УДК 532.5.032 DOI: 10.18698/2308-6033-2020-6-1985

Определение критических параметров потока при течениях Пуазейля, Куэтта и Тейлора — Куэтта

© А.С. Кондратьев, К.Ф. Огородников

Московский Политех, Москва, 107023, Россия

Для определения критических параметров потока ньютоновской жидкости при переходе ламинарного режима течения жидкости в турбулентное как альтернативного определения критического числа Рейнольдса при течениях Пуазейля и Куэтта в цилиндрическом, коаксиальном и плоском каналах представлено математическое обоснование способа Дои, приводящее к более простым расчетным соотношениям при сохранении исходных представлений о физических условиях перехода. Получены новые расчетные выражения для определения критического числа Дои при обобщенном течении Пуазейля — Куэтта в плоском канале. Приведены аналитические выражения для расчета критических параметров при течении Тейлора — Куэтта, аппроксимирующие экспериментальные результаты для критических чисел Рейнольдса Re и расчетные значения критических чисел Дои.

Ключевые слова: *критическое число, число Рейнольдса, число Дои, течение Пуазейля, течение Куэтта, течение Тейлора, канал (плоский, круглый, коаксиальный)*

Введение. Ламинарные режимы течения ньютоновских жидкостей реализуются в проточных частях различных гидравлических машин. Задача определения критических параметров потока ньютоновской жидкости при отклонении от ламинарного режима течения к переходному, а затем и к турбулентному в общем случае является не совсем завершенной. Традиционно принимается, что переход ламинарного режима течения происходит при достижении числа Рейнольдса Re некоторого минимального числа Re из всего диапазона значений этих чисел, независимо от условий или масштаба возмущений в начальном сечении потока [1, 2]. Отсюда, в частности, следует, что и вниз по потоку профиля скорости коэффициенты гидравлического сопротивления сохраняют установившиеся значения. В [2] в краткой форме изложены различные физико-математические модели, аналитические и численные методы расчетов по определению потери устойчивости первоначально ламинарных потоков в каналах различной формы. К сожалению, в работе практически не представлены результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных, что не позволяет иметь представление об уровне их соответствия. Например, в качестве демонстрационного расчетного примера указывается: при плоском течении Куэтта критическое число Рейнольдса Re стремится к бесконечности [2], что находится в противоречии с опытными данными.

При определении критических параметров потока в ньютоновской жидкости ключевым параметром принимается число Рейнольдса Re, которое, как отмечается в работах [1, 3], можно рассчитать различными способами. Наиболее распространенным является представление, что число Рейнольдса Re пропорционально отношению сил инерции к силам вязкого трения, действующим в потоке [1].

В рамках «энергетического» представления авторы [3] принимают, что число Рейнольдса Re пропорционально отношению кинетической энергии объема жидкости, пересекающего поперечное сечение потока, к работе сил вязкого трения движущегося потока.

Исходя из используемых существующих представлений несколько отличный от предшествующего подход к определению числа Рейнольдса Re предложен в работе [3]. В ней предполагается, что данное число — величина, пропорциональная отношению потока импульса жидкости P через выбранное сечение потока, заключенного в объеме единичной длины $l = 1$ м вдоль по потоку, к силе вязкого трения F_τ, действующей на этот объем. Конечное выражение P/F_τ имеет вид [3]:

$$\frac{P}{F_\tau} = \frac{\left(\rho V d / \mu\right)}{4 \Big/ \left(\partial V / \partial y\right)_w \Delta t}, \tag{1}$$

где ρ — плотность жидкости, кг/м^3; V — локальная скорость, м/с; d — диаметр поперечного сечения потока, м; μ — динамическая вязкость жидкости, Па·с; $(\partial V/\partial y)_w$ — производная локальной скорости на стенке, обозначенной индексом w, 1/с; y — нормаль по отношению к направлению движения, м; t — время, с; Δ — приращение.

Полагая, что в приведенном выражении (1) $V = V_m$ — средняя скорость, а $\Delta t = l\,/V_m$, получим

$$\frac{P}{F_\tau} = \frac{\left(\rho V_m d / \mu\right)}{4 \Big/ \left(V_m / l\right) \Big/ \left(\partial V / \partial y\right)_w}. \tag{2}$$

При рассмотрении движения Пуазейля в круглой трубе из (2) получим, что отношение $P/F_\tau = (\rho V_m\ d/\mu)\ (R/l)/16 = \mathrm{Re}(R/l)/16$, т. е. оно отличается от числа Рейнольдса Re масштабным коэффициентом $(R/l)/16$. В общем случае полученное выражение является достаточно сложным, поэтому возможные преимущества его использования нуждаются в дополнительном обосновании, что в работе [3] не проиллюстрировано.

В результате анализа научно-технической литературы и с учетом практической значимости различных методов определения критических параметров потока представляется возможным выделить три методических подхода к определению критических параметров потока, характеризующих начало перехода от ламинарного режима течения к переходному режиму течения.

В первом методе (экспериментальном) представлено опытное определение предельных параметров как потока, при которых экспериментальные и теоретические объемные расходы через, например, поперечное сечение потока, так и профиля скоростей практически совпадают с теоретическими значениями, соответствующими расчетному ламинарному режиму течения независимо от условий во входном сечении потока. Конечным результатом таких исследований является экспериментальное определение нижнего значения критического числа Рейнольдса Re или другого безразмерного параметра, не зависящего от возмущений во входном сечении потока. В [4] проведен критический анализ современных работ и обширных экспериментальных исследований, которые позволили предложить конкретные эмпирические зависимости, с помощью которых можно уточнить критические числа Рейнольдса Re для жидкостей в каналах различного поперечного сечения с шероховатой поверхностью стенки.

Во втором методе (расчетно-теоретическом) с помощью численных методов исследуется задача о гидродинамической устойчивости течения жидкости в заданных геометрических условиях проточной части потока, не зависящих от условий во входном течении потока. Результаты расчетов сильно зависят от представлений о физической природе гидродинамической нестабильности в виде анализа линейной или нелинейной устойчивости первичных возмущений ламинарного потока. Анализ результатов работ такой направленности показал [5], что теоретические значения критических чисел Рейнольдса Re могут кратной степени отличаться от экспериментальных значений. Например, при плоском течении Пуазейля теоретическое число Рейнольдса Re_c составляет ≈ 5772, экспериментальное $\mathrm{Re}_c \approx 1000$. При плоском течении Куэтта в рамках линейных представлений течение является ламинарным при всех числах Рейнольдса, однако из опытных данных следует, что $\mathrm{Re}_c \approx 370$. Скорее всего, такие результаты свидетельствуют о несовершенстве используемых физических моделей возникновения первичных возмущений и невозможности их дальнейшего развития в части генерации турбулентных пульсаций или, наоборот, механизма затухания первичных возмущений. Поэтому в настоящее время расчетно-теоретический метод определения критических параметров потока еще не развит до уровня, который принято называть «численным экспериментом».

Учитывая большое разнообразие реологических свойств жидкостей и геометрий поперечного сечения каналов, представляется естественным поиск более общих подходов, которые позволили бы обобщить имеющиеся данные, представленные, например, в [6], по критическим числам Рейнольдса Re или альтернативным характеристикам, полученным для ньютоновских жидкостей, для распространения их на другие условия, отличные как по реологическим свойствам жидкостей, так и по геометрии поперечного сечения потока.

Суть третьего метода [6] (интегрального) заключается в формировании безразмерного комплекса, характеризующего отношение полной кинетической энергии потока через полное сечение потока к работе сил, определяемых вязкостным трением, действующим в потоке, также через полное сечение потока. Обе эти величины определяются не локальной или средней скоростью и трением, а величинами, зависящими от их фактического распределения при ламинарном режиме течения по поперечному сечению потока. Далее авторы [6] делают предположение, что в условиях одинаковой геометрии поперечного сечения потока величина этого отношения не зависит от реологических свойств жидкости и, следовательно, может быть определена по экспериментальным данным, полученным для ньютоновских жидкостей, для которых имеется наиболее обширная и достоверная информация [6]. Исходным положением этого подхода является физическое обоснование сформированного таким образом безразмерного комплекса, характеризующего отношение полной кинетической энергии потока через полное сечение потока к работе сил, определяемых вязкостным трением, которое действует в потоке, также через полное сечение потока. Конечный результат проведенных исследований заключается в определении нижнего численного значения критического числа Рейнольдса или его аналога, если рассматриваются жидкости, обладающие неньютоновскими свойствами.

Такой способ определения критических параметров потока был использован при течении неньютоновских жидкостей в круглой трубе, в частности степенных и нелинейно-вязкопластичных жидкостей [6]. Было показано, что при течении в круглой трубе критические параметры потока определяются не числом Рейнольдса, а критическим числом Хедстрема:

$$\mathrm{He} = \frac{\tau_0 d^2 \rho}{{\mu_p}^2 f/(\tau_0/\tau_w)},$$

где τ_0 — начальное напряжение сдвига вязкопластичной жидкости, Н/м^2; $f(\tau_0/\tau_w)$ — известная функция от отношения (τ_0/τ_w); μ_p — пластическая вязкость, Па·с.

В анализируемом методе Дои рассматривается задача, касающаяся обобщения метода определения критического числа Рейнольдса в ньютоновской жидкости при течении подобной жидкости в каналах с различными поперечными сечениями потока.

Цель настоящей работы:

- демонстрация математической возможности существенного упрощения метода Дои при анализе течений Пуазейля в круглых трубах и плоских каналах;
- анализ возможности использования метода Дои при анализе течений Куэтта — Пуазейля в плоском канале при наличии двух подвижных стенок и градиента давления;
- демонстрация нецелесообразности использования метода Дои при анализе течения Тейлора — Куэтта между двумя концентрическими вращающимися цилиндрами.

Анализ метода Дои. С целью обобщения опытных данных по переходу ламинарного режима течения в турбулентный в работах [5, 7–10] вместо числа Рейнольдса Re используется новый безразмерный параметр K. В условиях стационарного ламинарного движения ньютоновской жидкости исходным для анализа является уравнение Навье — Стокса, которое, например, при течении Пуазейля в круглой трубе записывается в виде

$$\partial\left(\rho U^2/2\right)\Big/\partial r = -\left(\partial p/\partial x\right) + \mu\left(1/r\right)(\Delta^2 U)_r, \tag{3}$$

где ρ — плотность жидкости, кг/м^3; U — локальная скорость жидкости вдоль направления потока по оси x, м/с; p — давление, Па; μ — динамическая вязкость жидкости, Па·с; r — радиус, перпендикулярный к направлению движения потока x, м; Δ^2 — обозначение оператора Лапласа.

Далее вводится безразмерный параметр, который в настоящей статье назван критерием, или числом, Дои [5, 7–10]:

$$K = \frac{\partial E/\partial r}{\partial E/\partial x} = \frac{\left(\left[\partial p/\partial r\right] + \left[\rho U \partial U/\partial r\right]\right)}{\left(\mu\Delta^2 U\right)_r}, \tag{4}$$

где $E = p + \rho U^2/2$ — полная энергия потока.

Таким образом, число Дои K определяется экстремальным (максимальным) значением отношения градиента кинетической энергии $(\partial E/\partial r)$, переносимой в поперечном сечении потока, к градиенту энергии работы силы трения $(\partial E/\partial x)$, транспортируемой в направлении движения. Во всех рассмотренных случаях полагается, что $\partial p/\partial r = 0$, т. е. градиент давления в поперечном направлении равен нулю. Автор [5, 7–10] показывает, что если использовать значения критических чисел Рейнольдса Re, определенных в последних по времени экспериментальных и теоретических работах [7–10], то критические значения числа Дои K при течениях Пуазейля и Куэтта в каналах различной формы (круглой, плоской или кольцевой трубах) изменятся в небольшом диапазоне и, следовательно, могут быть приняты постоянными. В формулах (5) и (6) используются обозначения частных производных, хотя во всех рассмотренных конкретных случаях [5, 7–10] в этом нет необходимости, поскольку используется только одна независимая переменная. Такую гипотезу можно считать логичным выводом о представлении числа Рейнольдса Re как экстремального отношения локальной силы инерции к силе трения. В данном случае обобщением является то, что рассматривается отношение градиентов энергии потока в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

При проведении дальнейшего анализа в качестве исходного выражения для профиля скорости при нулевой левой части уравнения (3) используются выражения, которые являются решением (3) с соответствующими граничными условиями, например, при течении в цилиндрической трубе с неподвижной стенкой: $U = 0$ при $r = R$ и $dU/dr = 0$ при $r = 0$,

$$U = \frac{1}{4\mu}\frac{-dp}{dx}\left(R^2 - r^2\right). \qquad (5)$$

В классической гидромеханике такие течения называются слоистыми. Следовательно, имеет место своеобразный дуализм. Сначала предполагается, что левая часть (3) пренебрежимо мала по сравнению с правой частью, определяется решение в виде зависимости (5), а затем именно это выражение для скорости подставляется в левую часть (3).

После подстановки в (4) соответствующего выражения для профиля скорости (5) величина K определяется выражением

$$K = \frac{\mathrm{Re}/2}{r/R}\left(1 - [r/R]^2\right), \qquad (6)$$

где $\mathrm{Re} = \rho U_m D/\mu$ — число Рейнольдса, определенное по средней скорости и внутреннему диаметру трубы.

Далее определяется экстремум величины K по r/R, который достигается при $(r/R)_c = 0{,}5774$. Принимая, что опытное значение критического числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_c = 2000$, рассчитывается максимальное значение величины $K_c = 385$, которое определяется как критическое условие перехода ламинарного режима течения в турбулентное при течении в круглой трубе. В последней публикации [11] $\mathrm{Re}_c = 2040$, что дает уточненное значение $K_c = 393$, мало отличающегося от предшествующего значения.

Обобщение метода расчета критического числа Дои. Поскольку при нулевой левой части уравнения (3) $dp/dx = (\mu/(r\Delta^2 U))_r$, выражение (4) изначально можно представить в виде

$$K=\frac{\rho U dU/dr}{-dp/dx}. \qquad (7)$$

Подстановка (5) в (7) снова приводит к выражению (6). Заметим, что, как следует из выражения (7), на экстремум исследуется не величина K, а комплекс $[\rho U dU/dr]$, т. е. рассматривается выражение $(dU/dr)^2 + U(d^2U/dr^2) = 0$. При анализе плоского течения Пуазейля в канале с неподвижными плоскими стенками наблюдается аналогичная тенденция. Вместо (3) и (5) получим

$$d\left(\frac{\rho U^2}{2}\right)dy=-\left(\frac{dp}{dx}\right)+\frac{\mu d^2U}{dy^2}; \qquad (8)$$

$$U=U_0\left(1-\left[\frac{r}{h}\right]^2\right), \qquad (9)$$

где h — полувысота плоского канала, м; $U_0 = (h^2/2\mu)(-dp/dx)$ — скорость в центре плоского канала, м/с.

Выражение для величины K сохранится в виде формулы (7). Подстановка (9) в (7) приводит к выражению

$$K=\frac{3}{4}\mathrm{Re}(y/h)[1-(y/h)^2], \qquad (10)$$

где $\mathrm{Re} = \rho(2/3)U_0L/\mu$ — число Рейнольдса для плоского канала; L — полная высота плоского канала, $L = 2h$.

В качестве опытного значения критического числа Рейнольдса принята величина $\mathrm{Re}_c = \rho U_0 h/\mu = 1000$ [12, 13]. В рассматриваемом случае экстремум величины K также соответствует величине $(y/h)_c =$ $= 0{,}5774$. Подставляя эти значения в (10), получим $K_c = 385$, т. е. полное совпадение с течением Пуазейля в цилиндрическом канале.

Рассмотрим движение ньютоновской жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2 при $R_2 > R_1$. При течении в цилиндрическом кольцевом зазоре поперечное сечение определяется не одним линейным размером, например диаметром трубы или шириной зазора между цилиндрами, но и величиной $k = R_1/R_2$ — отношением радиусов внутреннего и наружного цилиндров. Поэтому численное значение экстремума величины K зависит также и от этого геометрического параметра, что подробно анализируется в [5].

Плоское течение Куэтта — Пуазейля. Проведем анализ общего случая течения Куэтта — Пуазейля в плоском канале при наличии двух подвижных стенок и градиента давления. Решение уравнения (8) при нулевом значении левой части при граничных условиях

$$U = U_b \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad U = U_t \quad \text{при} \quad y = h, \tag{11}$$

где U_b и U_t — скорость движения нижней и верхней стенок плоского канала соответственно ($U_b < U_t$), м/с.

Решение уравнения движения (8) при граничных условиях (11) имеет вид

$$U = U_b + (U_t - U_b)\left(\frac{y}{h}\right) + \left(\frac{-dp}{dx}\right)\left(\frac{h^2}{2\mu}\right)\left(\frac{y}{h} + \left[\frac{y}{h}\right]^2\right) = U_C + U_P, \tag{12}$$

где U_C — куэттовская составляющая скорости; U_P — пуазейлевая составляющая скорости.

Определим также трение в потоке:

$$\tau = \frac{\mu dU}{dy} = \mu\left(U_t - U_b\right)\left(\frac{1}{h}\right) + \\ +\mu\left(\frac{-dp}{dx}\right)\left(\frac{h^2}{2\mu}\right)\left(\frac{1}{h} + \left[\frac{2y}{h}\right]^2\right) = \tau_C + \tau_P, \tag{13}$$

где τ_C — куэттовская составляющая трения, Н/м^2; τ_P — пуазейлевая составляющая трения, Н/м^2.

Разберем частный случай течения Куэтта с двумя подвижными стенками. Согласно общему подходу, изложенному в [5, 7–10], [14, 16, 17], рассмотрим баланс энергий, приложенных к плоскому элементу жидкости $\Delta x \Delta z$. Здесь и далее знак Δ обозначает приращение.

В соответствии с общим подходом [8] примем, что вдоль верхней горизонтальной плоскости выделенного объема жидкости со стороны выше расположенных слоев жидкости в направлении движения действует сила трения, которая, перемещаясь со средней скоростью ($U + \Delta U$), за время dt совершает работу

$$A_\tau = \tau\,(U + \Delta U)\Delta x \Delta z dt, \tag{14}$$

где $\tau = \tau_C$ — гидродинамическое трение, Н/м^2.

Со стороны ниже расположенных слоев жидкости в противоположном направлении действует сила трения, которая, перемещаясь со средней скоростью U, за время dt совершает работу

$$A_b = \tau U\, \Delta x \Delta z dt. \tag{15}$$

За интервал времени dt через сечение $\Delta y \Delta z$ со скоростью U расход жидкости рассматриваемого элемента объема ΔQ можно рассчитать по следующей формуле:

$$\Delta Q = \Delta y \Delta z dt. \tag{16}$$

Полученные выражения (14), (15) и (16) позволяют определить величину dE/dx:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\left(A_\tau / A_b\right)}{\Delta Q \Delta x} = \frac{\tau\left(dU/dy\right)}{U}, \tag{17}$$

где $U = U_b + \left(U_t - U_b\right)\left(\dfrac{y}{h}\right)$.

Подставив полученные выражения в (4), получим

$$K = \frac{\mathrm{Re}\left(m + [1-m][y/h]^2\right)}{1-m}, \tag{18}$$

где $\mathrm{Re} = \rho U_t h/\mu$ — число Рейнольдса, определенное по скорости верхней стенки; $m = U_b/U_t$ — относительная скорость нижней стенки, $0 \le m < 1$.

На рис. 1 приведены рассчитанные по формуле (18) значения отношения числа Дои K к числу Рейнольдса Re, равные $\dfrac{\left(m + [1-m][y/h]^2\right)}{1-m}$ при различных значениях параметра m.

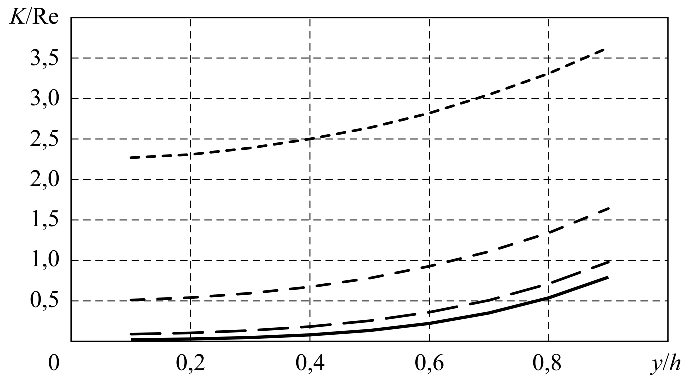

Рис. 1. Значения отношения K / Re в зависимости от величины параметра m:
—— — m = 0,125; — — — m = 0,25; – – – – m = 0,5; ----- — m = 0,75

Если предположить, что критическое число Дои сохраняет свое значение, то при наличии двух подвижных стенок уменьшается критическое число Рейнольдса (см. рис. 1). Это уменьшение становится более значительным при возрастании величины относительной скорости движения нижней стенки m.

Отметим, что в [14] авторы ограничились получением выражения, аналогичного (17), но никакого дальнейшего анализа величины критического числа Рейнольдса при сохранении числа Дои в зависимости от отношения скоростей $m = U_b/U_t$ не проводили.

В общем случае течения Куэтта — Пуазейля в выражения для профиля скорости (12) и трения (13) куэттовская и пуазейлевая составляющие скорости входят аддитивно. Поэтому левую часть уравнения (8) можно представить в виде выражения

$$d\left(\frac{\rho U^2}{2}\right)dy = \frac{\rho U dU}{dy} = \frac{\rho}{\mu}\left(U_c + U_p\right)\left(\tau_c + \tau_p\right). \tag{19}$$

Если предположить, что величина градиента энергии работы силы трения $(\partial E/\partial x)$ также аддитивна, то получим

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_c + \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_p = \tau_c\left(\frac{dU_C}{dy}\right)U_c + \left(\frac{-dp}{dx}\right). \tag{20}$$

Используя (19) и (20), число Дои можно рассчитать по формуле

$$K = \frac{(\rho/\mu)\left(U_c + U_p\right)\left(\tau_c + \tau_p\right)}{\left(\tau_c\left[dU_C/dy\right]/U_c\right) + \left[-dp/dx\right]}. \tag{21}$$

Ввиду отсутствия экспериментальных данных по критическому числу Рейнольдса при течении Куэтта — Пуазейля в плоском канале невозможно сопоставить критическое число Дои *K*, рассчитанное по формуле (21), с опытными или расчетными значениями других работ. В частных случаях плоских течений Куэтта и Пуазейля имеет место согласие с методом расчета Дои.

Таким образом, в работах Дои [5, 7–10] было показано, что при течениях Куэтта и Пуазейля в плоских и осесимметричных каналах достижение критических условий течения, т. е. предельных условий реализации ламинарного режима течения, происходит примерно при постоянном значении критического числа Дои, равном 370, которое аналитически связано с критическим числом Рейнольдса.

Течение Тейлора — Куэтта. При течении Тейлора — Куэтта между двумя соосными вращающимися цилиндрами режим движения жидкости зависит не только от поперечной радиальной координаты, но и от соотношения между угловыми скоростями движения поверхностей цилиндров. Так, если внутренний цилиндр вращается, а внешний находится в состоянии покоя, то под действием центробежной силы частицы жидкости стремятся переместиться от внутреннего цилиндра в сторону внешнего [1], т. е. с некоторой степенью условности. В этом случае центробежный поток самовозбуждается, в связи с чем в потоке возможно генерирование возмущений, которые не возникают в плоских или осесимметричных течениях. В [15] проанализированы практически все методы расчета определения критических параметров потока при течениях Куэтта — Тейлора в кольцевых каналах. В частности, изложен метод расчета Дои, методическая часть которого приведена в [14], а в [16] этот подход применен для определения критических значений числа Дои с использованием опытных значений и числа Рейнольдса для течения Тейлора — Куэтта между двумя концентрически вращающимися цилиндрами.

В [16] приведено выражение, связывающее критические числа Рейнольдса и Дои:

$$K = \mathrm{Re}_c\, R_i\, (1 - \delta/R_e)^2 (2 - \delta/R_e)^2/(2[R_e + R_i]), \qquad (22)$$

где $\mathrm{Re}_c = \omega R_i\, \delta/\nu$ — критическое число Рейнольдса; ω — угловая скорость вращения внутреннего цилиндра, рад/с; $\delta = (R_e — R_i)$ — величина кольцевого зазора между вращающимся внутренним цилиндром радиусом R_i и неподвижным внешним цилиндром радиусом R_e, м; δ/R_i — относительная величина кольцевого зазора; ν — кинематическая вязкость жидкости, м^2/с.

Во всех опытах внутренний цилиндр радиусом R_i вращался с угловой скоростью ω. В [1] отмечается, что при течении Тейлора — Куэтта наблюдаются три различные области течения, которые используют число Тейлора

$$\mathrm{Ta} = \mathrm{Re}_c\, (\delta/R_i)^{1/2}. \qquad (23)$$

Эти области течения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ta} \le 41{,}3 \text{ — ламинарное течение Куэтта;}\\ &41{,}3 < \mathrm{Ta} < 400 \text{ — ламинарное течение Куэтта с вихрями Тейлора;}\\ &\mathrm{Ta} \ge 400 \text{ — турбулентное течение.} \end{aligned} \qquad (24)$$

Предположим, что в соответствии с первым из выражений (24) критическое число Тейлора $\mathrm{Ta}_c = 41{,}3$. Тогда, используя выражение (23), можно рассчитать соответствующее критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{c\,T}$, определенное по величине критического числа Тейлора Ta_c

$$\mathrm{Re}_{c\,T} = \mathrm{Ta}_c \left(R_i/\delta\right)^{1/2}. \qquad (25)$$

Ниже в таблице приведены:

• экспериментальные значения Re_c, полученные опытным путем, приведенные в [16];

• значения критического числа Рейнольдса Re_{cT} по числу Тейлора, определенные по формуле (25);

• расчетные значения критического числа Re_c, определенные по формуле (26);

• расчетные значения критического числа Дои K_c с учетом того, что $R_e = (R_i + \delta)$, определенные по формуле (22);

• расчетные значения критического числа Дои K_c, определенные по формуле (27).

Значения опытных и расчетных критических чисел Рейнольдса и Дои

Параметры	Значения критических чисел									
δ, см	0,30	0,0863	0,258	0,235	0,316	0,485	0,696	1,365	1,035	1,249
δ / R_i	0,01	0,0175	0,043	0,062	0,142	0,137	0,133	0,134	0,345	0,248
ω / ν, см^2	39,5	758	139,9	189,2	182	70,7	33	8,4	30,5	15
Re_c [16]	350	320	217	169	128	120	120	116	95	94
Re_{cT} (25)	413	312	200	166	110	112	113	113	70	83
Re_c (26)	336	273	194	169	123	125	126	126	88	100
K_c (22)	338	301	188	139	80	77	78	75	33	44
K_c (27)	327	261	174	144	84	87	89	88	31	49

По данным, приведенным в таблице, видно, что при уменьшении экспериментального значения критического числа Рейнольдса Re_c качественно уменьшаются критические числа Рейнольдса Re_{cT}, определенные с помощью критического числа Тейлора. Несколько лучше соответствие с опытными значениями дает расчет критического числа Рейнольдса Re по аппроксимационной зависимости (26).

Установить какую-либо закономерность в связи критических чисел Рейнольдса Re_c и Дои K_c затруднительно, поскольку в отличие от течений в плоских, осесимметричных и коаксиальных течениях Куэтта и Пуазейля критическое число Дои является переменной величиной.

Более результативным оказалось представление критических чисел Рейнольдса Re_c и Дои K_c в функции от безразмерной величины кольцевого зазора δ / R_i: при возрастании относительной величины кольцевого зазора между цилиндрами от 0,01 до 0,345 критические значения числа Рейнольдса Re_c изменялись в диапазоне от 350 до 95, т. е. изменялись примерно в 3,5 раза (рис. 2).

Расчетные значения критического числа Дои K_c уменьшались от 338 до 33, т. е. изменялись примерно в 10 раз (рис. 3).

Таким образом, в рассматриваемом случае течения Тейлора — Куэтта между двумя концентрическими вращающимися цилиндрами критическое число Дои K_c не является постоянной величиной как, например, в течениях Пуазейля и Куэтта в плоских и кольцевых каналах. Следует также отметить, что диапазон изменения критического числа Дои K_c возрос по сравнению с изменением критического числа Рейнольдса Re_c. В связи с этим использование метода Дои при анализе течении Тейлора — Куэтта представляется нецелесообразным, фактически противоречащим подходу, развиваемому Дои.

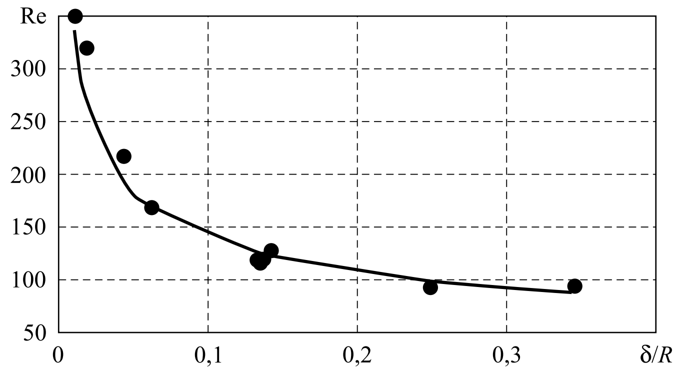

Рис. 2. Опытные данные и расчетная зависимость критических чисел Рейнольдса Re при вращении внутреннего цилиндра:
● — экспериментальные данные, приведенные в [16];
—— — расчетная зависимость по (26)

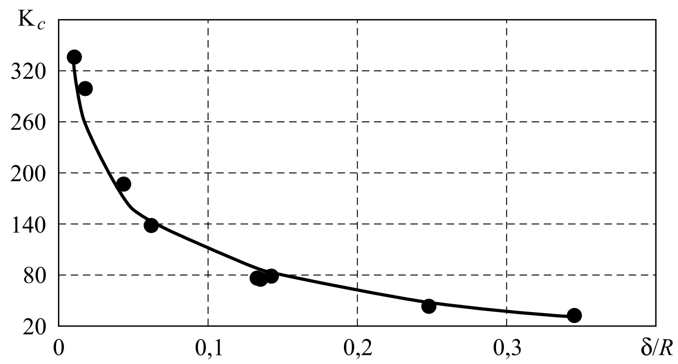

Рис. 3. Расчетные данные критических чисел Дои при вращении внутреннего цилиндра:
● — расчетные данные, приведенные в [16];
—— — расчетная зависимость по (27)

Экспериментальные данные и результаты расчетов, приведенные в [16], с погрешностью не более 15 % можно аппроксимировать следующими зависимостями:

$$\mathrm{Re}_c = 58{,}64\,(R_i/[R_e - R_i])^{0{,}38}; \tag{26}$$

$$K_c = \mathrm{Re}_c\,(1 - [R_e - R_i]/R_i)^{2{,}5}. \tag{27}$$

Выражения (26), (27) можно использовать в инженерных расчетах для анализа течения Тейлора — Куэтта при вращении внутреннего цилиндра.

Заключение. Показано, что процедура вычисления числа Дои K_c при течениях Пуазейля математически может быть существенно упрощена.

Проведен расчетный анализ течения Куэтта с двумя подвижными стенками, который показал, что при наличии двух подвижных стенок критическое число Рейнольдса Re уменьшается. Для более полного анализа необходимо проведение экспериментальных исследований течения Пуазейля — Куэтта в плоском канале.

Показано, что использование метода Дои при анализе течения Тейлора — Куэтта между вращающимися коаксиальными цилиндрами представляется необоснованным.

Предложены аппроксимационные зависимости для расчета критических чисел Рейнольдса Re и Дои течения Тейлора — Куэтта при вращении внутреннего цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. Москва, Наука, 1974, 712 с.

[2] Дразин Ф. *Введение в теорию гидродинамической устойчивости*. Москва, Физматлит, 2005, 288 с.

[3] Макаров К.А. О физическом смысле числа Рейнольдса и других критериях гидродинамического подобия. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 1. DOI: 10.18698/2308-6033-2014-1-1185

[4] Айвазян О.М. *Универсальный энергетический критерий устойчивости равномерных ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости*. Москва; Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» ИКИ, 2008, 128 с.

[5] Dou H.S., Khoo B.C., Tsai H.M. Determining the critical condition for flow transition in a full-developed annulus flow. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2010, vol. 73 (1–2), pp. 41–47.

[6] Кондратьев А.С., Овсянников В.М., Олофинский Е.П., Степин Б.С., Чиненков И.А. *Транспортирование водоугольных суспензий: гидродинамика и температурный режим*. Москва, Недра, 1988, 213 с.

[7] Dou H.S. Mechanism of flow instability and transition to turbulent. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2006, vol. 41, pp. 512–517.

[8] Dou H.S., Khoo B.C. Mechanism of wall turbulence in boundary layer flows. *Modern Physics Letters B*, 2009, vol. 23 (3), pp. 457–460.

[9] Dou H.S., Khoo B.C. Criteria of turbulent transition in parallel flow. *Modern Physics Letters B*, 2010, vol. 24 (13), pp. 1437–1440.

[10] Dou H.S., Khoo B.C. Investigation of turbulent transition in plane Couette flows using energy gradient method. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics Journal,* 2011, vol. 3 (2), pp. 165–180.

[11] Mukund V., Hof B. The critical point of the transition to turbulence in pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, vol. 839, pp. 76–94.

[12] Trefethen L.N., Trefethen A.E., Reddy S.C., Driscoll T.A. Hydrodynamic stability without Eigen values. *Science*, 1993, vol. 261, pp. 578–584.

[13] Grossmann S. The onset of shear flow turbulence. *Reviews of modern physics*, 2000, vol. 72, pp. 603–618.

[14] Dou H.S., Khoo B.C., Yeo K.S. Energy loss distribution in the plane Couette flow and the Taylor — Couette flow between concentric rotating cylinders. *International Journal of Thermal Science*, 2007, vol. 46, no. 2, pp. 262–275.

[15] До С.З. *Структура сжимаемых вихревых течений Куэтта — Тейлора. Дис. ... канд. физ.-мат. наук*. Москва, МФТИ, 2014, 104 с.

[16] Dou H.S., Khoo B.C., Yeo K.S. Instability of Taylor — Couette flow between concentric rotating cylinders. *International Journal of Thermal Science*, 2008, vol. 47, no. 11, pp. 1422–1435.

[17] Dou H.S. Physics of flow instability and turbulent transition in shear flows. *International Journal of Physical Scien*ce, 2011, March, vol. 6 (6), pp. 1411–1425.

Статья поступила в редакцию 22.01.2020

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:

Кондратьев А.С., Огородник К.Ф. Определение критических параметров потока при течениях Пуазейля, Куэтта и Тейлора — Куэтта. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 6. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-6-1985

Кондратьев Александр Сергеевич — д-р техн. наук, профессор, кафедра промышленной теплоэнергетики Московского Политеха. e-mail: ask41@mail.ru

Огородник Константин Федорович — студент 4-го курса кафедры промышленной теплоэнергетики Московского Политеха.
e-mail: kostea.ogorodnic.1998@mail.ru

Determining critical flow parameters for the Poiseuille, Couette and Taylor – Couette flows

© A.S. Kondratiev, K.F. Ogorodnikov

Moscow Polytechnic University, Moscow, 107023, Russia

Based on a detailed analysis of the known Dou method for determining the critical parameters of a Newtonian fluid flow during the transition of a laminar flow regime to a turbulent one, an alternative to determining the critical Reynolds number for the Poiseuille and Couette flows in cylindrical, coaxial and flat channels, the article proposes a new mathematical justification of the Dou method leading to simpler calculation relations, while preserving the initial ideas about the physical conditions of the transition. New computing expressions for determining the critical Dou number for the generalized Poiseuille – Couette flow in a flat channel not considered by Dou are obtained. Analytical expressions for calculating critical parameters for the Taylor – Couette flow approximating experimental results for critical Reynolds numbers are given, as well as calculated values of critical Dou numbers.

Keywords: *critical number, Reynolds number, Dou, Poiseuille, Couette, Taylor flows, channel*

REFERENCES

[1] Schlichting H. *Boundary-layer theory*. New York, McGraw-Hill Publ., 1955, 535 p. [In Russ.: Schlichting H. Teoriya pogranichnogo sloya. Moscow, Nauka Publ., 1974, 712 p.].

[2] Drazin F. *Vvedeniye v teoriu gidrodinamicheskoy ustoychivosti* [Introduction to the theory of hydrodynamic stability]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 288 p.

[3] Makarov K.A. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii — Engineering Journal: Science and Innovation*, 2014, iss. 1 (25). DOI: 10.18698/2308-6033-2014-1-1185

[4] Ayvazyan O.M. *Universalnyy energeticheskiy kriteriy ustoychivosti ravnomernykh laminarnykh techeniy vyazkoy neszhimayemoy zhidkosti* [Universal energy criterion for the stability of uniform laminar flows of a viscous incompressible fluid]. Moskcow; Izhevsk, NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika» IKI Publ., 2008, 128 p.

[5] Dou H.S., Khoo B.C., Tsai H.M. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2010, vol. 73, no. 1-2, pp. 41–47.

[6] Kondratyev A.S., Ovsyannikov V.M., Olofinsky E.P., Stepin B.S., Chinenkov I.A. *Transportirovanie vodougolnykh suspenziy: gidrodinamika i temperaturnyy rezhim* [Transportation of water-coal suspensions: hydrodynamics and temperature conditions]. Moscow, Nedra Publ., 1988, 213 p.

[7] Dou H.S. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2006, vol. 41, pp. 512–517.

[8] Dou H.S., Khoo B.C. *Modern Physics Letters B*, 2009, vol. 23, no. 3, pp. 457–460.

[9] Dou H.S., Khoo B.C. *Modern Physics Letters B*, 2010, vol. 24, no. 13, pp. 1437–1440.

[10] Dou H.S., Khoo B.C. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, vol. 3, no. 2, pp. 165–180.

[11] Mukund V., Hof B. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, vol. 839, pp. 76–94.

[12] Trefethen L.N., Trefethen A.E., Reddy S.C., Driscoll T.A. *Science*, 1993, vol. 261, pp. 578–584.

[13] Grossmann S. *Reviews of Modern Physics*, 2000, vol. 72, pp. 603–618.
[14] Dou H.S., Khoo B.C., Yeo K.S. *International Journal of Thermal Sciences*, 2007, vol. 46, no. 2, pp. 262–275.
[15] To Xuan Zoan. *Struktura szhimayemykh vikhrevykh techeniy Kuetta — Teylora. Diss. cand. fiz.-mat. nauk* [The structure of compressible vortex flows of Couette — Taylor. Cand. phys. and math. sci. diss.]. Moscow, MFTI Publ., 2014, 104 p.
[16] Dou H.S., Khoo B.C., Yeo K.S. *International Journal of Thermal Sciences*, 2008, vol. 47, no. 11, pp. 1422–1435.
[17] Dou H.S. *International Journal of Physical Sciences*, 2011, vol. 6, no. 6, pp. 1411–1425.

Kondratiev A.S., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Industrial Heat Power Engineering, Moscow Polytechnic University. e-mail: ask41@mail.ru

Ogorodnikov K.F., 4th year student, Department of Industrial Heat Power Engineering, Moscow Polytechnic University. Research interests: hydro-mechanics of pipe flows. e-mail: kostea.ogorodnic.1998@mail.ru