

## Прогнозирование и расчет анизотропии механических свойств однонаправленного углепластика при скоростном нагружении

© Хау Лю<sup>1</sup>, А.М. Думанский<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

<sup>2</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, 101990, Россия

*Разработана модель, основанная на соотношениях наследственно упругой среды, анизотропной теории упругости и принципа соответствия Вольтерра, позволяющая выполнять расчет и прогнозирование анизотропии реологических свойств однонаправленного углепластика в линейной области. На основе предложенной модели получены выражения для кривых деформирования однонаправленных материалов, которые были апробированы на образцах из углепластика IM7/8552 и углепластика AS4/3501-6, при растяжении под разными углами к направлению армирования со скоростями, соответствующими квазистатическому и динамическому нагружению. Предполагалось, что временные свойства однонаправленного углепластика проявляются в направлении, перпендикулярном армированию, и при сдвиге в плоскости слоя. Реализация расчетного алгоритма оказалась возможной благодаря использованию соотношений алгебры операторов резольвентного типа. Для получения числовых значений параметров модели были обработаны экспериментальные кривые деформирования образцов из углепластиков.*

**Ключевые слова:** принцип Вольтерра, наследственное упругое тело, резольвентный оператор

**Введение.** Большинство работ по композитам с полимерной матрицей в области прочности посвящено разработке моделей деформирования и разрушения при квазистатическом нагружении [1–5]. Однако элементы из композиционных материалов, в частности из углепластиков, армированных хрупкими волокнами и полимерной матрицей, в процессе эксплуатации подвергаются переменным во времени нагрузкам, в связи с чем способны накапливать необратимые повреждения. Это ограничивает использование композиционных материалов в силовых элементах конструкций и приводит к необходимости более детального изучения закономерностей их механического поведения, включая прямые или косвенные методы изучения временных свойств, рассеяния энергии, реакции на динамические и ударные воздействия и т. п.

Полимерная матрица в значительной степени обуславливает наличие временных свойств однонаправленного углепластика. Из последнего следует, что наряду с применением соотношений теории упругости анизотропного тела возникает необходимость использования соотношений, позволяющих учитывать влияние реологических свойств.

К таким могут быть отнесены соотношения теории вязкоупругости либо наследственной механики твердых тел [6, 7]. В данной работе показана корректность использования модели, основанной на соотношениях наследственной упругости, принципе соответствия Вольтерра [7] и анизотропной теории упругости [8]. Для оценки физической нелинейности кривых деформирования углепластиков обобщение модели может быть проведено с помощью введения дополнительных гипотез [7].

В работе были использованы экспериментальные данные, полученные из кривых деформирования двух вышеназванных типов углепластиков при нагружении образцов под разными углами к направлению армирования при разных значениях скорости деформации. Углепластик AS4/3501-6 армирован среднемодульным волокном и хрупкой эпоксидной матрицей, а углепластик IM7/8552 — высокомодульным волокном и вязкой матрицей, допускающей высокие предельные значения деформации образцов, нагружаемых под разными углами к направлению армирования [9]. Предварительный анализ не позволяет отдать предпочтение тому или иному материалу в случае его использования в ответственных элементах конструкций.

**Анализ опытных данных.** Результаты испытаний образцов из однонаправленного углепластика показывают устойчивую зависимость механических свойств от скорости деформирования [10–12]. Поэтому механические свойства, такие как модуль упругости и прочность, являются условными величинами, и квазистатическое нагружение — их частный случай.

Для сравнения в табл. 1 приведены основные механические свойства однонаправленных образцов из углепластиков IM7/8552 и AS4/3501-6 [9].

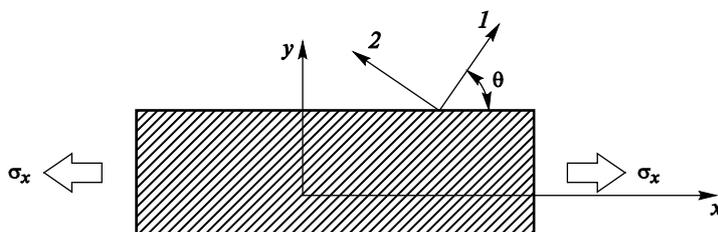
Таблица 1

**Основные значения механических свойств углепластиков IM7/8552 и AS4/3501-6**

Углепластик	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\epsilon_1^*$	$\epsilon_2^*$	$\gamma_{12}^*$
	ГПа				%		
IM7/8552	165	9	5,6	0,34	1,551	0,81	5
AS4/3501-6	126	11	6,6	0,28	1,38	0,436	2

Эпоксидная матрица 8552 обладает заметно большей деформативностью, чем матрица 3501-6, а именно — 1,7 % против 1,1 %. По данным табл. 1 также видно, что деформативность углепластика IM7/8552 в поперечном направлении и при сдвиге заметно выше деформативности углепластика AS4/3501-6. В частности, при сдвиге в плоскости слоя значение предельной деформации в 2,5 раза больше — 2 и 5 % соответственно.

**Описание модели.** В соответствии с предложенной концепцией совместного использования элементов теории наследственно упругой среды, анизотропной теории упругости и принципа соответствия Вольтерра предполагалось, что механические свойства однонаправленного слоя подчиняются следующим закономерностям. В направлении армирования однонаправленного углепластика имеет место упругое поведение, не зависящее от истории изменения напряжений во времени, в направлении, перпендикулярном армированию, — наследственно упругое поведение, а при сдвиге в плоскости слоя проявляются реологические и физически нелинейные свойства. В данной работе сделана попытка описать анизотропию механических свойств образцов из углепластика IM7/8552 и углепластика AS4/3501-6. Схема расположения образца по отношению к главным осям ортотропии и направлению действия нагрузки представлена на рис. 1.



**Рис. 1.** Схема нагружения образца:  
1, 2 — главные оси ортотропии;  $\theta$  — угол между направлением действия нагрузки и направлением армирования

Операторная форма определяющего соотношения наследственной упругости в направлении, перпендикулярном армированию, может быть записана следующим образом [7]:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2^0} (1 + F_2^*) \sigma_2, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_2$  — деформация;  $E_2^0$  — мгновенный модуль упругости, определяемый на основании экспериментальных данных;  $F_2^*$  — наследственный оператор разностного типа,  $F_2^* f = \int_0^t F_2(t - \tau) f(\tau) d\tau$  ( $F(t)$  — ядро оператора);  $\sigma_2$  — напряжение.

Таким образом, вид определяющего соотношения зависит от типа ядра, которое выбирается в соответствии с закономерностями механического поведения материала при переменных во времени нагрузках. В соответствии с принципом Вольтерра и соотношением (1) операторные выражения для модуля упругости можно записать так:

$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E^0}(1 + kF^*)$  [7]. Аналогично, при сдвиге в плоскости слоя модуль сдвига будет иметь вид  $\frac{1}{G_{12}^*} = \frac{1}{G_{12}^0}(1 + k_{12}F_{12}^*)$ .

Из теории упругости анизотропного тела [8] известно выражение для модуля упругости ортотропного тела, нагружаемого под углом к одной из осей ортотропии:  $\frac{1}{E_\theta} = \frac{c^4}{E_1} + \left(\frac{1}{G_2} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}\right)c^2s^2 + \frac{s^4}{E_2}$  ( $c = \cos \theta, s = \sin \theta, E_1$  — модуль упругости в направлении армирования).

Используя принцип соответствия Вольтерра, заключающийся в замене упругого модуля соответствующим операторным выражением, можно описать деформирование при переменном во времени нагружении. Применив оператор модуля сдвига в линейной области, представленный в виде  $G_{12}^*$ , получим операторное выражение модуля упругости под углом  $\theta$  к направлению армирования

$$\frac{1}{E_\theta^*} = \frac{c^4}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}^*} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}\right)c^2s^2 + \frac{s^4}{E_2^*}. \quad (2)$$

Подставив операторные выражения для модулей упругости в (2), выполнив разделение числовых и операторных слагаемых, получим выражение для модуля упругости материала под углом к направлению армирования:

$$\frac{1}{E_\theta^*} = \frac{c^4}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}^0} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}\right)c^2s^2 + \frac{s^4}{E_2^0} + \frac{1}{G_{12}^0}c^2s^2F_{12}^* + \frac{1}{E_2^0}s^4F_2^*. \quad (3)$$

Далее задача заключается в выборе типа наследственных операторов и вычислении значений их параметров. Задача существенно упростится, если в качестве операторов выбрать подобные операторы резольвентного типа [7]. К числу резольвентных операторов относятся оператор Абеля, дробно-экспоненциальная функция Работнова, ряд Прони, представляющий собой сумму экспоненциальных функций, и др. В данном случае выберем наследственный оператор с ядром Абеля:

$$I_\alpha^* f = \frac{k_i}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^\alpha f(\tau) d\tau \quad (\text{параметр сингулярности}$$

ядра удовлетворяет условию  $-1 < \alpha < 0$ ).

Обозначив в выражении (3) модуль по мгновенной кривой деформирования  $\frac{1}{E_\theta^0} = \frac{c^4}{E_1} + \left(\frac{1}{G_{12}^0} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}\right)c^2s^2 + \frac{s^4}{E_2^0}$  запишем с учетом сле-

ланных ранее предположений выражение для модуля упругости (3):  $\frac{1}{E_{\theta}^*} = \frac{1}{E_{\theta}^0} + \lambda_{\theta} I_{\alpha}^*$ , где  $\lambda_{\theta} = \frac{k_{12} c^2 s^2}{G_{12}^0} + \frac{k_2 s^4}{E_2^0}$ . Обозначив  $k_{\theta} = \lambda_{\theta} E_{\theta}^0$ , определяющее соотношение можно представить следующим образом:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E_{\theta}^0} (1 + k_{\theta} I_{\alpha}^*) \sigma_{\theta}. \quad (4)$$

Следует отметить, что выражение (4) подобно выражению для модуля в частных случаях, с той лишь разницей, что его параметры представляют собой функции от мгновенных характеристик однонаправленного материала и угла  $\theta$ . Числовые значения параметров (4) могут быть определены, например, по результатам испытаний на ползучесть или по результатам испытаний при нагружении с постоянными значениями скорости напряжения. Возможно использование определяющих соотношений, полученных по результатам для других режимов нагружения, однако при этом возникнут трудности с вычислением параметров.

В данной работе для определения параметров использовались кривые деформирования образцов из углепластика IM7/8552 и углепластика AS4/3501-6, нагружаемых с разными значениями скорости деформирования.

Тогда для получения определяющего соотношения, позволяющего описывать деформирование при скоростном нагружении с помощью известного выражения для резольвенты оператора Абеля [7], было обращено соотношение (4)

$$\sigma_{\theta} = E_{\theta}^0 (1 - k_{\theta} \mathcal{E}_{\alpha}^*(-k_{\theta})) \varepsilon_{\theta}, \quad (5)$$

где  $\mathcal{E}_{\alpha}^*(-k_{\theta}) \cdot 1 = t^{1+\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k_{\theta} t^{1+\alpha})^n}{\Gamma[1 + (1 + \alpha)(1 + n)]}$  — дробно-экспоненциальная функция Работнова [7] ( $\Gamma(\ )$  — гамма-функция соответствующего аргумента).

Из анализа обработанных ранее экспериментальных данных в рамках допустимой погрешности описания результатов опыта параметр сингулярности ядра  $\alpha$  может быть принят равным  $-0,9$ .

Параметры определяющего соотношения (5) устанавливали последовательно по результатам испытаний образцов из однонаправленного углепластика IM7-8552 и AS4/3501-6 под углами  $90^{\circ}$  и  $45^{\circ}$ . Из работы [9] были взяты не зависящие от времени значения модулей упругости  $E_1$  в направлении армирования и коэффициент Пуассона  $\nu_{12}$ . С помощью оцифровки рисунков из работ [10, 11] были получены числовые данные определяющего соотношения (табл. 2).

Параметры модели для углепластиков IM7/8552 и AS4/3501-6

Углепластик	$E_2^0$	$E_{45}^0$	$G_{12}^0$	$k_2$	$k_{12}$
	ГПа			$e^{-(1+\alpha)}$	
IM7/8552	10,4	17,22	5,8	0,1280	0,1327
AS4/3501-6	15,5	23,33	10,1	0,2018	0,3051

Приведенное в табл. 2 значение  $E_{45}^0$  является мгновенным модулем упругости образцов, нагружаемых под углом  $45^\circ$ . Из эксперимента было также определено значение сдвиговой деформации  $\gamma^*$  углепластика AS4/3501-6, равное 0,75 %, при превышении которого наблюдается участок нелинейного деформирования.

При деформировании с постоянной скоростью  $\dot{\epsilon}$  изменение деформации следует закону  $\epsilon = \dot{\epsilon}t$ . Тогда определяющее соотношение (5) примет вид

$$\sigma_\theta = E_\theta^0 \left[ 1 - k_\theta \left( \frac{\epsilon_2}{\dot{\epsilon}} \right)^{1+\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( -k_\theta \left( \frac{\epsilon_2}{\dot{\epsilon}} \right)^{1+\alpha} \right)^n}{\Gamma[2 + (1 + \alpha)(1 + n)]} \right] \dot{\epsilon} \epsilon_\theta. \quad (6)$$

С использованием соотношения (6) были построены расчетные кривые деформирования, приведенные на рис. 2 и 3 для образцов из однонаправленных углепластиков IM7/8552 и AS4/3501-6, нагружаемых под углами  $45^\circ$  и  $90^\circ$ .

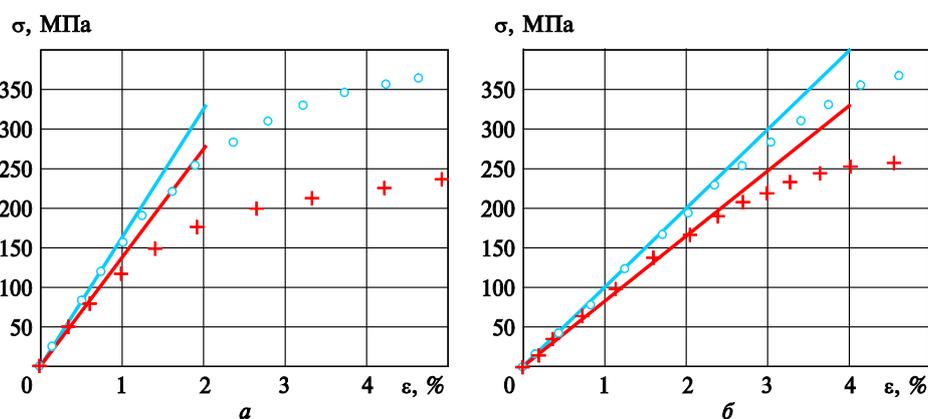
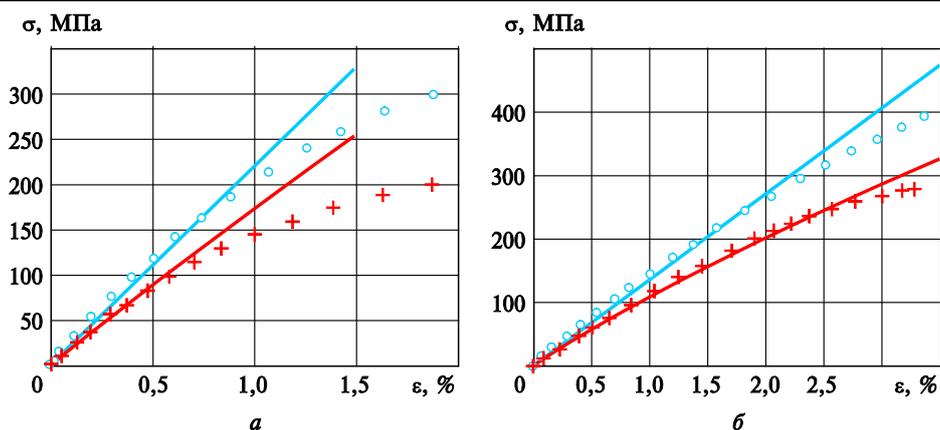


Рис. 2. Кривые деформирования образцов из углепластика IM7/8552 при нагружении под углами  $45^\circ$  (а) и  $90^\circ$  (б) к направлению армирования: —  $\circ$  — динамическое нагружение; —  $+$  — квазистатическое нагружение



**Рис. 3.** Кривые деформирования образцов из углепластика AS4/3501-6 при нагружении под углами  $45^\circ$  (а) и  $90^\circ$  (б) к направлению армирования:  
— ○ — динамическое нагружение; — + — квазистатическое нагружение

Экспериментальные данные и расчетные кривые деформирования хорошо согласуются. Расчет показывает, что значения мгновенных модулей упругости однонаправленного углепластика AS4/3501-6 больше, чем соответствующие значения мгновенных модулей упругости углепластика IM7/8552. Вероятно, это связано со свойствами более жесткой матрицы 3501-6.

**Заключение.** Представлена феноменологическая модель, основанная на совместном использовании соотношений анизотропной теории упругости и наследственной теории упругости с использованием принципа соответствия Вольтерра. Получены определяющие соотношения, позволяющие описать анизотропию механических свойств однонаправленных образцов из углепластиков IM7/8552 и AS4/3501-6 при скоростном деформировании. Построены расчетные кривые деформирования и получено удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных результатов. Проведено сравнение механических свойств и значений параметрической мгновенной кривой деформирования углепластика. Поскольку анизотропия физически нелинейных свойств углепластиков в значительной степени определяется соответствующими свойствами при сдвиге в плоскости слоя, для описания кривых деформирования в области, приближенной к разрушению, необходимо обобщение определяющего соотношения для учета нелинейного деформирования.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hinton M.J., Kaddour A.S., Soden P.D., eds. *Failure criteria in fibre-reinforced-polymer composites: The World-Wide Failure Exercise*. Elsevier Science, 2004, 1268 p.
- [2] Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1988, 272 с.

- [3] Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение, 1984, 264 с.
- [4] Винсон Ж.Р., Сираковский Р.Л. *Поведение конструкций из композитных материалов*. Москва, Металлургия, 1991, 264 с.
- [5] Herakovich C.T. *Mechanics of fibrous composites*. New York, John Wiley&Sons, 1998, 460 p.
- [6] Tschoegl N.W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1989, 769 p.
- [7] Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. Москва, Наука, 1977, 384 с.
- [8] Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. Москва, Наука, 1977, 416 с.
- [9] Kaddour A.S., Hinton M.J., Li S., Smith P. *Instructions to contributors of the third world-wide failure exercise (WWFE-III): Part (A)*. 2008, 48 p.
- [10] Daniel I.M., Werner B.T., Fenner J.S. Strain-rate-dependent failure criteria for composites. *Comp. Sci. and Tech.*, 2011, vol. 71, pp. 357–364.
- [11] Koberber H., Xavier J., Camanho P.P. High strain rate characterization of unidirectional carbon-epoxy IM7-8552 in transverse compression and in-plane shear using digital image correlation. *Mech. and Mater.*, 2010, vol. 42, pp. 1004–1019.

Статья поступила в редакцию 09.12.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Лю Хао, Думанский А.М. Прогнозирование и расчет анизотропии механических свойств однонаправленного углепластика при скоростном нагружении. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2020, вып. 1.  
<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-1-1947>

*Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на Международной молодежной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии», посвященной 105-летию со дня рождения академика В.Н. Челомея (ММНТК АКТ-2019), 28 мая 2019 г., Реутов, Российская Федерация*

**Лю Хао** — аспирант МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: haoliu@mail.ru

**Думанский Александр Митрофанович** — д-р физ.-мат. наук, профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана; заведующий лабораторией Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Автор более 200 научных работ в области механики композитных сред. e-mail: aldumans@mail.ru

## Prediction and calculation of mechanical properties anisotropy of unidirectional carbon-fiber-reinforced plastic under strain rate loading

© H. Liu<sup>1</sup>, A.M. Dumansky<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

<sup>2</sup>Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 101990, Russia

*A model based on the relations of a hereditarily elastic medium, an anisotropic theory of elasticity, and the Volterra correspondence principle has been developed, which allows one to calculate and predict the anisotropy of the rheological properties of unidirectional carbon fiber in a linear area. Based on the proposed model, expressions are obtained for the stress strain curves of unidirectional samples, which were tested on samples made of carbon fiber reinforced plastic IM7/8552 and carbon fiber plastic AS4/3501-6, loaded at different angles to the direction of reinforcement and strain rates corresponding to quasi-static and dynamic loading. It was assumed that the time dependent properties of unidirectional carbon fiber reinforced plastics are manifested in the direction perpendicular to the reinforcement and in-plane shear of the layer. The implementation of the calculation algorithm turned out to be possible due to the use of relations of the algebra of the resolvent operators. To obtain numerical values of the model parameters, the experimental curves of the deformation of carbon fiber samples were processed.*

**Keywords:** Volterra principle, hereditary elastic body, resolvent operator

### REFERENCES

- [1] Hinton M.J., Kaddour A.S., Soden P.D., eds. *Failure criteria in fibre-reinforced-polymer composites: The World-Wide Failure Exercise*. Elsevier Science, 2004, 1268 p.
- [2] Vasiliev V.V. *Mekhanika konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov* [Structure mechanics of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1988, 272 p.
- [3] Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloynnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Calculation of multilayered plates and shells]. Moscow, Mashinostroenie, 1984, 264 p.
- [4] Vinson J.R., Sierakovski R.L. *The behavior of structures composed of composite materials*. Martinus Nijhoff Publ., 1986, 264 p. [in Russ.: Vinson J.R., Sierakovski R.L. *Povedeniye konstruksiy iz kompozitnykh materialov*. Moscow, Metallurgiya Publ., 1991, 264 p.].
- [5] Herakovich C.T. *Mechanics of fibrous composites*. New York, John Wiley&Sons, 1998, 460 p.
- [6] Tschoegl N.W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1989, 769 p.
- [7] Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow, Mashinostroenie, 1977, 384 p.
- [8] Lekhnitskii S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of anisotropic body]. Moscow, Nauka, 1977, 416 p.
- [9] Kaddour A.S., Hinton M.J., Li S., Smith P. *Instructions to contributors of the third world-wide failure exercise (WWFE-III): Part (A) 2008*, 48 p.

- [10] Daniel I.M., Werner B.T., Fenner J.S. Strain-rate-dependent failure criteria for composites. *Comp. Sci. and Tech.*, 2011, vol. 71, pp. 357–364.
- [11] Koerber H., Xavier J., Camanho P.P. High strain rate characterization of unidirectional carbon-epoxy IM7-8552 in transverse compression and in-plane shear using digital image correlation. *Mech. and Mater.*, 2010, vol. 42, pp. 1004–1019.

**Liu Hao**, Post-graduate student, Bauman Moscow State Technical University.  
e-mail: haoliu@mail.ru

**Dumansky Alexandr Mitrofanovich**, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Bauman Moscow State Technical University; Head of Laboratory, the Institute of Mechanical Engineering named after A.A. Blagonravov RAS. The author of more than 200 scientific papers in the field of mechanics of composite materials. e-mail: aldumans@mail.ru