УДК 532.59; 537.29

С. О. Юрченко, И. Н. Алиев

ОПЕРАТОРНЫЙ СПОСОБ ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ ПРОСТЫХ ВОЛН В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА

Предложен ператорный способ вывода эволюционных уравнений. Приведены примеры использования нового способа к выводу уравнений простых волн типа Кортевега – де Фриза, Бенджамина – Оно и Бюргерса.

E-mail: st.yurchenko@mail.ru

Ключевые слова: *нелинейные уравнения, уравнение Кортевега – де Фриза, Бюргерса, Бенджамина – Оно.*

Уравнения Буссинеска описывают квадратично-нелинейные волны в ряде систем, допускающих дисперсию. К таковым можно отнести волны на поверхности жидкости небольшой глубины, нелинейные газодинамические возмущения и звуковые волны с дисперсией (в том числе с затуханием), ионно-звуковые волны в плазме без магнитного поля и в сильном магнитном поле, волны огибающих [1], нелинейные возмущения электронно-дырочной плазмы в графене [2].

Исходные уравнения в описываемых случаях — уравнения Навье – Стокса, уравнения непрерывности и энергии, а также уравнение непрерывности электрического заряда и уравнения, описывающие электромагнитное поле в случае плазмы, дополненные соответствующими граничными условиями.

Приближение Буссинеска состоит в учете равносильного влияния квадратичной амплитудной нелинейности и эффектов, обусловленных линейной дисперсией. Такой подход получил широкое распространение, так как позволяет проследить за совместными эффектами дисперсии и нелинейности.

В данной работе излагается новый способ вывода эволюционных уравнений простых волн для систем различной природы, квадратично-нелинейные возмущения в которых описываются в приближении Буссинеска.

Операторное уравнение простых волн. В уравнениях Буссинеска учтены квадратично-нелинейные слагаемые и кубическая дисперсия [1, 3]

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} + \frac{c^2(\eta)}{\eta}\nabla\eta + \frac{2c(\eta_0)\,\beta}{\eta_0}\Delta\nabla\eta = 0; \\ &\eta_t + \nabla(\eta\mathbf{u}) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости возмущений; η — обобщенная “плотность” (глубина, напряженность магнитного поля); $c(\eta)$ — скорость возмущений без учета дисперсии; η_0 — невозмущенная "плотность"; β — параметр дисперсии; индекс t означает дифференцирование по времени. Линеаризация системы (1) приводит к дисперсионному соотношению $\omega = c_0 k - \beta k^3 + O\left(k^5\right)$ ($\omega,\ k$ — циклическая частота и волновое число).

Уравнения типа (1) можно переписать в более общем виде:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla p\,[\eta]\,; \\ &\eta_t + \nabla\,(\eta\mathbf{u}) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $p\,[\eta]$ — функционал давления, который зависит от конкретной постановки задачи.

Уравнения (2) допускают существование так называемых простых волн (волн Римана), бегущих в одном направлении. Все величины, описывающие простую волну, выражаются через одну из них.

В случае, когда $p\,[\eta] = \widehat{P}\eta$ ($\widehat{P}$ — линейный оператор), вывод эволюционного уравнения простой волны существенно упрощается. Систему (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\eta^{-1}\widehat{\mathbf{C}}^2\nabla\eta; \\ &\eta_t + \nabla\,(\eta\mathbf{u}) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

откуда следует определение оператора скорости возмущений $\widehat{\mathbf{C}}$:

$$\widehat{\mathbf{C}}^2 = \eta\widehat{P}. \tag{4}$$

Если искать решения системы (3) в виде простых волн, для которых $\eta = \eta\,(\mathbf{u})\,,\ \ \widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{C}}\,(\mathbf{u})$, то

$$\widehat{\mathbf{C}}\,(\mathbf{u})\,\frac{d\eta}{d\mathbf{u}} = \pm\eta. \tag{5}$$

Для волн, распространяющихся в положительном направлении (в этом случае в правой части выражения (5) выбирают знак "+") при подстановке (5) в (3) следует,

$$\mathbf{u}_t + \left(\mathbf{u}\nabla + \widehat{\mathbf{C}}\,(\mathbf{u})\,\nabla\right)\mathbf{u} = 0.$$

С учетом (4) и (5) можно найти зависимость $\widehat{\mathbf{C}}\,(\mathbf{u})$:

$$\frac{d\widehat{\mathbf{C}}}{d\mathbf{u}} = \frac{d\widehat{\mathbf{C}}}{d\eta}\frac{d\eta}{d\mathbf{u}} = \left(\frac{d\widehat{\mathbf{C}}}{d\eta}\frac{1}{\widehat{\mathbf{C}}}\right)\left(\widehat{\mathbf{C}}\frac{d\eta}{d\mathbf{u}}\right) = \left(\widehat{\mathbf{C}}\frac{d\eta}{d\mathbf{u}}\right)\left(\frac{d\widehat{\mathbf{C}}}{d\eta}\frac{1}{\widehat{\mathbf{C}}}\right) =$$

$$= \frac{\eta}{\widehat{\mathbf{C}}}\frac{\widehat{P}}{2\widehat{\mathbf{C}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{C}}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{u}, \tag{6}$$

где векторный оператор $\widehat{\mathbf{C}}_0$ определяют из (4) при $\mathbf{u} = 0$, т.е. в отсутствие возмущения

$$\widehat{\mathbf{C}}_0^2 = \eta \widehat{P}\Big|_{\eta=1} \Rightarrow \widehat{\mathbf{C}}_0 = \pm \mathbf{e}_\mathbf{u} \widehat{\sqrt{P}},$$

а вектор $\mathbf{e}_\mathbf{u}$ представляет собой орт в направлении скорости волны $\mathbf{u}$, так как очевидно, что наибольшее значение квадрата скорости в каждой точке, согласно (4), достигается в направлении скорости распространения волнового возмущения. Как видно, оператор $\widehat{\mathbf{C}}_0$ отражает линейные дисперсионные эффекты.

С учетом (6) для простой волны, распространяющейся в положительном направлении, справедливо векторное операторное уравнение

$$\mathbf{u}_t + \left[(3/2)\mathbf{u}\nabla + \widehat{\sqrt{P}}\left(|\mathbf{u}|^{-1}\mathbf{u}\nabla\right)\right]\mathbf{u} = 0. \tag{7}$$

При выводе уравнения (7) использовано только предположение о линейности оператора $\widehat{P}$ без уточнения его природы. Поэтому предложенный способ вывода уравнений простых волн универсален: при известном виде оператора $\widehat{P}$ сразу можно построить уравнение простой волны (7).

В общем случае фурье-образ $\widehat{P_*}$ оператора $\widehat{P}$ связан с дисперсионным соотношением $\omega(\mathbf{k})$. Линеаризация системы (3) и последующая подстановка линейного решения вида $\exp\left[i\left(\omega t - \mathbf{kr}\right)\right]$ приводят к заключению о том, что

$$\widehat{P_*} = \left(\omega(\mathbf{k})/\left|\mathbf{k}\right|\right)^2. \tag{8}$$

Оператор $\widehat{\sqrt{P}}$ следует понимать в том смысле, что $\widehat{\sqrt{P}}\widehat{\sqrt{P}} = \widehat{P}$. Таким образом, закон линейной дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ однозначно определяет искомый оператор $\widehat{P}$, а фурье-образ оператора $\widehat{\mathbf{C}}_{0*}$ совпадает с зависимостью фазовой скорости от волнового числа.

Искомые векторные операторные уравнения простых волн (эволюционные уравнения волн) имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_t + \left((3/2)\mathbf{u}\nabla + \widehat{\mathbf{C}}_0\nabla\right)\mathbf{u} = 0,\\ \widehat{\mathbf{C}}_{0*} = \mathbf{e}_\mathbf{u}\omega\left(|\mathbf{k}|\right)/|\mathbf{k}|, \quad \mathbf{e}_\mathbf{u} = \mathbf{u}\left|\mathbf{u}\right|^{-1}.\end{gathered} \tag{9}$$

Таким образом, при поиске уравнений простых волн достаточно установить вид квадратично-нелинейных слагаемых в системе (2). Дисперсионные слагаемые находят из зависимости $\omega(\mathbf{k})$ для линейных волн. Уравнение, описывающее распространение волн как в положительном, так и отрицательном направлениях, согласно (9), имеет вид (с точностью до квадратично-нелинейных слагаемых)

$$\mathbf{u}_{tt} - \left[\widehat{\mathbf{C}}_0^2\Delta + \frac{3}{2}\left(\mathbf{u}\widehat{\mathbf{C}}_0\Delta + \left(\widehat{\mathbf{C}}_0\nabla\right)(\mathbf{u}\nabla)\right)\right]\mathbf{u} = 0.$$

Ионно-звуковые волны в плазме. При рассмотрении ионно-звуковых волн в плазме используют так называемое гидродинамическое “двухжидкостное” представление, откуда получаются следующие уравнения [1]:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{e}{m}\nabla\varphi; \\ &\Delta\varphi = 4\pi e\left[n_0 \exp\left(e\varphi/T\right) - n\right]; \\ &n_t + \nabla\left(n\mathbf{u}\right) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где T — электронная температура (постоянная Больцмана принята равной единице); e — заряд электрона; φ — потенциал электрического поля; $\mathbf{u}$, n, m — скорость, концентрация и масса ионов; n_0 — равновесная концентрация электронов. Второе уравнение системы (10) через концентрацию ионов определяет поле потенциала и, таким образом, приводит к дисперсионным эффектам в правой части первого уравнения системы (10).

Дисперсионные эффекты в приближении Буссинеска линейны, поэтому решение линеаризованного второго уравнения системы (10) можно записать в операторном виде

$$\varphi = \frac{T}{e}\left[1 - D^2\Delta\right]^{-1}\left(\frac{n-n_0}{n_0}\right), \quad n - n_0 \ll n_0, \tag{11}$$

где введен дебаевский радиус $D = \sqrt{T/4\pi n_0 e^2}$, а отклонение концентрации от равновесного значения предполагается малым. Если обозначить $\eta = n/n_0$, то получаем систему уравнений типа (2) с оператором давления $\widehat{P}$

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\nabla\widehat{P}\eta; \\ &\eta_t + \nabla\left(\eta\mathbf{u}\right) = 0; \\ &\widehat{P} = \frac{T}{m}\left[1 - D^2\Delta\right]^{-1} \Rightarrow \widehat{P}_* = \frac{T}{m}\left[1 + D^2k^2\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Из фурье-образа оператора $\widehat{P}_*$, определяемого формулой (8), следует известное дисперсионное соотношение для ионно-звуковых волн в плазме [1]

$$\omega = \sqrt{T/m}\cdot k\left(1 + D^2k^2\right)^{-1/2}.$$

Для оператора скорости справедливо

$$\widehat{\mathbf{C}}_0 = \mathbf{e}_\mathbf{u} c_0\left(1 - D^2\Delta\right)^{-1/2} \approx \mathbf{e}_\mathbf{u} c_0\left(1 + \frac{1}{2}D^2\Delta\right),$$

где введена скорость возмущений $c_0 = \sqrt{T/m}$. Отсюда следует уравнение уединенной волны возмущения:

$$\mathbf{u}_t + (3/2)\,\mathbf{u}\nabla\mathbf{u} + \mathbf{e_u}c_0\nabla\mathbf{u} + \mathbf{e_u}\frac{c_0D^2}{2}\nabla^3\mathbf{u} = 0.$$

В одномерном случае уравнение уединенной волны совпадает с уравнением Кортевега – де Фриза (КдФ) [1, 5]:

$$u_t + (3/2)\,uu_x + c_0u_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad \beta = c_0D^2/2.$$

Однако при цилиндрических или сферических возмущениях эволюционные уравнения имеют вид, отличный от классического уравнения КдФ.

Для длинных волн в плазме, находящейся в сильном магнитном поле, справедливы уравнения вида (движения поперечны направлению поля)

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} = -\frac{H_0}{4\pi n_0 m}\nabla H; \\ &H_t + \nabla\left(H\mathbf{u}\right) + 2\delta_e^2 H_0\nabla^3\mathbf{u} = 0, \qquad \delta_e = m_ec^2/\sqrt{2}eH_0. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $m = m_e + m_i$; $\mathbf{u} = (m_e\mathbf{v}_e + m_i\mathbf{v}_i)\,/m$ — “массовая скорость”; H — напряженность магнитного поля; c — скорость света; индексами e и i обозначены величины, относящиеся к электронам и ионам, соответственно.

Систему (13) можно записать с квадратичной степенью точности в виде (2) с оператором давления

$$\widehat{P} = \frac{H_0^2}{4\pi n_0 m}\nabla\left[1 + 2\delta_e^2\nabla^2\right]^{-1}.$$

С использованием выражений (8) и (9) дальнейший анализ нелинейных уединенных волн проводят аналогично исследованию ионно-звуковых волн в плазме без внешнего магнитного поля.

Волны на мелкой воде. В этом случае η — полная глубина жидкости, $\mathbf{u}$ — вектор скорости точек поверхности жидкости в горизонтальной плоскости, набла-оператор действует только в горизонтальной плоскости. Дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся в положительном направлении, имеет вид

$$\omega = \sqrt{\left(\gamma\mathbf{k}^2 + \rho g\right)|\mathbf{k}|\ \mathrm{tg}\left(|\mathbf{k}|\ h\right)/\rho}, \tag{14}$$

где γ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; h — глубина невозмущенной жидкости.

Фурье-образ $\widehat{\mathbf{C}}_{0*}$ вычисляют разложением уравнения (14) в ряд

$$\widehat{\mathbf{C}}_{0*} = \left[c_0 - \beta\mathbf{k}^2 + O\left(|\mathbf{k}|^3\right)\right]\mathbf{e_u};$$
$$c_0 = \sqrt{gh},\ \beta = \frac{c_0 h^2}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma}{\rho g h^2}\right). \tag{15}$$

Оператор $\widehat{\mathbf{C}}_0$ является псевдодифференциальным, а фурье-образ $\widehat{\mathbf{C}}_{0*}$ представляет собой бесконечный степенной ряд по $|\mathbf{k}|$. Однако в приближении Буссинеска дисперсионные слагаемые выше третьего порядка не рассматриваются.

Эволюционное уравнение (9) с учетом (15) обобщает уравнение КдФ

$$\mathbf{u}_t + \frac{3}{2}\left(\mathbf{u}\nabla\right)\mathbf{u} + c_0\mathbf{e_u}\nabla\mathbf{u} + \beta\mathbf{e_u}\nabla^3\mathbf{u} = 0.$$

В случае, когда на поверхности проводящей жидкости малой глубины индуцирован заряд [4], уравнение (9) становится нелокальным:

$$u_t + \left(\frac{3}{2}u + c_0\right)u_x + \beta u_{xxx} + \frac{\alpha}{\pi}VP\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u_{xx}\left(y,t\right)dy}{x-y} = 0;$$
$$\alpha = \frac{2\pi\sigma^2 c_0}{\rho g},\quad \beta = \frac{c_0}{6}\left(h^2 - \frac{3\gamma}{\rho g} + \frac{12\pi^2\sigma^4}{\rho^2 g^2}\right), \tag{16}$$

где введена поверхностная плотность индуцированного заряда σ.

Другие примеры. В случае среды со слабой диссипацией и дисперсией волн из линейного приближения следует дисперсионное соотношение

$$\omega = c_0 k - i\mu k^2 - \beta k^3.$$

Принимая его, находим уравнение для простой волны (в случае диссипативных сред такие волны называются квазипростыми, так как возмущение со временем исчезает вовсе)

$$\mathbf{u}_t + \left(\left(3/2\right)\mathbf{u}\nabla + \mathbf{e_u}\left(c_0\nabla - \mu\Delta + \beta\nabla^3\right)\right)\mathbf{u} = 0. \tag{17}$$

Для одномерных волн при $\beta = 0$ и после замены переменных уравнение (17) переходит в интегрируемое уравнение Бюргерса [1, 6]

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}.$$

Коэффициент затухания μ находят из соответствующей линейной задачи: например, для волн на поверхности неглубокой жидкости μ равно кинематической вязкости, а для звуковых волн μ определяется коэффициентами первой и второй вязкости, а также изобарной, изохорной теплоемкостями и теплопроводностью.

Уравнение Кортевега – де Фриза – Бюргерса (неинтегрируемое в общем случае) следует из (17) при $\beta \neq 0$ в одномерном случае:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \mu u_{xx}. \tag{18}$$

Как видим, для вывода уравнений не приходится вводить пробную малую функцию в квадратично-нелинейные уравнения, как это сделано в [1].

Для волн на поверхности раздела между двумя жидкостями конечной толщины дисперсионное уравнение имеет вид [2]

$$\omega = c_0 k - \alpha k \left| k \right|,$$

подстановка которого в (9) приводит к следующему нелинейному эволюционному уравнению:

$$u_t + \left(\frac{3}{2} u + c_0 \right) u_x + \frac{\alpha}{\pi} VP \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_{xx}\left(y,t\right) dy}{x-y} = 0. \tag{19}$$

Уравнение (19) — уравнение Бенджамина – Оно [2], а интегральное преобразование с множителем $1/\pi$ — преобразование Гильберта. Таким образом, из уравнений (16) и (19) (а также уравнения системы (12) с учетом затухания Ландау, которое для линейных волн $\sim |k|$[1]) можно сделать вывод о том, что нечетно продолженные слагаемые четных порядков в дисперсионных уравнениях порождают нелокальные слагаемые в дисперсионных уравнениях, выражающиеся через нелокальные сингулярные преобразования Гильберта.

Одним из традиционных способов вывода уравнений простых и квазипростых волн в нелинейной теории волн является введение "пробной" функции возмущения (возмущение раскладывают на основное и "пробное", много меньшее основного) с последующим разложением уравнений в ряд по "пробной" функции возмущения. Такой подход обладает, однако, рядом недостатков: неясность физического толкования компонент получаемых уравнений и громоздкость вычислений, а в случае нелокальных уравнений типа (16) и (19) метод "пробной" функции становится непригоден. В дополнение к этому: зачастую вызывает трудности вывод многомерных уравнений эволюции возмущений, в том числе цилиндрической и сферической симметрии.

Предложенный способ лишен перечисленных недостатков, однако применим лишь для систем, приводимых к форме уравнений типа (2). Последнее продемонстрировано на примерах, связанных с нелинейными ионно-звуковыми волнами в плазме, в том числе находящейся в сильном магнитном поле; для нелинейных возмущений поверхности неглубокой жидкости, в том числе с заряженной поверхностью.

Показано, как с помощью выведенных операторных уравнений по известным дисперсионным соотношениям строить эволюционные уравнения типа Бюргерса, Кортевега – де Фриза – Бюргерса, Бенджамина – Оно, Кортевега – де Фриза – Бенджамина – Оно, играющих роль базовых моделей в нелинейной теории волн.

Несмотря на применимость только в приближении Буссинеска, предложенный операторный способ вывода уравнений может оказаться перспективным как основной способ вывода эволюционных уравнений в других системах. Главная идея такого способа состоит в описании скорости волны через единый оператор скорости, объединяющий дисперсионные слагаемые различного порядка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-08-31104 мол_а, 12-08-33112 мол_а_вед).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. – М.: Наука, 1973. – 175 с.
2. Hydrodynamic model for electron-hole plasma in graphene / D. Svintsov, V. Vyurkov, S. Yurchenko, T. Otsuji, and V. Ryzhii // J. Appl. Phys. – 2012. – Vol. 111. – P. 083715; doi: 10.1063/1.4705382.
3. Boussinesq J. Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulairehorisontal, en communiquant au liquidecontenudansce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond // Journ. Math. PuresAppl. – 1872. – Vol. 17. (Series 2). – P. 55.
4. Алиев И. Н., Юрченко С. О. О нелинейных волнах, распространяющихся на поверхности идеальной проводящей жидкости в электрическом поле // Изв. РАН. МЖГ. – 2009. – № 5. – С. 139–150.
5. Korteweg D. J., G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. – 1895. – Vol. 39. – P. 442.
6. Horf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. – 1950. – Vol. 3. – P. 201.

Статья поступила в редакцию 05.07.2012