УДК 532.5:533 DOI: 10.18698/2308-6033-2020-5-1978

Использование линейных по времени формул Коши — Гельмгольца в выводах уравнения неразрывности Эйлера, Остроградского, Жуковского

© В.М. Овсянников

Московская Государственная Академия Водного Транспорта — филиал ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова, Москва, 117105, Россия;
Ноябрьский институт нефти и газа — филиал ТИУ, г. Ноябрьск, 629810, Россия;
Российский университет транспорта, Москва, 127994, Россия

Установлена причина возникновения членов второго и третьего порядков малости уравнения неразрывности, которые в волновой динамике приводят к возникновению самопроизвольных автоколебаний. Показана совместимость периодического локального несохранения количества вещества в контрольной фигуре с интегральным законом сохранения общего количества вещества в области течения. Установлена эквивалентность учета членов второго и третьего порядков малости повышению порядка дифференциальности по времени уравнения неразрывности, обеспечивающего расширение класса движений течения жидкости. Отмечена сходность конструкций неоднородных членов волнового уравнения, возникающих за счет конвективных членов уравнения движения у Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, а также за счет членов второго порядка малости уравнения неразрывности Эйлера. Показана причина утраты членов второго и третьего порядков малости по времени в выводе уравнения неразрывности М.В. Остроградского вследствие неучета потока жидких частиц, пересекающих дважды границу выпуклой контрольной фигуры по секущей, выходящих наружу за конечный интервал времени и не учтенных в балансе вещества. Указано на возможность и обоснованность появления членов высокого порядка малости в других физических законах, содержащих оператор дивергенции.

Ключевые слова: *неразрывность, автоколебания, неустойчивость, вибрации, флаттер*

Введение. В 1997–1999 гг. В.А. Бубнов указал на существование в выводе уравнения неразрывности Н.Е. Жуковского членов второго порядка малости, которыми Н.Е. Жуковский пренебрег. В 2007 г. члены высокого порядка малости были найдены в работе Л. Эйлера (1752) [1]. В последующие 15–20 лет дополнительные члены были достаточно изучены, но не нашли должного использования в волновой динамике.

Целью работы являются разъяснения вопросов, возникающих у специалистов в области волновой динамики применительно к членам второго порядка малости. Члены второго порядка малости можно использовать для более точного расчета генерации автоколебаний, вибраций, звуковых эффектов при течении сжимаемых жидкостей и газов по волновому уравнению, также имеющему второй порядок дифференциальности по времени.

Задачи работы:

– показать совместимость периодического локального несохранения количества вещества в контрольной фигуре с интегральным законом сохранения общего количества вещества в области течения;

– отметить эквивалентность учета членов второго и третьего порядка малости повышению порядка дифференциальности по времени уравнения неразрывности с расширением класса решений течения жидкости;

– обратить внимание на сходность конструкций неоднородных членов волнового уравнения, возникающих у Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [2] за счет конвективных членов уравнения движения, а также членов второго порядка малости уравнения неразрывности Эйлера;

– отметить причину утраты членов второго и третьего порядков малости по времени в выводе уравнения неразрывности Остроградского вследствие неучета потока жидких частиц, пересекающих дважды границу выпуклой контрольной фигуры по секущей за конечный интервал времени, выходящих наружу и не учтенных в балансе вещества;

– показать возможность и обоснованность появления членов высокого порядка малости в других физических законах, содержащих оператор дивергенции.

Несмотря на актуальность и важность для проведения расчетов интенсивности вибраций, оценки усталостной прочности сооружений, уравнение неразрывности с членами высокого порядка малости, содержащими якобианы, опубликованное в работе [3] и обнаруженное в 2007 г. в работах Л. Эйлера, не входит в учебники по гидрогазодинамике. (Показателем этого следует считать отсутствие термина «якобиан» в предметных указателях.)

Дополнительные члены второго и третьего порядков малости появляются в выводах уравнения неразрывности только при использовании линейных по времени формул Коши — Гельмгольца, которые использовались и М.В. Остроградским в его выводе уравнения неразрывности. Поэтому в выводе М.В. Остроградского появляются также члены высокого порядка малости, переходящие затем в правую неоднородную часть волнового уравнения, что приводит к увеличению интенсивности генерируемых потоком периодических колебаний, если их не уничтожать введением направляющих косинусов и предельными переходами интегралов. Возникающие самопроизвольно в потоках газа и жидкости автоколебания представляют опасность для прочности конструкций, ограниченной усталостными явлениями.

Известное дифференциальное уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид $\operatorname{div}\mathbf{V}=0$, где $\mathbf{V}$ — вектор скорости.

Анализ классических выводов этого уравнения показал, что оно содержит члены второго и третьего порядков малости по времени, если при его выводах используются линейные по времени соотношения Коши — Гельмгольца для закона движения жидкой частицы вдоль каждой из координат $x,\ y,\ z$:

$$x = \left(1 + at\right)x_0 + bty_0 + etz_0;$$

$$y = ctx_0 + \left(1 + kt\right)y_0 + gtz_0;$$

$$z = ftx_0 + lty_0 + \left(1 + mt\right)z_0.$$

Здесь $x_0,\ y_0,\ z_0$ — начальные значения координат жидкой частицы вдоль осей координат $x,\ y,\ z$ в момент времени $t = 0;\ a,\ b,\ c,\ e,\ f,\ g,\ k,\ l,\ m$ — постоянные коэффициенты.

Необходимо изучить причины появления этих членов второго и третьего порядков малости, их физический смысл и характер движения, который эти члены будут описывать.

В 2007 г. методом акустической аналогии было выведено волновое уравнение второго порядка по времени, в неоднородную часть которого попала сумма якобианов второго порядка из членов второго порядка малости уравнения неразрывности. Интенсивность генерируемых потоком гармонических колебаний оказалась пропорциональной квадрату суммы якобианов второго порядка поля скорости стационарного течения. В данной работе поставлен вопрос об использовании членов высокого порядка малости уравнения неразрывности в задачах волновой динамики. Они решаются с использованием волнового уравнения, имеющего более высокий, второй порядок по времени, чем система уравнений гидрогазодинамики.

При переиздании трудов Л. Эйлера в Швейцарии, предпринятом под эгидой международной редакционной коллегии, том с работами по механике жидкости переводил с латыни К. Трусделл, который члены высокого порядка малости, вычисленные Л. Эйлером, смог выразить через якобианы второго и третьего порядков, что сделало их более понятными.

В известной монографии К. Трусделла «Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред», переведенной на русский язык, уравнение неразрывности с членами высокого порядка малости отражения не нашло.

Уравнение неразрывности с членами высокого порядка малости для сжимаемого газа. В акустике волны могут образовываться и распространяться только в сжимаемых средах, имеющих переменную плотность. В 2006 г. в работе [3] выведено на основе трудов Н.Е. Жуковского уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости и для сжимаемого газа. В 2007 г. в докладе Л. Эйлера (1752) было обнаружено уравнение неразрывности, совпавшее с полученным для несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div}\mathbf{V}+\left(t-t_0\right)\left[\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}+\frac{\partial\left(v,w\right)}{\partial\left(y,z\right)}+\frac{\partial\left(w,u\right)}{\partial\left(z,x\right)}\right]+$$

$$+\left(t-t_0\right)^2\partial\left(u,v,w\right)/\partial\left(x,y,z\right)=0.$$

В более позднем докладе Л. Эйлера (1755), представленном в переводе [4], члены высокого порядка малости были исключены предельным переходом.

Для сжимаемого газа с плотностью ρ уравнение неразрывности, учитывающее члены второго и третьего порядков по времени t, записано автором настоящей работы в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\rho\mathbf{V}\right)+\left(t-t_0\right)\rho\left[\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}+\frac{\partial\left(v,w\right)}{\partial\left(y,z\right)}+\frac{\partial\left(w,u\right)}{\partial\left(z,x\right)}\right]+$$

$$+\left(t-t_0\right)^2\rho\partial\left(u,v,w\right)/\partial\left(x,y,z\right)=0.$$

В несжимаемой форме исследователям был непонятен смысл членов второго и третьего порядков, нарушающих принцип сохранения и не дающих понятных физических результатов. Введение плотности в уравнение неразрывности позволило объяснить физический смысл членов высокого порядка малости. После вывода Дж. Лайтхиллом в 1952–1954 гг. неоднородного волнового уравнения методом акустической аналогии физический смысл членов второго порядка малости уравнения неразрывности стал понятным. Члены с якобианами второго порядка приводят к генерации периодических автоколебаний, вибраций и звука. Поставленный ранее вопрос о нарушении принципа сохранения количества вещества разрешился после разделения понятий интегрального сохранения и локального (дифференциального) сохранения или несохранения.

С использованием уравнения неразрывности для сжимаемого газа, учитывающего члены второго порядка малости по времени течения, в 2007 г. было выведено методом акустической аналогии Лайтхилла волновое уравнение второго порядка дифференциальности по времени:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\left(\frac{1}{c_0^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\rho_0\left[\frac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}+\frac{\partial\left(v,w\right)}{\partial\left(y,z\right)}+\frac{\partial\left(w,u\right)}{\partial\left(z,x\right)}\right],$$

где p — звуковое давление; c_0 — скорость звука; ρ_0 — средняя плотность газа. Было получено около 10 решений волнового уравнения [5] для простых элементарных течений, показывающих согласование интенсивности генерируемых автоколебаний с экспериментами.

Наиболее неожиданным из решений следует считать моделирование регмаглиптов — регулярной системы лунок на поверхности метеорита, имеющих размер около 0,1 от его характерного диаметра. Система стоячих волн, возникающих из решения неоднородного волнового уравнения для поперечного обтекания цилиндра, амплитуды которых по окружности распределены в зависимости от полярного угла по закону $\cos(6\varphi)$, наиболее отчетливо проиллюстрирована в сборнике тезисов докладов XIX Всероссийской школы-семинара «Современные проблемы аэродинамики» [6].

Таким образом, достаточно простое обобщение уравнения неразрывности с несжимаемого варианта на вариант с учетом сжимаемости при наличии разработанного Дж. Лайтхиллом метода акустической аналогии вывода неоднородного волнового уравнения дало волновой динамике аппарат аналитического расчета в первом приближении интенсивности генерации автоколебаний по известному полю скорости и поставило вопрос о разделении понятий интегрального и дифференциального или локального сохранения.

Учет членов второго и третьего порядков уравнения неразрывности для сжимаемого газа открывает новый подход в волновой динамике. Помимо решения системы уравнений нестационарной гидрогазодинамики на компьютере с мелким шагом по времени и пространству можно использовать решение волнового уравнения, учитывая в неоднородном члене якобианы поля скорости, соответствующие стационарному обтеканию. Такой подход позволяет рассмотреть уже имеющиеся решения стационарных задач.

Обсуждение результатов. Расчет гидрогазодинамических течений начали проводить сразу после появления дифференциальных уравнений движения и неразрывности Эйлера для простейших стационарных и квазистационарных режимов. В них члены высокого порядка малости не находят проявления и были исключены Л. Эйлером предельными переходами устремления к нулю времени течения жидкости — времени деформации контрольной фигуры. Задачи волновой динамики, в которых важен учет членов высокого порядка малости уравнения неразрывности, стали решать значительно позже. Это задачи автоколебаний, вибраций, флаттера, генерации звука потоком воздуха.

Имеются три препятствия для признания наличия и реального проявления в уравнении неразрывности членов высокого порядка малости, вычисленных Л. Эйлером:

– отсутствие дополнительных членов при экспоненциальном законе движения жидкой частицы;

– отсутствие дополнительных членов в выводе М.В. Остроградского;

– локальное несохранение количества вещества во времени при включении дополнительных членов в уравнение неразрывности.

Рассмотрим эти препятствия.

Отсутствие дополнительных членов при экспоненциальном законе движения жидкой частицы. Первое из препятствий, приведенных выше, — получение точного выражения для уравнения неразрывности без дополнительных членов. Это вывод уравнения неразрывности с использованием экспоненциального по времени лагранжева закона движения жидкой частицы, действительного в областях ускоренного течения. Экспоненциальный по времени закон движения жидкой частицы появляется как результат решения системы дифференциальных уравнений. Для плоского двухмерного течения эта система уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = ax + by;$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + ky.$$

Начальные условия при $t = 0$:

$$x = x_0,\ y = y_0.$$

Решение приведенной выше системы дифференциальных уравнений и дает экспоненциальный по времени закон движения жидкой частицы. Решение имеет достаточно громоздкий вид:

$$x = \left\{\left[\frac{s-a}{s-s_0}\right]\exp(ts_0) - \left[\frac{s_0-a}{s-s_0}\right]\exp(ts)\right\}x_0 + {}$$
$$+ \left\{\left[\frac{b}{s-s_0}\right]\left[\exp(ts) - \exp(ts_0)\right]\right\}y_0;$$

$$y = \left[\frac{(s_0-a)(s-a)}{b(s-s_0)}\right]\left[\exp(ts_0) - \exp(ts)\right]x_0 + {}$$
$$+ \left\{\left[\frac{s-a}{s-s_0}\right]\exp(ts) - \left[\frac{s_0-a}{s-s_0}\right]\exp(ts_0)\right\}y_0,$$

где

$$s_0 = \frac{1}{2}\left[a + k + \sqrt{(a-k)^2 + 4bc}\right];$$

$$s = \frac{1}{2}\left[a + k - \sqrt{(a-k)^2 + 4bc}\right].$$

В работе [7] показано, что такой лагранжев закон движения жидкой частицы дает точное уравнение неразрывности без членов высокого порядка малости, но относится к ускоренным течениям жидкости и газа по экспоненциальному лагранжеву закону. Эксперимент [8] показывает, что ускоренные течения проявляют повышенную стабильность. В них переход ламинарного течения в турбулентное, сопровождающееся пульсациями, происходит при числах Рейнольдса, в сотни раз превышающих критические значения стационарных течений. Это экспериментально подтверждает важную роль членов высокого порядка малости уравнения неразрывности в генерации колебаний в потоке.

Поскольку не вся область течения занята течением, ускоренным по экспоненциальному лагранжеву закону, то имеются подобласти и с замедленным, и с ускоренным течением, но не по экспоненциальному лагранжеву закону. Именно в них и происходит волнообразование согласно используемому математическому аппарату описания течений.

В выводах Н.Е. Жуковского, Л. Эйлера и М.В. Остроградского используются соотношения Коши — Гельмгольца с линейным по времени законом движения по каждой из координат x, y, z. Для двухмерного течения они принимают вид

$$x = (1 + at)x_0 + bty_0;$$

$$y = ctx_0 + (1 + kt)y_0.$$

Здесь x_0, y_0 — начальные значения координат жидкой точки вдоль осей координат x, y в момент времени $t = 0$; a, b, c, k — постоянные коэффициенты.

В плоском течении площадь будет изменяться по квадратичному закону, в пространственном течении объем будет изменяться по закону третьей степени во времени. Линейность лагранжева закона движения и служит причиной несохранения учета площади и объема и является причиной возникновения волн.

Анализ показывает, что вид уравнения неразрывности в некоторой степени изменяется в зависимости от местного поля скорости. Появилась возможность с некоторой степенью приближенности оценить интенсивность генерации периодических волн, используя линейные по времени соотношения Коши — Гельмгольца. Это будет завышенный результат по интенсивности, но экспоненциальный закон дает нулевую интенсивность автоколебаний, вибраций и звука, чего в природе не наблюдается. Поэтому уравнение неразрывности, выведенное с использованием линейных по времени соотношений Коши — Гельмгольца, даст более правильный результат.

В монографии [7] имеется раздел «Параболизация экспоненциального закона движения жидкой частицы». Проведенные расчеты с параболизацией экспоненциального закона движения жидкой частицы вместо линейного привели к необоснованному пока усложнению зависимости уравнения неразрывности от поля скорости. Поэтому считается целесообразным проведение расчетов интенсивности генераций периодических колебаний по формулам, полученным по линейным во времени классическим соотношениям Коши — Гельмгольца.

Появление членов высокого порядка малости в выводе Остроградского при использовании интегральных сумм. Второй причиной, вызывающей недоверие к использованию членов высокого порядка малости уравнения неразрывности, является вывод М.В. Остроградского, дающий уравнение неразрывности в виде $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$ без дополнительных членов.

Формула Остроградского, представленная им в докладе в Петербургской Академии наук 5 ноября 1828 г., была опубликована в статье «Заметка по теории теплоты» на французском языке в 1831 г. Переводы статьи на русский язык имеются в нескольких изданиях полного собрания трудов М.В. Остроградского. В современных учебниках наиболее близкий вывод формулы к выводу самого М.В. Остроградского приведен в учебнике Г.М. Фихтенгольца.

М.В. Остроградский, также как Л. Эйлер и Н.Е. Жуковский, использовал линейный по времени закон втекания и вытекания жидких частиц в контрольный объем и из контрольного объема. Вывод М.В. Остроградского должен содержать члены второго и третьего порядков малости. Их наличие не требуется при решении задач обтекания тел. Но они становятся важными при расчете генерации колебаний по волновому уравнению с более высоким порядком дифференциальности, полученному методом акустической аналогии Лайтхилла взятием производных от уравнения неразрывности и от уравнения движения. Точность вывода известного уравнения неразрывности недостаточна для использования его в волновой динамике. Упрощение результата введением направляющих косинусов в баланс вещества становится недопустимым.

В имеющихся учебниках вывод М.В. Остроградского изложен кратко, конспективно. Подробное изложение должно сводиться к постулированию наличия поля скорости, неподвижного контрольного объема выпуклой формы и наличия частиц, входящих и выходящих из объема за конечный интервал времени $t - t_0$. Следует учитывать характер интервала времени, так как целью всех построений является анализ возможности генерации волн и вывод волнового уравнения, имеющего высокий порядок по времени. Для этого необходимо учесть не только конечность интервала времени $t - t_0$, но и возможность взятия по времени один или два раза производной, как это осуществляется в методе акустической аналогии Лайтхилла. Поэтому интервал времени в выводе М.В. Остроградского должен быть конечным: $t - t_0$. За бесконечно малое время жидкая частица не может пересечь границу контрольной фигуры и войти в нее или выйти. Л. Эйлер исследовал геометрические объекты конечного размера и деформировал их на конечные деформации за конечный интервал времени. Такие же условия необходимо соблюдать для получения членов высокого порядка малости и в построениях М.В. Остроградского. Для получения членов высокого порядка малости следует воздержаться в построениях от предельных переходов, так как они могут привести к исчезновению членов, которые требуется обнаружить и сохранить.

При наличии поля скорости, неподвижного выпуклого контрольного объема и конечного интервала времени $t - t_0$ возможны три ситуации для перемещения жидкой частицы:

– частица покинет контрольный объем;

– войдет в контрольный объем и останется в нем;

– дважды пересечет границу контрольного объема по секущей и выйдет из него наружу.

При увеличении интервала времени $t - t_0$ все входящие частицы могут успеть уйти за пределы контрольного объема. Именно эту важную категорию частиц М.В. Остроградский удалил из учета введением направляющих косинусов, искажающих учет действительного поля скорости. Использование интегралов в формуле Гаусса — Остроградского, содержащих предельные переходы, также приводит к исключению из учета членов высокого порядка малости. Поэтому чтобы получить члены второго и третьего порядков малости в построениях М.В. Остроградского, следует заменить интегралы интегральными суммами

$$\sum\sum\sum\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z=\sum\sum\left(P\Delta y\Delta z+Q\Delta z\Delta x+R\Delta x\Delta y\right)+\varepsilon,$$

исключить направляющие косинусы и рассмотреть действительные перемещения жидких частиц за интервал времени $t - t_0$ по секущей выпуклого контрольного объема с двойным пересечением границы за это время. Поток таких жидких частиц даст члены второго и третьего порядков малости. Следует отметить, что интегральная сумма является более первичным понятием, чем интеграл, представляющий собой результат предельных переходов в интегральной сумме. В работе [7] вычислен поток жидких частиц, совершающих двойные пересечения границы за интервал времени $t-t_0$ при обтекании невязким потоком прямого угла. Результаты по построениям выводов М.В. Остроградского и Л. Эйлера совпали по величине членов второго порядка малости при потенциальном течении внутри прямого угла.

Повышение порядка дифференциальности по времени уравнения неразрывности с расширением класса решений для течения жидкости. Учет членов второго и третьего порядков малости в уравнении неразрывности для сжимаемого газа можно рассмотреть также с точки зрения повышения дифференциальности уравнения неразрывности до второго или третьего порядка по времени.

Л. Эйлер, получив уравнение неразрывности с членами высокого порядка малости для несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div}\mathbf{V}+(t-t_0)\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+$$

$$+(t-t_0)^2\,\partial(u,v,w)/\partial(x,y,z)=0,$$

устранил члены высокого порядка малости, осуществив предельный переход устремления времени деформации $t-t_0$ к нулю. Имея уравнение неразрывности для сжимаемого газа [3], полученное в 2006 г.,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{V})+(t-t_0)\rho\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+$$

$$+(t-t_0)^2\,\rho\partial(u,v,w)/\partial(x,y,z)=0,$$

можно сохранить члены второго порядка малости, взяв один раз производную по времени от всех членов уравнения неразрывности. Это первый этап вывода волнового уравнения второго порядка по времени методом акустической аналогии. Причем член с якобианами второго порядка перестанет быть малым и будет учтен, как имеющий конечное значение. Для выяснения физического смысла полученного результата вычтем из этого уравнения производную по пространственным координатам от уравнения движения и получим волновое уравнение второго порядка по времени согласно второму этапу метода акустической аналогии Лайтхилла:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\left(\frac{1}{c_0^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\rho_0\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right].$$

Аналогичным подходом можно сохранить и эффективно использовать член с якобианом третьего порядка. Если взять производную второго порядка от уравнения неразрывности для сжимаемого газа, то получится дифференциальное уравнение третьего порядка, решения которого будут давать уединенную быстро нарастающую волну. Его изучение целесообразно сделать позже, когда расчет гармонических волн, создаваемых членами с якобианами второго порядка, будет тщательно освоен.

Такой подход позволяет использовать все получаемые геометрическим расчетом члены уравнения неразрывности и, повышая порядок дифференциальности уравнения, найти более широкий класс решений для распределения давления и плотности во времени и пространстве.

Необходимо различать интегральное сохранение и локальное, местное, дифференциальное [9]. Здесь важно использовать понятие «локальное несохранение» [10], используемое в методах регуляризации уравнений гидрогазодинамики, развивающихся в последние годы в ИПМ имени М.В. Келдыша [11–15]. Согласование дополнительных регуляризирующих членов уравнения неразрывности с членами второго порядка малости уравнения неразрывности, выведенного Л. Эйлером, обсуждается в работе [16].

Заключение. Проведенный анализ вывода уравнения неразрывности Эйлера (1752) позволил установить появление членов второго и третьего порядков малости за счет линейной зависимости от времени закона движения жидкой частицы, содержащейся в соотношениях Коши — Гельмгольца.

Показано, что вывод М.В. Остроградского уравнения неразрывности также дает члены второго и третьего порядков малости, удаляемые применением направляющих косинусов. Это приводит к искажению точной картины поля скорости и обнулению потока частиц, пересекающих контрольную фигуру по секущей с двукратным пересечением границы за конечный интервал времени.

Второй причиной выпадения из расчета членов второго и третьего порядков малости являются предельные переходы интегралов, содержащихся в используемой при выводе формуле Гаусса — Остроградского. Запись формулы Гаусса — Остроградского через интегральные суммы вместо интегралов и неиспользование направляющих косинусов приводят к возникновению членов второго и третьего порядков по времени в уравнении неразрывности. Следует отметить, что интегральные суммы являются первичными понятиями по отношению к интегралам.

Дополнительные члены дают вклад в возникновение автоколебаний, аналогичный по структуре вкладу конвективных членов уравнения движения, учтенных Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем [2].

Таким образом, появление членов второго и третьего порядков малости обусловлено линейностью по времени соотношений Коши — Гельмгольца по каждой из трех пространственных осей координат x, y, z.

Установлено, что все три классических вывода уравнения неразрывности Л. Эйлера, Н.Е. Жуковского и М.В. Остроградского содержат предпосылки для появления в них членов второго и третьего порядков малости по времени. Это показывает, что члены второго порядка малости уравнения неразрывности, вычисленные Л. Эйлером, необходимо учитывать в задачах волновой динамики в правой неоднородной части волнового уравнения, генерирующей автоколебания. В задачах расчета стационарных и квазистационарных течений членов высокого порядка малости уравнения неразрывности учитывать не следует.

Появление членов второго и третьего порядков малости в гидродинамическом уравнении неразрывности означает, что во многих формулах математической физики оператор дивергенции может быть дополнен членами высокого порядка малости. Реальное проявление членов высокого порядка малости в других разделах математической физики должно быть подтверждено экспериментально возможной генерацией волн в них.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Эйлер Л. *Принципы движения жидкостей. Перевод начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН.* 2-е изд., доп. Е.В. Иванова и В.М. Овсянников, пер. с лат. Москва, Изд-во «Спутник +», 2019, 178 с.

[2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика.* Москва, Физматлит, 2001, 736 с.

[3] Овсянников В.М. Введение в аксиоматическую механику жидкости, основанную на базисных экспериментах с жидкостью. В сб.: *Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике*, 2006, № 14, с. 23–61.

[4] Эйлер Л. Общие законы движения жидкостей. *МЖГ*, 1999, № 6, с. 26–54.

[5] Овсянников В.М. Уравнение неразрывности Эйлера 1752 г. с членами высокого порядка малости, дающими генерацию волн и автоколебаний. *XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.* В 4 т. Т. 2. Уфа, РИЦ БашГу, 2019, с. 652, 653. DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v2

[6] Овсянников В.М. Вибратор Ландау — Лифшица, генерирующий колебания во вращающихся течениях газа и жидкости. *Тезисы докладов XIX Всероссийской школы-семинара «Современные проблемы аэродинамики».* Москва, Изд-во Московского университета, 2019, с. 83.

[7] Овсянников В.М. *Волнообразование и конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера*. Москва, Изд-во «Спутник +», 2017, с. 487.

[8] Коппель Т.А., Лийв У.Р. Экспериментальное исследование возникновения движения жидкости в трубопроводах. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1977, № 6, с. 79–85.

[9] Овсянников В.М. *Локальное дифференциальное несохранение при интегральном сохранении в газовой динамике*. Москва, Изд-во «Спутник +», 2017, 273 с.

[10] Елизарова Т.Г. *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений.* Москва, Научный мир, 2007, 352 с.

[11] Шеретов Ю.В. *Математические модели гидродинамики*. Тверь, Тверской государственный университет, 2004, 80 с.

[12] Шеретов Ю.В. *Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении*. Москва, Регулярная и хаотическая динамика, 2009, 400 с.

[13] Шеретов Ю.В. *Регуляризованные уравнения гидродинамики*. Тверь, Тверской государственный университет, 2016, 222 с.

[14] Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В. Регуляризованные уравнения для численного моделирования течений гомогенных бинарных смесей вязких сжимаемых газов. *ЖВМиМФ*, 2019, т. 59, № 11, с. 1899–1914.

[15] Elizarova T.G., Ivanov A.V. Regularized equations for numerical simulation of flows in the two-layer shallow water approximation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 5, pp. 714–734.

[16] Овсянников В.М. Сопоставление дополнительных слагаемых второго порядка малости для конечно-разностных уравнений Эйлера и малых добавок в регуляризованных уравнениях гидродинамики. *ЖВМиМФ*, 2017, № 5, с. 876–880. DOI: 10.1134/S0965542517050098

Статья поступила в редакцию 04.02.2020

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:

Овсянников В.М. Использование линейных по времени формул Коши — Гельмгольца в выводах уравнения неразрывности Эйлера, Остроградского, Жуковского. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 5.

http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-5-1978

Овсянников Владислав Михайлович — д-р техн. наук, профессор Московской государственной академии водного транспорта — филиала ФГБОУ ВО «Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова», Ноябрьского института нефти и газа — филиала Тюменского индустриального университета, Российского университета транспорта. Основные работы в области радиационной газовой динамики, течения двухфазных смесей, автоколебаний.
e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru

Using time-linear Cauchy—Helmholtz formulas in the derivations of the continuity equation of Euler, Ostrogradsky, Zhukovsky

© V.M. Ovsyannikov [1, 2, 3]

[1] Moscow State Academy of Water Transport, branch of the Admiral Makarov State University Maritime and Inland Shipping, Moscow, 117105, Russia
[2]November Institute of Oil and Gas, branch of the Tyumen Industrial University, Noyabrsk, 629810, Russia
[3] Russian University of Transport, Moscow, 127994, Russia

The paper indicates the reason for the appearance of the second and third order terms of smallness of the continuity equation, which in the wave dynamics lead to the appearance of spontaneous self-oscillations. The compatibility of periodic local non-conservation of the amount of substance in the control shape with the integral law of conservation of the total amount of substance in the flow region is demonstrated. It is shown that taking into account terms of the second and third order of smallness is equivalent to the order increase of time differentiality of the continuity equation, which gives an extension of the class of fluid flow movements. Attention is drawn to the similarity of constructions of inhomogeneous terms of the wave equation arising due to the convective terms of the L.D. Landau and E.M. Lifshitz equation of motion and due to the second-order smallness terms of the Euler continuity equation. It is also shown that the loss of members of second and third order of smallness in time in the derivation of the M.V. Ostrogradsky continuity equation occurs due to the neglect of the flow of fluid particles crossing twice the border of the convex control shape along the secant line, coming outside within the finite time interval and not included in the substance balance. The possibility and validity of the appearance of terms of high-order smallness in other physical laws containing the divergence operator is indicated.

Keywords: *continuity, self-oscillations, instability, vibration, flutter*

REFERENCES

[1] Euler L. *Principia motus fluidorum. Lecture in the Berlin Academy of Sciences in 1752* [In Russ.: Euler L. Printsipy dvizheniya zhidkostey. Moscow, Sputnik+ Publ., 2019, 178 p.].

[2] Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika* [Fluid dynamics]. Moscow, Fismatlit Publ., 2001, 736 p.

[3] Ovsyannikov V.M. Vvedeniye v aksiomaticheskuyu mekhaniku zhidkosti, osnovannuyu na bazisnykh eksperimentakh s zhidkostyu [Introduction to the axiomatic fluid mechanics based on basic experiments with liquids]. In: *Problemy aksiomatiki v gidrogazodinamike* [Axiomatical Problems in Hydro-Gasdynamics]. Moscow, Edel-M Publ., 2006, no. 14, pp. 23–61.

[4] Euler L. *Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides. «Mémoires Acad. sc. Berlin»*, 1755 [In Russ.: Euler L. Izvestia RAN, Mekhanika Zhidkosti i Gaza — Fluid Dynamics, 1999, no. 6, pp. 26–54].

[5] Ovsyannikov V.M. Uravneniye nerazryvnosti Eylera 1752 g. s chlenami vysokogo poryadka malosti, dayushchimi generatsiyu voln i avtokolebaniy [Euler’s continuity equation of 1752 with members of a high order of smallness giving wave and self-oscillation generation]. *XII Vserossiyskiy syezd po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki: sbornik trudov*

[Proceedings of XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics]. In 4 volumes. Vol. 2. Ufa, Bashkirskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2019, pp. 652–653. DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v2

[6] Ovsyannikov V.M. Vibrator Landau—Lifshitsa, generiruyushchiy kolebaniya vo vrashchayushchikhsya techeniyakh gaza i zhidkosti [Landau—Lifshitz vibrator, generating oscillations in the rotating flows of gas and liquid]. *Tezisy dokladov XIX Vserossiyskoy shkoly-seminara "Sovremennyye problemy aerodinamiki"* [XIX All-Russian School-Seminar "Current Problems of Aerodynamics". Abstracts]. Moscow, MSU Publ., 2019, p. 83.

[7] Ovsyannikov V.M. *Volnoobrazovaniye i konechno-raznostnoe uravnenie nerazryvnosti Leonarda Eylera* [Wave formation and the finite-difference continuity equation of Leonard Euler]. Moscow, Sputnik+ Publ., 2017, 487 p.

[8] Koppel T.A., Liyv U.R. *Izvestia RAN, Mekhanika Zhidkosti i Gaza — Fluid Dynamics*, 1977, no. 6, pp. 79–85.

[9] Ovsyannikov V.M. *Lokalnoe differentsialnoe nesokhranenie pri integralnom sokhranenii v gazovoy dinamike* [Local differential non-conservation under integral conservation in gas dynamics]. Moscow, Sputnik+ Publ., 2017, 273 p.

[10] Elizarova T.G. *Kvazigazodinamicheskiye uravneniya i metody rascheta vyazkikh techeniy* [Quasi-gasdynamic equations and methods for calculating viscous flows]. Moscow, Nauchnyy mir Publ., 2007, 352 p.

[11] Sheretov Yu.V. *Matematicheskiye modeli gidrodinamiki* [Mathematical models of hydrodynamics]. Tver, Tverskoy gosudarstvennyy universitet Publ., 2004, 80 p.

[12] Sheretov Yu.V. *Dinamika sploshnykh sred pri prostranstvenno-vremennom osrednenii* [Dynamics of continuous media in spatio-temporal averaging]. Moscow, Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika Publ., 2009, 400 p.

[13] Sheretov Yu.V. *Regulyarizovannye uravneniya gidrodinamiki* [The regularized equations of hydrodynamics]. Tver, Tverskoy gosudarstvennyy universitet Publ., 2016, 222 p.

[14] Elizarova T.G., Zlotnik A.A., Shilnikov E.V. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoi fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, no. 11, pp. 1899–1914.

[15] Elizarova T.G., Ivanov A.V. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 5, pp. 714–734.

[16] Ovsyannikov V.M. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoi fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, no. 5, pp. 876–880. DOI: 10.1134/S0965542517050098

Ovsyannikov V.M., Dr. Sc. (Eng.), Professor, Moscow State Academy of Water Transport, branch of the Admiral Makarov State University Maritime and Inland Shipping, November Institute of Oil and Gas - a branch of the Tyumen Industrial University, Russian University of Transport. Research interests: radiation gas dynamics, the flow of two-phase mixtures, self-oscillations. e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru