

## Исследование проблемы «перевернутой ориентации» в системе стабилизации космического аппарата с нелинейными датчиками

© Р.П. Симоньянц, В.А. Тарасов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

*Показано, что в релейной системе стабилизации космического аппарата вследствие нелинейности датчика угла типа «ограничение поля зрения» под действием гравитационного момента возможен аварийный режим «перевернутой ориентации». Для упрощенной модели плоского движения выполнено структурное разбиение фазового цилиндра на области с траекториями различных типов. Рассмотрена процедура синтеза границ, отделяющих область, из которой система переходит в режим штатной ориентации, от области, из которой она входит в аварийный режим. Найдены аналитические условия возникновения аварийных режимов, на основе которых могут быть синтезированы предотвращающие их алгоритмы.*

**Ключевые слова:** релейная система стабилизация, ориентация космического аппарата, аварийные режимы ориентации

**Введение.** Система управления ориентацией и стабилизации решает одну из основных функциональных задач космического аппарата (КА), и без ее надежной работы невозможно реализовать практически ни одной целевой задачи, стоящей перед КА. В связи с этим обсуждаемая в статье проблема реальной возможности аварийной ситуации и предлагаемые пути ее преодоления актуальны, и они представляют практический интерес. Суть проблемы заключается в том, что при релейном законе управления вследствие нелинейности типа «ограничение поля зрения» датчика угла при доминирующем действии на КА гравитационного момента могут возникнуть аварийные режимы углового движения с потерей ориентации.

Такие ситуации могут сложиться после импульсных возмущений КА, например, при отделении от носителя. Обычно переходный процесс завершается установлением автоколебаний в окрестности требуемой ориентации. Однако если отклонения превысят определенные пределы, то может возникнуть режим «перевернутой ориентации» осей КА в положении « $\approx \pi$ ».

Вопросам динамики свободных неуправляемых движений относительно центра масс орбитальных КА под действием гравитационного момента уделяется большое внимание. Результаты первых ис-

следований были опубликованы в середине XX века В.В. Белецким [1]. Более поздние публикации касались, как правило, проблем гравитационной стабилизации КА [2] и использования гравитационных моментов в системах управления ориентацией в целях разгрузки инерционных исполнительных органов [3]. Интерес к этим вопросам сохранился и в настоящее время. Например, в [4] исследованы все положения равновесия с различными значениями моментов инерции под действием гравитационного и постоянного возмущающего моментов.

Однако вопросы, связанные с влиянием гравитационного момента на динамические режимы релейной системы стабилизации, изучены недостаточно полно. Неизвестно, например, о публикациях по вопросам, составляющим предмет настоящего исследования.

Возможность наличия в активной системе стабилизации КА пассивных периодических движений без включения исполнительных органов отмечал академик Б.В. Раушенбах [5]. Однако исследования условий, при которых такие движения происходят, не проводилось. На возможность существования области консервативных периодических движений в зоне нечувствительности регулятора указывалось и в монографии Э.В. Гаушуса [6]. Но автор ограничился рассмотрением автоколебаний в системе стабилизации КА, оснащенной линейными датчиками, с линеаризованным гравитационным моментом.

**Математическая модель системы.** Рассматривается динамика управления ориентацией и стабилизации центральных связанных осей  $OX_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  КА с диагональным тензором инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}[J_1 J_2 J_3]$  относительно осей орбитальной системы координат  $OX_{oi}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  при движении по круговой орбите.

Уравнения движения осей  $X_i$  относительно осей  $X_{oi}$  имеют вид [7]

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{M}_b + \mathbf{M}_g - \mathbf{M}_u; \\ 2\frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda \circ (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^*), \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{H}$  — кинетический момент,  $\mathbf{H} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$ ;  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор абсолютной угловой скорости,  $\{\omega_i\}$  — его проекции на  $OX_1X_2X_3$ ;  $\mathbf{M}_b$  — возмущающий момент ( $\mathbf{M}_b = \text{const}$ );  $\mathbf{M}_g$  — гравитационный момент;  $\mathbf{M}_u$  — управляющий момент;  $\Lambda$  — кватернион поворота относительно опорной системы координат  $OX_{o1}X_{o2}X_{o3}$ ;  $\boldsymbol{\omega}^*$  — вектор абсолютной угловой скорости движения опорной системы координат; « $\circ$ » — символ кватернионного умножения.

Гравитационный момент  $\mathbf{M}_g$  определяется векторным выражением

$$\mathbf{M}_g = 3(\omega^*)^2 \mathbf{e}_r \times \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_r, \quad (2)$$

где  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор;  $\mathbf{J}$  — тензор инерции ( $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ ).

Управляющий момент  $\mathbf{M}_u$  задан проекциями  $\{M_{u1}, M_{u2}, M_{u3}\}$ , каждая из которых — релейная функция вида

$$\begin{cases} M_{ui} = -M_{pi} F_i(\sigma_i), & i = 1, 2, 3; \\ F_i(\sigma_i) = 1/2 [\text{sign}(\sigma_i - \alpha_i + h_i F_{0i}) + \text{sign}(\sigma_i + \alpha_i + h_i F_{0i})], \end{cases} \quad (3)$$

где  $M_{pi}$  — модуль момента управления;  $\sigma_i$  — управляющий сигнал (обратная связь);  $\alpha_i$  — зона нечувствительности релейного регулятора (порог срабатывания);  $h_i$  — ширина петли гистерезиса.

Переменная  $F_{0i}$  доопределяет неопределенность в области петли гистерезиса и равна значению  $F_i(t)$  в предыдущий момент времени:  $F_{0i}(t) = F_i(t-0)$ .

Управляющий сигнал  $\sigma_i$  — функция обратной связи  $\sigma_i(x_i, y_i)$  — формируется как линейная комбинация сигналов с датчиков угла  $u_i = u_i(x_i)$  и угловой скорости  $v_i = v_i(y_i)$ :

$$\sigma_i = u_i(x_i) + kv_i(y_i), \quad i = \overline{1,3}. \quad (4)$$

Нелинейные статические характеристики датчиков  $i$ -го канала заданы функциями

$$u_i(x_i, \gamma_{ni}) = \begin{cases} 0 & \forall x_i \in \{x_i : |x_i| < \gamma_{1i}\} \text{ или } \forall x_i \in \{x_i : |x_i| > \gamma_{3i}\}; \\ x_i - \gamma_{1i} \text{sign } x_i & \forall x_i \in \{x_i : |x_i| \in [\gamma_{1i}, \gamma_{2i}]\}; \\ (\gamma_{2i} - \gamma_{1i}) \text{sign } x_i & \forall x_i \in \{x_i : |x_i| \in (\gamma_{2i}, \gamma_{3i}]\}, \quad n = \overline{1,3}; i = \overline{1,3}; \end{cases} \quad (5)$$

$$v_i(y_i, \beta_{pi}) = \begin{cases} 0 & \forall y_i \in \{y_i : |y_i| < \beta_{1i}\}; \\ y_i - \beta_{1i} \text{sign } (y_i) & \forall y_i \in \{y_i : |y_i| \in [\beta_{1i}, \beta_{2i}]\}; \\ (\beta_{2i} - \beta_{1i}) \text{sign } (y_i) & \forall y_i \in \{y_i : |y_i| > \beta_{2i}\}, \quad p = \overline{1,2}; i = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (6)$$

В формулах (5), (6)  $\gamma_{ni}, \beta_{pi}$ ,  $n = \overline{1,3}$ ;  $p = \overline{1,2}$ ;  $i = \overline{1,3}$  — параметры нелинейности датчиков соответственно угла  $\gamma_{ni}$  и угловой скорости  $\beta_{pi}$  по  $i$ -му каналу управления;  $\gamma_{1i}$ ,  $\beta_{1i}$  — порог нечувствительности;  $\gamma_{2i}$ ,  $\beta_{2i}$  — порог насыщения;  $\gamma_{3i}$  — предел поля зрения.

**Постановка задачи.** Рассматриваемая нелинейная динамическая система может быть представлена в пространстве шести переменных. Поскольку получить ее полное аналитическое решение невозможно, понизим порядок системы редуцированием и рассмотрим три плоских сечения — тангаж  $\{x_3, y_3\}$ , курс  $\{x_2, y_2\}$  и крен  $\{x_1, y_1\}$ . Тогда в движении по тангажу можем допустить  $(x_3, y_3) \in \{(x_3, y_3) : x_3 \in [-\pi, +\pi], y_3 \in (-\infty, +\infty)\}$ ,  $x_1 \approx y_1 \approx x_2 \approx y_2 \approx 0$ . Применив аналогичные допущения для курса и крена, из (1) и (2) получим уравнения трех плоских движений вида

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = y_i, & \frac{dy_i}{dt} = g_i - m_i \sin 2x_i - a_i F(\sigma_i) \\ \sigma_i = u_i(x_i, \gamma_{ni}) + k_i v_i(y_i, \beta_{pi}), \\ F_i(\sigma_i) = \frac{1}{2} [\text{sign}(\sigma_i - \alpha_i + h_i F_{0i}) + \text{sign}(\sigma_i + \alpha_i + h_i F_{0i})], \\ i = \overline{1,3}; \quad n = \overline{1,3}; \quad p = \overline{1,2}, \end{cases} \quad (7)$$

где  $g_i = \frac{M_{\epsilon i}}{J_i}$ ,  $a_i = \frac{M_{pi}}{J_i}$ ,  $m_1 = 2\omega_*^2 \frac{J_3 - J_2}{J_1}$ ;  $m_2 = (1/2)\omega_*^2 \frac{J_3 - J_1}{J_2}$ ;  $m_3 = (3/2)\omega_*^2 \frac{J_1 - J_2}{J_3}$ ;  $u_i(x_i, \gamma_{ni})$  и  $v_i(y_i, \beta_{pi})$  — функции (5) и (6) соответственно.

Коэффициенты  $m_i$  для каждого из каналов управления различны. Они учитывают совместное действие гравитационных и гироскопических моментов, обусловленных  $\omega^*$ .

Все три уравнения (7) автономны и динамически подобны. Это позволяет свести задачу к исследованию одной из трех динамически подобных подсистем на фазовом цилиндре, а их результаты с помощью масштабно инвариантных преобразований перенести на другие подсистемы. Поэтому далее рассмотрим только канал тангажа, опуская для простоты индекс  $i = 3$ .

Цели исследования:

1) найти на фазовом цилиндре область  $\Omega_0$ , из которой все фазовые траектории стягиваются к траектории предельного цикла штат-

ного режима стабилизации КА в заданной окрестности точки  $(x = 0, y = 0)$ ;

2) определить условия существования режимов «перевернутой ориентации», когда из начального состояния  $(x_0, y_0) \in \Omega_\pi$  движение переходит к замкнутой траектории свободных периодических движений в окрестности точки  $(x = \pi, y = 0)$ .

**Методы исследования.** К решению задачи возможны два подхода:

1) в процессе движения за пределами поля зрения  $\gamma_3$  датчика угла косвенно оценить недостающую информацию, необходимую для перевода осей связанных систем координат в требуемое положение;

2) определить условия возникновения нештатных режимов «перевернутой ориентации» и на этапе проектирования системы исключить возможность их появления.

Известны различные методы решения задач, реализующих первый подход, но найти информацию о решении проблемы на основе второго подхода авторам не удалось. В ряде работ, например [8–13], на основе линеаризованной модели системы разработаны алгоритмы решения задачи с использованием первого подхода без измерителя скорости либо без измерителя угла, в том числе и с применением теории фильтра Калмана [11]. В [8] исследован вопрос определения ориентации при отказе датчика угловой скорости. В [13] предложен метод, который позволяет обеспечить в релейной системе без датчика угловой скорости высокое качество динамических процессов. В [10] для оценки недостающих компонент вектора состояния предлагается использовать метод, основанный на линеаризованной модели углового движения КА и точного размещения полюсов. Это позволяет получить аналитические зависимости для вектора оценки и сократить вычисления в бортовых ЭВМ. В [14] для исследования релейных следящих систем, содержащих звенья с ограничителями, разработан метод фазового годографа и классической линеаризации статических нелинейностей, включая релейный элемент.

Однако в рассматриваемой задаче применять линеаризованную модель углового движения КА нецелесообразно. Это связано с большими углами отклонения КА от опорной системы координат и необходимостью учета существенных нелинейностей датчиков угла и угловой скорости. Поэтому в данной статье используется редуцированное уравнение плоского движения по каналу тангажа в нелинейном виде с его представлением на поверхности фазового цилиндра. Исследование выполняется на основе методов качественной теории динамических систем, рассмотренных в [15], [16], и компьютерного моделирования.

В соответствии с алгоритмом управления и характеристиками нелинейных датчиков осуществляется структурное разбиение поверхности фазового цилиндра на листы поверхностей с тремя характерными состояниями релейного регулятора. Изучается поведение фазовых траекторий, выявляются особые состояния и критические режимы. Оценка достоверности результатов выполняется методом компьютерного моделирования.

**Траектории плоских движений системы.** Рассмотрим траектории плоских движений системы (7). Поверхность фазового цилиндра функцией управления  $F(\sigma)$  разбивается на три листа:  $F^0, F^+, F^-$ , соответствующие значениям  $F = 0, +1, -1$ . На листе  $F^0$  фазовые траектории  $\Gamma^0$  отображают свободные движения КА под действием постоянного возмущающего  $M_b$ , гравитационного  $M_g$  и гироскопического моментов. Поскольку диссипация практически отсутствует, траектории консервативных движений могут быть построены на основании интеграла энергии  $E^0$ .

Аналогично на листах  $F^+, F^-$  имеем фазовые траектории  $\Gamma^+, \Gamma^-$ , определяющиеся интегралами  $E^+, E^-$ . Обобщенно уравнения траекторий  $\Gamma^F = \{\Gamma^0, \Gamma^+, \Gamma^-\}$  для всех трех листов фазового цилиндра можно записать в дифференциальной форме

$$\Gamma^F : \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = g - m \sin 2x - aF, \quad F = 0, +1, -1 \quad (8)$$

и в форме интеграла энергии, соответствующего уравнению (8):

$$\frac{y^2}{2} + m \sin^2 x - gx + Fax = E^F, \quad F = 0, +1, -1, \quad (9)$$

где  $E^F = \{E^0, E^+, E^-\}$  — константа, которая может быть определена через координаты любой из известных на данной фазовой траектории точек.

Рассмотрим движение изображающей точки на листе  $F^0$  ( $F = 0$ ) в случае  $J_3 > J_1 > J_2$ . Уравнения (8) и (9) принимают вид

$$\Gamma^0 : \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = g - m \sin 2x \Rightarrow \frac{y^2}{2} + m \sin^2 x - gx = E^0, \quad (10)$$

Положения точек равновесия  $C_q, q = \overline{1,4}$  найдем из первого уравнения (10), полагая  $y_{C_q} = 0, (dy/dt)_{C_q} = 0$ . Тогда координаты  $x_{C_q}$  определяются уравнением

$$m \sin 2x_{C_q} - g = 0. \quad (11)$$

Легко убедиться, что из четырех корней уравнения (11) два соответствуют устойчивым состояниям равновесия  $C_1$  и  $C_3$ , другие — неустойчивым.

В случае  $g \rightarrow 0$ , как следует из (10), точки равновесия смещаются:  $x_{C_1} \rightarrow 0$ ,  $x_{C_3} \rightarrow \pi$ ,  $x_{C_2} \rightarrow +\pi/2$ ,  $x_{C_4} \rightarrow -\pi/2$ . Если возмущающий момент соизмерим со значением максимального гравитационного момента и  $(g/m) \rightarrow 1$ , то  $C_1 \rightarrow C_2$  и  $C_3 \rightarrow C_4$ . При этом области колебательных движений  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  сжимаются. При условии  $(g/m) \geq 1$  области  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  исчезают и периодические движения  $\Gamma_1^0$  и  $\Gamma_3^0$  невозможны.

На листах  $F^+$ ,  $F^-$ , согласно (8), движение происходит по траекториям

$$\begin{aligned} \Gamma^+ : \frac{y^2}{2} + m \sin^2 x - (a + g)x &= E^+, \\ \Gamma^- : \frac{y^2}{2} + m \sin^2 x + (a - g)x &= E^-. \end{aligned} \quad (12)$$

Будем полагать, что выполняется условие  $g \approx m \ll a$ . Тогда уравнения (12) можно упростить, представляя движения параболическими траекториями:

$$\Gamma^+ : \frac{y^2}{2} - ax = E^+, \quad \Gamma^- : \frac{y^2}{2} + ax = E^-. \quad (13)$$

Отрезки траектории  $\Gamma^F = \{\Gamma^0, \Gamma^+, \Gamma^-\}$  сопрягаются в точках переключения регулятора в кусочно-непрерывную траекторию релейно управляемого движения.

**Геометрический образ алгоритма управления.** Точки фазового цилиндра, в которых сопрягаются кусочные траектории, определяются алгоритмом и статическими характеристиками датчиков. Аналитически определив фазовые координаты точек переключения релейного регулятора, построим линии переключения  $L_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$  как геометрический образ алгоритма управления. Каждая линия описывается функцией вида

$$\begin{aligned} L_j : \sigma(u, v) &= \xi_j, \quad j = \overline{1, 4}; \\ \{\xi_1 = \alpha, \quad \xi_2 = \alpha - h, \quad \xi_3 = -\alpha, \quad \xi_4 = -\alpha + h\}. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом функции обратной связи, заданной (4), можем записать (14) в виде

$$L_j : u(x, \gamma_n) + kv(y, \beta_p) = c_j, \quad n = \overline{1,3}; \quad p = \overline{1,2}, \quad j = \overline{1,4}, \quad (15)$$

где  $u(x, \gamma_n)$  и  $v(y, \beta_p)$  — статические характеристики (5) и (6) датчиков.

На рис. 1 приведен пример одного из вариантов линий переключения  $L_j$ , построенных на развертке фазового цилиндра в соответствии с уравнением (15). Они представляют собой кусочно-линейные ломаные линии, конфигурация которых зависит от значений параметров уравнения (15). Линиями переключения  $L_j$ , описанными уравнениями (15), поверхность фазового цилиндра делится на листы  $F^0, F^+, F^-$ . При этом линия  $L_1$  ограничивает поверхность листа  $F^+$ , линия  $L_3$  — листа  $F^-$ , а линии  $L_2$  и  $L_4$  являются границами области  $F^0$ . На поверхности фазового цилиндра в зоне нечувствительности  $|x| < \gamma_1$  и за пределами поля зрения  $\forall |x| \geq \gamma_3$  линии  $L_2$  и  $L_4$  проходят параллельно оси  $Ox$  сверху и снизу.

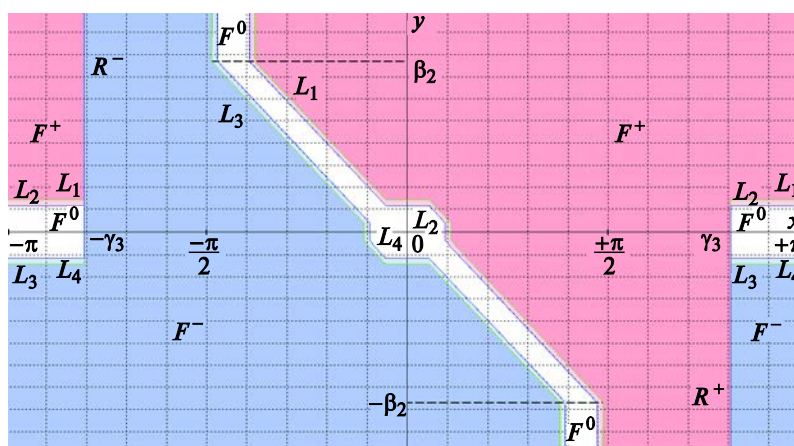


Рис. 1. Листы  $F^0, F^+, F^-$  на развертке фазового цилиндра

Поскольку функция обратной связи (4)  $\forall |x| \geq \gamma_3$  и  $|x| < \gamma_1$  использует ограниченную информацию об управляемом процессе (отсутствует сигнал с датчика угла  $u(x, \xi_n) \triangleq 0$ ), то уравнения (15) линий переключения в этих областях значения  $x$  принимают вид

$$L_j : kv(y, \beta_p) = c_j, \quad p = \overline{1,2}; \quad j = \overline{1,4} \quad \forall |x| \geq \gamma_3 \quad \text{и} \quad |x| < \gamma_1. \quad (16)$$



Листы  $F^+$  и  $F^-$  разделены листом  $F^0$  везде, кроме как на границе поля зрения датчика положения, где они стыкуются по линиям  $R^+$  и  $R^-$ :

$$R^+ : x = +\gamma_3 \quad \forall y \leq \frac{\alpha}{k} + \beta_1; \quad R^- : x = -\gamma_3 \quad \forall y \geq -\frac{\alpha}{k} - \beta_1. \quad (17)$$

Так, при пересечении и  $R^-$  (см. (17)) траекторией  $\Gamma^+$  происходит переключение  $F = +1 \rightarrow F = -1$ , движение переходит с листа  $F^+$  на лист  $F^-$  и продолжается по траектории  $\Gamma^-$ .

**Структура разбиения фазового цилиндра.** На фазовом цилиндре можно выделить области  $\Omega_0$  и  $\Omega_\pi$  с различным характером протекающих в них динамических процессов. Рассмотрим один из типичных случаев, когда параметры датчиков и настройки релейного регулятора образуют такую конфигурацию линий переключения, которая изображена на рис. 1. Пусть при этом параметры  $g, m$  таковы, что точки равновесия  $C_1, C_2$  и  $C_3, C_4$  размещены на полосе листа  $F^0$  в интервалах  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$  и выполняются условия  $|x_{C_2}| > \gamma_3$  и  $|x_{C_4}| > \gamma_3$ , как это показано на рис. 2.

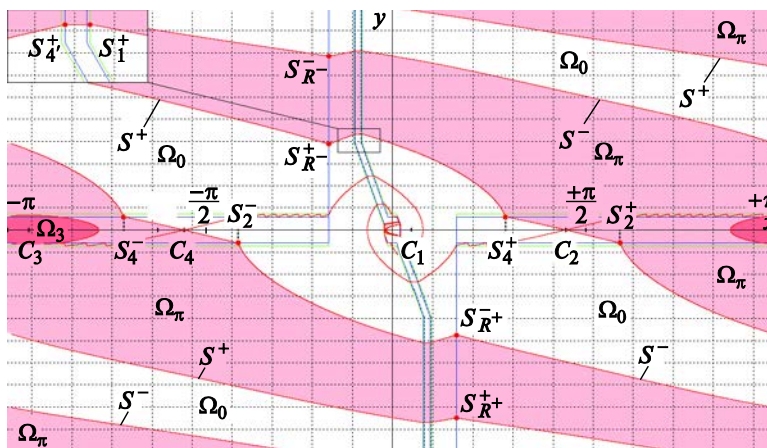


Рис. 2. Структура разбиения фазового цилиндра на области с различным характером поведения траекторий

Анализ поведения фазовых траекторий на фазовом цилиндре с заданной конфигурацией линий переключения позволяет утверждать следующее. В рассматриваемой динамической системе существуют кусочно-непрерывные граничные кривые  $S^+$  и  $S^-$ . Эти кривые раз-

бывают фазовый цилиндр на две области  $\Omega_0$  и  $\Omega_\pi$ , из которых фазовые траектории приходят в окрестности двух различных состояний периодических движений. Область  $\Omega_0$  обладает следующим свойством: все фазовые траектории, начинающиеся в ней, стягиваются к предельному циклу  $\Gamma_n^*$  ( $n$  — число импульсов за период) в окрестности начала координат. Характеристики  $\Gamma_n^*$  однозначно определяются параметрами системы, но их определение в задачу настоящего исследования не входит.

При определенных условиях на листе  $F^0 \quad \forall |x| < \alpha + \gamma_1$  размещаются точка устойчивого равновесия  $C_1$  и окружающая ее область  $\Omega_1$  (на рис. 2 не показана), которая содержит множество замкнутых траекторий  $\Gamma_1^0$ . Этот случай требует отдельного исследования, но, поскольку при его реализации требования по точности ориентации КА не нарушаются, в данной работе не рассматривается.

Область  $\Omega_\pi$  обладает таким свойством:  $\forall (x_0, y_0) \in \Omega_\pi$  траектория переходного процесса входит в подобласть  $\Omega_3 \subset \Omega_\pi$  окрестности точки устойчивого равновесия  $C_3$  и замыкается. При этом КА совершает свободные колебания в состоянии «перевернутой ориентации». Если в начальный момент времени  $(x_0, y_0) \in \Omega_3$ , то последующее движение КА будет иметь характер консервативных колебаний, которым соответствует замкнутая фазовая траектория  $\Gamma_3^0$  вокруг  $C_3$ , содержащая в себе точку  $(x_0, y_0)$ . Это и есть состояние свободных колебаний в режиме «перевернутой ориентации», в котором стабилизируемая ось имеет направление, противоположное заданному.

**Построение границ областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_\pi$ .** Предлагается следующая процедура синтеза границ  $S^+$  и  $S^-$  методом «попятного» припасовывания. На полосе листа  $F^0 \quad \forall |x| \geq \gamma_3$ , охватывающей ось абсцисс сверху и снизу, области  $\Omega_0$  и  $\Omega_\pi$  разделены сепаратрисами  $\Gamma_{C_2}^0$  и  $\Gamma_{C_4}^0$  — особыми фазовыми траекториями семейства  $\Gamma^0$ , которые проходят через точки  $C_2$  и  $C_4$  неустойчивого равновесия. Их уравнения получим из (10), раскрывая константы энергии  $E_q^0$  подстановкой координат  $(x_{C_2}, y_{C_2})$  и  $(x_{C_4}, y_{C_4})$  точек  $C_2$  и  $C_4$ , где  $y_{C_2} = y_{C_4} = 0$ ,  $x_{C_2}$  и  $x_{C_4}$  — корни уравнения (11):

$$x_{C_2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{g}{m}; \quad x_{C_4} = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{g}{m}. \quad (18)$$

На основании (18) и (10) получаем уравнения сепаратрис:

$$\begin{cases} \Gamma_{C_2}^0 : \frac{y^2}{2} + m \sin^2 x - gx = m \cos^2 \left( \frac{1}{2} \arcsin \frac{g}{m} \right) + g \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{g}{m} \right), \\ \Gamma_{C_4}^0 : \frac{y^2}{2} + m \sin^2 x - gx = m \cos^2 \left( \frac{1}{2} \arcsin \frac{g}{m} \right) + g \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{g}{m} \right). \end{cases} \quad (19)$$

Сепаратриса  $\Gamma_{C_2}^0$  из (19) в окрестности точки  $C_2$  имеет четыре ветви. Искомой границе  $S^+$  принадлежат лишь две из них. Первая ветвь образуется попятным движением ( $t \rightarrow -\infty$ ) из точки  $C_2$  в направлении  $y > 0, x \rightarrow -\pi$  и пересекает линию  $L_2 : y = (\alpha - h)k^{-1} + \beta_1 \quad \forall x \geq \gamma_3$  в точке  $S_2^+$ . Вторую ветвь кривой  $\Gamma_{C_2}^0$  на полосе листа  $F^0$  получим попятным движением в направлении  $y < 0, x \rightarrow +\pi$  до пересечения с линией  $L_4 : y = (-\alpha + h)k^{-1} - \beta_1 \quad \forall |x| \geq \gamma_3$  в точке  $S_4^+$ . Таким образом, две указанные ветви сепаратрисы  $\Gamma_{C_2}^0$  принадлежат границе  $S^+$  и определены аналитически на интервале между точками  $S_2^+$  и  $S_4^+$ , исключая точку  $C_2$ .

Поскольку  $S_2^+$  лежит на  $L_2$ , она принадлежит одновременно двум поверхностям:  $F^0$  и  $F^+$ . Действительно, если в реальном движении системы в точке  $S_2^+ (x_{S_2^+}, y_{S_2^+})$  произошло выключение управления  $F(t) = 0$ , то в предыдущий момент времени было  $F(t-0) = +1$ . Следовательно, изображающая точка двигалась по траектории  $\Gamma^+$ , а  $S_2^+$  для соседних участков траектории — общая точка. Аналитическое выражение траектории до выключения управления можно получить из (9) или, если  $g \approx m \ll a$ , упрощенно из (13):

$$S_2^+ \in \Gamma^+(x, y) : y^2 - 2ax = \left( y_{S_2^+} \right)^2 - 2ax_{S_2^+}. \quad (20)$$

Найденное по  $S_2^+$  уравнение отрезка фазовой траектории (20) позволяет для заданной конфигурации линий переключения найти начальную точку  $S_1^+$ . Она лежит на линии  $L_1$ , уравнение которой (16) в области значений  $y \geq \beta_2$  имеет вид

$$L_1 : x = \alpha + \gamma_1 + k(\beta_2 - \beta_1) \quad \forall y \geq \beta_2. \quad (21)$$

Из (20) и (21) находим фазовые координаты точки  $S_1^+$ :

$$\begin{aligned} y_{S_1^+} &= \sqrt{\left(y_{S_2^+}\right)^2 + 2a\left[\alpha + \gamma_1 - x_{S_2^+} + k(\beta_2 - \beta_1)\right]}, \\ x_{S_1^+} &= \alpha + \gamma_1 + k(\beta_2 - \beta_1). \end{aligned} \quad (22)$$

Точка  $S_1^+$  позволяет продолжить построение границы  $S^+$  «попятным» движением на той части полосы листа  $F^0$ , которая расположена вертикально слева от оси ординат. Отрезок траектории  $\Gamma^0$ , исходящий из точки  $S_1^+$ , пересекая  $L_4$ , дает точку  $S_4^+$ , которой предшествовало выключение  $F(t-0) = -1$ . Следовательно,  $S_4^+ \in \Gamma^0$  и  $S_4^+ \in \Gamma^-$  — общая точка, принадлежащая границе  $S^+$ . «Попятое» движение по траектории  $\Gamma^-$  прерывается линией  $R^-: x = -\gamma_3 \forall y \geq -\alpha k^{-1} - \beta_1$ . Это обусловлено влиянием нелинейности датчика угла — параметра  $\gamma_3$ . На границе поля зрения исчезает позиционный сигнал, и система, минуя нейтральное состояние регулятора  $F = 0$ , меняет знак управления  $F = -1 \rightarrow F = +1$ .

Точка  $S_{R^-}^+$  порождает следующий отрезок траектории семейства  $\Gamma^+$  ( $S_{R^-}^+ \in \Gamma^+$ ). В попятном движении он охватывает весь лист  $F^+$ , совершает переворот  $x = \pm\pi$  (пересекает разрез фазового цилиндра) и завершается на вертикальном участке линии  $L_1 (y > 0)$ . Построения в верхней половине фазового цилиндра могут быть продолжены.

Нижняя часть граничной кривой  $S^+$  синтезируется аналогично. Из точки  $S_4^+$  «попятным» движением строится траектория  $\Gamma^-$ , которая переходит через линию  $x = \pm\pi$  из области значений  $x \in [0, +\pi]$  в области  $x \in [-\pi, 0]$  (переворот), затем завершается на линии  $L_3$ , порождая новую точку для продолжения построений.

Аналогично выполним построение второй граничной кривой  $S^-$ . На  $F^0$  — это две ветви сепаратрисы  $\Gamma_{C_4}^0$ . Строим их из точки  $C_4$  «попятным» движением по двум ветвям: 1) в направлении  $y > 0$ ,  $x \rightarrow -\pi$  до пересечения с участком линии  $L_2: y = (\alpha - h)k^{-1} + \beta_1 \forall x \leq -\gamma_3$  в точке  $S_2^-$ , 2) в направлении  $y < 0$ ,  $x \rightarrow +\pi$  до пересечения с линией  $L_4: y = (-\alpha + h)k^{-1} - \beta_1 \forall x \leq -\gamma_3$  в точке  $S_4^-$ . Эти ветви сепаратрисы на интервале между точками  $S_2^-$  и  $S_4^-$ , кроме точки  $C_4$ , принадлежат границе  $S^-$ .

**Анализ результатов.** На рис. 2 представлена общая картина разбиения фазового цилиндра для гипотетического объекта, динамическая модель которого описывается уравнениями (7). В качестве исходных данных приняты следующие параметры:

$$\left\{ g = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}, a = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}, m = 1,738 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2} \right\}; \\ \left\{ k = 15, \alpha = 2^\circ, h = 0,5^\circ \right\}; \left\{ \gamma_1 = 2^\circ, \gamma_2 = 20^\circ, \gamma_3 = 30^\circ \right\}, \left\{ \beta_1 = 0,05^\circ / \text{с}, \beta_2 = 1^\circ / \text{с} \right\}.$$

Параметры выбирались из соображений общности и наглядности представления результатов без привязки к конкретным КА.

В соответствии с изложенной выше процедурой построены кусочно-непрерывные границы  $S^+$  и  $S^-$  областей  $\Omega_0$  и  $\Omega_\pi$ . Из любой точки  $(x_0, y_0) \in \Omega_0$ , как показывают построения на развертке фазового цилиндра и подтверждают результаты численного моделирования, переходные процессы переводят изображающие точки в 3-импульсный предельный цикл  $\Gamma_3^*$  в окрестности начала координат.

Если начальные условия таковы, что фазовые траектории переходных процессов не заходят за пределы поля зрения  $\gamma_3$ , то в системе отсутствуют скользящие режимы. Рассмотрены два предельных случая движения системы в области  $(x_0, y_0) \in \Omega_0$  из окрестности границы  $S^+$  и  $S^-$ . Оба процесса завершаются тем же предельным циклом  $\Gamma_3^*$ , но значительная часть переходного процесса протекает в скользящем режиме при значениях углов  $|x| > \gamma_3$ . С точки зрения качества переходных процессов, подобные режимы могут не удовлетворять техническим требованиям к системе. Эти вопросы нуждаются в более глубоком исследовании.

Из любой точки области  $\Omega_\pi$  движение системы приходит к состоянию свободных колебаний на листе  $F^0$  по замкнутой траектории  $\Gamma_3^0$  вокруг точки  $C_3$  устойчивого равновесия с «перевернутой ориентацией». Значение координаты  $x_{C_3} \approx 170^\circ$ , максимальная амплитуда колебаний  $\approx 30^\circ$ . В этом режиме, который можно охарактеризовать как «захват градиентом гравитации», система может находиться неограниченно долго. При этом сигнал с датчика угла отсутствует, датчик скорости показывает свободные колебания. Такой режим признается аварийным.

Для того чтобы предотвратить аварийный режим «перевернутой ориентации», необходимо в алгоритме управления ориентацией и стабилизации КА предусмотреть операцию импульсного перевода изображающей точки из области  $\Omega_\pi$  в область  $\Omega_0$ . Такой перевод

можно делать на любом этапе управляемого движения, например, на начальном участке движения, когда оба датчика работают в линейной зоне.

**Заключение.** Показано, что при релейном управлении ориентацией и стабилизации орбитального КА, если основное воздействие на КА оказывает гравитационный момент, вследствие нелинейности датчика угла типа «ограничение поля зрения» могут возникнуть аварийные режимы «перевернутой ориентации». Аналитически найдены условия возникновения таких режимов, на основе которых могут быть синтезированы алгоритмы, предотвращающие их возникновение.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Белецкий В.В. О либрации спутника. *Искусственные спутники Земли*, 1959, вып. 3, с. 13–31.
- [2] Likins P.W., Roberson R.E. Uniqueness of Equilibrium Attitudes for Earth-Pointing Satellites. *J. Astronaut Sci.*, 1966, vol. 13, no. 2, pp. 87–88.
- [3] Богачев А.В., Воробьева Е.А., Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н., Тимаков С.Н. Разгрузка кинетического момента инерционных исполнительных органов космического аппарата в канале тангажа. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2011, № 3, с. 132–139.
- [4] Герман А.Д., Гутник С.А., Сарычев В.А. Динамика спутника под действием гравитационного и постоянного моментов. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2017, № 1, с. 128–140. DOI: 10.7868/S0002338816060056
- [5] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. *Управление ориентацией космических аппаратов*. Москва, Наука, 1974, с. 269–270.
- [6] Гаушус Э.В. *Исследование динамических систем методом точечных преобразований*. Москва, Наука, 1974, с. 135–136.
- [7] Симоньянц Р.П., Аверьянов П.В. Синтез релейного управления ориентацией и стабилизации космического аппарата, обеспечивающий высокое качество без применения датчиков скорости. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2018, № 3, с. 104–119. DOI: 10.18698/0236-3933-2018-3-104-119
- [8] Севастьянов Н.Н. Построение режимов ориентации без датчиков угловой скорости на СС «Ямал-200». *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 2013, № 3 (23), с. 104–110.
- [9] Сумароков А.В. *Резервные режимы ориентации спутников связи серии Ямал с использованием наземных радиоизмерений. Дис. ... канд. физ.-мат. наук*. Москва, 2008, 115 с.
- [10] Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н., Олейник А.С., Ефанов Д.Е. Оценка угловой скорости космического аппарата в режиме орбитальной стабилизации по результатам измерений датчика местной вертикали. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2014, № 5, с. 3–17.
- [11] Bulut Y. Applied Kalman Filter Theory. *Civil Engineering Dissertations*. Northeastern University, Boston, Massachusetts, 2011, paper 13.
- [12] Олейник А.С., Зубов Н.Е., Рябченко В.Н. Определение углового положения космического аппарата в режиме орбитальной стабилизации по результатам измерений датчика угловой скорости. *Наука и образование:*

- научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, № 9. DOI: 10.7463/0915.0802772
- [13] Симоньянц Р.П. Обеспечение качества процессов управления в релейной системе без датчика скорости. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2014, № 10. DOI: 10.7463/1014.0729606
- [14] Фалдин Н.В., Феофилов С.В. Исследование периодических движений в релейных системах, содержащих звенья с ограничителями. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2007, № 2, с. 15–27.
- [15] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. *Качественная теория динамических систем второго порядка*. Москва, Наука, 1966, 568 с.
- [16] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. *Методы качественной теории в нелинейной динамике*. Москва, Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009, 548 с.

Статья поступила в редакцию 18.11.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Симоньянц Р.П., Тарасов В.А. Исследование проблемы «перевернутой ориентации» в системе стабилизации космического аппарата с нелинейными датчиками. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 1.  
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-1-1951>

*Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной молодежной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», посвященной 105-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея (ММНТК АКТ-2019), 28 мая 2019 г., Реутов, Российская Федерация*

**Симоньянц Ростислав Петрович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» факультета «Специальное машиностроение» МГТУ им. Н.Э. Баумана, декан Аэрокосмического факультета МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: управление ориентацией и стабилизация космических аппаратов.  
e-mail: rps@bmstu.ru

**Тарасов Валерий Александрович** — студент Аэрокосмического факультета кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана, стипендиат Президента Российской Федерации. e-mail: tarasov.v.a@bmstu.ru

## Investigating the “inverted attitude” problem in a spacecraft stabilisation system featuring non-linear sensors

© R.P. Simonyants, V.A. Tarasov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*The paper shows that gravitational torque may cause an emergency “inverted attitude” mode in a relay spacecraft stabilisation system due to the fact that a field-of-view limit type sensor may be non-linear. We performed structural partitioning of the phase cylinder into regions with various trajectory types for the case of a simplified planar motion model. We demonstrate the synthesis routine for finding the boundaries separating the region marking the system transitioning into the regular attitude mode from the region signifying it entering the emergency mode. We derived analytical conditions under which emergency modes arise, which can serve as the basis for synthesising algorithms to prevent these modes from occurring.*

**Keywords:** relay spacecraft stabilisation system, spacecraft attitude, emergency attitude modes

### REFERENCES

- [1] Beletskiy V.V. O libratsii sputnika [On satellite libration]. *Iskusstvennye sputniki Zemli* [Artificial Earth satellites], 1959, no. 3, pp. 13–31.
- [2] Likins P.W., Roberson R.E. *J. Astronaut Sci.*, 1966, vol. 13, no. 2, pp. 87–88.
- [3] Bogachev A.V., Vorobeva E.A., Zubov N.E., Mikrin E.A., Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N., Timakov S.N. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Journal of Computer and System Sciences International*, 2011, no. 3, pp. 132–139.
- [4] German A.D., Gutnik S.A., Sarychev V.A. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Journal of Computer and System Sciences International*, 2017, no. 1, pp. 128–140. DOI: 10.7868/S0002338816060056
- [5] Raushenbakh B.V., Tokar E.N. *Upravlenie orientatsiy kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft attitude control]. Moscow, Nauka Publ., 1974, pp. 269–270.
- [6] Gaushus E.V. *Issledovanie dinamicheskikh sistem metodom tochechnykh preobrazovaniy* [Investigating dynamic systems by the method of point transformations]. Moscow, Nauka Publ., 1974, pp. 135–136.
- [7] Simonyants R.P., Averyanov P.V. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*, 2018, no. 3, pp. 104–119. DOI: 10.18698/0236-3933-2018-3-104-119
- [8] Sevastyanov N.N. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2013, no. 3 (23), pp. 104–110.
- [9] Sumarokov A.V. *Rezervnyye rezhimy orientatsii sputnikov svyazi serii Yamal s ispolzovaniem nazemnykh radioizmereniy: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Redundant attitude modes of the Yamal communication satellite series using ground-based measurements. Cand. Phys.-Math. Sc. Diss.]. Moscow, Moscow Institute of Physics and Technology Publ., 2008, 115 p.



- [10] Zubov N.E., Mikrin E.A., Ryabchenko V.N., Oleynik A.S., Efanov D.E. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*, 2014, no. 5, pp. 3–17.
- [11] Bulut Y. *Applied Kalman Filter Theory. Civil Engineering Dissertations*. Boston, Massachusetts, North-eastern University, 2011, Paper 13.
- [12] Oleynik A.S., Zubov N.E., Ryabchenko V.N. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana — Science and Education: Scientific Edition of Bauman MSTU*, 2015, no. 9. DOI: 10.7463/0915.0802772
- [13] Simonyants R.P. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Bauman — Science and Education: Scientific Edition of Bauman MSTU*, 2014, no. 10. DOI: 10.7463/1014.0729606
- [14] Faldin N.V., Feofilov S.V. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Journal of Computer and System Sciences International*, 2007, no. 2, pp. 15–27.
- [15] Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Mayer A.G. *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* [Qualitative theory of second-order dynamic systems]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 568 p.
- [16] Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L. *Metody kachestvennoy teorii v nelineynoy dinamike* [Qualitative theory methods in nonlinear dynamics]. Moscow, Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics Publ., Computer Research Institute Publ., 2009, 548 p.

**Simonyants R.P.**, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Aerospace Systems, Mechanical Engineering Faculty, Bauman Moscow State Technical University; Dean, Aerospace Technology Faculty, Bauman Moscow State Technical University. Specialises in spacecraft attitude control and stabilisation. e-mail: rps@bmstu.ru

**Tarasov V.A.**, student, Department of Aerospace Systems, Aerospace Technology Faculty, Bauman Moscow State Technical University. Recipient of the Scholarship of the President of the Russian Federation. e-mail: tarasov.v.a@bmstu.ru