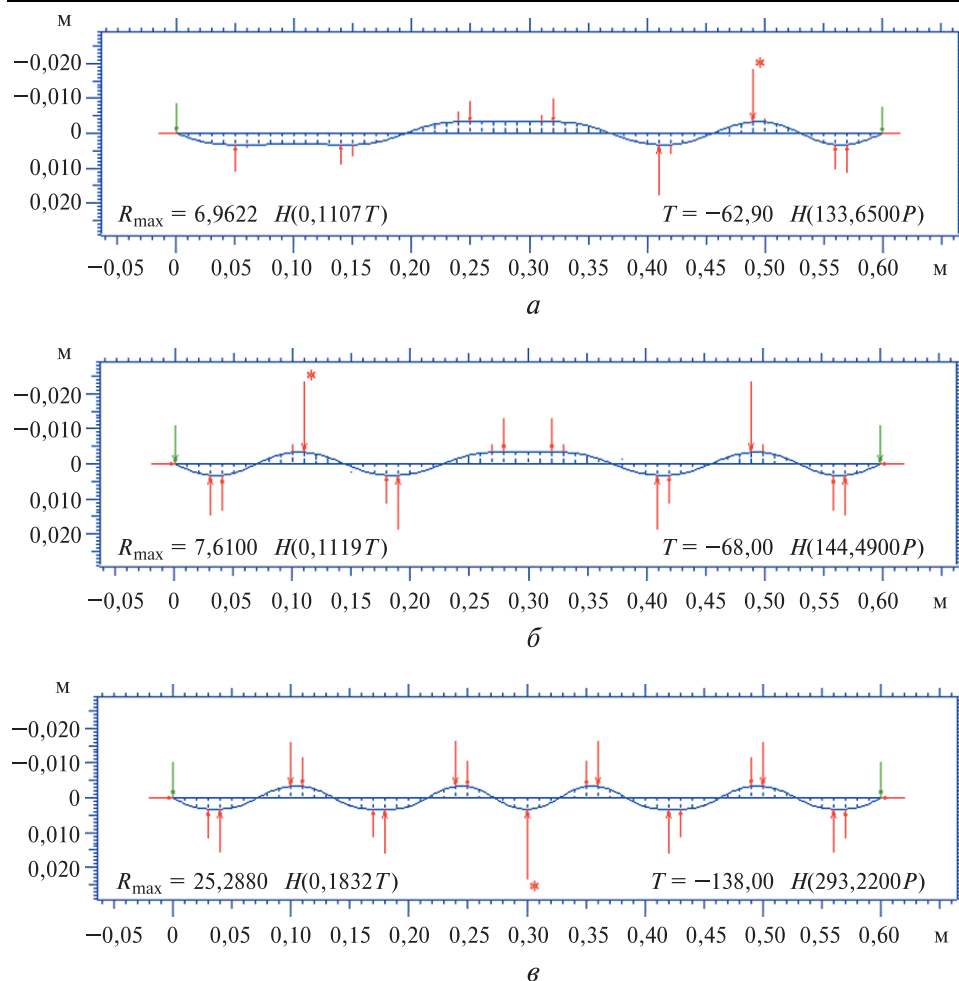


Рис. 4. Последовательное образование волн изгиба в правой (а), левой (б) и центральной (в) частях стержня

Реализация приведенного вида последовательного изгиба возможна также в другом порядке — слева направо с переходами форм: $w_3(1) \rightarrow w_5$, $w_5(5) \rightarrow w_7$, $w_7(4) \rightarrow w_9$.

Вариант 2. Два крайних участка исходной формы (см. рис. 3, з) теряют устойчивость одновременно, переход форм $w_3(1,3) \rightarrow w_7$ при $\bar{T} = 133,65$ (рис. 5). Деформирование приводит к значительному уменьшению длины линейного контакта в центральной зоне стержня. Как следствие, для дальнейшего перехода форм $w_7(4) \rightarrow w_9$ необходимо существенно увеличить усилие, при этом изгиб происходит по варианту, приведенному на рис. 4, в.

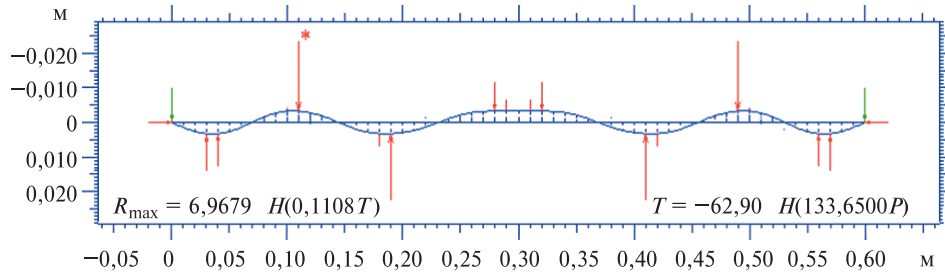


Рис. 5. Одновременный изгиб в правой и левой частях стержня

Вариант 3. Центральный участок исходной формы (см. рис. 3, з) теряет устойчивость с переходом форм $w_3(2) \rightarrow w_5$ при $\bar{T} = 133,65$ (рис. 6, а) и дальнейшей поочередной (возможно и одновременной) потерей устойчивости крайних участков: $w_5(5) \rightarrow w_7$, $\bar{T} = 173,17$ (рис. 6, б) и $w_7(1) \rightarrow w_9$, $\bar{T} = 178,48$ (рис. 6, в).

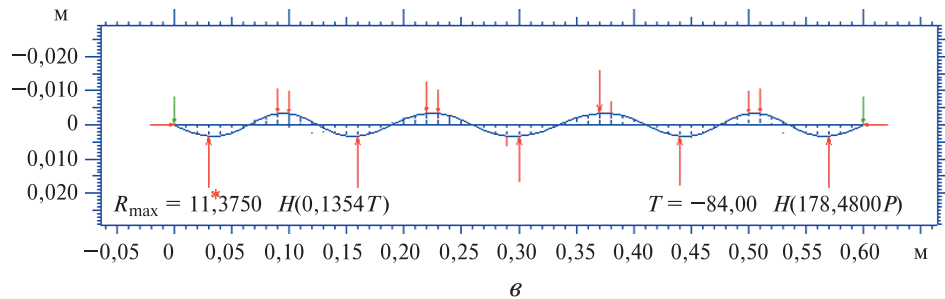
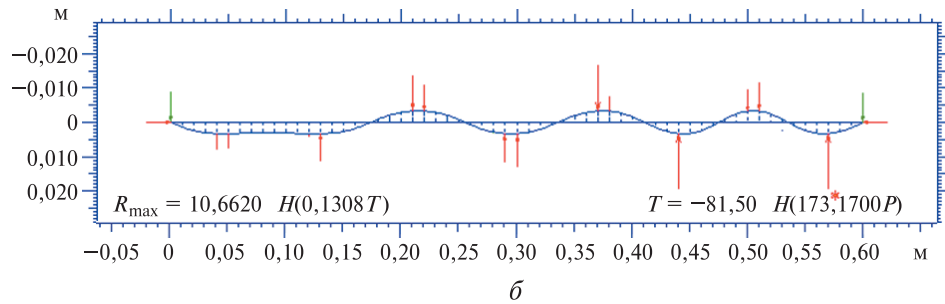
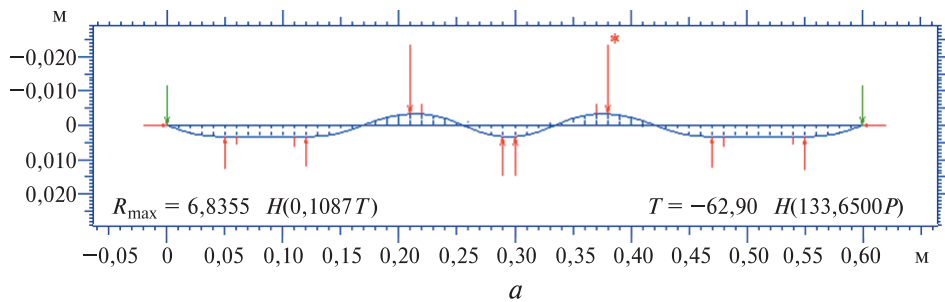


Рис. 6. Последовательное образование волн изгиба стержня в центральной (а), правой (б) и левой (в) частях

Таким образом, при постепенном нагружении стержня с начальной формой w_3 происходит последовательное включение участков в процесс изгиба. В результате получаем возможные варианты переходов: $w_3 \rightarrow w_5, w_7, w_9$.

Наблюдаемый процесс образования в стержне волн изгиба назовем последовательно-вариантным деформированием (изгибом). Результаты численного и физического моделирования позволяют считать последовательно-вариантный изгиб преобладающим видом деформирования стержня при постепенном нагружении.

Вариантность деформирования как следствие неравномерности изгиба. Последовательно-вариантный изгиб модели стержня можно объяснить незначительным различием параметров формирующихся полуволн изгиба при вычислениях. Неравномерность деформирования стержня делает возможным опережающее развитие изгиба на отдельных участках с блокированием движения в других направлениях. При неравномерном изгибе устойчивость стержня определяется устойчивостью наиболее слабого звена, в качестве которого поочередно выступает одна из полуволн изгиба.

Рассмотрим деформирование стержня при наличии неравномерности изгиба. Формы, приведенные на рис. 7, получены при неподвижных граничных сечениях посредством незначительных внешних воздействий, сопровождающихся выраженным переформированием стержня, на его участки.

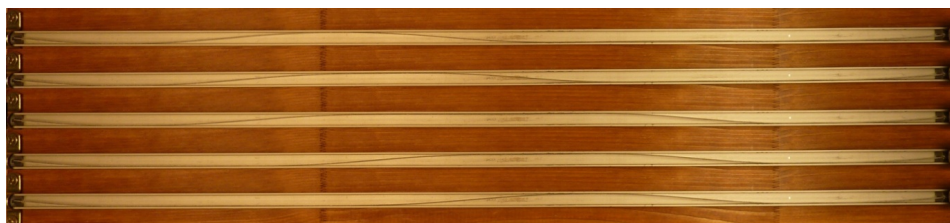


Рис. 7. Формы стержня с тремя полуволнами при фиксированных границах

Аналогичные формы численной модели, показанные на рис. 8, б, в, г, являются результатом направленного изменения координат формы, приведенной на рис. 8, а. Затем расчетным путем определяется равновесное положение стержня.

Приведены расчетные значения: относительной деформации $\varepsilon = \Delta L/L$, уменьшения горизонтальной проекции стержня ΔL , потенциальной энергии стержня от изгиба и сжатия U .

При рассмотрении форм, изображенных на рис. 8, видно, что значения их величин ε и U близки. Действительно, формы состоят из однотипных элементов, причем криволинейные элементы совпадают

при наложении изображений. Во всех формах внешняя сила T совершает практически одинаковую работу на перемещении ΔL точки приложения нагрузки.

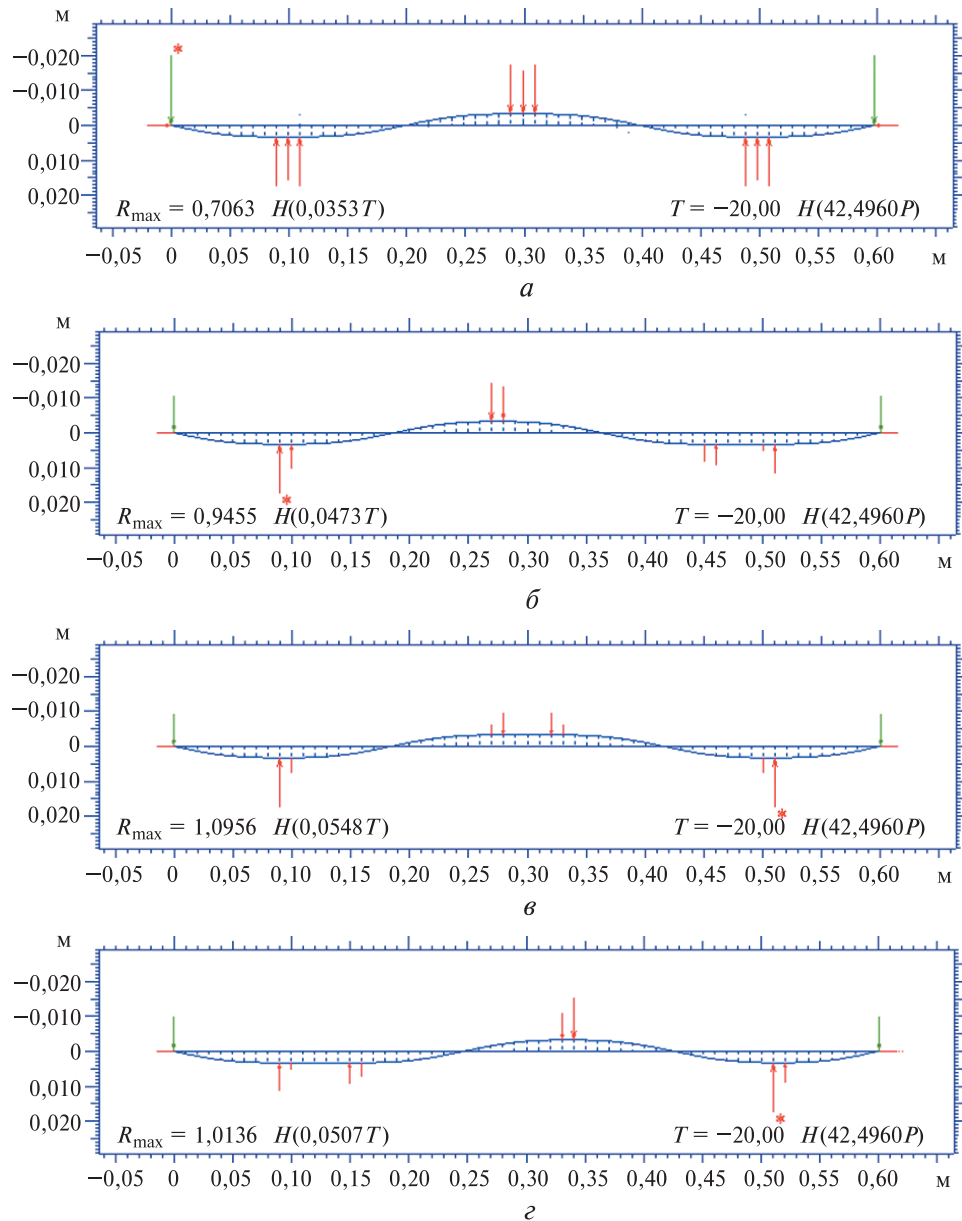
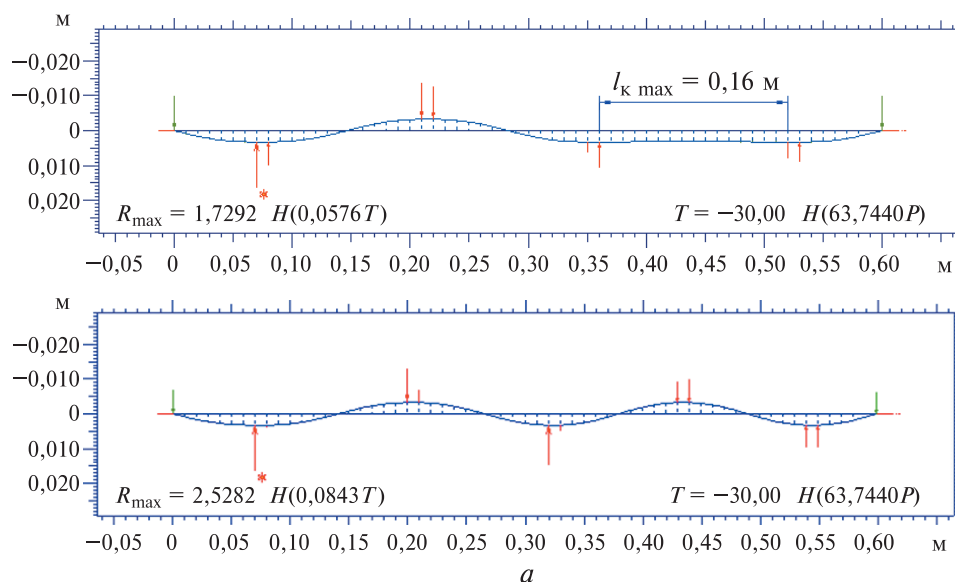


Рис. 8. Варианты формы w_3 модели стержня при постоянном сжимающем усилии: *a* — равные длины полуволн ($\epsilon = 5,29869 \cdot 10^{-4}$, $U = 3,54995 \cdot 10^{-3}$ Дж); *б* — удлиненная полуволна с правой стороны ($\epsilon = 5,29391 \cdot 10^{-4}$, $U = 3,52951 \cdot 10^{-3}$ Дж); *в* — центральное положение удлиненной полуволны ($\epsilon = 5,29368 \cdot 10^{-4}$, $U = 3,53422 \cdot 10^{-3}$ Дж); *г* — удлиненная полуволна с левой стороны ($\epsilon = 5,30846 \cdot 10^{-4}$, $U = 3,55429 \cdot 10^{-3}$ Дж)

Формы изгиба, представленные на рис. 7 и рис. 8, различаются значениями потенциальной энергии на доли процента, так что их появление можно считать равновероятными событиями.

Полагаем, что вариантное поведение численной модели стержня (см. рис. 3, *и*; 4, *а*; 5; 6, *а*) отражает реальные закономерности деформирования стержня.

Переход форм при неравномерном изгибе. Неравенство длин полуволен изгиба снижает общую устойчивость стержня. При равномерном изгибе переход от текущей формы (см. рис. 3, *з*) к последующим формам $w_3 \rightarrow w_5$ (см. рис. 4, *а*; 6, *а*) и форме $w_3 \rightarrow w_7$ (см. рис. 5) происходил при усилии $T = 133,65P = 62,9$ Н. Это значение является верхней границей критических усилий для перехода к следующей форме.



б

Рис. 9. Потеря устойчивости стержня с неравными длинами полуволен:

а — численная модель ($l_{к\ max}$ — длина наибольшего из прямолинейных участков в форме при потере устойчивости); *б* — физическая модель

В расчетном примере, приведенном на рис. 9, а, получаем потерю устойчивости удлиненного участка с переходом форм $w_3 \rightarrow w_5$ при вдвое меньшем усилии $T = 63,74P = 30H$. Это значение принимаем за нижнюю границу критических усилий перехода от форм вида w_3 к последующим формам.

На физической модели (рис. 9, б) наблюдаем аналогичное показанному на рис. 9, а деформирование под действием силы $T = 30H$. Следует отметить, что при усилнии $\bar{T} = 63,74$ определенное расчетным путем значение критической длины стержня, имеющего заделку на концах, составляет $l_{кр} = 0,15$ м, что близко к значению величины $l_{к\max} = 0,16$ м (см. рис. 9, а).

В зависимости от степени неравномерности изгиба переход от форм вида w_3 к другим формам возможен при усилиях из интервала значений $\bar{T} = 63,74 \dots 133,65$.

Полученные в результате неравномерного изгиба формы численной и физической моделей стержня (рис. 9) также показывают неравномерность изгиба, например, параметры левой и правой частей форм не совпадают, центр третьей полуволны моделей смещен вправо от центра канала примерно на 2 см.

Неравномерность деформирования по длине стержня имеет пространственный характер, что выявляется при наложении различных криволинейных участков изображений как физической, так и численной модели или при сравнении положения характерных точек форм.

Образующуюся при неравномерном деформировании стержня форму можно проверить на устойчивость следующим образом:

вариант 1 — с применением численной модели;

вариант 2 — аналогично принятому в [5] подходу по соответствию $l_{к\max} = l_{кр}$, где $l_{кр}$ — длина прямолинейного стержня с заделками на концах, при которой значение усилия T_w является для стержня критическим.

Диапазон неустойчивости формы. Предположим, что длины линейных контактов в w полу волнах в момент потери устойчивости подчиняются вероятностному распределению. Соответствующий интервал критических усилий назовем *диапазоном неустойчивости формы*: $D_{н.ф} = T_{кр\min} \dots T_{кр\max}$, где $T_{кр\min}, T_{кр\max}$ — минимальное и максимальное критические усилия для формы при максимально неравномерном и равномерном изгибе соответственно.

Диапазон существования формы при постепенном нагружении. Диапазон нагрузок от усилия, при котором произошло образование формы, до нижней границы диапазона неустойчивости формы

определим как диапазон существования формы при постепенном нагружении. В отсутствие диапазона неустойчивости получим диапазоны существования формы по типу приведенных в табл. 1.

Когда усилие находится в диапазоне существования формы, происходит деформирование стержня, которое заключается в возрастании интенсивности изгиба криволинейных участков и удлинении прямолинейных участков, но без изменения числа полуволн. Если усилие переходит в диапазон неустойчивости формы, число полуволн изгиба может измениться.

Снижение устойчивости стержневых объектов вследствие неравномерности изгиба и различий в параметрах полуволн нужно учитывать при определении НДС.

Формы изгиба при постепенном нагружении. Вариантное деформирование численной модели стержня при постепенном нагружении представлено в виде схемы на рис. 10.

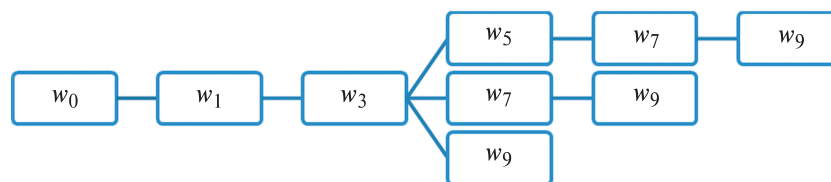


Рис. 10. Схема деформирования стержня при постепенном нагружении

Решение, приведенное в [5], с переходами $w_0 \rightarrow w_1 \rightarrow w_3 \rightarrow w_9$ является частью показанного на рисунке деформирования.

Форма w_2 при нагружении. Низшие формы деформирования в практических приложениях представляют особый интерес. Форма w_2 с двумя полуволнами изгиба получена при резком нагружении (см. далее рис. 11, б), а также при разгрузке стержня в случае численного и физического моделирования (см. часть 2 статьи).

Затраты энергии на образование формы w_2 позиционируют ее между формами w_1, w_3 . Под действием случайных факторов, особенно по мере уменьшения отношения $\bar{\delta} = \delta / L$, получение формы w_2 не исключено. При физическом моделировании стержень иногда образует данную форму от начально прямолинейного состояния и при постепенном нагружении.

В случае образования формы w_2 необходимо рассмотреть следующие формы нагружения. Численное моделирование позволяет получить переходы форм по вариантам $w_2 \rightarrow w_4, w_2 \rightarrow w_6$. Переход $w_2(1,2) \rightarrow w_6$ является результатом одновременной потери устойчивости двух полуволн. При потере устойчивости одной из двух полу-

волн переходы имеют вид $w_2(1) \rightarrow w_4$ или $w_2(2) \rightarrow w_4$. Дальнейшее нагружение форм w_4, w_6 приведет к получению форм последующего деформирования.

В практических целях целесообразно дополнять формы стержня при нагружении (см. рис. 10) переходами этой линии деформирования, но данный вопрос требуется дополнительно изучить.

Нагружение стержня в одну ступень. Характер приложения нагрузки влияет на процесс деформирования стержня. При резком нагружении прямолинейного стержня различными усилиями образуются формы с числом полуволн $w = 1 - 9$, (табл. 2, рис. 11). В связи с трудоемкостью определения диапазонов существования форм граничные значения можно в дальнейшем уточнить.

Таблица 2

Формы стержня в диапазонах усилия сжатия

Число полуволн w	Диапазоны усилий сжатия \bar{T}
1	1,00–5,31
2	5,42–14,02
3	14,24–26,99
4	27,20–44,62
5	46,75–65,87
6	67,99–92,43
7	93,49–123,24
8	125,36–165,73
9	166,80–191,23

Форма с одной полуволной ($n = 3$) вида w_1 появляется при нагружении до усилия $\bar{T} = 5,31$ (рис. 11, а). В диапазоне усилий $\bar{T} = 5,42 \dots 14,02$ происходит потеря устойчивости по форме с двумя полуволнами: $w_0 \rightarrow w_2$ (рис. 11, б). Для образования формы w_2 требуется меньше энергетических затрат, чем для формы w_3 . При физическом моделировании резкого нагружения образуется форма w_2 , но в отдельных случаях ее появление наблюдается и при постепенном нагружении.

Возрастание нагрузки приводит к последовательному увеличению числа полуволн изгиба на единицу при нахождении усилия в соответствующих диапазонах существования (см. рис. 11, а–и). Следует

отметить, что при постепенном нарастании сжатия происходило увеличение числа целых волн изгиба (см. рис. 10).

Формы, представленные на рис. 11 соответствуют усилиям, приближенным к нижней границе диапазонов существования форм.

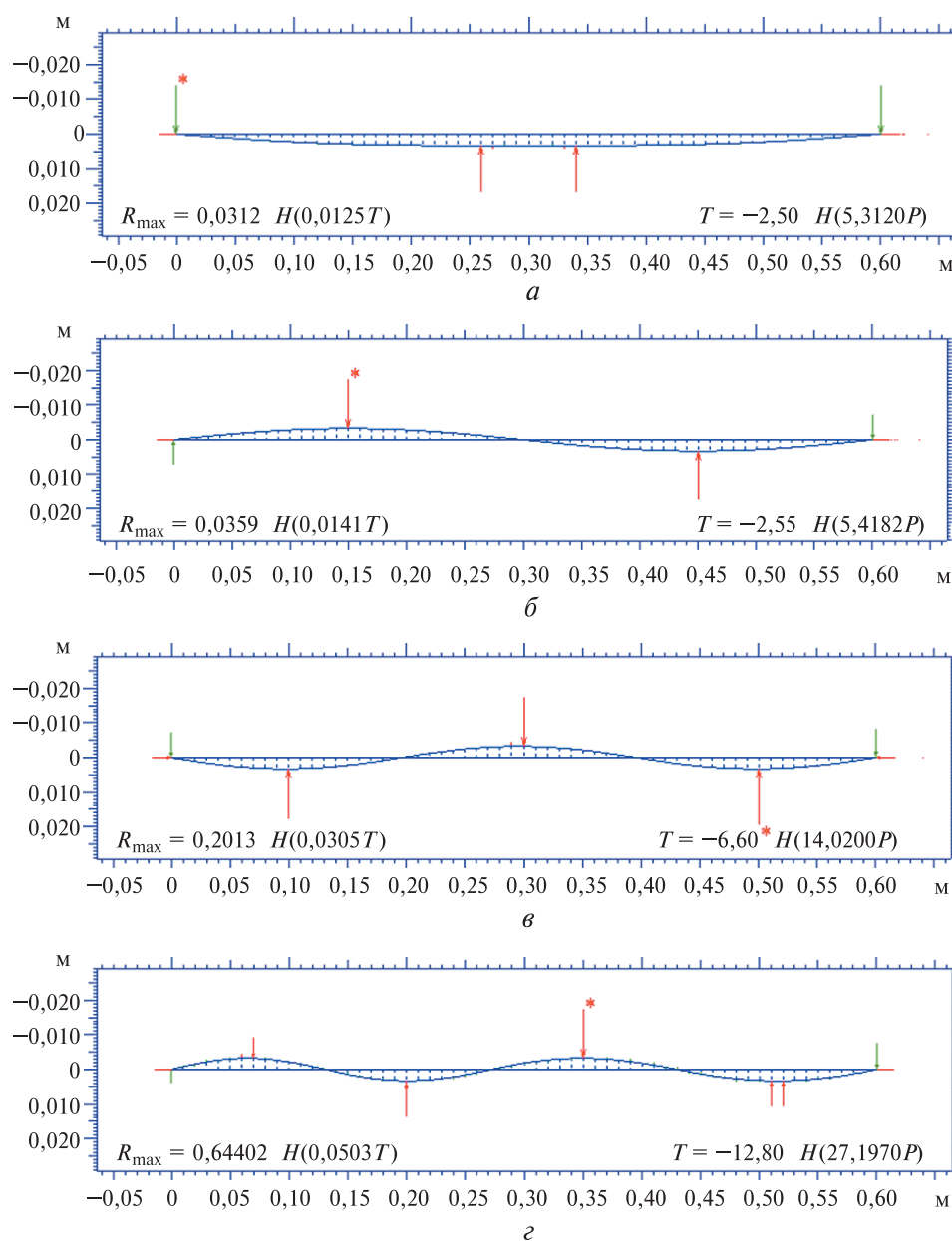


Рис. 11 (начало). Деформирование стержня при нагружении в одну ступень:

a — $w_1, \bar{T} = 5,31$; $б$ — $w_2, \bar{T} = 5,42$; $в$ — $w_3, \bar{T} = 14,02$; $г$ — $w_4, \bar{T} = 27,20$

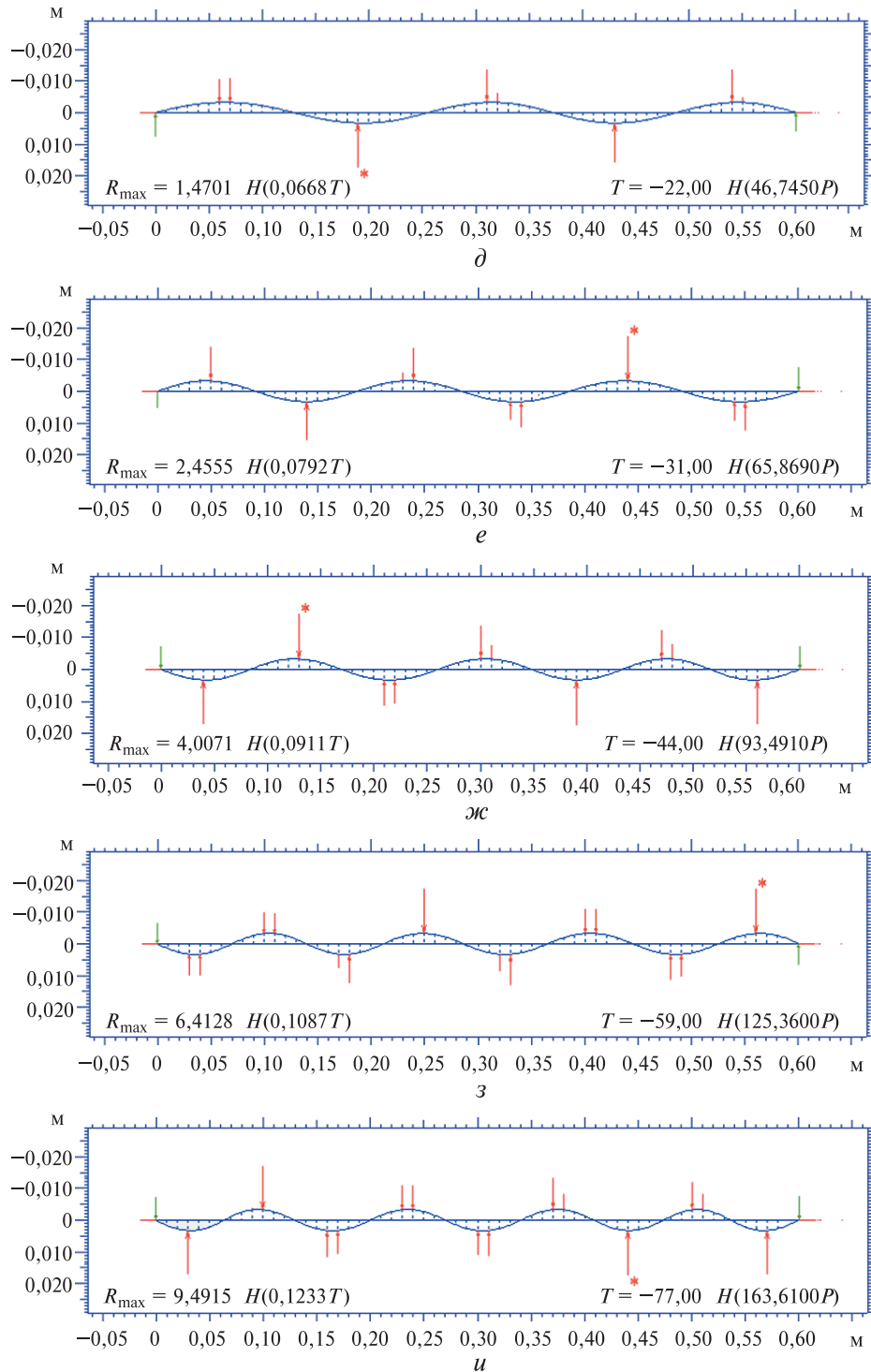


Рис. 11 (окончание). Деформирование стержня при нагружении в одну ступень:

d — $w_5, \bar{T} = 46,75$; e — $w_6, \bar{T} = 65,87$; $ж$ — $w_7, \bar{T} = 93,49$; $з$ — $w_8, \bar{T} = 125,36$;

$и$ — $w_9, \bar{T} = 163,61$

В окрестности границ диапазонов существования возможно вариантное получение при одном усилии и текущей (рис. 12, а), и последующей (рис. 12, б) формы.

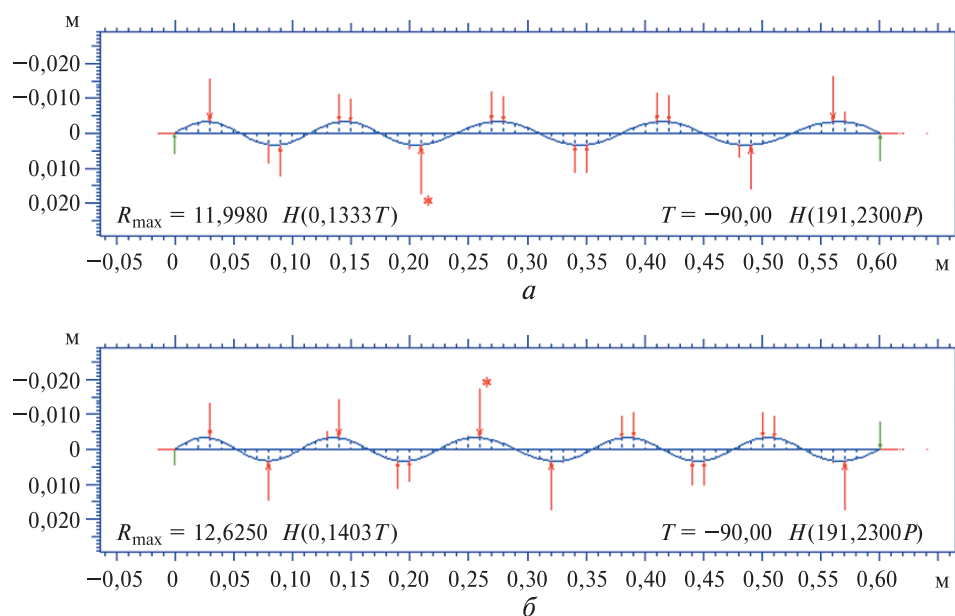


Рис. 12. Формы стержня на границе диапазонов существования форм:
 а — $w_9, \bar{T} = 191,23$; б — $w_{10}, \bar{T} = 191,23$

Различие характера деформирования при постепенном и при резком нагружении осложняет оценку НДС стержневого объекта, так как для определения вида образующейся формы необходимо идентифицировать тип нагружения.

Основные результаты работы. С применением численного и физического моделирования установлены закономерности нелинейного деформирования стержня в канале под действием осевого сжатия. Напряженно-деформированное состояние стержня зависит от истории его нагружения. При постепенном нагружении стержня происходит последовательно-вариантное появление волн изгиба на потенциально неустойчивых участках. В случае нагружения начально прямолинейного стержня в одну ступень по мере возрастания нагрузки последовательно увеличивается число полуволен изгиба.

Формы при нагружении соответствуют усилиям, которые находятся в диапазонах существования форм. Неравенство длин полуволен изгиба приводит к возможности смены форм при различных критических усилиях, образующих диапазон неустойчивости формы.

От одной исходной формы при потере устойчивости можно получать различные формы, отличающиеся либо последовательностью

деформирования участков при одном числе полуволн, либо числом образующихся полуволн.

Заключение. Приведенные данные показывают нелинейные закономерности деформирования стержня в канале, представляющие интерес в механике стержней и при решении прикладных задач. Проведенное исследование раскрывает сложность рассмотренной задачи, но не исчерпывает ее содержания. В развитие работы возможны уточнение приведенных положений, совершенствование и оптимизация численной модели, учет динамики переходных процессов, расширение возможностей физического моделирования и т. д.

Рассмотренная задача с методической точки зрения важна для анализа функционирования стержневых объектов при осевом сжатии. Положения работы могут быть учтены при разработке конструкций и механизмов, в процессе управления технологическими процессами и при создании методик расчета НДС стержневых объектов различного назначения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва, Наука, 1967, 987 с.
- [2] Тимошенко С.П. *Устойчивость стержней, пластин и оболочек*. Москва, Наука, 1971, 808 с.
- [3] Светлицкий В.А. *Механика трубопроводов и шлангов*. Москва, Машиностроение, 1982, 279 с.
- [4] Светлицкий В.А. *Механика стержней. Ч. 1: Статика*. Москва, Высшая школа, 1987, 320 с.
- [5] Феодосьев В.И. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов*. 5-е изд., испр. и доп., Москва, Наука, Физматлит, 1996, 368 с.
- [6] Григулецкий В.Г. Устойчивость и/или неустойчивость плоской прямолинейной формы равновесия нижней части колонны труб в вертикальной скважине, часть 1. Краткий обзор и анализ существующих решений. *Нефть, газ и бизнес*, 2016, № 12, с. 3–13.
- [7] Силина И.Г., Гильмияров Е.А., Иванов В.А. Анализ методик расчета продольной устойчивости участков магистральных трубопроводов. *Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов*. 2019, т. 9, № 4, с. 387–393.
- [8] Трутаев С.Ю., Кузнецов К.И. О необходимости совершенствования подходов к оценке технического состояния оборудования опасных производственных объектов, работающих при непроектных нагрузках. *Территория Нефтегаз*, 2019, № 7–8, с. 56–62.
- [9] Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Устойчивость сжатого стержня при наличии ограничений на перемещение. *Доклады Академии наук*, 2007, т. 412, № 2, с. 196–200.
- [10] Дорогов Ю.И. Устойчивость стержня при наличии препятствий выпучиванию. *Вестник Томского государственного университета, Математика и механика*, 2015, № 4 (36), с. 196–200.
- [11] Liakou A., Detournay E. Constrained buckling of variable length elastics: solution by geometrical segmentation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2018, vol. 99, pp. 204–217.

- [12] Holmes P., Domokos G., Schmitt J., Szeberenyi I. Constrained Euler buckling: an interplay of computation and analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, vol. 170, pp. 175–207.
- [13] Domokos G., Holmes P., Royce B. Constrained Euler buckling. *Journal of Non-linear Science*, 1997, vol. 7, pp. 281–314.
- [14] Chen J.-S., Lu C.-J., & Lee C.-Y. On the use of energy method with element splitting to determine the stability of a constrained elastics. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2015, vol. 76, pp. 77–86. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2015.06.002
- [15] Овчинников Н.Т. Трехмерное моделирование работы колонн труб в скважине. *Газовая промышленность. Серия: геология, бурение, разработка и эксплуатация газовых и газоконденсатных месторождений*, 1994, спец. выпуск 1–4, с. 48–58.

Статья поступила в редакцию 15.09.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Овчинников Н.Т., Сорокин Ф.Д. Численное и физическое моделирование деформирования стержня при осевом нагружении в канале. Часть 1. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 10.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-10-2021>

Овчинников Николай Тихонович — канд. техн. наук, научный консультант ООО «Геосплит». Компьютерное моделирование протяженных трубных систем в технологических процессах нефтегазовой отрасли. e-mail: ntorvs@rambler.ru

Сорокин Фёдор Дмитриевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 публикаций в отечественных и международных научных журналах. e-mail: sorokin_fd@mail.ru

Numerical and physical modeling of bar deformation under axial loading in the channel. Part 1

© N.T. Ovchinnikov¹, F.D. Sorokin²

¹ Geosplit LLC, Moscow, 121205, Russia

² Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

In two parts of the work, numerical and physical modeling of the deformation of the bar in the channel under axial compression is carried out. The regularities of nonlinear bending of the bar in the plane are revealed. Bar shapes are determined by the load history and can differ at the same force value. The solution is to find the shape with the lowest potential energy. The first part of the work describes the numerical model of the bar and the results of its application. The shapes of the bar bending under gradual loading are obtained, the studies coinciding with V.I. Feodosev's analytical solution. Further research shows that the solution to the problem has a more complex ramified structure with various additional shapes. Deformation of the bar under gradual loading occurs in the form of a sequential variant appearance of bending waves in the bar under forces determined by the degree of non-uniformity of the lengths of potentially unstable sections and forming a range of shape instability. In variant transitions from one initial shape with a loss of stability, it is possible to obtain various subsequent shapes that differ in the sequence of deformation of the sections with one number of half-waves, or the number of generated half-waves. When a straight bar is loaded in one step, an increase in the force leads to a sequential increase in the number of bending half-waves in the corresponding ranges of the existence of shapes. The results obtained can be applied to the analysis of the operation of such bar objects as drill, casing, tubing strings in the well and cased pipelines, pipelines in the well and tunnel.

Keywords: bar, column, pipeline, stability, deformation, bending, modeling, nonlinearity

REFERENCES

- [1] Volmir A.S. *Ustoychivost deformiruemyykh system* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 987 p.
- [2] Timoshenko S.P. *Ustoychivost sterzhney, plastin i obolochek* [Stability of bars, plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 808 p.
- [3] Svetlitskiy V.A. *Mekhanika truboprovodov i shlangov* [Mechanics of pipelines and hoses.]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1982, 279 p.
- [4] Svetlitskiy V.A. *Mekhanika sterzhney. Ch. 1: Statika* [Bar mechanics. Part 1: Statics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1987, 320 p.
- [5] Feodosev V.I. *Izbrannye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* [Selected problems and questions on the strength of materials.]. 5th ed., revised and enlarged, Moscow, Nauka, Fizmatlit Publ., 1996, 368 p.
- [6] Griguletskiy V.G. *Neft, gaz i biznes (Oil, gas and business)*, 2016, no. 12, pp. 3–13.
- [7] Silina I.G., Gilmiyarov E.A., Ivanov V.A. *Nauka i tekhnologii truboprovodnogo transporta nefti i nefteproduktov — Science and technology of oil and oil products pipeline transport*, 2019, vol. 9, no. 4, pp. 387–393.
- [8] Trutaev S.Yu., Kuznetsov K.I. *Territoriya Neftegaz — Oil and gas territory*, 2019, no. 7-8, pp. 56–62.
- [9] Morozov N.F., Tovstik P.E. *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2007, vol. 412, no. 2, pp. 196–200.

- [10] Dorogov Yu.I. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2015, no. 4 (36), pp. 196–200.
- [11] Liakou A., Detournay E. Constrained buckling of variable length elastics: solution by geometrical segmentation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 99, pp. 204–217.
- [12] Holmes P., Domokos G., Shmitt J. Constrained Euler buckling: an interlay of computation and analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, vol. 170, pp. 175–207.
- [13] Domokos G., Holmes P., Royce B. Constrained Euler buckling. *Journal of Non-linear Science*, 1997, vol. 7, pp. 281–314.
- [14] Chen, J.-S., Lu, C.-J., & Lee, C.-Y. On the use of energy method with element splitting to determine the stability of a constrained elastics. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2015, vol. 76, 77–86.
DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2015.06.002
- [15] Ovchinnikov N.T. *Gazovaya promyshlennost. Seriya: geologiya, burenie, razrabotka i ekspluatatsiya gazovykh i gazokondensatnykh mestorozhdeniy (Gas industry. Series: geology, drilling, development and operation of gas and gas condensate fields)*, 1994, spec. iss. 1–4, pp. 48–58.

Ovchinnikov N.T., Cand. Sc. (Eng.), Scientific Adviser, Geosplit LLC. Research interests: computer modeling of extended pipe systems in technological processes of the oil and gas industry. e-mail: ntorvs@rambler.ru

Sorokin F.D., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University. Author of over 100 research papers in Russian and foreign scientific journals. e-mail: sorokin_fd@mail.ru