

## Плоский диффузор: стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости

© С.А. Кумакшев

ИПМех РАН, Москва, 119526, Россия

*Исследована эволюция основного одномодового стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре (с постоянной по знаку скоростью потока в зависимости от угла раствора диффузора) для классической постановки задачи Джекффри — Гамеля. В зависимости от определяющих параметров (угла раствора диффузора и числа Рейнольдса) дано полное решение задачи. Представлен переход основного одномодового течения при фиксированном значении угла раствора к многомодовым режимам, в которых скорость потока меняет знак в зависимости от угла раствора, и при изменении числа Рейнольдса. Установлено, что начиная с некоторого критического значения числа Рейнольдса невозможно существование стационарного одномодового течения. Построена соответствующая картина бифуркации и найдена зависимость значения критического числа Рейнольдса от угла раствора диффузора. Показана возможность реализации как одномодового, так и многомодовых течений при одном и том же числе Рейнольдса. Вычислены параметры второй и третьей зон точек бифуркаций.*

**Ключевые слова:** плоский диффузор, задача Джекффри — Гамеля, стационарные течения, вязкая жидкость

**Введение.** Диффузор — распространенное устройство, используется как отдельно в виде насадки, так и в качестве составной части различных гидродинамических механизмов, например реактивных двигателей или насосов. Решение задачи о движении жидкости в плоском диффузоре может быть полезно для качественного понимания возникающих режимов истечения жидкости и их эволюции при увеличении числа Рейнольдса.

К сожалению, предлагаемые ранее подходы к решению такой задачи просто сводили исходную постановку к системе нелинейных трансцендентных уравнений с использованием эллиптических функций. Из этой системы надо было найти одновременно три неизвестные константы интегрирования. Такой подход не позволял проводить эффективные вычисления для конкретных параметров диффузора. Кроме того, при выводе этой системы предполагалось, что скорость на оси диффузора не может быть равна нулю. Однако при решении задачи появилась возможность найти класс течений с нулевой скоростью на оси диффузора. Тем не менее, анализируя нули эллиптических функций, удалось установить, что течения в диффузоре должны испытывать бифуркацию.

Другой часто практикуемый подход состоит в игнорировании условия постоянства расхода жидкости (постоянства мощности

источника в вершине диффузора). Это приводит к получению серии профилей скорости жидкости в диффузоре, которые имеют различную площадь под профилем и мощность источника. В результате, делать выводы об эволюции какого-либо одного конкретного потока жидкости с неизменными характеристиками (за исключением числа Рейнольдса) не приходится. Вместо этого предъядвляется набор профилей скорости некоторых не связанных друг с другом режимов течений.

Цель настоящей статьи — нахождение профилей скорости в плоском диффузоре для вязкой несжимаемой жидкости в полной постановке задачи при соблюдении условия постоянства мощности источника, а также исследование точек бифуркации диффузорных течений и определение зависимости первой точки бифуркации от угла раствора диффузора.

**Постановка задачи.** Рассмотрим классическую задачу Джеффри — Гамеля в случае диффузорного течения [1–3]. Жидкость имеет плотность  $\rho$  и динамическую вязкость  $\mu$ ; ее плоское движение происходит в области

$$W = \{(r, \theta) : r > 0, |\theta| < \beta\},$$

где  $r, \theta$  — полярные координаты;  $\beta$  — угол полураствора ( $0 < \beta \leq \pi$ ).

На стенках диффузора  $r > 0, \theta = \pm\beta$  выполняются условия прилипания, а при  $r = 0$  течение имеет особенность типа источник постоянной мощности  $Q < 0$ . Система допускает два безразмерных параметра: угол раствора  $2\beta$  и число Рейнольдса  $Re = \rho Q / \mu$  ( $Re < 0$ ), чего недостаточно для полного обезразмеривания уравнений движения [3–7]. Имеется автомодельное решение, для которого поле скоростей радиально:

$$v_r = -\frac{Q}{r}V(\theta); v_\theta \equiv 0, \quad (1)$$

и автоматически удовлетворяет условию несжимаемости для произвольной гладкой функции  $V(\theta)$ . Компоненты тензора скоростей деформаций  $\nu$  и напряжений  $\sigma$  определяют по следующим отношениям:

$$\begin{aligned} v_{rr} = -v_{\theta\theta} &= \frac{Q}{r^2}V(\theta), & v_{r\theta} &= -\frac{Q}{2r^2}V'(\theta); \\ \sigma_{rr; \theta\theta} &= -p \pm \frac{2\rho Q^2}{r^2 Re}V(\theta), & \sigma_{r\theta} &= -\frac{\rho Q^2}{r^2 Re}V'(\theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Величины (1), (2) рассчитывают с помощью неизвестных функций профиля скорости  $V$  и давления  $p$ , для которых необхо-

можно использовать соотношения (следствие уравнений Навье — Стокса [3]):

$$V'' + 4V - \text{Re}V^2 = C = \text{const}; \quad (3)$$

$$p = \frac{\rho Q^2}{2r^2 \text{Re}} (C - 4V). \quad (4)$$

На безразмерную функцию  $V(\theta)$  налагаются дополнительные требования, вытекающие из локального условия прилипания жидкости на границе и интегрального условия постоянства расхода (истока):

$$V(\pm\beta) = 0, \quad \int_{-\beta}^{\beta} V(\theta) d\theta = 1. \quad (5)$$

С помощью соотношений (3), (5) в целях нахождения величин (1), (2), (4) и других необходимо определить неизвестные  $V(\theta)$  и  $C = V''(\pm\beta)$  для произвольных значений  $\text{Re} < 0$  и  $0 < \beta \leq \pi$ , что представляет весьма трудную аналитическую и вычислительную проблему. Неявное решение многомерной нелинейной краевой задачи посредством эллиптических функций на основе первого интеграла уравнения (3) не позволяет проводить эффективные высокоточные расчеты в достаточно широкой области параметров. Используемые в научной литературе подходы [8, 9] связаны, как правило, с игнорированием интегрального условия (5) и фиксацией значения  $V(0) = V_0$ . Это существенно искажает смысл и постановку классической задачи Джеффри — Гамеля [1–7]. Полученная аналитически система трансцендентных уравнений относительно трех неизвестных постоянных интегрирования при решении вызывает принципиальные вычислительные трудности.

**Численное решение.** Используя численно-аналитический метод [10], основанный на модифицированном алгоритме Ньютона и процедуре продолжения по параметрам, получают эффективное высокоточное решение нелинейной краевой задачи (3), (5). Для удобства расчетов исходную краевую задачу записывают в терминах нормированных профиля скорости  $y$ , аргумента  $x$ , неизвестных параметров  $\gamma$ ,  $\lambda$  и существенных известных параметров  $a$ ,  $b$ :

$$y(x) = 2\beta V(\theta), \quad x = \frac{1}{2} \left( \frac{\theta}{\beta} + 1 \right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$
$$a = 4\beta, \quad b = 2\beta \text{Re}, \quad \lambda = 8\beta^3 C, \quad \gamma = y'(0). \quad (6)$$

Далее интегральное условие (5) можно переделать, используя неизвестную функцию  $z(x)$ , характеризующую исток. В результате этих преобразований получается задача Коши для  $y, z$  с неизвестными  $\gamma, \lambda$ , для нахождения которых выполняются конечные условия:

$$\begin{aligned} y'' + a^2 y - by^2 &= \lambda, y(0) = 0, y'(0) = \gamma, \\ z' &= y - 1, z(0) = 0, y(1) = z(1) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для решения задачи требуется найти параметры  $\gamma, \lambda$  как функции известных величин  $a, b$ . Поскольку для  $b = 0$  ( $\text{Re} = 0$ ) решение задачи (7) построено в аналитической форме, удобно сначала найти  $\gamma, \lambda$  при  $b = 0$ , а затем, используя численную процедуру продолжения по параметру для  $b < 0$ , следует при фиксированном значении параметра  $a$  (т. е. угла  $\beta$ ) находить  $\gamma, \lambda$  для других  $b$ . Затем искомую функцию  $y$  после подстановки найденных величин  $\gamma(b), \lambda(b)$  (значение величины  $a$  фиксированное) находят численным интегрированием задачи Коши (7).

Итак, для  $b = 0$  имеем

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \frac{a}{2D} \left[ \cos\left(ax - \frac{a}{2}\right) - \cos\frac{a}{2} \right]; \quad \gamma_0 = \frac{a^2}{2D} \sin\frac{a}{2}; \quad \lambda_0 = -\frac{a^3}{2D} \cos\frac{a}{2}; \\ D &= \sin\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \cos\frac{a}{2} \neq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $D$  — некоторое выражение.

Регулярно продолжаемые по числу  $\text{Re} < 0$  (параметр  $b < 0$ ) решения существуют, если  $a \neq a^* = \arg D(a)$ , т. е.  $\beta \neq \beta^* \equiv 2,2467047$ . Критическое значение угла раствора  $2\beta^*$  больше развернутого и близко к углу  $270^\circ$ , отвечающему до полного оборота прямого угла между внешними сторонами стенок диффузора. Для значений  $a \neq a^*$  построение решений задачи (7) сводится к рекуррентной процедуре уточнения  $\gamma(b), \lambda(b)$  для последовательности убывающих значений  $b = b_k$ , где  $k = 0, 1, \dots, k^*$ :

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \gamma_n + \delta\gamma_n; \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n + \delta\lambda_n; \\ \delta\gamma_n &= -[y_n(1)s_n(1) - z_n(1)h_n(1)]\Delta_n^{-1}(1); \\ \delta\lambda_n &= [y_n(1)w_n(1) - z_n(1)g_n(1)]\Delta_n^{-1}(1); \\ \Delta_n(x) &= y_n(x)s_n(x) - h_n(x)w_n(x); \quad \Delta_n(1) \neq 0 \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $y_n(x)$ ,  $z_n(x)$  — решения задачи Коши (7) для известных на предыдущем шаге значений  $\gamma_n(b)$ ,  $\lambda_n(b)$ . Функции чувствительности  $g_n$ ,  $w_n$  и  $h_n$ ,  $s_n$  решений  $y_n$ ,  $z_n$  по параметрам  $\gamma$  и  $\lambda$  вычисляются интегрированием линейных задач Коши при известных  $y_n(x)$ ,  $z_n(x)$  (либо совместно):

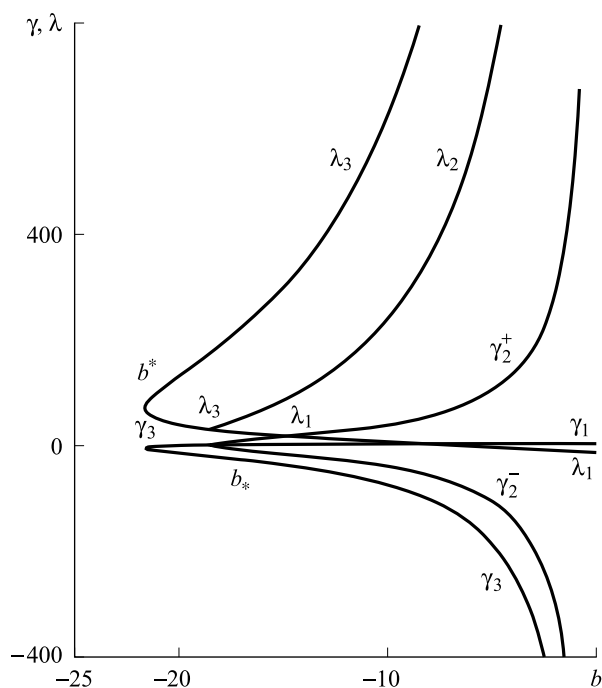
$$\begin{aligned} g'' + a^2 g - 2byg = 0; \quad w' = g; \quad g(0) = w(0) = 0; \quad g'(0) = 1; \\ h'' + a^2 h - 2byh = 1; \quad s' = h; \quad h(0) = h'(0) = s(0) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Начальное приближение для  $n=0$  задается согласно (8) при  $b = b_1 < b_0 = 0$ . Полученные достаточно точные значения  $\gamma_n(b_1)$ ,  $\lambda_n(b_1)$  будут начальными приближениями для  $b = b_2 < b_1$  и т. д. Мерами точности служат абсолютные значения невязок по ординатам  $y_n(1)$ ,  $z_n(1)$  либо по абсциссам  $\varepsilon_n = 1 - \xi_n$ ,  $\mu_n = 1 - \eta_n$ , где  $\xi_n$ ,  $\eta_n$  — ближайшие к  $x=1$  нули функций  $y_n(x)$ ,  $z_n(x)$ . Алгоритм, представленный в (9), (10), обладает свойством ускоренной (квадратичной) сходимости и позволяет выполнять высокоточные (с относительной и абсолютной погрешностью порядка  $10^{-5} \dots 10^{-8}$ ) оперативные массовые расчеты и строить искомые зависимости  $y$ ,  $y'$  и  $\gamma$ ,  $\lambda$ , необходимые для определения кинематических и динамических характеристик течений вязкой жидкости в плоском конфузоре.

**Первая точка бифуркации.** Проведенные численно-аналитические исследования свидетельствуют о сложном процессе течений, который в научной литературе представлен недостаточно полно [1–3] либо искаженно [8, 9]. Поскольку жидкость способна вытекать из диффузора, традиционно для него принято откладывать число Рейнольдса в отрицательную сторону (в отличие от конфузора). На рис. 1 приведены зависимости  $\gamma$ ,  $\lambda$  от  $b$  для величины угла  $\beta = 10^\circ$  при  $0 \geq b \geq -25$ . Применение в практической деятельности теоретических результатов может быть интересно техническим специалистам, которые сталкиваются с процессами, происходящими в системах, например, гидромеханических и геофизических, похожих на диффузор.

Установлено, что функция  $\gamma_1 = \gamma(b) > 0$  и убывает при уменьшении  $b \leq 0$ . Она достигает нулевого значения в критической точке  $b_* \approx -18,8$ , отвечающей вырождению основного одномодового течения, т. е. «чисто расходящегося» [8] течения по терминологии. При дальнейшем уменьшении  $b < b_*$  величина  $\gamma < 0$  и убывает, течение

становится трехмодовым (содержит участки стока и истока). Исток жидкости ( $y > 0$ ) осуществляется в окрестности биссектрисы ( $x = 1/2, \theta = 0$ ). Симметрично по краям у стенок диффузора происходит сток жидкости ( $y < 0$ ) при  $x = 0$  ( $x > 0$ ) и  $x = 1$  ( $x < 1$ ), что соответствует величине угла  $\theta = \mp\beta$  ( $\theta > -\beta, \theta < \beta$ ). При  $b < b^*$  решения данного типа становятся невозможными, так как кривые  $\gamma_3(b), \lambda_3(b)$  в этой точке имеют вертикальные касательные, что отвечает точке поворота (см. рис. 1).



**Рис. 1.** Кривые зависимости  $\gamma, \lambda$  от  $b$  и точек бифуркации  $b_*, b^*$

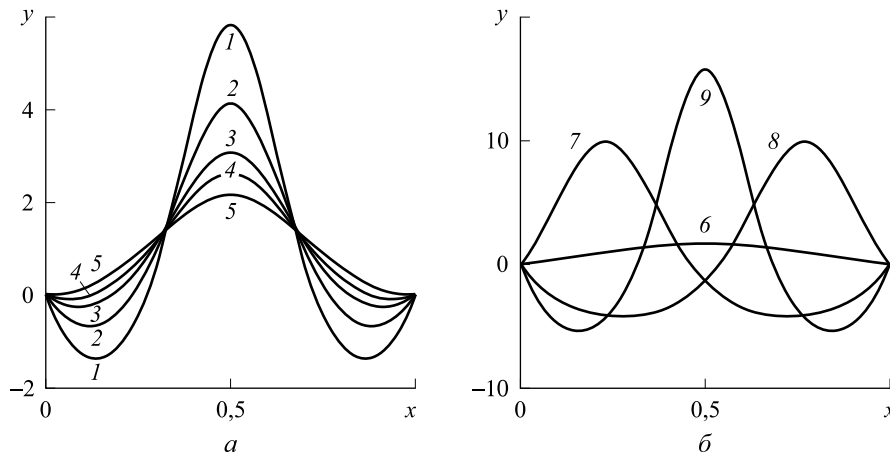
для  $\beta = 10^\circ$  ( $\pi/18$ ):

$\gamma_1, \lambda_1$  — одномодовое течение;  $\gamma_2^\pm, \lambda_2$  — двухмодовое течение;

$\gamma_3, \lambda_3$  — трехмодовое течение

Используя численную процедуру продолжения по параметру  $b$ , с помощью аналогичного подхода устанавливается существование второй ветви трехмодовых течений для значений  $b^* < b < 0$ . При этом значения  $\gamma_3$  быстро убывают, а  $\lambda_3$  — возрастают при  $b \rightarrow 0$ , причем  $\gamma_3 \rightarrow -\infty, \lambda_3 \rightarrow +\infty$ ; например, для  $b \approx -1$  величина  $\gamma_3 \sim -10^3$ , а  $\lambda_3 \sim 10^4$ . В результате для  $b^* < b < b_*$  установлено существование не

менее двух типов трехмодовых течений с сильно различающимися значениями  $\gamma$ ,  $\lambda$ . На рис. 2, *a* представлены кривые 1, 2 для трехмодового профиля скорости  $y(x)$  при  $b = -20$ , они симметричны относительно биссектрисы. Вопросы устойчивости и практической реализуемости требуют отдельного обсуждения. В настоящей статье этого обсуждения не предполагается.



**Рис. 2.** Профили скорости течений:

*a* — трехмодовое; *b* — одномодовое и двухмодовое для  $b = -10$ ; 1 —  $b = b_*$ ; 2, 4 —  $b = -21$ ; 3 —  $b = b_*$ ; 5 — одномодовое течение для  $b = b_*$ ; 6 — одномодовое течение; 7, 9 — двухмодовое течение; 8 — трехмодовое течение

Анализ окрестности критической точки  $b_*$ , в которой  $\gamma = 0$ , свидетельствует о возможности двух типов двухмодовых несимметричных течений при увеличении  $b$ ,  $b_* < b < 0$ . У одной из стенок происходит исток жидкости ( $y > 0$ ), у другой — сток ( $y < 0$ ). Поскольку обе ситуации ( $x = 0, 1$  или  $\theta = \mp\beta$ ) равноправны, кривая  $\gamma_2(b)$  состоит из двух симметричных относительно оси абсцисс ветвей  $\gamma_2^\pm$ , при  $b = b_*$  касательная вертикальна. Увеличение параметра  $b$  приводит к неограниченному росту  $|\gamma_2^\pm|$  аналогично рассмотренному случаю трехмодовых течений. Кривая  $\lambda_2(b)$  существует при  $b_* \leq b < 0$  и весьма быстро при увеличении  $b$  возрастает. Аналогично кривой  $\lambda_3(b)$  величина  $\lambda_2 \rightarrow +\infty$  при  $b \rightarrow 0$ .

Таким образом, для значений  $b_* < b < 0$  установлено существование течений трех типов и определены их взаимные переходы: основного одномодового, двухмодовых и трехмодового течений (см. рис. 1).

Соответствующие кривые 6, 7, 8, 9 для профилей скорости  $y(x)$  при  $b = -10$  показаны на рис. 2, б. (Кривые 7 и 9 относятся к одному типу, поэтому для четырех кривых в тексте статьи упомянуты только три типа кривых.)

В результате расчетов впервые проведен анализ сложной картины бифуркации течений, происходящих на сравнительно небольшом интервале  $0 \geq b \geq -25$  ( $0 \geq Re \geq -72$  для  $\beta = 10^\circ$ ). На его основе можно исследовать механизм перестройки течений при изменении параметра  $b$ , т. е. числа Рейнольдса, на неограниченном полуинтервале  $b < 0$  и для произвольных величин угла раствора  $0 < 2\beta \leq 2\pi$ .

**Вторая точка бифуркации.** Как видно из анализа первой зоны бифуркации (см. рис. 1), основное одномодовое течение существует только до определенного значения числа Рейнольдса. При дальнейшем увеличении параметра  $b$  оно исчезает, трансформируясь в двух- и трехмодовые течения. Однако и они тоже пропадают при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса.

На рис. 3 показано, что возникает новое трехмодовое течение. Оно отличается от предыдущего тем, что участок положительной скорости (выток) расположен не по центру диффузора, а возле стенок. По оси диффузора теперь находится участок, через который жидкость втекает. Интегральный расход жидкости (мощность источника) по-прежнему равен 1.

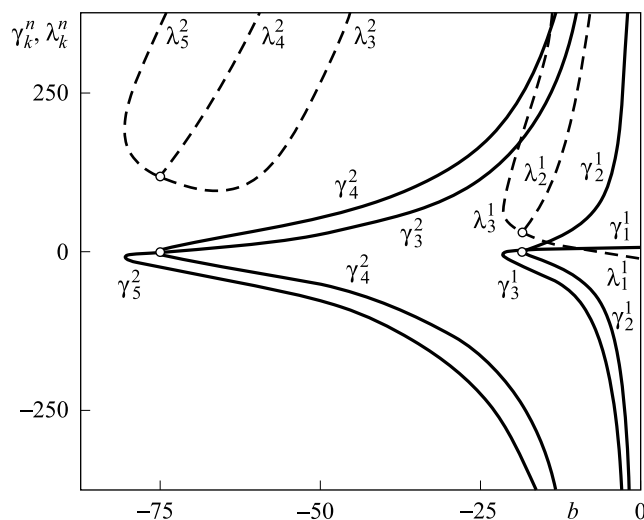


Рис. 3. Кривые зависимости  $\gamma$ ,  $\lambda$  от  $b$  для первой и второй зон точки бифуркации

Новое трехмодовое течение испытывает бифуркацию, трансформируясь в два несимметричных четырехмодовых течения и одно симметричное пятимодовое. Качественно вторая точка бифуркации



устроена так же, как и первая. Кривые зависимости  $\gamma$ ,  $\lambda$  от  $b$  для первой и второй точек бифуркации можно увидеть на рис. 3. Индекс сверху относится к номеру точки бифуркации, а индекс снизу обозначает количество мод у течения (количество интервалов втока и вытока жидкости).

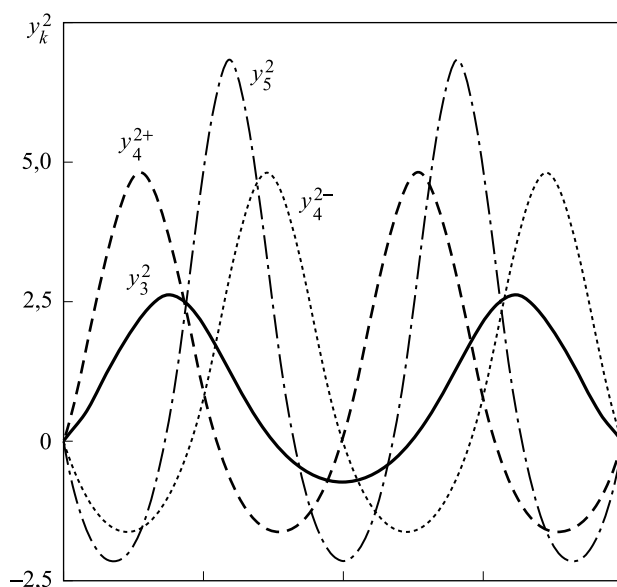


Рис. 4. Зависимость скорости нового двух-, трех-, четырех- и пятимодового течений от угла диффузора для второй зоны точки бифуркации

Из рис. 3. можно взять значения  $\gamma(b)$ ,  $\lambda(b)$  для определенного числа Рейнольдса и подставить их в краевую задачу (7). Проинтегрировав ее один раз любым численным методом, получим профили скорости для выбранного числа Рейнольдса; при этом краевые условия вместе с условием постоянства расхода выполняются автоматически. Примеры полученных профилей показаны на рис. 4 для значения  $b = -60$ . Индекс снизу указывает на количество мод у течения, а индекс сверху — на номер точки бифуркации.

**Третья точка бифуркации.** Если продолжать увеличивать число Рейнольдса, то согласно проведенным расчетам вновь возникшие типы течений исчезают. На смену им приходят:

- новое пятимодовое течение (отличается от старого сменой направления скорости жидкости — вместо выток теперь вток, и наоборот);
- два шестимодовых течения;
- одно семимодовое течение.

Качественно зона бифуркации устроена по-прежнему. В роли базового течения, испытывающего бифуркацию, выступает новое пятимодовое течение.

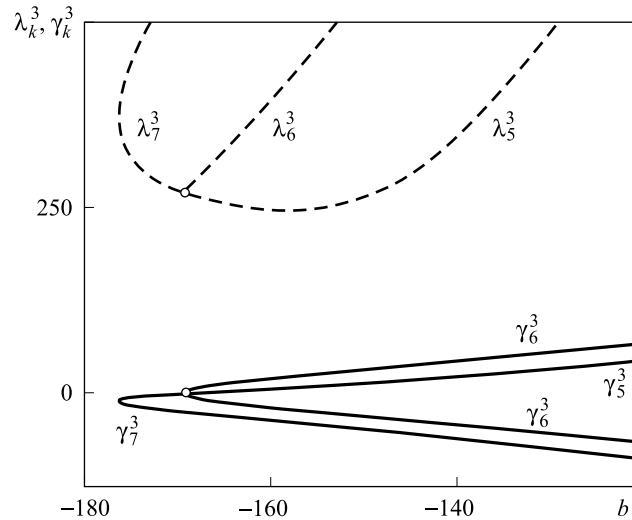


Рис. 5. Кривые зависимости  $\gamma$ ,  $\lambda$  от  $b$  для третьей зоны точки бифуркации

Кривые зависимости  $\gamma$ ,  $\lambda$  от  $b$  для третьей зоны точки бифуркации представлены на рис. 5.

**Зависимость первой точки бифуркации от угла раствора.** Кривая зависимости  $b_*$  от  $\beta$ ,  $0 < \beta < \pi/2$ , определяющая границу существования одномодового течения, может быть найдена в неявной аналитической форме с помощью первого интеграла первого уравнения (7) и квадратур

$$\begin{aligned}
 -b_* &= 6\xi K(\xi)L(\xi), \quad \beta = K(\xi)/\sqrt{2}, \quad 0 \leq \xi < \infty; \\
 K(\xi) &= \int_0^1 \frac{dq}{\sqrt{f(q,\xi)}}, \quad L(\xi) = \int_0^1 \frac{qdq}{\sqrt{f(q,\xi)}}, \\
 f(q,\xi) &= q(1-q)[2 + \xi(1+q)].
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Для простоты представления формулы (11) некоторые сложные ее части обозначены новыми символами  $K$ ,  $L$ ,  $q$ ,  $f$ ,  $d$ ,  $\xi$ , пояснения к ним приведены во второй и третьей строках (11).

Из (11) следует, что  $b_* = -6\pi$  при  $\beta = +0$  и  $b_* = 0$  при  $\beta = \pi/2$ ; промежуточные значения для  $0 < \beta < \pi/2$  представлены на рис. 6.

Если соответствующие заданному углу  $\beta$  значения  $\xi_* = \xi(\beta)$ ,  $b_*(\beta)$  определены, то максимальное значение  $y(x)$  и параметр  $\lambda$  рассчитываем следующим образом:

$$y_m = y\left(\frac{1}{2}\right) = -12\beta^2 \frac{\xi_*}{b_*}; \quad \lambda_* = -48\beta^4 \frac{\xi_*}{b_*} (2 + \xi_*).$$

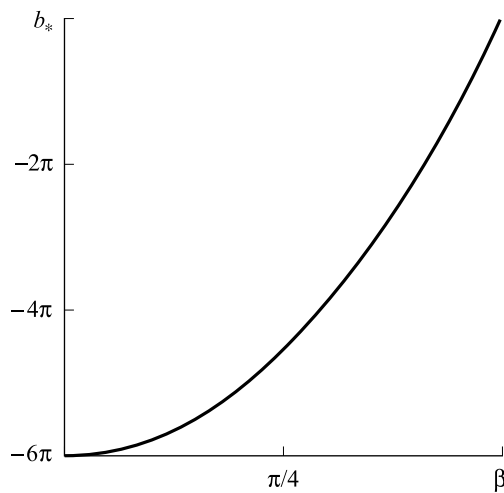


Рис. 6. Зависимость значения первой зоны точки бифуркации от угла полураствора диффузора

Критические значения  $b^*(\beta)$ , определяющие границу существования трехмодовых течений (см.  $\gamma_3(b^*)$ ,  $\lambda_3(b^*)$  на рис. 1), отвечают условиям неограниченности производных  $\partial\gamma_3/\partial b$ ,  $\partial\lambda_3/\partial b$ . Они конструктивно определяются с помощью вышеизложенной численно-аналитической процедуры ускоренной сходимости.

**Заключение.** Вычислены и приведены примеры профилей скорости течений вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре при фиксированных числах Рейнольдса. Установлено, что с возрастанием числа Рейнольдса увеличивается и количество мод у остающихся течений. Увеличение количества участков, где вток чередуется с вытоком жидкости, очевидно, приводит к неустойчивости таких режимов и турбулизации общего течения через диффузор при больших числах Рейнольдса. Анализ полученных данных показал, что начиная с некоторого критического значения числа Рейнольдса течения испытывают бифуркацию и исчезают. Вычислены значения параметров, при

которых происходит бифуркация течений в диффузоре. Определены первая, вторая и третья зоны бифуркаций. Предъявлена зависимость первой точки бифуркации от угла раствора диффузора.

*Работа выполнена по теме государственного задания №АААА-А20-120011690138-6 и частично поддержана грантом РФФИ № 18-01-00812.*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jeffery G.B. The two-dimensional steady motion of a viscous fluid. *Phil. Mag.*, 1915, Ser. 6, vol. 29, no. 172, pp. 455–465.
- [2] Hamel G. Spiralformige Bewegungen zahen Flussigkeiten. *Jahres.-ber. Deutsch. Math. Ver.*, 1917, no. 25, S. 34–60.
- [3] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика*. Ч. 2. Москва, Физматгиз, 1963, 727 с.
- [4] Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Бифуркация течения вязкой жидкости в плоском диффузоре. *Докл. РАН*, 2004, т. 396, № 4, с. 480–484.
- [5] Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском диффузоре. *Изв. РАН. МЖГ*, 2005, № 3, с. 25–36.
- [6] Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Многомодовая бифуркация течения вязкой жидкости в плоском диффузоре. *Докл. РАН*, 2004, т. 399, № 5, с. 620–624.
- [7] Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А. Бифуркация многомодовых течений вязкой жидкости в плоском диффузоре. *ПММ*, 2008, т. 72, вып. 3, с. 431–441.
- [8] Бэтчелор Дж. *Введение в динамику жидкости*. Москва, Мир, 1973, 758 с.
- [9] Millsaps K., Pohlhausen K. Thermal distributions in Jeffery — Hamel flows between nonparallel plane walls. *J. Aeronaut. Sci.*, 1953, vol. 2, no. 3, pp. 187–196.
- [10] Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Нестеров С.В. Эффективное численно-аналитическое решение изопериметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости. *ПММ*, 2002, т. 66, вып. 5, с. 723–741.

Статья поступила в редакцию 06.07.2020

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Кумакшев С.А. Плоский диффузор: стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 7. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-7-1993>

**Кумакшев Сергей Анатольевич** — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМех РАН. e-mail: kumak@ipmnet.ru

## **Flat diffuser: steady state flow of a viscous incompressible fluid**

© S.A. Kumakshev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics  
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia

*The article analyzes the evolution of the main single-mode stationary flow of a viscous incompressible fluid in a flat diffuser (with a constant sign in the flow velocity depending on the aperture angle of the diffuser) in the classical formulation of the Jeffrey — Hamel problem. Depending on the determining parameters (the diffuser angle and the Reynolds number), a complete solution of the problem is given. The transition of main single-mode flow at a fixed angle of the diffuser to the multimode modes (where the velocity of flow changes sign depending on the angle of the diffuser) when the Reynolds number has been changed is shown. It is found that starting from a certain critical value of the Reynolds number, the existence of a stationary single-mode flow is impossible. The corresponding bifurcation diagram is constructed and the dependence of this critical value vs. the aperture angle of diffuser is found. The possibility of realization of both single-mode and multimode flows at the same Reynolds number is shown. The parameters of the second and third bifurcation domains are also calculated.*

**Keywords:** *flat diffuser, Jeffrey — Hamel problem, steady flow, viscous incompressible fluid*

*The research was partially supported by the Government program  
(contract # AAAA-A20-120011690138-6)  
and partially supported by RFBR (grant No. 18-01-00812).*

### REFERENCES

- [1] Jeffery G.B. *Philosophical Magazine*, 1915, Ser. 6, vol. 29, no. 172, pp. 455–465.
- [2] Hamel G. *Jahres.-ber. Deutsch. Math. Ver.*, 1917, no. 25, pp. 34–60.
- [3] Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika*. Ch. 2 [Theory of hydromechanics. Part 2]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 727 p.
- [4] Akulenko L.D., Kumakshev S.A. *Doklady RAN — RAS Reports*, 2004, vol. 396, no. 4, pp. 480–484.
- [5] Akulenko L.D., Kumakshev S.A. *Izvestiya RAN. MZhG — Fluid Dynamics*, 2005, no. 3, pp. 25–36.
- [6] Akulenko L.D., Kumakshev S.A. *Doklady RAN — RAS Reports*, 2004, vol. 399, no. 5, pp. 620–624.
- [7] Akulenko L.D., Kumakshev S.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 3, pp. 431–441.
- [8] Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press Publ., 1967 [In Russ.: Batchelor G.K. *Vvedeniye v dinamiku zhidkosti*. Moscow, Mir Publ., 1973, 758 p.].
- [9] Millsaps K., Pohlhausen K. *J. Aeronaut. Sci.*, 1953, vol. 2, no. 3, pp. 187–196.
- [10] Akulenko L.D., Kumakshev S.A. Nesterov S.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, no. 5, pp. 723–741.

**Kumakshev S.A.**, Cand. Sc. (Phys. & Math.), Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences.  
e-mail: kumak@ipmnet.ru