УДК 517.947.44 DOI: 10.18698/2308-6033-2020-7-1995

Об одном методе определения параметрической чувствительности фазовых координат динамических систем

© О.Н. Тушев, А.В. Беляев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Предложен рациональный метод определения функций чувствительности первого и второго порядков фазовых координат к изменению параметров системы и внешнего воздействия. При этом интегрировать громоздкие цепочносвязанные системы дифференциальных уравнений относительно функций чувствительности различного порядка не требуется. Введен вектор дополнительных переменных (инвариантов) такой же размерности, как вектор фазовых координат. Для его нахождения получено сопряженное линейное неоднородное дифференциальное уравнение, которое необходимо интегрировать в обратном времени. Через этот вектор независимо друг от друга можно в интегральной форме вычислить любые функции чувствительности. При выводе и решении сопряженного уравнения не использованы допущения, понижающие точность результата или ограничивающие возможности метода. Линейность уравнения относительно инвариантов допустила перейти к более удобной форме решения, позволяющей с помощью рекуррентного соотношения вычислить необходимые функции чувствительности последовательно во времени, начиная с начальной точки. Для этого решение уравнения выражено через фундаментальную матрицу, которая в вычислительном отношении трактуется как мультипликативный интеграл.

Ключевые слова: *динамическая система, фазовые координаты, функции чувствительности, фундаментальная матрица, мультипликативный интеграл*

Введение. Стадии проектирования любой конструкции непосредственно связаны с параметрическим анализом, важнейшим инструментом которого является теория чувствительности с развитым и сложившимся аппаратом. Обзорный материал по отдельному направлению теории чувствительности представлен в [1]. Задачи анализа и параметрического синтеза, связанные с динамикой и прочностью конструкций, не являются исключением [2]. Систематическое и достаточно полное изложение постановок и решений разнообразных задач представлены в [3, 4]. При этом современные методы расчета ориентированы, как правило, на сложные многомерные конечноэлементные модели конструкций [5, 6]. Вектор параметров, влияние случайных или детерминированных вариаций которого необходимо исследовать, также может иметь высокую размерность, например, содержать десятки или даже сотни элементов [7, 8].

В задачах динамики конструкций при необходимости исследования поведения во времени параметров наиболее сложной и трудоемкой задачей становится вычисление функций чувствительности фазовых координат. Через них выражают чаще всего аналитически функции чувствительности других характеристик системы [9]. Для определения функций чувствительности фазовых координат формируют цепочносвязанные системы дифференциальных уравнений путем последовательного дифференцирования по параметрам исходных уравнений движения, записанных в нормальной форме Коши.

Этот подход для сложных систем общепринятый, имеет весьма неудобную и громоздкую машинную реализацию, если требуется вычислить функции чувствительности второго порядка. Кроме этого, для инженерных приложений он практически всегда оказывается излишне информативным, поскольку обычно необходимо определить чувствительность только некоторых фазовых координат и не по всем параметрам [10].

Цель настоящей статьи — предложить рациональный метод определения функций чувствительности первого и второго порядков фазовых координат к изменению параметров системы и внешнего воздействия.

Постановка задачи и метод решения. Допустим, что движение системы описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{Y} = \mathbf{F}\left(\mathbf{Y}, \mathbf{A}, t\right); \ \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0, \tag{1}$$

где $\mathbf{F}\left(\mathbf{Y}, \mathbf{A}, t\right) = \left(f_1\left[\mathbf{Y}, \mathbf{A}, t\right], \ ..., f_n\left[\mathbf{Y}, \mathbf{A}, t\right]\right)^T$ — нелинейная вектор-функция, непрерывная по своим аргументам; $\mathbf{Y} = \left(y_1, y_2, \ ..., y_n\right)^T$ — вектор фазовых координат; $\mathbf{A} = \left(a_1, a_2, \ ..., a_m\right)^T$ — вектор параметров; $\mathbf{Y}_0$ — начальный вектор.

Скалярная интегральная форма уравнения (1) имеет вид

$$y_k = \int_{t_0}^{t} f_k\left(\mathbf{Y}, \mathbf{A}, \tau\right) d\tau + y_k\left(t_0\right); \ k = 1, 2, \ \ldots, \ n. \tag{2}$$

Таким образом, необходимо определить функции чувствительности фазовых координат:

$$\frac{\partial y_k}{\partial a_i}; \ \frac{\partial^2 y_k}{\partial a_i \partial a_j}; \ i, j = 1, 2, \ ..., \ m.$$

Введем в рассмотрение некоторую скалярную переменную $z(t)$, под которой будем понимать любую фазовую координату из (2):

$$z\left(t\right) = \int_{t_0}^{t} h\left(\mathbf{Y}, \mathbf{A}, \tau\right) d\tau + z(t_0), \tag{3}$$

где $h\left(\mathbf{Y}, \mathbf{A}, \tau\right) d\tau$ — явная функция своих аргументов аналогично y_k.

В дальнейшем используем обозначения Эйнштейна для сумм. Если буквальный индекс появляется дважды в одном и том же произведении, то следует понимать, что осуществляется суммирование по этому индексу. Например, выражение $c_{ij}a_j$ означает $\sum_j c_{ij}a_j$.

Дифференцируя (3) по a_j, получаем

$$\frac{\partial Z}{\partial a_j} = J_1 + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial h}{\partial a_j} d\tau; \tag{4}$$

$$J_1 = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial h}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial a_j}. \tag{5}$$

Все производные в (4) и (5) находим аналитически, за исключением $\frac{\partial y_s}{\partial a_j}$. Прямое определение этих производных связано с указанными выше особенностями. Согласно [11], введем в рассмотрение новые переменные $\lambda_k, k = 1, 2, \ldots, n$ и запишем (5) в таком виде, где производные также выражают аналитически:

$$J_1 = \int_{t_0}^{t} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial a_j}. \tag{6}$$

Продифференцируем строку с номером k в уравнении (1):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y_k}{\partial a_j}\right) = \frac{\partial f_k}{\partial a_j} + \frac{\partial f_k}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial a_j}. \tag{7}$$

Подставим выражение для $\frac{\partial f_k}{\partial a_j}$ из соотношения (7) в (6):

$$J_1 = \int_{t_0}^{t} \lambda_k \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial y_k}{\partial a_j}\right) d\tau - \int_{t_0}^{t} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial a_j} d\tau. \tag{8}$$

Возьмем первый интеграл в (8) по частям:

$$V_k = \lambda_k; \; dV_k = \frac{d\lambda_k}{d\tau} d\tau;$$

$$dU = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial y_k}{\partial a_j}\right) d\tau; \; U = \frac{\partial y_k}{\partial a_j}.$$

Во втором интеграле поменяем местами индексы k и s, тогда после преобразования

$$J_1 = \left(\lambda_k \frac{\partial y_k}{\partial a_j} \right)_0^t - \int_{t_0}^{t} \left(\frac{d\lambda_k}{d\tau} + \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k} \right) \frac{\partial y_k}{\partial a_j} d\tau. \qquad (9)$$

Для того чтобы правые части соотношений (5) и (9) были идентичны, необходимо выполнение следующих условий:

$$\left(\lambda_k \frac{\partial y_k}{\partial a_j} \right)_{t_0}^t = 0; \qquad (10)$$

$$\frac{d\lambda_k}{dt} + \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k} = -\frac{\partial h}{\partial y_k}, \; k = 1, 2, ..., n. \qquad (11)$$

Тогда при независимости начальных условий от параметров системы

$$\frac{\partial y_k}{\partial a_j}(t_0) = 0.$$

Для выполнения условия $\lambda_k \frac{\partial y_k}{\partial a_j}(t) = 0$ необходимо

$$\lambda_k(t) = 0. \qquad (12)$$

Равенство (12) следует рассматривать как начальное условие при интегрировании системы линейных дифференциальных уравнений (11) относительно λ_k в обратном времени от t до t_0. После их вычисления, используя формулы (6) и (4), достаточно легко определить любую функцию чувствительности $\frac{\partial Z}{\partial a_j}$ независимо от других параметров. В результате (nm) уравнений чувствительности первого порядка можно заменить n сопряженными уравнениями (11).

Теперь определим функции чувствительности второго порядка. Для этого продифференцируем выражение (4) по параметру a_i:

$$\frac{\lambda^2 z}{\partial a_j \partial a_i} = \int_{t_0}^{t} \left(\left[\frac{\partial^2 h}{\partial y_s \partial y_c} \frac{\partial y_c}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 h}{\partial y_s \partial a_i} \right] \frac{\partial y_s}{\partial a_j} + \frac{\partial^2 h}{\partial a_j \partial y_c} \frac{\partial y_c}{\partial a_i} + \frac{\partial^2 h}{\partial a_j \partial a_j} \right) d\tau + J_2; \qquad (13)$$

$$J_2 = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial h}{\partial y_s} \frac{\partial^2 y_s}{\partial a_i \partial a_j} d\tau. \qquad (14)$$

Трудность нахождения функций чувствительности второго порядка состоит в том, что в (13), (14) присутствуют вторые производные от фазовых координат по элементам вектора A.

Продифференцируем соотношение (7) по a_i:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 y_k}{\partial a_i \partial a_j}\right)=\frac{\partial^2 f_k}{\partial a_j \partial y_c}\frac{\partial y_c}{\partial a_i}+\frac{\partial^2 f_k}{\partial a_i \partial a_j}+ \\ +\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_s \partial y_c}\frac{\partial y_c}{\partial a_i}+\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_s \partial a_i}\right)\frac{\partial y_s}{\partial a_j}+\frac{\partial f_k}{\partial y_s}\frac{\partial^2 y_s}{\partial a_i \partial a_j}. \tag{15}$$

После перегруппировки членов в (15) получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 y_k}{\partial a_i \partial a_j}\right)-\frac{\partial f_k}{\partial y_s}\frac{\partial^2 y_s}{\partial a_i \partial a_j}=\varphi_k(t); \tag{16}$$

$$\varphi_k(t)=\frac{\partial^2 f_k}{\partial a_j \partial y_c}\frac{\partial y_c}{\partial a_i}+\frac{\partial^2 f_k}{\partial a_j \partial a_i}+\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_s \partial y_c}\frac{\partial y_c}{\partial a_i}+\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_s \partial a_i}\right)\frac{\partial y_s}{\partial a_j}. \tag{17}$$

Запишем для J_2, как при определении функций чувствительности первого порядка, следующее соотношение:

$$J_2=\int_{t_0}^{t}\lambda_k \varphi_k(\tau)\,d\tau. \tag{18}$$

Как следует из (17), все элементы $\varphi_k(t)$ либо являются функциями чувствительности первого порядка, либо выражаются аналитически. Подставляя выражение для $\varphi_k(t)$ из (16) в (18), получаем

$$J_2=\int_{t_0}^{t}\lambda_k \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial^2 y_k}{\partial a_i \partial a_j}\right)d\tau-\int_{t_0}^{t}\lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_s}\frac{\partial^2 y_s}{\partial a_i \partial a_j}d\tau. \tag{19}$$

Как и для функций чувствительности первого порядка, в (19) возьмем первый интеграл по частям, а во втором поменяем местами индексы. После преобразований

$$J_2=\lambda_k \frac{\partial^2 y_k}{\partial a_i \partial a_j}\bigg|_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}\left(\frac{d\lambda_k}{d\tau}+\lambda_s \frac{\partial f_k}{\partial y_k}\right)\frac{\partial^2 y_s}{\partial a_i \partial a_j}d\tau. \tag{20}$$

Согласно требованию идентичности правых частей выражений (14) и (20),

$$\lambda_k \left.\frac{\partial^2 y_k}{\partial a_i \partial a_j}\right|_{t_0}^{t} = 0; \tag{21}$$

$$\frac{d\lambda_k}{dt} + \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k} = -\frac{\partial h}{\partial y_k},\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{22}$$

Аналогично условию (10) соотношение (21) преобразуют в начальное условие $\lambda_k(t) = 0, \forall k$ при интегрировании системы уравнений (22) в обратном времени.

Таким образом, $0{,}5m(m+1)n$ уравнений для функций чувствительности второго порядка заменяют на n сопряженных уравнений (22). Видно, что системы уравнений (11), (22) и их начальные условия полностью идентичны. Следовательно, для функций чувствительности любого порядка существует вектор инвариантов с компонентами $\lambda_k, \forall k$, через который они независимо друг от друга могут выражаться.

Вывод рекуррентной формулы. В реальных задачах чаще всего требуется вычисление функций чувствительности во времени, начиная с точки t_0. Согласно полученным результатам, численная реализация нахождения функций чувствительности требует многократного вычисления $\lambda_k, \forall k$ путем интегрирования в обратном времени системы уравнений (22) с текущими начальными условиями (12) в моменты времени $t, t + \Delta t$, где Δt — шаг по времени. Линейность системы уравнений (22) позволяет связать в единый алгоритм эти противоречивые условия.

В соответствии с (6) и (18) требуется вычислить интегралы типа

$$J(t) = \int_{t_0}^{t} q_i(\tau)\lambda_i(\tau)\, d\tau, \tag{23}$$

где J — J_1 или J_2; $q_i(\tau)$ — сомножители $\lambda_i(\tau)$ в соотношениях (6) или (18).

Запишем систему неоднородных уравнений (22) в векторной форме. При этом приведем ее формально к однородному виду расширением фазового пространства на единицу, добавив тривиальное уравнение:

$$\frac{d\lambda_{n+1}}{dt} = 0;\ \lambda_{n+1}(t) = 1. \tag{24}$$

Объединив в одну систему выражения (22) и (24), получим

$$\dot{\Lambda} = R\Lambda;\ \Lambda(t) = \Lambda_t, \tag{25}$$

где $\Lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}\right)^T$; $\mathbf{\Lambda}_t = \left(0,0,\ldots,0,1\right)^T$ — векторы начальных условий в точке t. Матрицу R определяют следующим образом:

$$R = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_2} & \dfrac{\partial h}{\partial y_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} & \dfrac{\partial h}{\partial y_n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем (23) в другом виде:

$$J\left(t\right) = \int_{t_0}^{t} Q\left(\tau\right)\Lambda\left(\tau\right) d\tau, \tag{26}$$

где $Q\left(\tau\right) = \left(q_1\left(\tau\right), q_2\left(\tau\right), \ldots, q_n\left(\tau\right), 0\right)$ — вектор-строка.

Решение уравнения (25) представим следующим образом:

$$\Lambda(t) = \Omega_\tau^t\left(R\right)\Lambda\left(\tau\right),$$

где $\Omega_\tau^t(R)$ — фундаментальная матрица, вычисленная на отрезке $\left[\tau, t\right]$. Следовательно, $\mathbf{\Lambda}_t = \Omega_\tau^t\left(R\right)\mathbf{\Lambda}\left(\tau\right)$ можно представить в виде

$$\mathbf{\Lambda}\left(\tau\right) = \left[\Omega_\tau^t\left(R\right)\right]^{-1}\mathbf{\Lambda}_t. \tag{27}$$

Подставив (27) в (26), получим

$$J\left(t\right) = N\left(t\right)\mathbf{\Lambda}_t;$$

$$N\left(t\right) = \int_{t_0}^{t} Q\left(\tau\right)\left[\Omega_\tau^t\left(R\right)\right]^{-1} d\tau.$$

Для получения текущих значений $J\left(t\right)$ от точки t_0 построим рекуррентную формулу связи $J\left(t+\Delta t\right)$ и $J\left(t\right)$, где Δt — шаг по времени:

$$J\left(t+\Delta t\right) = N\left(t+\Delta t\right)\mathbf{\Lambda}_t.$$

Используя свойства обратной фундаментальной матрицы, запишем

$$\left[\Omega_\tau^{t+\Delta t}(R)\right]^{-1} = \left[\Omega_\tau^{t}(R)\right]^{-1}\left[\Omega_t^{t+\Delta t}(R)\right]^{-1}; \qquad (28)$$

$$N(t+\Delta t) = \left(\int_{t_0}^{t} Q(\tau)\left[\Omega_\tau^{t}(R)\right]^{-1} d\tau + \int_{t}^{t+\Delta t} Q(\tau)\left[\Omega_\tau^{t}(R)\right]^{-1} d\tau\right)\times$$

$$\times\left[\Omega_t^{t+\Delta t}(R)\right]^{-1}.$$

Тогда с учетом малости Δt

$$N(t+\Delta t) = \big(N(t)+Q(t)\Delta t\big)\left[\Omega_t^{t+\Delta t}(R)\right]^{-1}. \qquad (29)$$

Обратную фундаментальную матрицу можно представить в виде интегро-степенного ряда, который абсолютно и равномерно сходится, если на интервале интегрирования элементы матрицы $R(t)$ ограничены и имеют счетное множество разрывов [12]:

$$\left[\Omega_{t_0}^{t}(R)\right]^{-1} = E - \int_{t_0}^{t} R(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_2} R(\tau_1)R(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau^2 - \ldots \qquad (30)$$

На малом отрезке интегрирования $\tau\in[t, t+\Delta t]$ можно использовать $R(\tau)=R(t)=\text{const}$. Если в (31) ограничиться линейным приближением, то

$$\Omega_t^{t+\Delta t}(R) = E - R(t)\Delta t. \qquad (31)$$

Подставив (31) в (29) и сохранив только линейные члены, получим

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \big(Q(t) - N(t)R(t)\big)\Delta t.$$

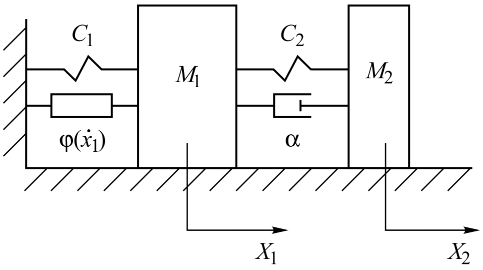
Соотношение (28) с учетом (31) представляет собой рекуррентную формулу вычисления обратной фундаментальной матрицы путем перемножений на подынтервалах, т. е. ее можно трактовать как мультипликативный интеграл [12].

Пример. Ниже рассмотрена нелинейная система с двумя степенями свободы (рис. 1).

Нелинейная характеристика демпфера задана функцией $\varphi(\dot{x}_1) = b\dot{x}_1^3$, где b — коэффициент характеристики демпфера. Для вычислений выбраны следующие значения параметров:

C_1 = 1000 Н/м;	M_1 = 10 кг;	b = 1,5 Н·с^3 /м^3;
C_2 = 1500 Н/м;	M_2= 5 кг;	α = 10 Н·с /м.

Рис. 1. Динамическая модель системы: C_1, C_2 — жесткость пружин 1 и 2 соответственно; M_1, M_2 — масса тел 1 и 2 соответственно; $\varphi\left(\dot{x}_1\right)$ — нелинейная функция демпфера; α — коэффициент демпфирования; X_1, X_2 — положительные направления движения тел



Начальные условия для перемещений тел и скорости первого тела заданы нулевыми, начальная скорость второго тела u_2 = 10 мм/с. График изменения фазовых координат системы в зависимости от времени (0…1,9 с) представлен на рис. 2.

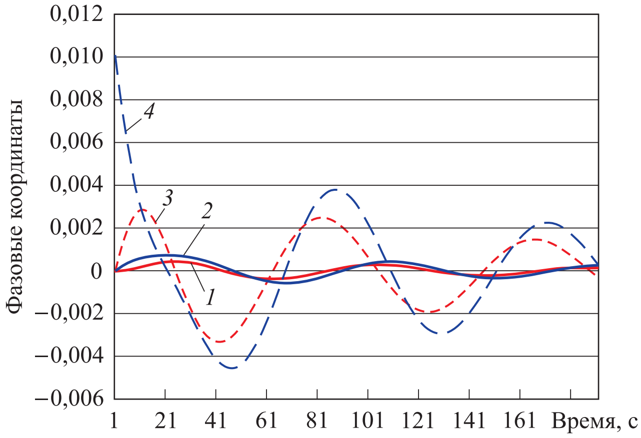
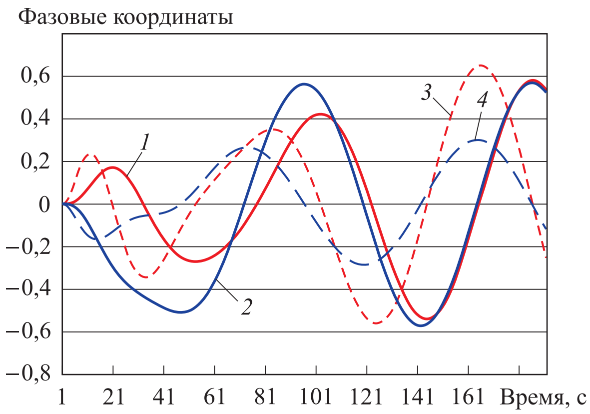


Рис. 2. Изменение перемещений (*1*, *2*) и скоростей (*3*, *4*) тел 1 и 2 соответственно в зависимости от времени (u_2 = 10 мм/с)

Функции чувствительности первого порядка фазовых координат по жесткостям упругих связей C_1 и C_2 вычисляли предлагаемым и традиционным методами. Результаты практически совпали, некоторое расхождение объясняется разницей вычислительных процедур. Функции чувствительности перемещения и скорости тел 1 и 2 к вариации жесткости упругой связи C_1 в зависимости от времени (0…1,9 с) показаны на рис. 3, *а*; на рис. 3, *б* — функции чувствительности перемещения и скорости тел 1 и 2 соответственно к вариации жесткости упругой связи C_2 в зависимости от заданного интервала времени.

Нормирование значений функций проводилось по максимальным значениям соответствующих фазовых координат в зависимости от времени.

а



б

Рис. 3. Чувствительность фазовых координат в зависимости от времени:
а — вариации жесткости C_1; *б* — вариации жесткости C_2; *1*, *2* — перемещение тел 1 и 2 соответственно; *3*, *4* — скорость тел 1 и 2 соответственно

Заключение. Для вывода результирующих соотношений предлагаемого метода не требуется дополнительных допущений. Поэтому возможные неточности результатов при рассмотрении систем любой сложности являются следствием только качества вычислительной реализации. Получены рекуррентные соотношения, позволяющие упростить вычисление функций чувствительности последовательно во времени, начиная с начальной точки.

Работа поддержана грантом РФФИ №20-08-01076а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Вклад ленинградских ученых в развитие теории чувствительности систем управления. *Труды СПИИРАН*, 2013, № 2 (25), с. 13–41.

[2] Бушуев А.Ю., Яковлев Д.О. О подходе к оптимизации упругих конструкций по частотным характеристикам. *Вестник Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2011, № S3, с. 66–69.

[3] Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. *Чувствительность систем управления.* Москва, Наука, 1981, 464 с.

[4] Хог Э., Чой К., Комков В. *Анализ чувствительности при проектировании конструкций*. Москва, Мир, 1988, 428 с.

[5] Хуан Ш., Костин В.А., Лаптева Е.Ю. Применение метода анализа чувствительности для решения обратной задачи ползучести кессона конструкции на основе модели суперэлементов. *Вестник Московского авиационного института*, 2018, т. 25, № 3, с. 64–72.

[6] Тушев О.Н., Березовский А.В. Чувствительность собственных значений и векторов к вариациям параметров конечно-элементных моделей конструкции. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2007, № 1, с. 35–44.

[7] Хейлен В., Ламменс С., Сас П. *Модальный анализ: теория и испытания*. Москва, Новатест, 2010, 319 с.

[8] Бацева О.Д., Дмитриев С.Н. Учет высших тонов колебаний при вычислении чувствительности собственных форм колебаний к вариациям параметров механической системы. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2018, вып. 7. DOI: 10.18698/2308-6033-2018-7-1785

[9] Тушев О.Н., Березовский А.В. Определение спектральных плотностей динамических характеристик нелинейной модели конструкции. *Известия РАН. Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2013, № 1, с. 18–27.

[10] Иванов В.Н., Домбровский И.В., Шевелев Н.А. Численная идентификация параметров динамического поведения элементов машиностроительных конструкций. *Вычислительная механика сплошных сред*, 2011, т. 4, № 3, с. 58–67.

[11] Спиди К., Браун Р., Гудвин Дж. *Теория управления*. Москва, Мир, 1973, 248 с.

[12] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* Москва, Физматлит, 2010, 558 с.

Статья поступила в редакцию 27.05.2020

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:

Тушев О.Н., Беляев А.В. Об одном методе определения параметрической чувствительности фазовых координат динамических систем. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 7. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-7-1995

Тушев Олег Николаевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: kafsm2@bmstu.ru

Беляев Александр Владимирович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: beliaev@bmstu.ru

A method for determining the parametric sensitivity of the dynamical systems phase coordinates

© O.N. Tushev, A.V. Belyaev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article presents a rational method for determining sensitivity functions of the first and second orders of phase coordinates to changes in system parameters and external effects. With this approach it is not necessary to integrate intricate chain- coupled differential equations with respect to sensitivity functions of various orders. A vector of additional variables (invariants) of the same dimension is introduced as the vector of phase coordinates. To find it, a conjugate linear inhomogeneous differential equation is obtained, which must be integrated in the inverse time. The sensitivity functions of any order can be calculated independently from each other using this vector. No assumptions reducing the accuracy of the result or restricting the capabilities of the method are made. The linearity of the equation with respect to invariants allows solving the problem in the more convenient form. Using the recurrence relation, the sensitivity functions are calculated sequentially in time from the initial point. The solution of the equation is expressed through a fundamental matrix which is computationally treated as a multiplicative integral. The results are illustrated by the example.

Keywords: *dynamic system, phase coordinates, sensitivity functions, fundamental matrix, multiplicative integral*

This article is supported by the RFBR grant No. 20-08-01076a.

REFERENCES

[1] Rozenwasser E.N., Yusupov R.M. *Trudy SPIIRAN — SPIIRAS Proceedings*, 2013, no. 2 (25), pp. 13–41.

[2] Bushuev A.Yu., Yakovlev D.O. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seria Estestvennye nauki — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Natural Sciences*, 2011, no. S3, pp. 66–69.

[3] Rozenwasser E.N., Yusupov R.M. *Chuvstvitelnost sistem upravleniya* [Sensitivity of control systems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 464 p.

[4] Hog E., Choi K., Komkov V. *Analiz chuvstvitelnosti pri proyektirovanii konstruktsiy* [Analysis of sensitivity in the designing structures]. Moscow, Mir Publ., 1988, 428 p.

[5] Khuan Sh., Kostin V.A., Lapteva E.Yu. *Vestnik Moskovskogo aviacionnogo institute — Aerospace MAI Journal*, 2018, vol. 25, no. 3, pp. 64–72.

[6] Tushev O.N., Berezovsky A.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroyeniye — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Mechanical Engineering*, 2007, no. 1, pp. 35–44.

[7] Heylen W., Lammens S., Sas P. *Modal Analysis Theory and Testing*. Katholieke Universiteit Publ., 1997 [In Russ.: Heylen W., Lammens S., Sas P. Modalnyy analiz: teoriya i ispytaniya. Moscow, Novatest LLC Publ., 2010, 319 p.].

[8] Batseva O.D., Dmitriev S.N. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, iss. 7. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2018-7-1785

[9] Tushev O.N., Berezovsky A.V. *Izvestiya RAN. Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin — Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, no. 1, pp. 18–27.

[10] Ivanov V.N., Dombrovsky I.V., Shevelev N.A. *Vychislitelnaya mekhanika sploshnykh sred — Computational continuum mechanics*, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 58–67.

[11] Speedy C.B., Brown R.F., Goodwin G.C. Control Theory: Identification and Optimal Control. In: *Electronic and electrical engineering texts.* Vol. 7. Oliver & Boyd Publ., 1970, 293 p. [In Russ.: Speedy C.B., Brown R.F., Goodwin G.C. Teoriya upravleniya. Identifikatsiya i optimalnoye upravleniye. Moscow, Mir Publ., 1973, 248 p.].

[12] Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 558 p.

Tushev O.N., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Aero-Space Systems, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: kafsm2@bmstu.ru

Belyaev A.V., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Aero-Space Systems, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: beliaev@bmstu.ru