

А. К. Федоров, С. О. Юрченко

**ТОМОГРАФИЧЕСКИЙ РЯД ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ**

*С использованием представления для симплектической томограммы через интеграл Фейнмана по траекториям строится томографическая теория возмущений. Найдено представление для томограммы, которое аналогично борновскому разложению волновой функции. Предлагаемый метод позволяет искать решения для эволюционного уравнения Фоккера–Планка в виде ряда теории возмущений. Рассмотрено разложение томограммы, основанное на свойстве ее однородности.*

**E-mail:** st.yurchenko@bmstu.ru

**Ключевые слова:** квантовая томография, конденсированное состояние, теория возмущений, интеграл Фейнмана.

Квантовые технологии являются передовым направлением научных исследований. Особое внимание уделяется изучению высокопроизводительных вычислительных устройств (квантовые компьютеры, квантовые вычисления) и защищенных каналов связи (квантовая криптография) [1]. Это обуславливает повышенный практический интерес к проблеме измеримости состояний квантовых систем. В квантовой оптике была предложена квантовая томография — метод реконструкции состояния, основанный на многократных (ансамблевых) измерениях [2, 3].

В основе квантовой томографии [4–7] лежит идея использования неотрицательных функций распределения вероятности — томограмм. Томографическая формулировка квантовой механики полностью эквивалентна другим известным сегодня формулировкам квантовой механики, а сама томограмма напрямую связана с различными функциями квазираспределений, например, функцией Вигнера [8], Глаубера — Сударшана [9, 10], функцией Хусими [11].

Томографическое представление квантовой механики связано с использованием линейных канонических преобразований фазового пространства, которые можно представить как действие матрицы  $M$  симплектической группы  $Sp_2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \eta \\ \acute{\eta} & \acute{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $q, p$  и  $\varepsilon, \sigma$  — обобщенные координаты и импульсы;  $\mu, \acute{\mu}, \eta, \acute{\eta}$  — произвольные действительные постоянные,  $\det M = 1$ .

Преобразование (1) является каноническим, а потому сохраняет скобку Пуассона в классическом случае и коммутатор — в квантовом. Тогда в классическом случае уравнения Гамильтона выполнены

как для новых  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ , так и для старых переменных  $q$  и  $p$ . Уравнения Гамильтона следуют из принципа наименьшего действия:

$$\delta \int (pdq - H(q, p)dt) = \delta \int (\sigma d\varepsilon - \bar{H}(\varepsilon, \sigma)dt) = 0, \quad (2)$$

где  $\bar{H}(\varepsilon, \sigma)$  — гамильтониан системы после преобразования (1).

Поскольку  $\mathcal{M}$  — матрица группы  $\text{Sp}_2(\mathbb{R})$ , которая является полупростой группой Ли, допускается разложение Ивасава, и можно рассмотреть другие типы томограмм. Например, оптическую томограмму, которая получается в случае, если матрица  $\mathcal{M}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

где  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  — угол поворота.

В таком случае преобразование (1) является поворотом фазового пространства на угол  $\theta$ , а в общем случае преобразование (1) — это поворот фазового пространства с взаимным масштабированием по осям  $p$  и  $q$  фазового пространства.

Симплектическую томограмму  $\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta)$  наблюдаемой  $\varepsilon$ , которая является линейной комбинацией квадратурных компонент

$$\hat{\varepsilon} = \mu \hat{q} + \eta \hat{p},$$

определяют через волновую функцию следующим образом:

$$\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) = |\hat{\mathcal{F}}_{\mu, \eta}[\psi(q)](\varepsilon)|^2,$$

где  $\hat{\mathcal{F}}_{\mu, \eta}$  — линейный унитарный оператор. Таким оператором является интегральный оператор дробного преобразования Фурье

$$\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{2\pi|\eta|} \left| \int \psi(q) \exp \left[ \frac{i\mu}{2\eta} q^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta} q \right] dq \right|^2. \quad (3)$$

Здесь и далее используются осцилляторные единицы

$$m = \hbar = \omega = 1.$$

Исходя из определения (3), томограмма  $\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta)$  представляет собой положительную, нормированную и однородную с порядком  $-1$  функцию:

$$\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) \geq 0; \quad \int \mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) d\varepsilon = 1; \quad \mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) = |\lambda| \mathcal{T}(\lambda\varepsilon, \varepsilon\lambda\mu, \lambda\eta),$$

где  $\lambda$  — произвольная постоянная.

Свойство однородности позволяет записать для томограммы уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \varepsilon} \varepsilon + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mu} \mu + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta} \eta = -\mathcal{T}. \quad (4)$$

Общий вид решения уравнения (4):

$$\mathcal{T}_f(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{|\mu|} f\left(\frac{\varepsilon}{\mu}, \frac{\eta}{\mu}\right),$$

где  $f$  — произвольная функция.

Решение уравнения Эйлера для томограмм позволяет уменьшить ее размерность. Несмотря на то что томограмма является функцией трех переменных, благодаря нормировке ее можно представить через функцию двух переменных. Подобные функции называются томограммами Френеля.

Для симплектических томограмм, оптических и томограмм Френеля было предложено представление с помощью интеграла по траекториям в фазовом пространстве [5]:

$$\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{2\pi|\eta|} \left| \int \mathcal{D}[q(t)] \exp\left[is + \frac{i\mu}{2\eta}q_2^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta}q_2\right] \psi(q_1) dq_1 dq_2 \right|^2, \quad (5)$$

где  $S$  — функционал действия. Формулу (5) можно еще записать в виде

$$\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{2\pi|\eta|} \left| \int G(q_2, q_1, t_2 - t_1) \exp\left[\frac{i\mu}{2\eta}q_2^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta}q_2\right] \psi(q_1) dq_1 dq_2 \right|^2,$$

где  $G(q_2, q_1, t_2 - t_1)$  — функция Грина уравнения Шредингера

$$-\frac{1}{2}\Delta\psi(q, t) + V(q)\psi(q, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(q, t)$$

с начальным условием  $\psi(q_1)$ ; используется интегральная мера Лебега

$$\mathcal{D}[x(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N \left(-\frac{2\pi i}{\Delta t_j}\right)^{3/2} d^3 x_j.$$

Ввиду сложности эволюционные уравнения для вектора состояния системы невозможно решить аналитически. Поэтому особенную актуальность приобретает задача разработки приближенных методов (теории возмущений) поиска томограмм. Такой аппарат может быть развит на основе формулы (5).

**Ряд теории возмущений.** Пусть волновая функция подчиняется уравнению Шредингера. Рассмотрим томографический “пропагатор” (далее для краткости — томогратор) вида

$$\mathcal{P} = \int G(q_2, q_1, t_2 - t_1) \exp\left[\frac{i\mu}{2\eta}q_2^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta}q_2\right] dq_2. \quad (6)$$

Предположим, что потенциал, содержащийся в функции Грина, достаточно мал. Более строго, пусть интеграл по времени от потенциала вдоль траектории мал по сравнению с единицей (используем осцилляторные единицы; обычно его считают малым по сравнению с  $\hbar$ ). Тогда

часть экспоненциального члена, содержащая потенциал, может быть разложена в ряд, определенный для некоторой траектории. Справедливо разложение для функции Грина [13]

$$G(q_2, q_1) = G^{(0)}(q_2, q_1) + G^{(1)}(q_2, q_1) + G^{(2)}(q_2, q_1) \dots,$$

слагаемые в котором определяют следующим образом:

$$G^{(0)}(q_2, q_1) = \int_{q_1}^{q_2} \exp \left[ i \int_{t_1}^{t_2} \frac{p^2}{2} dt \right] \mathcal{D}[q(t)];$$

$$G^{(1)}(q_2, q_1) = -i \int_{q_1}^{q_2} \exp \left[ i \int_{t_1}^{t_2} \frac{p^2}{2} dt \right] \int_{t_1}^{t_2} V[x(s), s] \mathcal{D}[q(t)];$$

$$G^{(2)}(q_2, q_1) = -i \int_{q_1}^{q_2} \exp \left[ i \int_{t_1}^{t_2} \frac{p^2}{2} dt \right] \int_{t_1}^{t_2} V[q(s), s] ds \times \\ \times \int_{t_1}^{t_2} V[q(s'), s'] ds' \mathcal{D}[q(t)].$$

Аналогичные соотношения, в силу свойства аддитивности интеграла (6), можно записать и для томографа:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{(0)} + \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)} \dots, \quad (7)$$

где элементы разложения определяются с помощью соотношения

$$\mathcal{P} = \int (G^{(0)}(q_2, q_1) + G^{(1)}(q_2, q_1) + G^{(2)}(q_2, q_1)) \exp \left[ \frac{i\mu}{2\eta} q_2^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta} q_2 \right] dq_2.$$

Используя соотношение (7), можно получить разложение для томограммы, аналогичное классическому борновскому разложению волновой функции,

$$\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{2\pi|\eta|} \left| \int (\mathcal{P}^{(0)} + \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)} \dots) \psi(q_1) dq_1 \right|^2.$$

Отметим, что существует другой метод разложения для томограммы  $\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta)$ , основанный на ее однородности. Можно записать уравнение (4) для томограммы  $\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta)$ , заданной в виде интеграла по траекториям:

$$\frac{1}{2\pi|\eta|} \left| \int \mathcal{D}[q(t)] \exp \left[ iS + \frac{i\mu}{2\eta} q_2^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta} q_2 \right] \psi(q_1) dq_1 dq_2 \right|^2 =$$

$$= - \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \frac{1}{2\pi|\eta|} \times \\ \times \left| \int \mathcal{D}[q(t)] \exp \left[ iS + \frac{i\mu}{2\eta} q_2^2 - \frac{i\varepsilon}{\eta} q_2 \right] \psi(q_1) dq_1 dq_2 \right|^2. \quad (8)$$

**Представление решения уравнения Фоккера – Планка.** Рассмотрим классификацию эволюционных уравнений для томограмм. Эволюционное уравнение для симплектической томограммы  $\mathcal{T}(\varepsilon, \mu, \eta)$  с гамильтонианом

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2} + V(\widehat{q})$$

имеет вид обобщенного уравнения Фоккера – Планка [4]:

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta} + i \left[ -V \left( I_\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{i\eta}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) - V \left( -I_\varepsilon \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{i\eta}{2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \right] \mathcal{T}, \quad (9)$$

где  $I_\varepsilon$  – оператор интегрирования по переменной  $\varepsilon$ .

Из уравнения (9) для свободной частицы получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} - \mu \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta} = 0; \quad (10)$$

для гармонического осциллятора

$$V(\widehat{q}) = \frac{\widehat{q}^2}{2}; \quad \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} - \mu \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mu} = 0; \quad (11)$$

для параметрического осциллятора с переменной частотой  $\omega(t)$

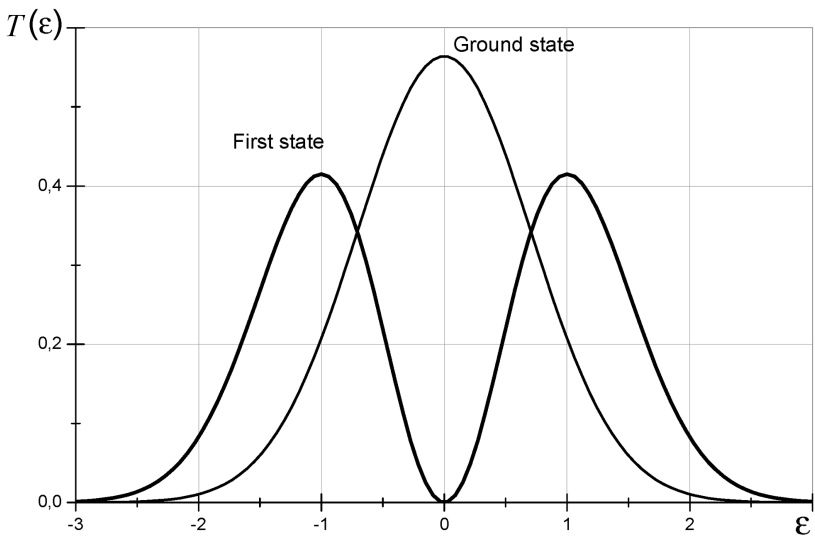
$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} - \mu \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta} + \omega^2(t) \eta \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mu} = 0. \quad (12)$$

Как уже было отмечено выше, томограмма представляет собой решение уравнения Фоккера – Планка. Поэтому с помощью формулы (5) можно искать решение уравнения Фоккера – Планка с учетом связи между томограммой и волновой функцией. Задачи о представлении решения для данного уравнения рассматривали ранее, поскольку существует его тесная связь с формулировкой Фейнмана интегралов по траекториям и представлением решения уравнения Шредингера [14].

Вычислив томогратор уравнения (11), можно получить волновые функции осциллятора. В общем случае решение имеет вид

$$\mathcal{T}_n(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{2^{-n}}{n! \sqrt{\pi(\mu^2 + \eta^2)}} \exp \left[ -\frac{\varepsilon^2}{\mu^2 + \eta^2} \right] H_n^2 \left[ \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} \right], \quad (13)$$

где  $H_n(x)$  – полиномы Эрмита.



**Томограмма основного ( $n = 0$ ) и первого возбужденного состояний ( $n = 1$ ) гармонического осциллятора**

Например, томограмма  $\mathcal{T}_0$  основного состояния осциллятора

$$\mathcal{T}_0(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2 + \eta^2)}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{\mu^2 + \eta^2}\right]. \quad (14)$$

Томограмма  $\mathcal{T}_1$  первого возбужденного состояния может быть легко вычислена:

$$\mathcal{T}_1(\varepsilon, \mu, \eta) = \frac{2\varepsilon^2}{(\mu^2 + \eta^2)\sqrt{\pi(\mu^2 + \eta^2)}} \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{\mu^2 + \eta^2}\right]. \quad (15)$$

Отметим, что в случае соотношения параметров системы отсчета  $\mu = 1$  и  $\eta = 0$  томограммы состояния вырождаются в обычные плотности вероятности в координатном представлении (рисунок).

В работе представлен ряд теории возмущений для томограмм, основанный на представлении симплектической томограммы с помощью интеграла Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве. Поскольку квантовая динамика в томографическом представлении подчиняется уравнению Фоккера–Планка, становится возможным использовать для его решения ряд теории возмущений. Рассмотренное разложение для томограммы аналогично борновскому разложению для волновой функции.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 11-02-00858, 12-08-31104 мол\_a, 12-08-33112 мол\_a\_вед).*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D o w l i n g J. P., M i l b u r n G. J. Quantum technology: The second quantum revolution // ARXIV:QUANT-PH/0206091v1. – 2002.
2. B e c k M., S m i t h e y D. T., R a y m e r M. G. Experimental determination of quantum-phase distributions using optical homodyne tomography // Phys. Rev. A. – 1993. – Vol. 48. – P. 890–893.
3. M e a s u r e m e n t of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum / D.T. Smithey, M. Beck, M.G. Raymer, A. Faridani // Phys. Rev. Lett. – 1993. – Vol. 70. – P. 1244–1247.
4. A n introduction to the tomographic picture of quantum mechanics / A. Ibert, V.I. Man'ko, G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia // ARXIV:0904.4439v1 [QUANT-PH]. – 2009.
5. Ф е д о р о в А. К., Ю р ч е н к о С. О. Симплектические томограммы в представлении фейнмановских интегралов по траекториям // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2012. – Сер. 45. – № 2. – С. 29–37.
6. A r k h i r o v A. S., L o z o v i k Y u. E. New method of quantum dynamics simulation based on the quantum tomography // Phys. Lett. A. – 2003. – Vol. 319. – P. 217–224.
7. Ф е д о р о в А. К. Томограммы конденсата Бозе–Эйнштейна и уравнение Гросса–Питаевского // Студ. науч. вест. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2012. – Сер. XII-IV. – С. 168–173.
8. W i g n e r E.P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // Phys. Rev. – 1932. – Vol. 40. – P. 749–759.
9. G l a u b e r R.J. Photon correlation // Phys. Rev. Lett. – 1963. – Vol. 10. – P. 84–86.
10. S u d a r s h a n E.C.G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams // Phys. Rev. Lett. – 1963. – Vol. 10. – P. 227–279.
11. H u s i m i E. Some formal properties of the density matrix // Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. – 1940. – Vol. 23. – P. 264–314.
12. P o l l o c k E.L., C e p e r l e y D.M. Path-integral computation of superfluid densities // Phys. Rev. B. – 1987. – Vol. 36. – P. 8343–8352.
13. F e y n m a n R.P., H i b b s A.R. Quantum mechanics and path integrals // N.Y.: McGraw-Hill, 1965. – P. 365.
14. F e y n m a n formulas and path integrals for some evolution semigroups related to  $\tau$ -quantization / B. Bottcher, Ya.A. Butko, R.L. Schilling, O.G. Smolyanov // Rus. J. Math. Phys. – 2011. – Vol. 18. – No. 4. – P. 387–399.

Статья поступила в редакцию 05.07.2012