УДК 539.3 DOI: 10.18698/2308-6033-2020-5-1977

Энергетический метод для решения волновых задач гибкой нити

© А.В. Брюквин[1], О.Ю. Брюквина[1]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал),
Московская область, г. Мытищи, 141005, Россия

Рассмотрено поведение гибкой деформируемой нити при прохождении по ней продольных и поперечных волн. Проанализированы процессы, происходящие в нити при прохождении по ней волнового возмущения в предположении ограниченности зоны волнового фронта по сравнению с ее длинной, но без допущения бесконечной малости этой величины. Не использовалось предположение, что участок нити до и после прохождения волны сохраняет прямолинейную форму, а сама волна представляет собой ее излом, в котором функции, описывающие нить, терпят разрыв. При описании волнового возмущения использовались только общие теоремы динамики выполнение общих теорем динамики. Получены формулы связи скорости нити до и после прохождения волны с изменением угла ее наклона, позволяющие по-новому решать задачи распространения волн. Метод проиллюстрирован новым решением известных задач, в результате которого можно провести сравнение полученных результатов с известными решениями и убедиться в преимуществах предлагаемого метода.

Ключевые слова: *гибкая нить, волна, струна*

Введение. Во многих технических задачах находят применение гибкие связи и нити, например ленточные пилы, тросы лифта, струны музыкальных инструментов, нити в текстильном производстве и космические тросовые системы. Рассмотрению движения этих систем посвящено большое количество работ [1–7], и одним из распространенных методов, применяемых при рассмотрении движения гибкой нити, является метод распространяющихся волн. В нем движение рассмотрено как последовательное прохождение по нити продольных и поперечных волн, при прохождении которых в ней меняется как натяжение, так и угол наклона. В данной работе применен энергетический подход при исследовании волновых процессов в гибкой нити. В большинстве работ по волновой динамике нити, например [1, 2, 4], волновые изменения охватывают небольшой участок, и хотя сама нить остается непрерывной в зоне прохождения волны, функции скорости и угла наклона, а также их производные терпят разрыв. Сам участок нити до и после прохождения волны считается прямолинейным ввиду малости этого участка. При коротких волнах зона волновых возмущений очень мала и этот участок можно считать прямым, однако при распространении длинных волн необходимо учитывать кривизну этого участка. В настоящей работе заранее не накладываются какие-либо ограничения на форму участка, по которому распространяется волна, т. е. допускается его кривизна. Кроме того, при данном подходе отсутствует требование о разрывности вектора угла наклона и вектора скорости.

Цель настоящей статьи — получение наиболее общих формул, описывающих процессы распространения волн в гибкой нити.

Постановка задачи. Обычно для описания точек нити выбирают лагранжеву координату S, откладываемую по длине нити в недеформируемом состоянии. Рассмотрим элемент нити длиной ΔS, имеющий погонную плотность в недеформируемом состоянии ρ. Угол наклона этого элемента в пространстве описывается единичным вектором $\overline{\tau}$. При этом у элемента есть вектор — скорость $\overline{v}$, и на него действует сила натяжения, описываемая вектором $\overline{F}$. После прохождения волнового возмущения натяжение и положение элемента в пространстве изменяются.

Рассмотрим изменения, происходящие в элементе нити за время Δt. Будем считать, что за это время волновое возмущение, имея конечную скорость, затронет элемент ΔS, длина которого до прохождения волны составит $(1 + \varepsilon_1)\Delta S$, а после ее прохождения — $(1 + \varepsilon_2)\Delta S$. Удлинения ε_1 и ε_2 зависят от сил натяжения и изменения скоростей при прохождении волны. Изменение кинетической и потенциальной энергии происходит с элементом массы $\rho\Delta S$. На рис. 1 схематически показаны участки:

- до прохождения возмущения с наклоном $\overline{\tau}_1$ и скоростью $\overline{v}_1$;
- после прохождения возмущения с наклоном $\overline{\tau}_2$ и скоростью $\overline{v}_2$.

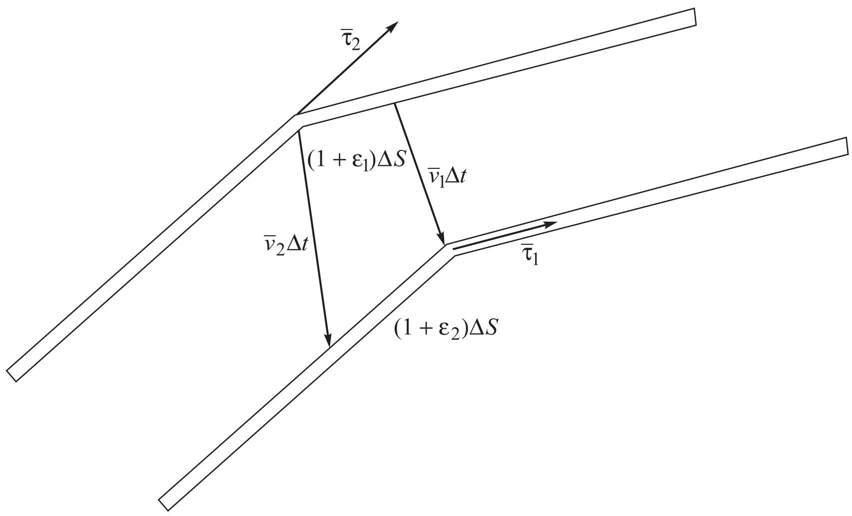

Рис. 1. Схема движения нити

Волновое возмущение условно движется слева направо. На границах участка действуют силы натяжения, величины которых равны, соответственно, F_1 и F_2, направленные по касательным к нити в соответствующих точках. Далее в статье при рассмотрении сил натяжения разделяется понятие величина сил F_1 и F_2 (скалярная величина без вектора) и их направление, задаваемое единичными векторами $\overline{\tau}_1$ и $\overline{\tau}_2$. На рис. 1 зона волны показана с изломом, как у многих авторов [1, 2], но в настоящей работе это требование не является обязательным и форма изменения нити может быть любой.

Все характеристики нити на рис. 1 маркируются индексами: 1 — до прохождения волны, 2 — после прохождения. Применим теорему об изменении кинетической энергии для описания происходящих процессов, учитывая, что внешние силы натяжения F_1 и F_2, действующие на границах рассматриваемого элемента, совершат работу соответственно на перемещениях $\overline{v}_1\Delta t$ и $\overline{v}_2\Delta t$:

$$\frac{1}{2}\rho\Delta S\left(\vec{v}_2^2-\vec{v}_1^2\right)=\left(F_2\vec{\tau}_2\vec{v}_2-F_2\vec{\tau}_2\vec{v}_2\right)\Delta t-\Delta A \tag{1}$$

или

$$\frac{1}{2}\rho\Delta S\left(\vec{v}_2-\vec{v}_1\right)\left(\vec{v}_2+\vec{v}_1\right)=\left(F_2\vec{\tau}_2\vec{v}_2-F_2\vec{\tau}_2\vec{v}_2\right)\Delta t-\Delta A,$$

где ΔA — работа внутренних сил, которая может включать в себя как работу потенциальных сил $\Delta\Pi$, так и работу диссипативных сил. В данном случае авторы настоящей статьи учитывают кинетическую энергию только поступательного движения и не принимают во внимание вращательного, поскольку момент инерции линейного элемента массы $\rho\Delta S$ и длиной ΔS будет иметь порядок малости ΔS^3, что пренебрежимо мало по сравнению с ΔS.

Помимо теоремы об изменении кинетической энергии должна выполняться и теорема об изменении количества движения, которая в данном случае будет иметь вид

$$\rho\Delta S\left(\vec{v}_2-\vec{v}_1\right)=\left(F_2\vec{\tau}_2-F_2\vec{\tau}_2\right)\Delta t. \tag{2}$$

Подставив уравнение (2) в уравнение (1), получим:

$$\frac{1}{2}\left(F_2\vec{\tau}_2-F_2\vec{\tau}_2\right)\left(\vec{v}_2+\vec{v}_1\right)\Delta t=\left(F_2\vec{\tau}_2\vec{v}_2-F_2\vec{\tau}_2\vec{v}_2\right)\Delta t-\Delta A.$$

Запишем выражение для работы внутренних сил, раскрыв скобки и приведя подобные члены:

$$\Delta A=\frac{1}{2}\left(F_2\vec{\tau}_2+F_2\vec{\tau}_2\right)\left(\vec{v}_2-\vec{v}_1\right)\Delta t. \tag{3}$$

Подставляя в уравнение (3) разность скоростей из уравнения (2), получаем такое выражение для работы внутренних сил:

$$\Delta A = \frac{1}{2}\frac{\left(F_2^2 - F_1^2\right)}{\rho\dfrac{\Delta S}{\Delta t}}, \tag{4}$$

где $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ — лагранжева скорость распространения возмущения или скорость распространения волны. Принято подразделять волны на продольные $V_{\text{пр}}$ и поперечные $V_{\text{п}}$. При рассмотрении поперечных волн обычно считают, что сила натяжения не изменяется при прохождении волны, а изменяется только угол наклона элемента, в этом случае внутренние силы также не будут совершать работу.

В случае если натяжение изменяется по закону Гука, т. е. $F_1 = E\varepsilon_1$, $F_2 = E\varepsilon_1$, где E — модуль упругости; ε — удлинение элемента на соответствующем участке, работа внутренних сил будет равна изменению потенциальной энергии упругой деформации и для элемента длиной ΔS за время Δt может быть вычислена как

$$\Delta A = \frac{\Delta S}{\Delta t}\left(\frac{E\varepsilon_2^2}{2} - \frac{E\varepsilon_1^2}{2}\right).$$

Подставим это выражение работы и выражение для натяжения в формулу (4). Тогда нетрудно получить хорошо известное равенство для скорости распространения продольных волн:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = V_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{5}$$

Уравнение для скорости продольной волны (5) подставим в уравнение импульсов (2) и, учитывая неизменность векторов $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$, получим выражение для определения изменения удлинения при прохождении продольной волны:

$$\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) = V_{\text{пр}}\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right). \tag{6}$$

Кроме того формула (4) позволяет найти скорость распространения волн, если в материале имеется диссипация энергии, в этом случае скорость уменьшится из-за увеличения работы внутренних сил. Следует отметить, что поскольку формула (4) имеет скалярный характер, то это будет верно не только при распространении продольной волны по прямой, но и при ее распространении по криволинейному участку нити.

При распространении поперечной волны и ввиду отсутствия диссипации энергии натяжение изменяется только по направлению, а по величине оно остается постоянным. Таким образом, работа внутренних сил будет равна нулю. Тогда, исходя из формулы (3), можно записать:

$$\left(\vec{\tau}_2+\vec{\tau}_1\right)\left(\vec{v}_2-\vec{v}_1\right)=0. \tag{7}$$

Следует отметить, что формула (7) может быть получена из математического выражения изменения импульсов (2) с помощью умножения обеих ее частей на $\left(\vec{\tau}_2+\vec{\tau}_1\right)$, полагая, что $F_1 = F_2$. Физический смысл (7) очевиден и означает, что проекции скоростей в различных точках элемента на касательную равны до и после прохождения волны, так же как в твердом теле.

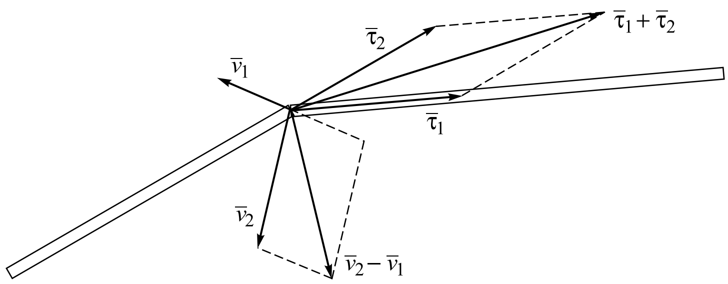

Рис. 2. Геометрическое представление изменения скорости нити

Формула (7) позволяет иметь простое геометрическое решение: представление изменения скорости нити в зависимости от изменения ее угла наклона (рис. 2). Из построений видно, что проекции скоростей на биссектрису угла излома нити θ равны, т. е.

$$\vec{v}_2\cos\frac{\theta}{2}=\vec{v}_1\sin\frac{\theta}{2} \text{ или } \vec{v}_2=\vec{v}_1\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}. \tag{8}$$

Проверим работу полученных формул на простейших задачах, имеющих тривиальное решение. Рассмотрим растянутую струну с начальным удлинением ε_0, которая в начальный момент имеет форму равнобедренного треугольника с вершиной в точке O. После начала движения через время t струна приобретет форму трапеции, показанную на рис. 3.

Форма струны $B_1A_1A_2B_2$ — результат прохождения по струне продольных волн (точки B_1, B_2) и поперечных волн (точки A_1, A_2). Рассмотрим длину струны в этот момент времени.

Вначале вычислим длины отрезков:

$$|OB_1| = |OB_2| = (1+\varepsilon_0)St = (1+\varepsilon_0)V_{\text{пр}}t.$$

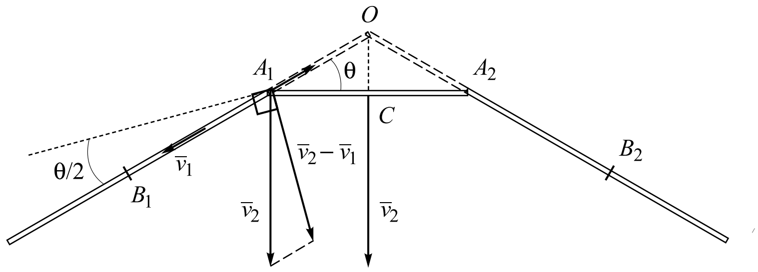

Рис. 3. Форма растянутой струны

После прохождения волны удлинение изменится и составит ε_1, соответственно длина участков уменьшится на величину $(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)V_{\text{пр}}t$. Учитывая (6), уменьшение длины ΔL составит $v_1 t$, поскольку в начальный момент времени скорость точек струны была равна нулю. В то же время это изменение длины есть разница между длинами $|OB_1|$ и $|CA_1B_1|$, которая при $|OC| = v_2 t$ составит

$$\Delta L = \frac{v_2 t}{\sin\theta} - \frac{v_2 t}{\operatorname{tg}\theta} = \left(v_2 \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)t.$$

С учетом (8) получим такое же уменьшение длины ΔL, равное $v_1 t$.

Следует отметить, что применение формул (3), (4) возможно и в интегральной форме, а также для случая произвольно изогнутой формы струны. Применим эти формулы к известной задаче о поперечном перпендикулярном ударе по нити с постоянной скоростью. В этом случае достаточно рассмотреть только одну из частей нити (рис. 4).

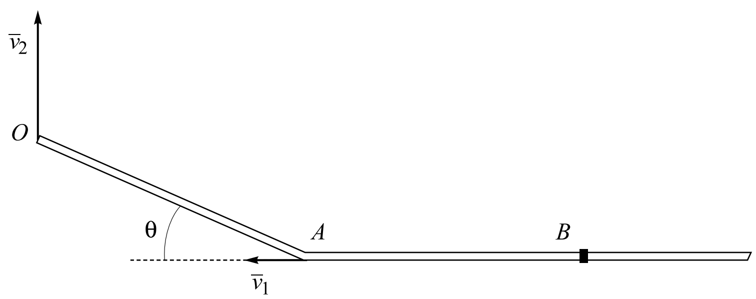

Рис. 4. Схема поперечного перпендикулярного удара по струне с постоянной скоростью

Точка удара O движется с постоянной скоростью $\overline{v}_2$, в это время по нити распространяются:

- продольная волна (точка B) со скоростью $V_{\text{пр}}$;
- поперечная волна (точка A) со скоростью $V_{\text{п}}$.

Изменения скорости и направления нити происходят только в зонах прохождения волн, на всех остальных участках нить имеет прямолинейную форму и постоянную скорость во всех точках. Будем считать, что нить имела начальное растяжение ε_0, после прохождения продольной волны получит удлинение ε_1, которое останется постоянным на всей длине от O до B, поскольку поперечная волна не меняет натяжения. Общая длина участка будет изменяться по формуле

$$\left|OA\right|+\left|AB\right|=V_{\text{пр}}t-\frac{v_2 t}{\operatorname{tg}\theta}+\frac{v_2 t}{\sin\theta}=\left(V_{\text{пр}}+v_2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)t.$$

Учитывая (8), получаем $(V_{\text{пр}} + v_1)t$. Однако за время Δt участок ΔS удлиняется на величину $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$, т. е. скорость удлинения составит $V_{\text{пр}}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)$, общая длина увеличится по закону $V_{\text{пр}}(1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0))t$. Сравнивая эти формулы, справедливо записать:

$$v_1=V_{\text{пр}}\left(\varepsilon_1-\varepsilon_0\right).$$

Аналогичный результат можно получить, применяя (6) для продольной волны.

Заключение. Основным результатом работы стало получение формул, описывающих процесс распространения волн в гибких нитях, в более общей форме. Поскольку при описании используются только общие теоремы динамики, иных предположений о разрывах, изломах и каких-либо иных формах нити не делается. Этот подход позволяет рассматривать волну не только в виде скачкообразного излома нити, но и как зону произвольной формы, в которой происходят изменения импульса кинетической и потенциальной энергий. Благодаря этому методу можно уточнить решения задач, рассмотренных в работах [8–15]. Становится возможным учет диссипативных сил при прохождении волны.

В результате проведенного исследования в настоящей статье получены формулы, позволяющие:

- решать задачи распространения волн в более простой форме;
- получать оценку уровня диссипации энергии при прохождении волн, имея решения натурного либо численного эксперимента.

Эти формулы могут быть использованы при исследовании вязкоупругих свойств материалов. Настоящая статья охватывает далеко не все аспекты метода исследования волн в гибких нитях, поскольку его использование возможно для огромного класса задач и служит для демонстрации перспектив при применении нового подхода к описанию движения волн в гибких нитях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках*. Москва, Логос, 2009, 511 с. ISBN 978-5-98704-422-7

[2] Рахматулин Х.А., Шемякин Е.И., Демьянов Ю.А. *Прочность и разрушение при кратковременных нагрузках.* Москва, Университетская книга; Логос, 2008, 624 с.

[3] Демьянов Ю.А. К уточнению теории колебаний струн. *Доклады Академии наук*, 1999, т. 369, № 4, с. 461–465.

[4] Звягин А.В., Зубков А.Ф., Панфилов Д.И. Скользящий удар по гибкой растяжимой нити. Теория и эксперимент. *Прикладная физика и математика*, 2018, № 3, с. 50–60.

[5] Демьянов Ю.А., Кокорева Д.В., Малашин А.А. Взаимовлияние поперечных и продольных колебаний в музыкальных инструментах. *Прикладная математика и механика*, 2003, т. 67, вып. 2, с. 272–282.

[6] Звягин А.В., Панфилов Д.И. Динамика нити переменной длины. *Сборник научных статей по итогам международной научно-практической конференции*. Санкт-Петербург, КультИнформПресс, 2014, с. 50–56.

[7] Болотов А.А., Демьянов Ю.А. К решению задачи о волне разгрузки. *Прикладная математика и механика*, 2013, т. 77, № 1, с. 161–166.

[8] Демьянов Ю.А., Малашин А.А. К решению проблемы удара твердым телом по гибкой деформируемой струне при возникновении деформации сжатия. *Доклады Академии наук*, 2007, т. 413, с. 45–49.

[9] Брюквина О.Ю., Лобачев В.И., Малашин А.А. Задача о размотке нити с грузом. *Вестник Московского государственного университета леса — Лесной вестник*, 2012, т. 6, № 89, с. 4–8.

[10] Брюквин А.В., Брюквина О.Ю. Распределение энергии между продольными и поперечными движениями гибкой деформируемой нити. *Вестник Московского государственного университета леса — Лесной вестник*, 2008, № 2, с. 141–143.

[11] Брюквин А.В., Брюквина О.Ю. О решении уравнений малых пространственных колебаний растянутой нити в цилиндрических координатах. *Лесной вестник / Forestry Bulletin*, 2018, т. 22, № 2, с. 134–139.
DOI: 10.18698/2542-1468-2018-2-134-139

[12] Брюквин А.В., Брюквина О.Ю. Метод расчета распределения натяжения гибкой деформируемой нити. *Подъемно-транспортное дело*, 2018, № 3–4 (93), с. 6–10.

[13] Малашин А.А., Демьянов Ю.А., Дьяков П.А., Брюквина О.Ю. Математическое моделирование динамики тросовой системы. *Сборник трудов II Всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике». Москва, 22–23 ноября 2017 г.*, МГТУ им. Н.Э. Баумана. Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, с. 139–144.

[14] Абрамян А.К., Вакуленко С.А., Индейцев Д.А. Локализованные волны в струне бесконечной длины, лежащей на поврежденном упругом основании при конечном числе ударов. *Изв. РАН. Механика твердого тела*, 2016, № 5, с. 94–100.

[15] Malashin A.A., Smirnov N.N., Bryukvina O.Yu., Dyakov P.A. Dynamic control of the space tethered system. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, vol. 389, pp. 41–51.

Статья поступила в редакцию 17.02.2020

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:

Брюквин А.В., Брюквина О.Ю. Энергетический метод для решения волновых задач гибкой нити. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 5. http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-5-1977

Брюквин Александр Владимирович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Автоматизация технологических процессов, оборудование и безопасность производств» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал). e-mail: bryukvin_a@mail.ru

Брюквина Ольга Юрьевна — ст. преподаватель кафедры «Прикладная математика, информатика и вычислительная техника» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Мытищинский филиал).

Strain energy method for solving wave problems of a flexible thread

© A.V. Bryukvin, O.Yu. Bryukvina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The paper considers the behavior of a flexible deformable thread when longitudinal and transverse waves pass through it. The processes occurring in a thread during the passage of a wave perturbation through it are analyzed under the assumption that the wave front zone is limited comparing with the length of the thread but not assuming this quantity to be of infinite smallness. In contrast to other similar works, no assumptions were made in advance about the shape of the thread in the zone of the wave perturbation passage (the fracture of the thread) and the dependence of the tension force on its elongation. The only requirement is the implementation of the general theorems of dynamics. Formulas for the relation of the thread speed before and after the passage of the wave with a change in the angle of thread inclination are obtained making possible solving wave propagation problems in a new way. The method is illustrated by new solutions to known problems, which allows comparing the obtained results with known solutions and verifying the advantages of the proposed method.

Keywords: *flexible thread, wave, string*

REFERENCES

[1] Rakhmatulin H.A., Demyanov Yu.A. *Prochnost pri intensivnykh kratkovremennykh nagruzkakh* [Strength under intense short-term loads]. Moscow, Logos Publ., 2009, 511 p. ISBN 978-5-98704-422-7

[2] Rakhmatulin Kh.A., Shemyakin E.I., Demyanov Yu.A. *Prochnost i razrushenie pri kratkovremennykh nagruzkakh* [Strength and fracture under short-term loads]. Moscow, Universitetskaya kniga, Logos Publ., 2008, 624 p.

[3] Demyanov Yu.A. *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Academy of Science*, 1999, vol. 369, no. 4. pp. 461–465.

[4] Zvyagin A.V., Zubkov A.F., Panfilov D.I. *Prikladnaya fizika i matematika — Applied Physics and Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 50–60.

[5] Demyanov Yu.A., Kokoreva D.V., Malashin A.A. *Prikladnaya fizika i matematika — Applied Physics and Mathematics*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 272–282.

[6] Zvyagin A.V., Panfilov D.I. Dinamika niti peremennoy dliny [Dynamics of a thread of variable length]. *Sbornik nauchnykh statey po itogam mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Collection of scientific articles further to results of the international scientific-practical conference]. St. Petersburg, KultInformPress Publ., 2014, pp. 50–56.

[7] Bolotov A.A., Demyanov Yu.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika — Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 161–166.

[8] Demyanov Yu.A., Malashin A.A. *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Academy of Science*, 2007, vol. 413, pp. 45–49.

[9] Bryukvina O.Yu., Lobachev V.I., Malashin A.A. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta lesa / Lesnoy vestnik — Moscow State Forest University Bulletin / Forestry Bulletin*, 2012, vol. 6, no. 89, pp. 4–8.

[10] Bryukvin A.V., Bryukvina O.Yu. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta lesa / Lesnoy vestnik — Moscow State Forest University Bulletin / Forestry Bulletin*, 2008, no. 2, pp. 141–143.

[11] Bryukvin A.V., Bryukvina O.Yu. *Lesnoy vestnik — Forestry Bulletin*, 2018, vol. 22, no. 2, pp. 134–139. DOI: 10.18698/2542-1468-2018-2-134-139

[12] Bryukvin A.V., Bryukvina O.Yu. *Podyemno-transportnoe delo — Lift and Transportation Engineering*, 2018, no. 3-4, pp. 6–10.

[13] Malashin A.A., Demyanov Yu.A., Dyakov P.A., Bryukvina O.Yu. Matematicheskoe modelirovanie dinamiki trosovoy sistemy [Mathematical modeling of the cable system dynamics]. *Sbornik trudov II Vserossiyskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Mekhanika i matematicheskoe modelirovanie v tekhnike". Moskva, MGTU im. N.E. Baumana, 22–23 noyabrya 2017 g*. [Proceedings of the II All-Russian Scientific and Technical Conference "Mechanics and Mathematical Modeling in Engineering". Moscow, BMSTU, November 22-23, 2017). Moscow, BMSTU Publ., 2017, pp. 139–144.

[14] Abramyan A.K., Vakulenko S.A., Indeytsev D.A. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela — Mechanics of Solids*, 2016, no. 5, pp. 94–100.

[15] Malashin A.A., Smirnov N.N., Bryukvina O.Yu., Dyakov P.A. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, vol. 389, pp. 41–51.

Bryukvin A.V., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: bryukvin_a@mail.ru

Bryukvina O.Yu., Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University.