

Аналитическое построение точечных отображений релейной динамической системы с учетом запаздываний

© Р.П. Симоньянц, В.Н. Булавкин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Решается задача аналитического построения отображений Пуанкаре для отыскания простых и сложных предельных циклов в релейной динамической системе при наличии постоянного возмущения и запаздывания. Трудность отыскания сложных периодических движений преодолена за счет применения теории многомерных точечных преобразований Ю.И. Неймарка, которая позволила свести рассматриваемую задачу к поиску многократной неподвижной точки. Выбор линий переключения с учетом запаздываний в качестве дуг без контакта существенно упростил задачу аналитического построения точечного отображения. Результаты аналитических построений подтверждены численным моделированием движений. Полученные результаты могут найти практическое применение при разработке реактивных систем управления ориентацией и стабилизации космического аппарата. По сравнению с ранее известным решением получен более полный результат, имеющий особо большое значение при исследовании систем с высокой эффективностью исполнительных органов.

Ключевые слова: отображение Пуанкаре, автоколебания, предельный цикл, релейное управление, реактивная система стабилизации

Введение. Рассматривается динамика релейно управляемой системы с запаздыванием. К этому типу систем относятся системы реактивного управления космических аппаратов. Для выполнения аналитических исследований основных режимов движения полная математическая модель высокого порядка редуцируется. При этом вводятся упрощающие допущения: космический аппарат может быть представлен абсолютно твердым телом с диагональным тензором инерции; значения углов и угловых скоростей малы, и их произведениями можно пренебречь; инерционность исполнительных органов (ИО) может быть учтена постоянным значением времени запаздывания. Обратная связь формируется на основе информации, поступающей от идеальных измерителей угла и угловой скорости.

С учетом принятых допущений рассматриваемую систему можно представить в виде трех независимых подсистем по каналам тангажа, курса и крена. Автономность и масштабная инвариантность каждого канала управления позволяет свести задачу к исследованию одного канала, для которого справедлива следующая математическая модель:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = g - aF_{\tau}[\sigma(t)], \\ \sigma = x + ky, \\ F_{\tau}[\sigma(t)] = F[\sigma(t - \tau)], \\ F(\sigma) = 1/2[\text{sgn}(\sigma - \alpha + hF_0) + \text{sgn}(\sigma + \alpha + hF_0)], \end{cases} \quad (1)$$

где x, y — измеряемые значения угла и угловой скорости (фазовые координаты); g — эффективность возмущения; a — эффективность управления; F_{τ} — запаздывающая функция управления; σ — сигнал обратной связи; k — коэффициент усиления; $F(\sigma)$ — трехзначная функция релейного регулятора с зоной нечувствительности α и петель гистерезиса h ; τ — запаздывание; $F_0 = F_0(t) = F(t - 0)$ — значение F в предыдущий момент времени.

Введение времени запаздывания τ позволило понизить порядок уравнений, описывающих динамику системы, но наложило ограничение на время t_u управляющих импульсов [1, с. 115–117]: $\tau \in \{\tau_1, \tau_2\}$, $\tau_1 < \tau_2$, $t_u \geq \tau_1 + \tau_2$, где τ_1 и τ_2 — время запаздывания на включение и выключение соответственно.

Нелинейная динамическая система (1), как показали исследования, например [1–3], обладает уникальными свойствами, многие из которых еще недостаточно полно изучены. В то же время эти системы благодаря своей простоте и надежности нашли широкое распространение в космической технике, причем в случае применения реактивных двигателей как ИО такое управление оказывается практически единственно возможным. Для разработки релейных систем, удовлетворяющих современным требованиям по качеству управления, необходимы удобные в инженерной практике методы анализа и синтеза.

Численное моделирование системы (1) может дать решения с необходимой точностью для конкретных параметров системы, но при их изменении в широком диапазоне значений не позволяет прогнозировать поведение решений, так как система при вариации параметров имеет множество решений, переходы между которыми носят бифуркационный характер. Методы, основанные на линеаризации системы (1), не дают требуемых результатов, поскольку важнейшие особенности системы связаны именно с ее нелинейностью.

Наиболее эффективны точные аналитические методы, основанные на качественной теории динамических систем. К ним относится

и используемый в настоящей работе метод точечных отображений, который берет свое начало от работ А. Пуанкаре и получает развитие во второй половине XX века в работах А.А Андропова, Ю.И. Неймарка, Э.В. Гаушуса и других отечественных ученых.

Динамика стабилизации космического аппарата при релейном управлении с линейной коррекцией по скорости рассматривалась, например, в работе [3] для частного случая сильных (ударных) управляющих воздействий. Использовалась модель разрывных колебаний, при этом параболические фазовые траектории интервалов управляемого движения заменялись отрезками прямых, параллельных оси ординат, что позволило существенно упростить задачу. Для слабых управляющих воздействий такая модель дает большие ошибки, имеющие принципиальное значение.

В работе [4] рассмотрены общие принципы построения точечного отображения при известном общем решении дифференциального уравнения. Отмечается, что особенности релейных систем не позволяют использовать для их исследования такие известные методы, как метод малого параметра, метод гармонической линеаризации или метод усреднения. В то же время метод точечных отображений признается естественным и эффективным.

Учет запаздывания осложняет исследование динамики релейной системы. Известен ряд работ, например [5, 6], в которых исследуется динамика системы релейного управления с обратной связью и запаздыванием, в частности стабилизация перевернутого маятника. В работах [7] и [8] рассмотрена задача широтно-импульсного управления реактивными двигателями с запаздыванием. В [9] численными методами исследуется система с запаздыванием, дан анализ существующих методов и предложен новый подход. В [10] методом фазового годографа исследуются автоколебания цифровых систем, где запаздывание обусловлено дискретизацией сигнала. В [11] изучаются нейромоторные системы управления человеческим организмом, анализируется влияние запаздывания на предельные циклы. В работе [12] дан обзор методов анализа предельных циклов в автоколебательной системе.

Отметим, что работах [5–12] исследования ведутся без применения метода точечных отображений, но в последние годы опубликован ряд работ, в которых методу Пуанкаре отдается предпочтение. Так, в [13] метод точечных отображений применен в качестве инструмента анализа биологических импульсных систем: определены условия устойчивости предельных циклов, проведен бифуркационный анализ. Для исследования предельных циклов в [14] применяется теория кусочно-линейных систем и отображение Пуанкаре, в [15] синтезирован алгоритм стабилизации неустойчивой релейной хаотической системы.

В настоящем исследовании ставится задача аналитического построения точечных отображений Пуанкаре для отыскания простых и сложных аттракторов в динамической системе (1). Задача осложнена действием постоянного возмущения и запаздывания ИО.

Построение отображений Пуанкаре. Движения системы (1) представим на фазовой поверхности (ФП), которая функцией управления $F(\sigma, \alpha, h)$ разделяется на листы F^+, F^-, F^0 . Границы листов — линии переключений L_i статической ($\tau = 0$) структуры ФП:

$$L_i : x + ky = c_i, \quad i = \overline{1, 4}, \quad \{c_1 = \alpha, c_2 = \alpha - h, c_3 = -\alpha + h, c_4 = -\alpha\}. \quad (2)$$

Каждый лист ФП заполнен соответствующими семействами фазовых траекторий:

$$\begin{cases} \Gamma^0 : y^2 - 2gx = 2E^0, & \forall (x, y) \in F^0, \\ \Gamma^+ : y^2 + 2(a - g)x = 2E^+, & \forall (x, y) \in F^+, \\ \Gamma^- : y^2 - 2(a + g)x = 2E^-, & \forall (x, y) \in F^-, \end{cases} \quad (3)$$

где E^0, E^+, E^- — константы, определяемые начальными условиями.

Введем в рассмотрение динамическую структуру, определяемую линиями $L_{i,\tau}$ как геометрическое место точек, в которых происходят переключения ИО спустя время запаздывания $\tau = \{\tau_1, \tau_2\}$ после того, как сигнал σ достигает порогового значения $c_i, i = \overline{1, 4}$, на линии L_i статической структуры. Уравнение $L_{i,\tau}$ получим применением к линии L_i операции точечного отображения сдвига T_τ^F . Отображение $T_\tau^F \in \{T_\tau^0, T_\tau^+, T_\tau^-\}$ каждой точке $(x_i, y_i) \in L_i$ ставит в соответствие точку $(x_{i,\tau}, y_{i,\tau}) \in L_{i,\tau}$, в которую первая перейдет по фазовой траектории $\Gamma^F \in \{\Gamma^0, \Gamma^+, \Gamma^-\}$ за время τ . Выполнив операцию T_τ^F :

$$\begin{cases} T_\tau^0 : L_1 \xrightarrow{\Gamma^0(\tau_1)} L_{1\tau_1}, L_3 \xrightarrow{\Gamma^0(\tau_1)} L_{3\tau_1}, \\ T_\tau^+ : L_2 \xrightarrow{\Gamma^+(\tau_2)} L_{2\tau_2}, \\ T_\tau^- : L_4 \xrightarrow{\Gamma^-(\tau_2)} L_{4\tau_2}, \end{cases} \quad (4)$$

приведем уравнение линий $L_{i,\tau}$ динамической структуры ФП к виду

$$L_{i,\tau} : x + (k - \tau)y = c_{i,\tau}, \quad (5)$$

где $\tau = \tau(F) = \{\tau_1, \tau_2\}$; $c_{i,\tau} = c_i - \frac{1}{2}(g - aF_i)\tau^2 + k(g - aF_i)\tau$, $i = \overline{1,4}$;
 $\{F_1 = F_3 = 0; F_2 = +1; F_4 = -1\}$.

Легко убедиться, что при постоянной эффективности возмущения $g \neq 0$ в рассматриваемой системе существуют как простые предельные циклы Γ_1^* и Γ_2^* ($n = 1$ и $n = 2$), так и сложные n -импульсные предельные циклы Γ_n^* ($n = 3, 5, 7, 9, \dots, \infty$). Представим возможные движения на ФП, используя кусочные фазовые траектории $\Gamma^0, \Gamma^+, \Gamma^-$ и их объединения в одноимпульсные циклы $\Gamma_1 = \Gamma^0 \cup \Gamma^+$ ($g \geq 0$), $\Gamma_1 = \Gamma^0 \cup \Gamma^-$ ($g \leq 0$) и в двухимпульсные циклы $\Gamma_2 = \Gamma^0 \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^0 \cup \Gamma^-$. Алгоритму управления дадим геометрическую интерпретацию размещением на ФП линий переключения L_i , $i = \overline{1,n}$.

Условимся кусочно-непрерывную траекторию любого динамического процесса представлять как объединение кусков траекторий $\{\Gamma^0, \Gamma^+, \Gamma^-\}$ (3), сопрягающихся на линиях $L_{i\tau}$ (5) динамической структуры ФП. Каждый кусок (отрезок дуги) траектории помечается конкретизирующими индексами: верхний индекс указывает на принадлежность траектории одному из трех листов ФП $\{F^0, F^+, F^-\}$, нижние индексы — на принадлежность точек начала и конца куска траектории соответствующим линиям переключения $L_{i\tau}$, $i = \overline{1,4}$.

Выберем на линии $L_{i\tau}(x, y)$, $\forall y \geq 0$, отрезок без контакта, полагая, что фазовые траектории его всюду пересекают. Случаи нарушения этого условия следует рассматривать отдельно. Предельный цикл Γ_1^* трактуем как замыкание на отрезке $L_{i\tau}$ кусочно-непрерывной фазовой траектории Γ_1 , состоящей из двух кусков: $\Gamma_{1\tau, 2\tau}^+ \cup \Gamma_{2\tau, 1\tau}^0$ при $g > 0$ или $\Gamma_{3\tau, 4\tau}^- \cup \Gamma_{4\tau, 3\tau}^0$ при $g < 0$. Не нарушая общности рассуждений, будем везде рассматривать случай $g > 0$.

Для определения параметров предельного цикла Γ_1^* требуется установить зависимость координат $(\bar{x}_{1\tau}, \bar{y}_{1\tau})$ точки образа от координат $(x_{1\tau}, y_{1\tau})$ точки-прообраза (оригинала), иначе говоря, необходимо найти функцию последования $\bar{y}_{1\tau} = f_1(y_{1\tau})$ точечного отображения T_1 отрезка без контакта $L_{i\tau}$ в себя, осуществляемого фазовыми траекториями Γ_1 . Поскольку они связаны уравнением линии $L_{i\tau}$, достаточно рассмотреть зависимость только для одной координаты. Условимся операцию T_1 записывать в виде

$$T_1 : L_{i\tau} \xrightarrow{\Gamma_1} L_{i\tau}, \bar{y}_{1\tau} = f_1(y_{1\tau}). \quad (6)$$

Функция последования (6) позволяет найти неподвижную точку отображения T_1 , образ которой совпадает с прообразом: $\bar{y}_{1\tau} = y_{1\tau} = y_{1\tau}^*$. Следовательно, неподвижная точка, через которую могут быть определены все параметры автоколебательного состояния, есть корень трансцендентного уравнения

$$y_{1\tau} - f_1(y_{1\tau}) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) решается методом итераций на диаграмме Ламерея. Предельный цикл Γ_2^* образуется замыканием на $L_{i\tau}$ траектории Γ_2 , образованной объединением четырех кусков: $\Gamma_2 = \Gamma_{1\tau, 2\tau}^+ \cup \Gamma_{2\tau, 3\tau}^0 \cup \Gamma_{3\tau, 4\tau}^- \cup \Gamma_{4\tau, 1\tau}^0$. Тогда точечное отображение T_2 можно представить записью

$$T_2 : L_{i\tau} \xrightarrow{\Gamma_2} L_{i\tau}, \bar{y}_{1\tau} = f_2(y_{1\tau}). \quad (8)$$

Для определения неподвижной точки отображения T_2 на диаграмме Ламерея решаем уравнение, которое на основании (8) имеет вид, аналогичный (7):

$$y_{1\tau} - f_2(y_{1\tau}) = 0. \quad (9)$$

Неподвижные точки отображений (6) и (8) на диаграмме Ламерея представляют собой пересечение графика функции последования с биссектрисой координатного угла. Их принято называть простыми неподвижными точками. Для сложных предельных циклов простую неподвижную точку отыскать трудно из-за громоздкости процедуры. Однако эта трудность может быть преодолена, если, используя теорию многомерных точечных преобразований Ю.И. Неймарка [3, с. 105; 4], рассматриваемую задачу свести к поиску m -кратной неподвижной точки. В системе (1) сложные предельные циклы имеют нечетное число импульсов, представляя собой повторенный m раз двухимпульсный цикл Γ_2 , замкнутый одним одноимпульсным циклом Γ_1 :

$$\begin{cases} T_n : L_{i\tau} \xrightarrow{\Gamma_n} L_{i\tau}, \bar{y}_{1\tau} = f_n(y_{1\tau}), \\ \Gamma_n = \cup_m \Gamma_2 \cup \Gamma_1, \quad m = (n-1)/2, \quad \forall n \geq 3. \end{cases} \quad (10)$$

Такая форма траектории Γ_n позволяет ограничить построение точечного отображения T_n двумя преобразованиями отрезка без контакта в себя: T_2 и T_1 . Тогда неподвижная точка отображения T_n может быть представлена инвариантным многообразием в виде m -кратного цикла преобразования. На диаграмме Ламерея она фор-

мируется как предел итерационной последовательности, порождаемой точечным отображением T_n .

Аналитические функции отображений T_1, T_2 . Для построения отображения T_1 и T_2 , $\forall g > 0$, используем промежуточные точечные отображения $T_{12}, T_{23}, T_{34}, T_{41}, T_{21}$, для которых значительно проще получить функции соответствия $y_{i+1} = f_{ii+1}(y_i)$:

$$T_2 = T_{12}T_{23}T_{34}T_{41}: \bar{y}_1 = f_2(y_1) = f_{41}(f_{34}(f_{23}(f_{12}(y_1))))), \quad (11)$$

$$T_1 = T_{12}T_{21}: \bar{y}_1 = f_1(y_1) = f_{21}(f_{12}(y_1)). \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{12}: L_{1\tau} \xrightarrow{\Gamma_{12}^+} L_{2\tau}, \quad y_{2\tau} = f_{12}(y_{1\tau}), \\ T_{23}: L_{2\tau} \xrightarrow{\Gamma_{23}^0} L_{3\tau}, \quad y_{3\tau} = f_{23}(y_{2\tau}), \\ T_{34}: L_{3\tau} \xrightarrow{\Gamma_{34}^-} L_{4\tau}, \quad y_{4\tau} = f_{34}(y_{3\tau}), \\ T_{41}: L_{4\tau} \xrightarrow{\Gamma_{41}^0} L_{1\tau}, \quad y_{1\tau} = f_{41}(y_{4\tau}), \\ T_{21}: L_{2\tau} \xrightarrow{\Gamma_{21}^0} L_{1\tau}, \quad y_{1\tau} = f_{21}(y_{2\tau}). \end{array} \right. \quad (13)$$

Аналитические выражения промежуточных отображений (функции соответствия) находятся из совместного решения уравнений параболических фазовых траекторий (3) и прямых (5). Геометрический анализ динамических процессов на ФП и итераций на диаграмме Ламерея задачу выбора корней трансцендентного уравнения делает очевидной. При этом лишние корни, обусловленные пересечением траектории с той частью линии, которая не реализуется (обратное течение времени), отбрасываются.

Элементарными преобразованиями функции соответствия отображений $T_{12}, T_{23}, T_{34}, T_{41}, T_{21}$ приведем к следующему виду:

$$T_{12}: y_2 = f_{12}(y_1) = b(k - \tau_2) - \sqrt{(y_1 - bk)^2 + 2b\tau_1 y_1 + 2b(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \xi_1 + \xi_2}; \quad (14)$$

$$T_{23}: y_3 = f_{23}(y_2) = -g(k - \tau_1) - \sqrt{(y_2 + gk)^2 - 2g\tau_2 y_2 + 2g(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) + \xi_3 + \xi_4}; \quad (15)$$

$$T_{34}: y_4 = f_{34}(y_3) = -d(k - \tau_2) + \sqrt{(y_3 + dk)^2 - 2d\tau_1 y_3 + 2d(\varepsilon_4 - \varepsilon_3) + \xi_1 - \xi_2}; \quad (16)$$

$$T_{41} : \bar{y}_1 = f_{41}(y_4) = -g(k - \tau_1) + \sqrt{(y_4 + gk)^2 - 2g\tau_2 y_4 + 2g(\varepsilon_1 - \varepsilon_4) + \xi_3 - \xi_4}; \quad (17)$$

$$T_{21} : \bar{y}_1 = f_{21}(y_2) = -g(k - \tau_1) + \sqrt{(y_2 + gk)^2 - 2g\tau_2 y_2 + 2g(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \xi_3 + \xi_4}, \quad (18)$$

где

$$b = a - g; \quad d = a + g; \quad \varepsilon_1 = \alpha; \quad \varepsilon_2 = \alpha - h; \quad \varepsilon_3 = -\alpha; \quad \varepsilon_4 = -\alpha + h;$$

$$\xi_1 = g^2(2\tau_1^2 - 2k\tau_1 - \tau_2^2) - a^2\tau_2^2; \quad \xi_2 = 2ag(\tau_2^2 + k\tau_1 - \tau_1^2);$$

$$\xi_3 = g^2(2\tau_2^2 - 2k\tau_2 - \tau_1^2); \quad \xi_4 = 2ag\tau_2(k - \tau_2).$$

Для построения функций последования $\bar{y}_1 = f_1(y_1)$, $\bar{y}_1 = f_2(y_1)$ через найденные функции соответствия промежуточных точечных отображений (14)–(18) по схеме (11), (12) требуется дополнительный анализ областей их определения.

Области определения отображений T_1 и T_2 . Выделим на линии L_1 отрезок без контакта, обозначив его через l_1 , и рассмотрим геометрические особенности движений системы (1) на ФП. Пусть в момент времени $t = t_1$ состояние (x_1, y_1) отвечает условию $\sigma_1 = x_1 + ky_1 = \alpha$, т. е. изображающая точка находится на отрезке $l_1 \in L_1$. Тогда к моменту $t + \tau_1$, перейдя по траектории Γ^0 в состояние $(x_{1\tau}, y_{1\tau}) \in l_{1\tau} \subset L_{1\tau}$, она скачком перейдет на лист F^+ и начнет движение по траектории $\Gamma^+ \in F^+$ до выключения управляющего ускорения в точке $(x_{2\tau}, y_{2\tau})$ на отрезке $l_{2\tau} \subset L_{2\tau}$.

Таким образом, отрезок $l_{1\tau}$ — это геометрическое место точек начала возможных движений по листу F^+ после перехода с листа F^0 . Это множество точек порождает однопараметрическое семейство фазовых траекторий — поток $\{\Gamma^+\}$, отображающий отрезок линии $l_{1\tau}$ в отрезок $l_{2\tau} \subset L_{2\tau}$. При этом облучаемый потоком $\{\Gamma^+\}$ отрезок $l_{2\tau} \subset L_{2\tau}$, в свою очередь, порождает поток $\{\Gamma^0\}$, часть которого, не достигнув линии L_3 , возвращается к листу F^+ и облучает последующий отрезок $l'_1 \subset L_{1\tau}$. Другая часть потока $\{\Gamma^0\}$, достигнув

линии $L_{3\tau}$, переходит на лист F^- . Из этого следует, что критическая траектория $\Gamma_{K_3}^0 \subset \{\Gamma^0\}$, разделяющая поток $\{\Gamma^0\}$ на две части, порождена границей между областями определения точечных отображений T_1 и T_2 . Для определения этой критической траектории предлагается следующий алгоритм, геометрический смысл которого иллюстрирует рис. 1.

Шаг 1. Найти координаты точки касания K_3 из условия, что в ней угловой коэффициент касательной к кривой $\Gamma_{K_3}^0(x, y)$ равен $(dx/dy)_{K_3} = -k$. Дифференцируя уравнение траектории $\Gamma^0(x, y)$ с учетом того, что $K_3 \in L_3$, получаем

$$y_{K_3} = -gk; \quad x_{K_3} = -\alpha + gk^2.$$

Шаг 2. Найти координаты точки $2_{K_3} \in l_{2\tau} \subset L_{2\tau}$ попятным движением по траектории $\Gamma_{K_3}^0$ от точки K_3 до пересечения с линией $L_{2\tau}$.

Шаг 3. Найти координаты точки $1_{K_3} \subset L_{1\tau}$ — границу между областями определения отображений T_1 и T_2 попятным движением по траектории $\Gamma_{K_3}^+$ от точки 2_{K_3} .

Шаг 4. Определить интервалы значений координат точки-прообраза на основании приведенного ниже анализа движений на ФП.

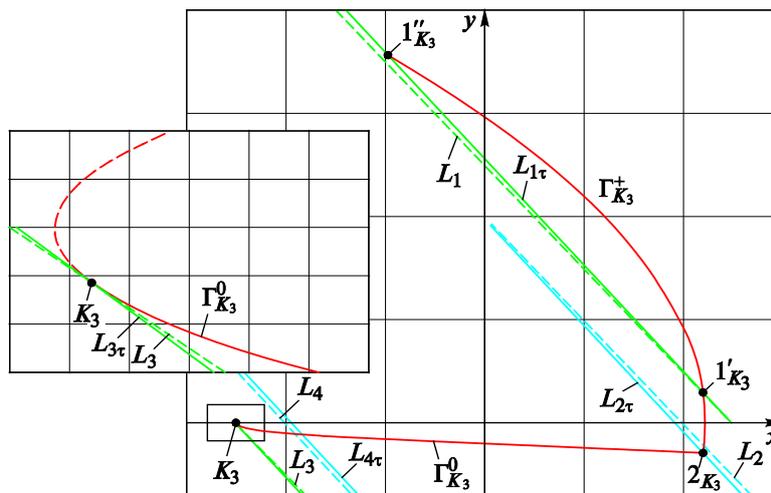


Рис. 1. Критическая фазовая траектория на границе областей определения отображений T_1 и T_2

Как показано на рис. 1, параболическая фазовая траектория $\Gamma_{K_3}^+$ пересекает линию $L_{1\tau}$ в двух точках: $1''_{K_3} \in L_{1\tau}$ и $1'_{K_3} \in L_{1\tau}$. Обе точки-прообразы имеют один и тот же образ на L_3 , и этот образ — точка $K_3 \in L_3$. Все точки-прообразы на линии $L_{1\tau}$ в интервале $(y_{1''_{K_3}}, y_{1'_{K_3}})$ принадлежат области определения отображения T_1 . Вычисления значений граничных точек интервала $(y_{1''_{K_3}}, y_{1'_{K_3}})$ можно выполнять по следующей формуле, полученной на основе совместного решения уравнений линии $L_{1\tau}(x, y)$ и фазовой траектории $\Gamma_{K_3}^+(x, y)$:

$$y_{1'_{K_3}, 1''_{K_3}} = (k - \tau_1)(a - g) \pm \sqrt{A + a \left[B + 2(k - \tau_2) \sqrt{2gC} \right]}, \quad (19)$$

где

$$A = 4g\alpha + a^2 \left[k^2 + \tau_1^2 + \tau_2^2 - 2k(\tau_1 + \tau_2) \right];$$

$$B = -2h + g(2k - \tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_2);$$

$$C = -h + 2\alpha - a\tau_2 \left(k - \frac{1}{2}\tau_2 \right).$$

Таким образом, интервал $(1'_{K_3}, 1''_{K_3}) \in L_{1\tau}$ — область определения отображения T_1 . За ее пределами находится область определения отображения T_2 .

Анализ результатов. Построенные точечные отображения (14–18) представляют собой более полный результат по сравнению с результатом, известным по литературным источникам [3, с. 149–153]. Используя его, можно исследовать динамические свойства системы (1) с учетом запаздываний ИО, что особенно важно при высокой эффективности управления. В частном случае $\tau = \tau_1 = \tau_2 = 0$ получаем результат, полностью совпадающий с результатом работы [3].

Для экспериментального подтверждения аналитических результатов (14–18) было проведено численное моделирование в программе Model [2]. По аналитическим выражениям функций соответствия точечных отображений T_1 и T_2 на основе программного пакета системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica разработана программа построения диаграммы Ламерея. На рис. 2 приведен пример построения диаграммы Ламерея для следующих исходных данных:

$$\alpha = 0,5^\circ; h = 0,1^\circ; k = 2 \text{ с}; \tau_1 = 0,05 \text{ с}; \tau_2 = 0,07 \text{ с};$$

$$a = 0,001745 \text{ град/с}^2; g = 0,000003 \text{ град/с}^2.$$

Диаграмма разделена граничным значением переменной y_{1K3} на области определения отображений T_1 (справа) и T_2 (слева). Из начального состояния последовательность итераций приводит к пятикратной неподвижной точке.

На рис. 3 представлена фазовая траектория соответствующего девятиимпульсного предельного цикла Γ_9^* , полученного моделированием для тех же исходных данных в компьютерной программе Model. При этом координаты неподвижных точек с точностью до четвертой значащей цифры совпадают.

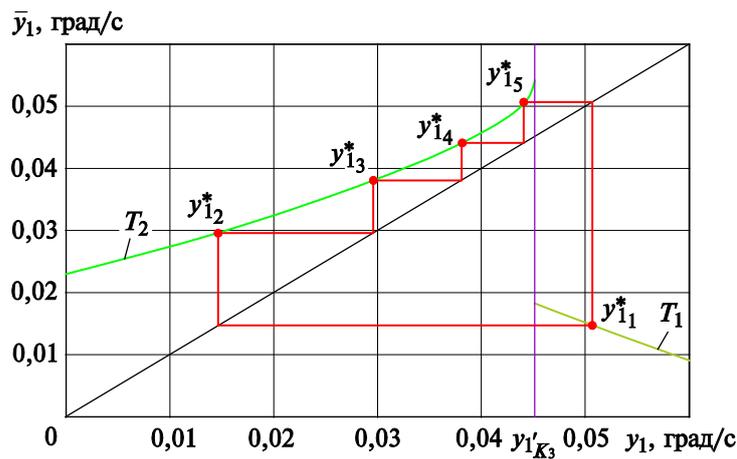


Рис. 2. Диаграмма Ламерея и пятикратная неподвижная точка предельного цикла Γ_9^*

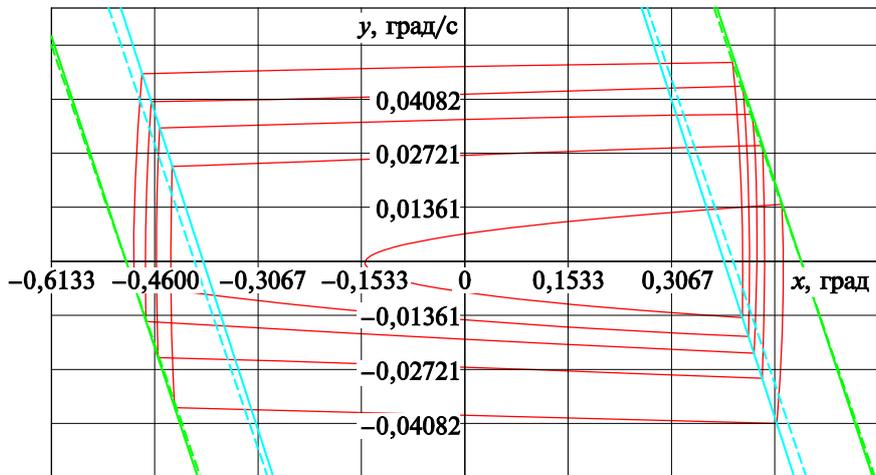


Рис. 3. Предельный цикл Γ_9^* по результатам моделирования в программе Model

Заключение. Решена задача аналитического построения точечных отображений для отыскания простых и сложных предельных циклов в релейной динамической системе (1) с учетом запаздывания ИО и действия постоянного возмущения. По сравнению с известным из литературных источников [3] решением получен более полный результат, что имеет практическое значение при решении задач проектирования таких существенно нелинейных систем, как реактивная система управления ориентацией и стабилизация космического аппарата. Аналитические результаты подтверждены численным моделированием.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. *Управление ориентацией космических аппаратов*. Москва, Наука, 1974, 598 с.
- [2] Симоньянц Р.П. Квантово-механическая модель динамики релейно-импульсного управления. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*, 2016, № 3, с. 88–101. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-3-88-101
- [3] Гаушус Э.В. *Исследование динамических систем методом точечных преобразований*. Москва, Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1976, 368 с.
- [4] Неймарк Ю.И. *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*. Москва, Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1972, 472 с.
- [5] Sieber J. Dynamics of delayed relay systems. *Nonlinearity*, 2006, vol. 19, no. 11, pp. 2489–2527.
- [6] Landry M., Campbell S.A., Morris K., Aguilar C. Dynamics of an inverted pendulum with delayed feedback control. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 2005, vol. 4, no. 2, pp. 333–351. DOI: 10.1137/030600461
- [7] Сомов Е.И., Бутырин С.А., Сомов С.Е. Экономичная разгрузка силового гироскопического комплекса системы ориентации мини-спутника землеобзора при широтно-импульсном управлении с запаздыванием. *Известия Самарского научного центра РАН*, 2014, т. 16, № 6, с. 156–164.
- [8] Сомов С.Е. Стабилизация движения упругого спутника при формировании широтно-импульсного управления с запаздыванием. *Известия Самарского научного центра РАН*, 2010, т. 12, № 4, с. 227–232.
- [9] Norbury J., Wilson R.E. Dynamics of constrained differential delay equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, vol. 125, iss. 1-2, pp. 201–215.
- [10] Феофилов С.В., Козырь А.В. Периодические процессы в релейных автоколебательных системах с цифровым управлением. *Известия ТулГУ. Технические науки*, 2018, № 6, с. 135–147.
- [11] Kowalczyk P. The dynamics and event-collision bifurcations in switched control systems with delayed switching. *Journal of Physics D: Applied Physics*, submitted in July 2019. URL: http://prac.im.pwr.edu.pl/~kowalczyk/kowalczyk17_Artc6.pdf (дата обращения 18.09.2019).
- [12] Iwasaki T. Basics of Autonomous Nonlinear Oscillators: Limit Cycle, Orbital Stability, and Synchronization. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 002–013.
- [13] Tang S., Tang B., Wang A., Xiao Y. Holling II predator-prey impulsive semi-dynamic model with complex Poincaré map. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 81 (3), pp. 1575–1596.

- [14] Yoon Y.E., Johnson E.N. Determination of Limit Cycle Oscillation Frequency in Linear Systems with Relay Feedback. *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, January 8–12, 2018*. United States, Florida, Kissimmee, AIAA Publ., 2018, pp. 178–196.
- [15] Краснощеченко В.И. Стабилизация неустойчивого предельного цикла релейной хаотической системы. *Математическое моделирование и численные методы*, 2015, № 2 (6), с. 87–104.

Статья поступила в редакцию 27.11.2019

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Симоньянц Р.П., Булавкин В.Н. Аналитическое построение точечных отображений релейной динамической системы с учетом запаздываний. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2019, вып. 12.

<http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-12-1944>

Симоньянц Ростислав Петрович — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана, декан аэрокосмического факультета МГТУ им. Н.Э. Баумана. Область научных интересов: управление ориентацией и стабилизация космических аппаратов. e-mail: rps@bmstu.ru

Булавкин Владимир Николаевич — студент аэрокосмического факультета кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана. e-mail: bulavkin_98@mail.ru

Analytical construction of relay dynamic system point mappings taking into account delays

© R.P. Simonyants, V.N. Bulavkin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The article considers solving the problem of analytical construction of Poincare maps for finding simple and complex limit cycles in a relay dynamic system involving constant perturbation and delay. Application of Neymark's theory of multivariate point transformations allows reducing the problem under consideration to the search for a multifold fixed point thus overcoming the difficulty of finding complex periodic motions. The choice of switching lines as arcs without contact taking into account delays significantly simplified the task of analytical construction of point mapping. The results of analytical constructions are confirmed by numerical simulation of movements. The results obtained can find practical application in developing reactive systems for controlling the orientation and stabilization of the spacecraft. Compared with the previously known solution, a more complete result is obtained, which is of particular importance in the study of systems with high efficiency of executive bodies.

Keywords: Poincare mapping, self-oscillations, limit cycle, relay control, reactive stabilization system

REFERENCES

- [1] Raushenbakh B.V., Tokar E.N. *Upravlenie orientatsiey kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft orientation control]. Moscow, Nauka Publ., 1974. pp. 269–270.
- [2] Simonyants R.P. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroyeniye — Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series: Instrument Engineering*, 2016, no. 3, pp. 88–101. DOI: 10.18698/0236-3933-2016-3-88-101
- [3] Gaushus E.V. *Issledovanie dinamicheskikh sistem metodom tochechnykh preobrazovaniy* [Study of dynamic systems by the method of point transformations]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 368 p.
- [4] Neymark Y.I. *Metod tochechnykh otobrazheniy v teorii nelineynykh kolebaniy* [Point mapping method in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 472 p.
- [5] Sieber J. *Nonlinearity*, 2006, no. 19 (11), pp. 2489–2527.
- [6] Landry M., Campbell S.A., Morris K., Aguilar C. Dynamics of an inverted pendulum with delayed feedback control. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 2005, vol. 4, no. 2, pp. 333–351. DOI: 10.1137/030600461
- [7] Somov E.I., Butyrin S.A., Somov S.E. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN — Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2014, vol. 16, no. 6, pp. 156–164.
- [8] Somov S.E. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN — Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2010, vol. 12, no. 4, pp. 227–232.
- [9] Norbury J., Wilson R.E. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, vol. 125, no. 1-2, pp. 201–215. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00469-6

Analytical construction of relay dynamic system point mappings taking...

- [10] Feofilov S.V., Kozyr A.V. *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki — Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*, 2018, no. 6, pp. 135–147.
- [11] Kowalczyk P. The dynamics and event-collision bifurcations in switched control systems with delayed switching. *Journal of Physics D: Applied Physics*, submitted in July 2019. Available at: http://prac.im.pwr.edu.pl/~kowalczykp/kowalczyk17_Artc6.pdf (accessed September 18, 2019).
- [12] Iwasaki T. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 002–013.
- [13] Tang S., Tang B., Wang A., Xiao Y. *Nonlinear Dynamics* 2015, no. 81 (3), pp. 1575–1596.
- [14] Yoon Y.E., Johnson E.N. Determination of Limit Cycle Oscillation Frequency in Linear Systems with Relay Feedback. *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, January 8–12, 2018*. United States, Florida, Kissimmee, AIAA Publ., 2018, pp. 178–196.
- [15] Krasnoshchechenko V.I. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody — Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2015, no. 2 (6), pp. 87–104.

Simonyants R.P., Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Aerospace Systems, Dean of the Aerospace Faculty, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: rps@bmstu.ru

Bulavkin V.N., student, Department of Aerospace Systems, Aerospace Faculty, Bauman Moscow State Technical University. e-mail: bulavkin_98@mail.ru