

Об одной нелинейной задаче оптимальной встречи

© Э.И. Макиева, О.Ю. Черкасов

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия

Рассмотрена задача оптимальной встречи в горизонтальной плоскости двух материальных точек в нелинейной постановке. Скорости игроков в указанной задаче постоянны по модулю. Цель управления процесса встречи игроков — минимизация конечного расстояния между игроками при заданных начальных условиях. Задача рассматривается на фиксированном отрезке времени. В качестве управления принят угол между линией визирования и вектором скорости первого игрока; второй игрок использует метод пропорционального наведения. Такая задача может быть актуальна при планировании траекторий сближения самолета-заправщика с беспилотным летательным аппаратом. Применение принципа максимума позволяет свести задачу оптимального управления к анализу фазового портрета системы двух нелинейных дифференциальных уравнений. Проведен качественный анализ системы, исследованы характерные свойства траекторий игроков в горизонтальной плоскости, приведены результаты численного решения краевой задачи.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, метод пропорционального наведения, фазовый портрет, задача оптимального управления.

Введение. Задачи преследования-уклонения традиционно относятся к классическим примерам теории дифференциальных игр и исследуются на основе игрового подхода. Обзор ключевых работ подобного рода приведен в статье [1]. В настоящее время в научных публикациях применяют иной подход, когда стратегия одного из игроков фиксируется, для другого — решается задача оптимального управления. Этот подход, концептуально проще, чем игровой, позволяет применять более реалистичные модели для описания движения игроков. В качестве фиксированной стратегии преследователя применяется метод пропорционального наведения с постоянным коэффициентом, который при некоторых постановках является оптимальной стратегией для преследователя [2]. В работах [3, 4] рассмотрена гибридная стратегия преследователя, когда коэффициент в законе пропорционального наведения может быть переменным. В большинстве работ по оптимальным задачам преследования-уклонения, где результаты удавалось получить в замкнутом виде, авторами предполагалось, что относительная траектория может быть линеаризована около начальной линии визирования. Такая гипотеза справедлива, когда до встречи остается несколько секунд, т. е. при анализе заключительного этапа сближения. При этом необходимо учитывать запаздывание в системе наведения преследователя. Однако если время

процесса настолько велико, что линия визирования может поворачиваться на углы больше $\pi/4$, следует использовать нелинейные кинематические уравнения. В этом случае запаздыванием в системе наведения можно пренебречь. В работе [5] с использованием точных нелинейных уравнений движения был получен оптимальный закон наведения для летательного аппарата (ЛА), преследующего маневрирующую цель. Авторы [5] предположили, что преследователь владеет полной информацией о движении цели. Такой же подход в случае перехвата в плоскости применяется в работе [6]. Задача оптимального уклонения от преследователя, использующего метод пропорционального наведения рассматривается в статье [7]. Задача максимизации времени до захвата цели была исследована с предположениями, что отношение скоростей и значение константы в законе пропорционального наведения являются такими, что захват цели гарантирован. В работе [8] проведен качественный анализ задачи оптимального уклонения на плоскости от преследователя, использующего метод пропорционального наведения.

Цель настоящей статьи — решение задачи минимизации конечного расстояния между игроками (игрок 1, игрок 2) за фиксированное время. Авторы настоящей статьи продолжают исследование, начатое в [9].

В качестве математической модели задачи используется, как и в [5–11], модель Маркова — Дубинса, т. е. исследуется кооперативная игра, в которой стратегия одного игрока подлежит определению, а стратегия другого является фиксированной. Вместо задачи уклонения авторы настоящей статьи рассматривают задачу оптимальной встречи с ЛА, использующим метод пропорционального наведения. Такая задача актуальна при планировании траекторий сближения самолета-заправщика с беспилотным ЛА. Метод исследования основан на подходе, примененном в работе [8].

Постановка задачи. Уравнения движения игроков имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos \alpha - b \cos \beta, \\ \dot{\beta} = a(\sin \alpha - b \sin \beta) / r; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{\eta} = (\sin \alpha - b \sin \beta) / r, \\ \dot{x}_1 = \cos(\eta + \alpha), \\ \dot{y}_1 = \sin(\eta + \alpha), \\ \dot{x}_2 = \cos(\eta + \beta), \\ \dot{y}_2 = \sin(\eta + \beta). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь r — безразмерное расстояние между игроками; β — угол между вектором скорости второго игрока и линией визирования; α —

угол между вектором скорости первого игрока и линией визирования (данный угол авторами настоящей статьи будет рассмотрен в качестве управления); η — угол между линией визирования и фиксированной осью; $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ — координаты первого и второго игроков соответственно; a — постоянная, связанная с константой закона пропорционального наведения выражением $a = k - 1$, $a > 0$; b — отношение скоростей второго и первого игроков, $b > 0$ (рис. 1). Производная по безразмерному времени обозначена точкой. Векторы скоростей игроков обозначены V_1 и V_2 , а сами игроки — цифрами 1 и 2.

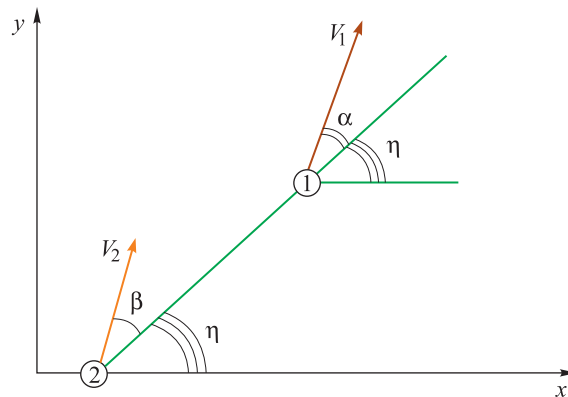


Рис. 1. Геометрия встречи игроков

Краевые условия для систем (1), (2) имеют вид:

$$r(0) = r_0, \beta(0) = \beta_0, \quad (3)$$

$$\eta(0) = \eta_0, x_1(0) = x_{10}, y_1(0) = y_{10}, x_2(0) = x_{20}, y_2(0) = y_{20}.$$

По условию задачи время окончания процесса T задано.

Целью управления является минимизация функционала J :

$$J = r(T) \rightarrow \min_{\alpha \in U}. \quad (4)$$

Система (1) отделяется от системы (2). Если экстремальный закон $r(t), \alpha(t), \beta(t)$ найден, то остальные переменные задачи можно найти с помощью квадратур. Задача оптимального управления принимает следующий вид: на траекториях системы (1) с начальными условиями (3) минимизировать функционал (4). Конечные условия системы (1) свободны.

Анализ задачи. Функция Понтрягина H [12] для задачи (1), (3), (4) имеет вид

$$H = \psi_r (\cos \alpha - b \cos \beta) + \psi_\beta a (\sin \alpha - b \sin \beta) / r = C,$$

где C — константа.

Уравнения для сопряженных переменных запишутся в виде:

$$\dot{\psi}_r = a(\sin \alpha - b \sin \beta) \psi_\beta / (r)^2, \quad (5)$$

$$\dot{\psi}_\beta = b(-\psi_r \sin \beta + \psi_\beta a \cos \beta / r). \quad (6)$$

Из условий трансверсальности получим следующие соотношения:

$$\psi_r(T) = -1, \psi_\beta(T) = 0. \quad (7)$$

Условия максимума функции H по управлению α имеют вид:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0 \Leftrightarrow (\psi_\beta a \cos \alpha) / r - \psi_r \sin \alpha = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \alpha^2} \leq 0 \Leftrightarrow -(\psi_\beta a \sin \alpha) / r - \psi_r \cos \alpha \leq 0. \quad (9)$$

Из соотношений (8) получаем

$$\psi_\beta = (r \psi_r \operatorname{tg} \alpha) / a. \quad (10)$$

Из условий трансверсальности (7) и (9) следует $\operatorname{tg} \alpha(T) = 0$, $\psi_r \cos \alpha > 0$, откуда $\alpha(T) = \pi$. Дифференцируя соотношение (10) по времени как сложную функцию по аргументу t в силу системы уравнений (1), (5), (6), получаем выражение для α :

$$\begin{aligned} (\psi_\beta)^* &= (r \psi_r \operatorname{tg} \alpha / a)^* \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \dot{\psi}_\beta = \psi_r r (\operatorname{tg} \alpha)^* + \psi_r \dot{r} \operatorname{tg} \alpha + (\psi_r)^* r \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a \dot{\psi}_\beta = \dot{\alpha} r \psi_r / (\cos \alpha)^2 + \psi_r \operatorname{tg} \alpha \cdot \dot{r} + r \operatorname{tg} \alpha \cdot \dot{\psi}_r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a(ab \cos \beta \psi_\beta / r - b \sin \beta \psi_r) = r \psi_r \dot{\alpha} / (\cos \alpha)^2 + \\ &\quad + \operatorname{tg} \alpha (\cos \alpha - b \cos \beta) \psi_r + \psi_\beta a \operatorname{tg} \alpha (\sin \alpha - b \sin \beta) / r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dot{\alpha} r \psi_r / (\cos \alpha)^2 = r \psi_r a^2 b \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \beta / r - ab \sin \beta \psi_r - \operatorname{tg} \alpha (\cos \alpha - \\ &\quad - b \cos \beta) \psi_r - r^2 a (\operatorname{tg} \alpha)^2 (\sin \alpha - b \sin \beta) / (r^2 a) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dot{\alpha} = \left[b(a+1) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - b \sin \beta (a(\cos \alpha)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (\sin \alpha)^2) - \sin \alpha \right] / r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dot{\alpha} = b(a+1) \cos \alpha \cdot \sin(\alpha - \beta) / r - (\sin \alpha - b \sin \beta) / r. \quad (11) \end{aligned}$$

Таким образом, задача оптимального управления в (1), (3), (4) сведена к следующему: найти решения системы трех дифференциальных уравнений

решения v представлены точками типа неустойчивого узла;

$b < 1$:

решения $(0, \pi), (-\pi, 0), (\pi, 0), (0, -\pi)$ представлены точками типа седла;

решение $(0, 0)$ представлено точкой типа устойчивого фокуса или узла;

решения $(-\pi, \pi), (\pi, \pi), (-\pi, -\pi), (\pi, -\pi)$ представлены точками типа неустойчивого фокуса или узла.

Фазовые портреты системы (14) со значениями параметра $b = 2$ и $b = 1/2$ представлены на рис. 2, a, \bar{b} соответственно. Анализ фазовых портретов позволяет определить качественные характеристики экстремальных траекторий.

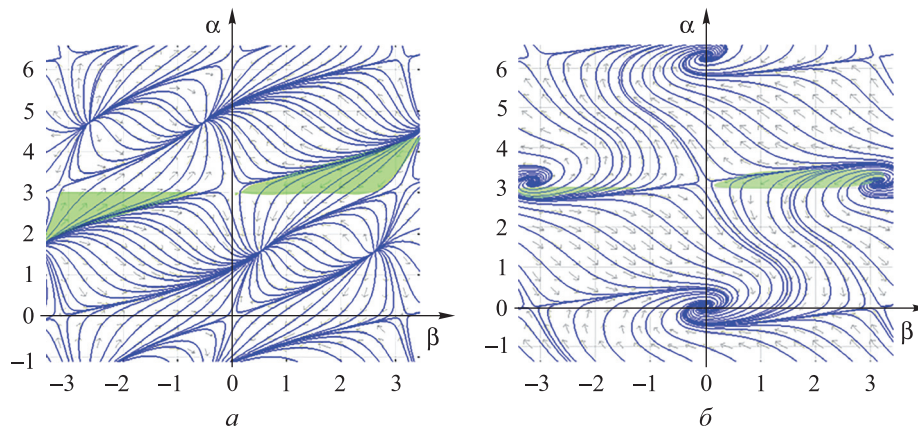


Рис. 2. Фазовые портреты системы (14):

a — $a = 1, b = 2$; \bar{b} — $a = 1, b = 1/2$

Области начальных условий, из которых возможно достижение конечного многообразия, на фазовом портрете выделены зеленым цветом. Из анализа фазового портрета следует:

- если $\beta_0 > 0$, то $\alpha_0 > \pi$;
- если $\beta_0 < 0$, то $\alpha_0 < \pi$.

В соответствии с фазовым портретом α_0 и β_0 лежат в разных полуплоскостях. По данным на рис. 2 видно, что при $b > 1$ функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ вдоль экстремальной траектории меняются монотонно. При больших временах наибольший вклад в функционал вносит движение в окрестности точки типа седла.

Результаты численного моделирования. Численное решение краевой задачи (12), (13), к которой была сведена задача оптимального управления (1), (3), (4), было проведено при $a = 1, b = 2$ и $a = 1, b = 1/2$. Результаты расчетов показаны на рис. 3, a, v, δ и 4, a, v, δ .

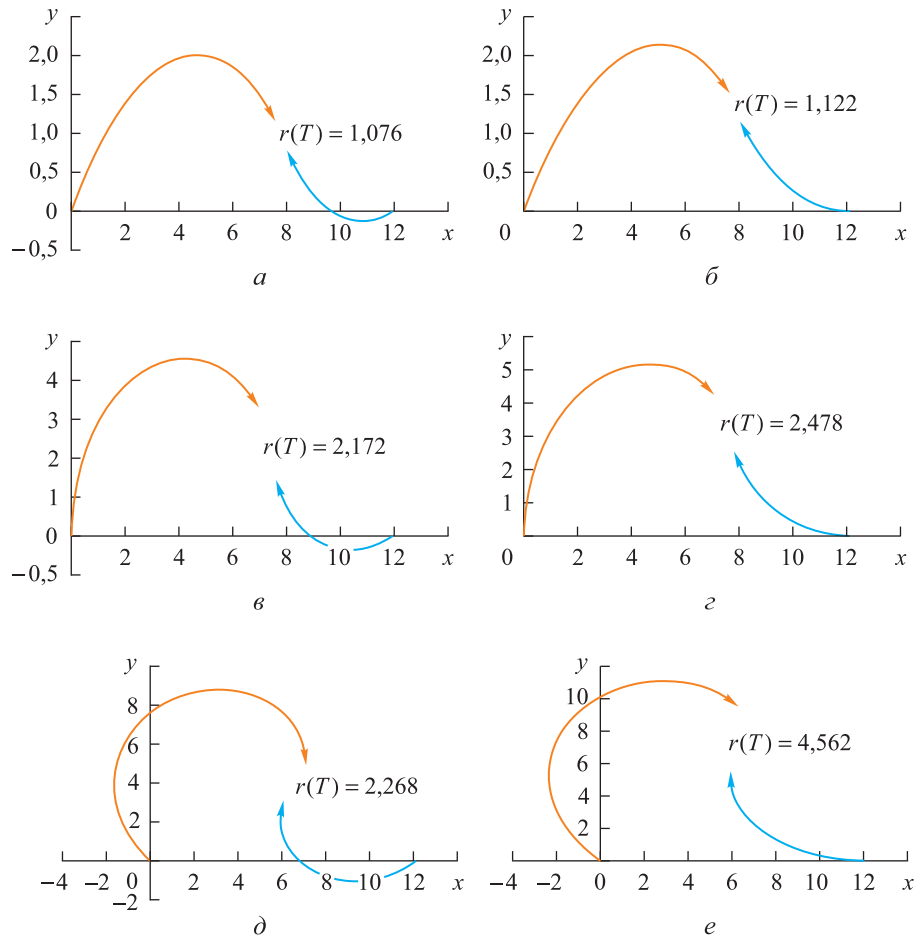


Рис. 3. Траектории движения первого и второго игроков в плоскости (x, y) при $a = 1, b = 2$:

$$a, б — \beta_0 = \pi / 4, r_0 = 12, T = 4; \quad в, г — \beta_0 = \pi / 2, r_0 = 12, T = 5;$$

$$д, е — \beta_0 = 3\pi / 4, r_0 = 12, T = 9$$

Краевая задача (12), (13) решалась методом стрельбы и дихотомии, решение соответствующих задач Коши проводилось в MATLAB ODE 45 (метод Рунге — Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования).

Траектории движения игроков в плоскости (x, y) были получены путем интегрирования систем (2), (12). Результаты моделирования согласуются с анализом фазового портрета. Следует отметить, что в начальный момент времени векторы скоростей первого и второго игроков оказались направлены в разные стороны от линии визирования. В качестве траектории сравнения было проведено моделирование для иной стратегии первого игрока: для метода погони, при кото-

ром его вектор скорости в каждый момент времени направлен точно на второго игрока (конечное условие на положение вектора скорости первого игрока также выполняется). Соответствующие траектории сравнения приведены на рис. 3, б, г, е и 4, б, г, е.

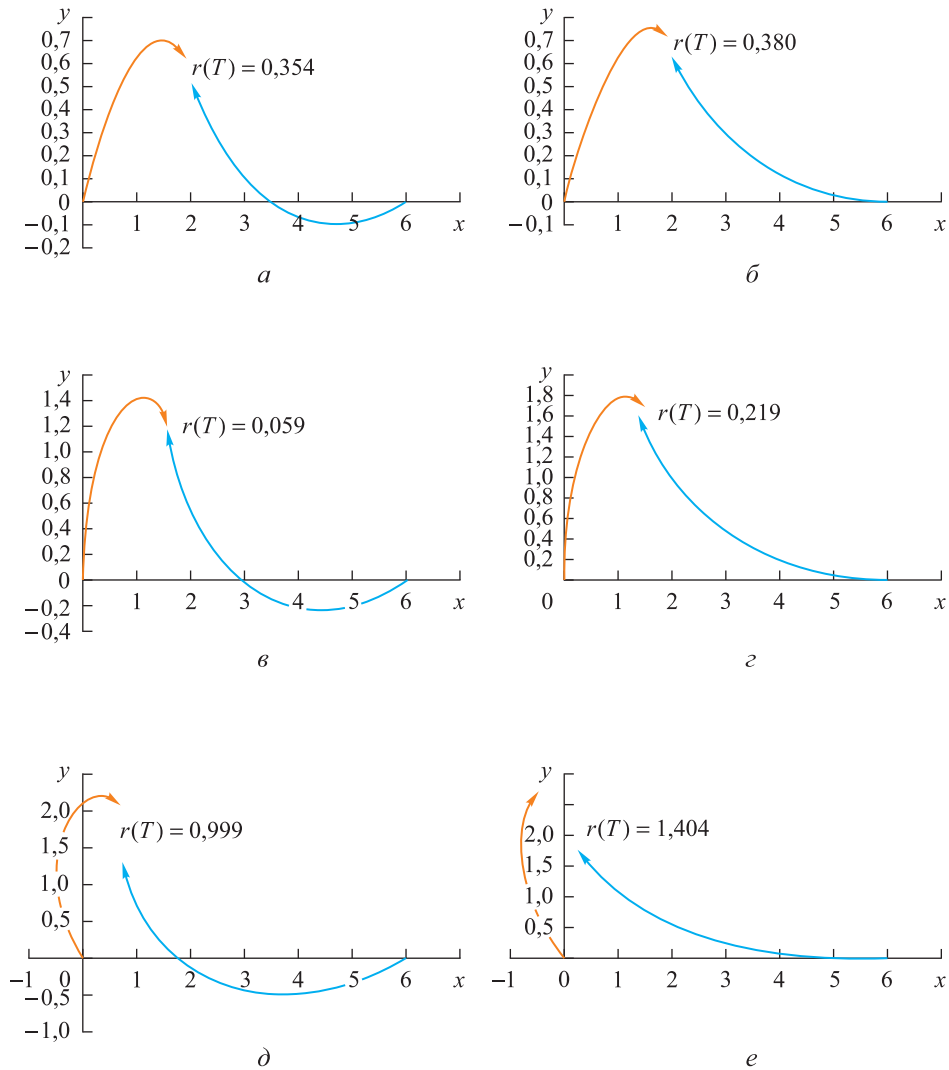


Рис. 4. Траектории движения первого и второго игроков в плоскости (x, y) при $a = 1, b = 1/2$:

$$a, б — \beta_0 = \pi/4, r_0 = 12, T = 4; \quad в, г — \beta_0 = \pi/2, r_0 = 12, T = 5;$$

$$д, е — \beta_0 = 3\pi/4, r_0 = 12, T = 9$$

На рис. 5 представлены графики $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ для случая $\beta_0 = 3\pi/4, r_0 = 12, T = 9, a = 1, b = 2$.

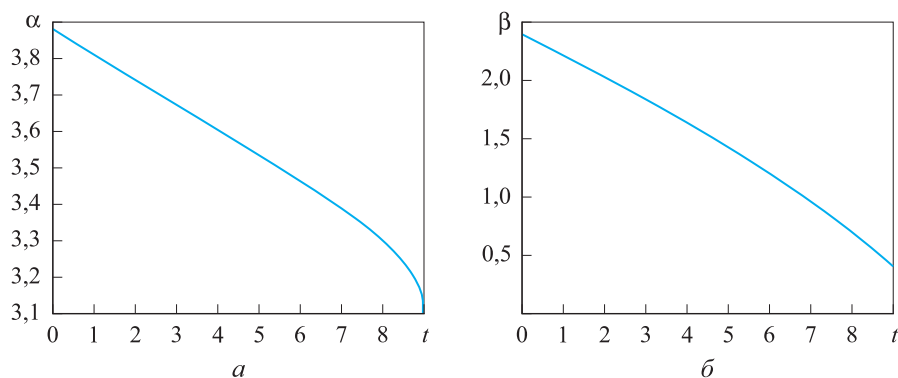


Рис. 5. Закон изменения α и β от времени t :

a — $\alpha(t)$; b — $\beta(t)$

Из рис. 3 и 4 видно, что расстояние в конечный момент времени между игроками, в случае реализации первым игроком метода погоны, больше, и эта разница увеличивается с возрастанием величины фиксированного времени процесса.

Заключение. Авторами настоящей статьи исследована нелинейная задача встречи движущихся объектов с фиксированной стратегией наведения у одного игрока и оптимальной — у другого. С помощью принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления сведена к краевой задаче для исходных переменных. Проведен качественный анализ системы, исследованы характерные свойства траекторий, проиллюстрированные численным моделированием.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kabamba P.T., Girard A.R. Proportional Navigation: Optimal Homing and Optimal Evasion. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2015, vol. 57 (4), pp. 611–624.
- [2] Ben-Asher J.Z., Cliff E.M. Optimal evasion against a proportionally guided pursuer. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1989, vol. 12 (4), pp. 598–600.
- [3] Turetsky V., Shima T. Hybrid evasion strategy against a missile with guidance law of variable structure. *American Control Conference (ACC) July 6–8, 2016*, pp. 3132–3137.
- [4] Turetsky V., Shima T. Target evasion from a missile performing multiple switches in guidance law. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, vol. 39 (10), pp. 2364–2373.
- [5] Guelman M., Shinar J. Optimal guidance law in the plane. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1984, vol. 7(4), pp. 471–476.
- [6] Glizer V.Y. Optimal planar interception with fixed end conditions: a closed form solution. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1996, vol. 88 (3), pp. 503–539.
- [7] Pachter M., Yavin Y. Simple-motion pursuit-evasion differential games. Part 2: Optimal evasion from proportional navigation guidance in the deterministic

- and stochastic cases. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1986, vol. 51 (1), pp. 129–159.
- [8] Cherkasov O.Yu., Yakushev A.G. Singular arcs in the optimal evasion against a proportional navigation vehicle. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2002, vol. 113 (2), pp. 211–226.
- [9] Макиева Э.И., Черкасов О.Ю. Задача оптимальной встречи с преследователем, наводящимся методом пропорциональной навигации. *XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*, сб. трудов в 4 т., 2019. Т. 1: Общая и прикладная механика, с. 223–225.
- [10] Meyer Y., Isaiah P., Shima T. On Dubins paths to intercept a moving target. *Automatica*, 2015, vol. 53, pp. 256–263.
- [11] Бердышев Ю.И. Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса. *Труды Института математики и механики Уральского отделения Российской академии наук*, 2016, т. 22, № 1, с. 26–35.
- [12] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Наука, 1983, 393 с.

Статья поступила в редакцию 06.02.2020

Ссылку на статью просим оформлять следующим образом:

Макиева Э.И., Черкасов О.Ю. Об одной нелинейной задаче оптимальной встречи. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 4.
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-4-1974>

Макиева Элина Игоревна — студентка механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. e-mail: elinamakieva@live.com

Черкасов Олег Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.
e-mail: oyuche@yandex.ru

On a nonlinear problem of optimal rendezvous

© E.I. Makieva, O.Yu. Cherkasov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

The paper analyzes a nonlinear problem of optimal rendezvous of two material points in the horizontal plane. The velocity of both participants is constant modulo. The aim of control is to minimize the final distance between participants under given initial conditions. The approach time is fixed. The angle between the line of sight and the velocity vector of the Participant 1 (P1) is used as a control variable. The Participant (P2) uses the proportional-navigation law. This task may be relevant when planning the approach paths of a tanker aircraft to an unmanned aerial vehicle, or in the case of intercepting an attacking unmanned aerial vehicle by a target simulator missile launched from a real target. The principle of maximum procedure allows reducing optimal control problem to the problem of analyzing the phase portrait of a system of two nonlinear differential equations. A qualitative analysis of the system is performed, the characteristic properties of the trajectories of the participants in the horizontal plane are investigated and the results of numerical solution of the boundary value problem are presented.

Keywords: Pontryagin maximum principle, proportional-navigation law, phase portrait, optimal control problem

REFERENCES

- [1] Kabamba P.T., Girard A.R. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2015, vol. 57 (4), pp. 611–624.
- [2] Ben-Asher J.Z., Cliff E.M. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1989, vol. 12 (4), pp. 598–600.
- [3] Turetsky V., Shima T. Hybrid Evasion Strategy against a Missile with Guidance Law of Variable Structure. *Proceedings of the American Control Conference, (ACC) July 6–8, 2016*. 2016, pp. 3132–3137.
- [4] Turetsky V., Shima T. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, vol. 39 (10), pp. 2364–2373.
- [5] Guelman M., Shinar J. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1984, vol. 7 (4), pp. 471–476.
- [6] Glizer V.Y. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1996, vol. 88 (3), pp. 503–539.
- [7] Pachter M., Yavin Y. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1986, vol. 51 (1), pp. 129–159.
- [8] Cherkasov O.Yu., Yakushev A.G. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2002, vol. 113 (2), pp. 211–226.
- [9] Makieva E.I., Cherkasov O.Yu. Zadacha optimalnoy vstrechi s presledovatelem, navodyashchimsya meodo proporsionalnoy navigatsii [The problem of optimal meeting with the pursuer, guided by the proportional navigated law]. *XII Vserossiyskiy syezhd po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki: sbornik trudov v 4 tomakh. Tom 1. Obschaya i prikladnaya mekhanika* [Proceedings of XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. In 4 volumes. Vol. 1. General and applied mechanics], 2019, pp. 223–225.
- [10] Meyer Y., Isaiah P., Shima T. *Automatica*, 2015, vol. 53, pp. 256–263.
- [11] Berdyshev Yu.I. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN — Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Supplement: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics*, 2016, vol. 22 (1), pp. 26–35.

- [12] Pontryagin, L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimalnykh protsessov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York, Interscience Publishers, 1962]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 393 p.

Makieva E.I., student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University. e-mail: elinamakieva@live.com

Cherkasov O.Yu., Cand. Sc. (Phys.&Math.), Senior Lecturer, Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University; author of over 40 research publications in the field of control of moving objects, a book of problem on the mechanics of controlled systems. e-mail: oyuche@yandex.ru